倾斜准直光和漫射光同时照射的藻类悬浮液中，前向散射和刚性顶面对趋光性生物对流的起始的影响

S. K. 拉杰普特[1, a)]

印度贾巴尔普尔 482005，PDPM 印度信息技术设计与制造学院数学系。

arXiv:2304.04686v1 [math.DS] 10 Apr 2023

本文采用线性稳定性理论，研究刚性顶面对前向散射的趋光性藻类悬浮液中趋光性生物对流起始的影响。悬浮液同时受到漫射光和倾斜平行光通量的均匀照射。在固定参数下，随着前向散射系数变化，生物对流失稳扰动的性质由稳态（过稳定）转变为过稳定（稳态）。存在刚性顶面时，悬浮液的稳定性随前向散射系数增大而增强。

a)电子邮件：shubh.iitj@gmail.com

I. 引言

流体动力学中一种普遍存在的现象，会使活微生物（如藻类、细菌等）的悬浮液形成图案，这种现象被定义为生物对流[1–5]。Platt 于 1961 年首次提出了生物对流这一术语。在大多数情况下，这些活微生物的密度在微观尺度上高于基液（水），并且会集体向上游动。但在自然环境中，也存在一些情况：形成生物图案[2] 并不需要微生物具有较高密度或向上漂浮。非活微生物不会表现出这种行为（图案形成）。微生物会因其身体结构以及自然环境中的外部刺激，在游动方向上产生行为反应，这种反应称为趋性。趋地性由重力加速度引起；当微生物底部较重时，陀螺趋性由重力加速度和黏性力矩共同引起；趋光性则是微生物朝向或远离光源移动。本文仅讨论趋光性的影响。

对藻类悬浮液中生物对流图案的研究发现，漫射光与倾斜准直光照射的相互作用会影响流体的流动和细胞的浓度图案[6–10]。在强光条件下，生物对流图案可能保持不变，也可能受到扰动。藻类对中等强度或强光的响应，是光强导致生物对流图案发生变化的关键因素[11]。此外，微生物对光的吸收和散射也可能在生物对流图案的变化中发挥重要作用[12]。藻类的光散射可分为各向同性散射和各向异性散射，后者还可根据细胞的大小、形状和折射率进一步分为前向散射和后向散射。由于自身尺寸的影响，藻类在可见光波长范围内主要沿前向散射光。

该生物对流系统采用Panda[13],提出的趋光性模型进行研究，该模型涉及使用漫射通量和垂直准直通量照射前向散射的藻类悬浮液。在自然环境中，藻类悬浮液会受到能够穿透更深水域并影响辐射场的斜向准直通量作用，从而影响藻类的游泳行为和光强分布。对于现实的趋光性模型而言，生物对流不稳定性应同时包含两种通量（斜向通量和漫射通量）。本文研究了同时存在这两种通量（斜向通量和漫射通量）时的生物对流不稳定性。

本研究重点分析稀释藻类悬浮液中的生物对流失稳。

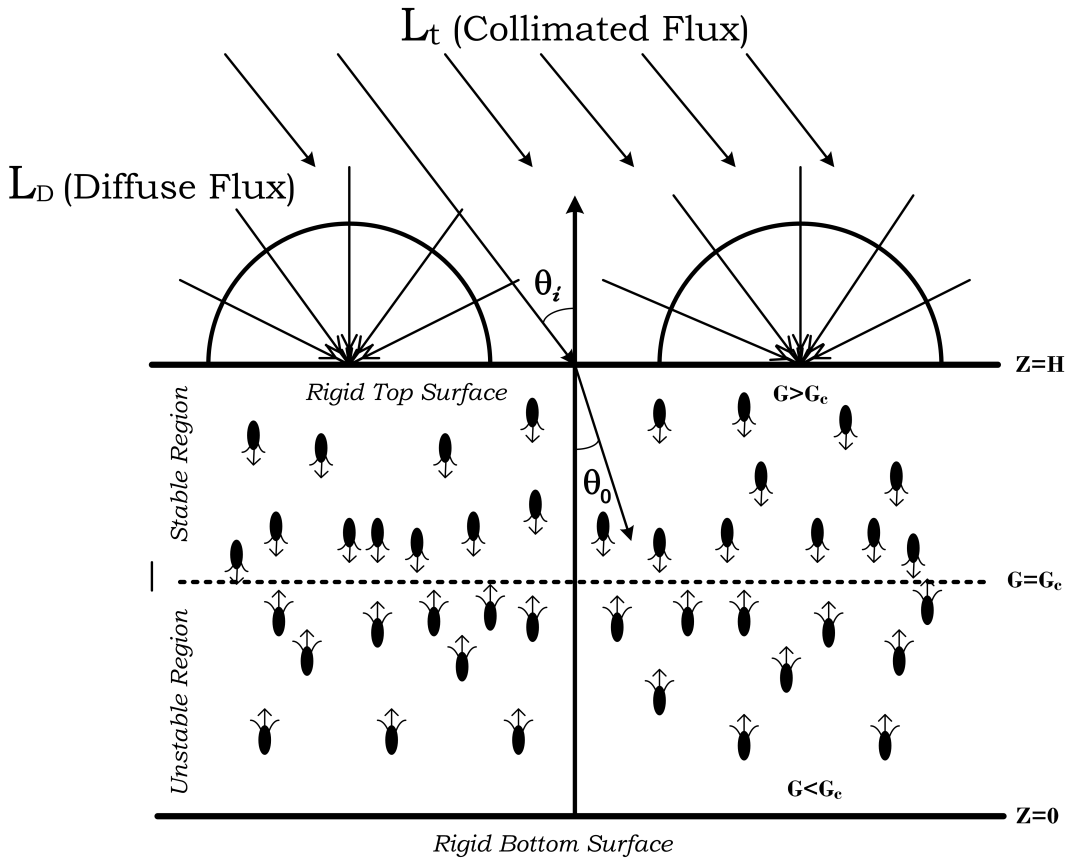


图 1. 在 G ＝Gc（其中 Gc 为临界光强）处，藻类细胞作为亚层积累 .

通过假设悬浮液中的流速为零，得到平衡解。在这一条件下，趋光性与扩散之间的平衡会形成一个细胞聚集的水平亚层，将悬浮液分为两个区域。亚层的位置取决于临界光强 Gc。在亚层上方（G > Gc），光强足以抑制细胞运动；而在亚层下方（G <Gc），细胞因趋光性而向上移动至亚层。该亚层依据 Gc 将悬浮液分为两个区域；如果系统发生失稳，下方的不稳定区域可通过流体运动穿透上方的稳定区域，这种现象称为穿透对流[14]。

多年来，研究人员在趋光性生物对流建模方面取得了显著进展。例如，Vincent 和 Hill[15] 研究了趋光性生物对流的起始，并发现了悬浮液中非定常、非振荡的扰动模态。Ghorai 和 Hill[16] 使用 Vincent 和 Hill[15], 的模型模拟了二维生物对流流型，但忽略了藻类的散射。Ghorai 等人[17] 研究了

各向同性散射悬浮液中的生物对流起始，并发现对于某些参数，由于藻类的各向同性散射，稳态剖面在两个不同深度处形成亚层。Ghorai 和 Panda[18]对前向散射藻类悬浮液进行了线性稳定性分析，并报告称，前向散射会导致生物对流不稳定性下的模态从非振荡（非定常）转变为非定常（非振荡）。在上述所有研究中，漫射通量均未被视为照明光源。Panda 等人[19] 研究了各向同性散射藻类悬浮液中漫射通量对生物对流不稳定性的影响，发现漫射通量具有显著的稳定作用。之后，Panda[13] 提出了一种模型，研究漫射通量和垂直准直通量的共同影响，并报告称，漫射通量和前向散射系数均具有稳定作用。然而，这些研究未考虑斜向准直通量的影响。Panda 等人.[20] 将斜向准直通量纳入研究，发现斜向准直通量会使生物对流解在生物对流不稳定性下由非振荡状态转变为过稳定状态，反之亦然。Kumar[21] 研究了斜向准直通量对各向同性散射藻类悬浮液中生物对流解的影响，发现生物对流解大多呈振荡状态。之后，Kumar[22] 探究了顶部和底部刚性表面的影响。在这项研究中，他报告称，刚性表面会显著抑制生物对流不稳定性。Panda 和 Rajput 为一种可向各个方向散射光线的藻类悬浮液建立了模型，并分析了在漫射光和斜向准直光共同照射下的稳定性。他们发现，对于固定参数，斜向准直通量会使生物对流解从非振荡行为转变为振荡行为。随后，他们将分析扩展到悬浮液中的各向异性散射，并发现前向散射系数对生物对流不稳定性具有稳定作用。作者指出，仍需进一步研究斜向准直光和漫射光对前向散射藻类悬浮液中趋光性生物对流的影响，其中垂直边界为刚性无滑移边界。本研究旨在采用现实的趋光性模型，考察这些边界对悬浮液的影响。

本文采用结构化的方法。首先对问题进行数学表述，随后求得平衡解，并通过小扰动扰动基态生物对流控制系统。接着推导线性稳定性问题，并采用数值方法求解。最后给出并讨论模型结果。

II. 数学表述

所研究的系统是一种前向散射藻类悬浮液，位于 y-z 平面内两个无限平行边界之间，如图2所示。悬浮液的上表面受到均匀照射，入射光包括斜向准直光和漫射通量。悬浮液中的藻类吸收入射光，并使其向前散射；这是由于藻类与水的折射率不同所致。

A. 平均游动方向

辐射传输方程（以下简称 RTE）用于计算光强，其表达式为

$$\frac{dL(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s})}{ds}+(a+\sigma_s)L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s})=\frac{\sigma_s}{4\pi}\int_0^{4\pi}L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s'})\Xi(\boldsymbol{s},\boldsymbol{s'})d\Omega', \tag{1}$$

其中，a σ_s和 Ω'分别为吸收系数和散射系数。$\Xi(\boldsymbol{s},\boldsymbol{s'})$为散射相函数，用于描述从 $\boldsymbol{s'}$ 方向散射到 $\boldsymbol{s}$ 方向的光强角分布。这里，我们假设 $\Xi(\boldsymbol{s},\boldsymbol{s'})$具有方位对称性的线性各向异性 $\Xi(\boldsymbol{s},\boldsymbol{s'})=1+A_1\cos\theta\cos\theta'$。其中，$A_1$为各向异性系数。各向异性系数定义了前向散射：当 $0<A_1<1$ 时；以及后向散射：当 $-1<A_1<0$时。若考虑 $A_1=0$ 的情况，则表示各向同性散射。

悬浮液顶部的光强为

$$L(\boldsymbol{x}_H,\boldsymbol{s})=L_t\delta(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s_0})+\frac{L_D}{\pi}=L_t\delta(\cos\theta-\cos\theta_0)+\frac{L_D}{\pi},$$

其中，$\boldsymbol{x}_H=(x, y, H)$ 是顶部边界表面上的位置。这里，L_t 和 L_D 分别是准直辐射和漫射辐射的辐射强度[12,13]。现在考虑 $=\alpha n(\boldsymbol{x})$ 和$\sigma_s=\beta n(\boldsymbol{x})$，则 RTE 变为

$$\frac{dL(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s})}{ds}+(\alpha+\beta)nL(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s})=\frac{\beta n}{4\pi}\int_0^{4\pi}L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s'})(A_1\cos\theta\cos\theta')d\Omega'. \tag{2}$$

介质中固定点 $\boldsymbol{x}$ 处的总强度为

$$G(\boldsymbol{x})=\int_0^{4\pi}L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s})d\Omega,$$

辐射热通量由下式给出

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})=\int_0^{4\pi}L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s})\boldsymbol{s}d\Omega. \tag{3}$$

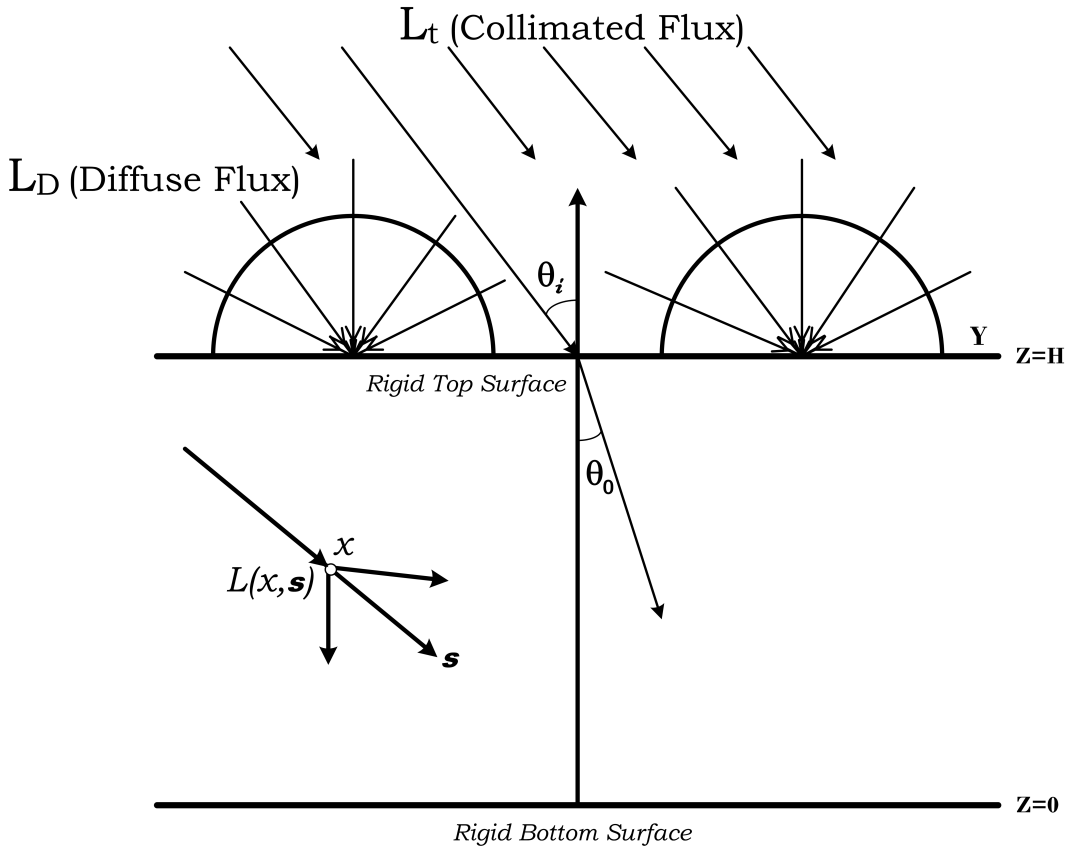


图2. 问题的几何构型。

细胞的平均游泳速度由下式给出

$$\boldsymbol{W}_c = W_c < \boldsymbol{p} >,$$

其中W_c 是细胞平均游泳速度， $< \mathrm{p} >$ 是细胞的平均游泳取向，其计算方式为

$$< \boldsymbol{p} >= -M(G)\frac{q}{|\boldsymbol{q}|}, \tag{4}$$

其中 M(G) 是趋性响应函数（趋性函数），它表示藻类细胞对光的响应，并具有如下数学形式，使得

$$M(G) = \begin{cases} \geq 0, \text{ if } G(\boldsymbol{x}) \leq G_c, \\ < 0, \text{ if } G(\boldsymbol{x}) > G_c. \end{cases}$$

平均游动方向在临界光强（ $\mathrm{G} = G_c$）处变为零。一般而言，趋性函数的确切函数形式取决于微生物的物种[15]。

B. 控制　　NING 方程与特定边界条件　　**NS**

考虑一种具有平均流体速度 U 的趋光性微生物悬浮液，其单位体积内含有 n 个藻类细胞。在藻类悬浮液中，除浮力外，所有细胞的物理性质均为常数，例如体积 V 和密度 $\rho+\Delta\rho$，其中 ρ 是水的密度（$\Delta\rho/\rho << 1$）。假设该悬浮液不可压缩。则该模型的方程组定义如下：

连续性方程

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{U}=0. \tag{5}$$

Boussinesq近似下的动量方程

$$\rho\frac{D\boldsymbol{U}}{Dt}=-\boldsymbol{\nabla}P+\mu\nabla^2\boldsymbol{U}-ngV\Delta\rho\,\hat{\boldsymbol{z}}, \tag{6}$$

其中P 为动压，μ为悬浮液的动力黏度，假定其等于流体的动力黏度。

细胞守恒方程

$$\frac{\partial n}{\partial t}=-\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}, \tag{7}$$

其中，$\boldsymbol{B}$ 是细胞总通量，其表达式为

$$\boldsymbol{B}=nU+nW_c<\boldsymbol{p}>-\boldsymbol{D}\boldsymbol{\nabla}n. \tag{8}$$

这里，假设细胞扩散率 $\boldsymbol{D}$ 为常数，因此 $\boldsymbol{D}$ =DI。考虑了两个关键假设，有助于从控制方程中去除类似于 Panda 的 Fokker-Planck 方程。[13]

这里，假设下边界和上边界均为刚性且不可渗透。因此，在边界处没有流体流动，细胞也不能穿过边界移动。刚性无滑移和零通量条件定义为

$$\boldsymbol{U}\times\hat{\boldsymbol{z}}=0 \qquad on \quad z=0,H. \tag{9}$$

$$\boldsymbol{B}\cdot\hat{\boldsymbol{z}}=0 \qquad on \quad z=0,H. \tag{10}$$

我们假设上边界受到均匀的斜射和漫射辐照。这导致边界处的辐射强度满足一组特定条件，具体如下

$$L(x,y,z=0,\theta,\phi)=L_t\delta(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s_0})+\frac{L_D}{\pi}, \quad (\pi/2\le\theta\le\pi), \tag{11a}$$

$$L(x,y,z=0,\theta,\phi)=0, \quad (0\le\theta\le\pi/2). \tag{11b}$$

C. 控制方程的无量纲化 S

为将控制方程表示为无量纲形式，需要选取一定的尺度。这些尺度包括长度尺度 H、时间尺度 H^2/D、速度尺度 D/H、压力尺度 $\mu D/H^2$ 以及浓度尺度 $\bar{n}$。因此，控制方程可以表示为无量纲形式

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{U}=0, \tag{12}$$

$$S_c^{-1}\left(\frac{D\boldsymbol{U}}{Dt}\right)=-\nabla P_e-Rn\hat{\boldsymbol{z}}+\nabla^2\boldsymbol{U}, \tag{13}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t}=-\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}, \tag{14}$$

其中

$$\boldsymbol{B}=n(\boldsymbol{U}+V_c<\boldsymbol{p}>)-\boldsymbol{\nabla}n. \tag{15}$$

在给定的方程中，参数 S_c 定义为黏度（μ）与扩散系数（D）之比。无量纲游动速度表示为 $V_c=W_cH/D$。此外，引入瑞利数 R 作为控制参数，其定义为 $R=\bar{n}Vg\delta\rho H^3/\mu D$。

边界条件也可以用无量纲形式表示为

$$\boldsymbol{U}\times\hat{\boldsymbol{z}}=0 \qquad on \quad z=0,1. \tag{16}$$

$$\boldsymbol{B}\cdot\hat{\boldsymbol{z}}=0 \qquad on \quad z=0,1. \tag{17}$$

无量纲辐射传输方程（RTE）为

$$\frac{dL(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s})}{ds}+\tau_H nL(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s})=\frac{\sigma n}{4\pi}\int_0^{4\pi}L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s}')(A_1\cos\theta\cos\theta')d\Omega', \tag{18}$$

其中，$\tau_H=(\alpha+\beta)\bar{n}H$、$\sigma=\beta\bar{n}H$ 分别为无量纲消光系数和散射系数。散射反照率 $\omega=\sigma/(\tau_H+\sigma)$ 衡量微生物的散射效率。用散射反照率 ω 表示，式 (18) 可写为

$$\frac{dL(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s})}{ds}+\tau_H nL(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s})=\frac{\omega\tau_H n}{4\pi}\int_0^{4\pi}L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s}')(A_1\cos\theta\cos\theta')d\Omega'. \tag{19}$$

散射反照率 ω 的取值范围为 0 到 1，其中 $\omega=1$ 表示介质仅发生光散射，而 $\omega=0$ 表示介质仅吸收光。RTE 也可以用方向余弦表示为

$$\xi\frac{dL}{dx}+\eta\frac{dL}{dy}+\nu\frac{dL}{dz}+\tau_H nL(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s})=\frac{\omega\tau_H n}{4\pi}\int_0^{4\pi}L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s}')(A_1\cos\theta\cos\theta')d\Omega', \tag{20}$$

在无量纲形式下，边界处的辐射强度为

$$L(x,y,z=1,\theta,\phi)=L_t\delta(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s_0})+\frac{L_D}{\pi},\qquad(\pi/2\le\theta\le\pi),\tag{21a}$$

$$L(x,y,z=0,\theta,\phi)=0,\qquad(0\le\theta\le\pi/2).\tag{21b}$$

III. 基本（平衡）态解

方程 (12) –(14) 和 (20) 在平衡状态下具有一个可表示为 a s

$$\boldsymbol{U}=0,\quad n=n_s(z)\quad and\quad L=L_s(z,\theta).\tag{22}$$

因此，在平衡态下，总强度和辐射通量可以表示为

$$G_s=\int_0^{4\pi}L_s(z,\theta)d\Omega,\quad \boldsymbol{q}_s=\int_0^{4\pi}L_s(z,\theta)\boldsymbol{s}d\Omega.$$

$\boldsymbol{q_s}$ 的x 和y 分量为零，因为 $L_s^d(z\theta)$与 ϕ无关。因此，我们可以将 $\boldsymbol{q_s}$ 表示为 $\boldsymbol{q}_s=-q_s\hat{\boldsymbol{z}}$, 其中 $q_s=|\boldsymbol{q_s}|$。控制 L_s 的方程可表述如下

$$\frac{dL_s}{dz}+\frac{\tau_H n_s L_s}{\nu}=\frac{\omega\tau_H n_s}{4\pi\nu}(G_s(z)-A_1 q_s\nu).\tag{23}$$

平衡态辐射强度可分为两个分量：由L_s^c 表示的准直部分，以及由散射引起的漫射部分 L_s^d。控制准直分量 L_s^c 的方程为

$$\frac{dL_s^c}{dz}+\frac{\tau_H n_s L_s^c}{\nu}=0,\tag{24}$$

满足边界条件

$$L_s^c(1,\theta)=L_t\delta(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}_0),\qquad(\pi/2\le\theta\le\pi),\tag{25}$$

在计算带边界条件的 L_s^c 控制方程后，我们得到 L_s^c

$$L_s^c=L_t\exp\left(\int_z^1\frac{\tau_H n_s(z')}{\nu}dz'\right)\delta(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s_0}),\tag{26}$$

而扩散部分由

$$\frac{dL_s^d}{dz}+\frac{\tau_H n_s L_s^d}{\nu}=\frac{\omega\tau_H n_s}{4\pi\nu}(G_s(z)-A_1 q_s\nu),\tag{27}$$

受边界条件约束

$$L_s^d(1,\theta)=\frac{L_D}{\pi},\qquad(\pi/2\le\theta\le\pi),\tag{28a}$$

$$L_s^d(0,\theta)=0,\qquad(0\le\theta\le\pi/2).\tag{28b}$$

在基本态中，总强度 $G_s=G_s^c+G_s^d$ 写作

$$G_s=G_s^c+G_s^d=\int_0^{4\pi}[L_s^c(z,\theta)+L_s^d(z,\theta)d]\Omega=L_t\exp\left(\frac{-\int_z^1\tau_H n_s(z')dz'}{\cos\theta_0}\right)+\int_0^{\pi}L_s^d(z,\theta)d\Omega,\tag{29}$$

同样，基本状态下的辐射热通量定义为

$$\boldsymbol{q_s}=\boldsymbol{q_s^c}+\boldsymbol{q_s^d}=\int_0^{4\pi}\left(L_s^c(z,\theta)+L_s^d(z,\theta)\right)\boldsymbol{s}d\Omega=-L_t(\cos\theta_0)\exp\left(\frac{\int_z^1-\tau_H n_s(z')dz'}{cos\theta_0}\right)\hat{\boldsymbol{z}}+\int_0^{4\pi}L_s^d(z,\theta)\boldsymbol{s}d\Omega.\tag{30}$$

现在，将一个新的变量定义为

$$\tau=\int_z^1\tau_H n_s(z')dz',$$

方程（29）和（30）导出两个耦合的第二类 Fredholm 积分方程，如下：

$$G_s(\tau)=\frac{\omega}{2}\int_0^{\tau_H}G_s(\tau')E_1(|\tau-\tau'|)d\tau'+e^{-\tau/\cos\theta_0}+2I_DE_2(\tau)+A_1sgn(\tau-\tau')q_s(\tau')E_2(|\tau-\tau'|),\tag{31}$$

$$q_s(\tau)=\frac{\omega}{2}\int_0^{\tau_H}A_1q_s(\tau')E_3(|\tau-\tau'|)d\tau'+(\cos\theta_0)e^{-\tau/\cos\theta_0}+2I_DE_3(\tau)+sgn(\tau-\tau')G_s(\tau')E_2(|\tau-\tau'|),\tag{32}$$

其中，$E_n(x)$ 是 n 阶指数积分，sgn(x) 是符号函数。该耦合 FIEs 采用奇异性相减法求解。

基本状态中的平均游动方向变得

$$<\boldsymbol{p_s}>=-M_s\frac{\boldsymbol{q_s}}{q_s}=M_s\hat{\boldsymbol{z}},$$

其中 M_s =M(G_s)。

在基态下，细胞浓度 n_s(z) 满足以下方程

$$\frac{dn_s}{dz}-V_cM_sn_s=0,\tag{33}$$

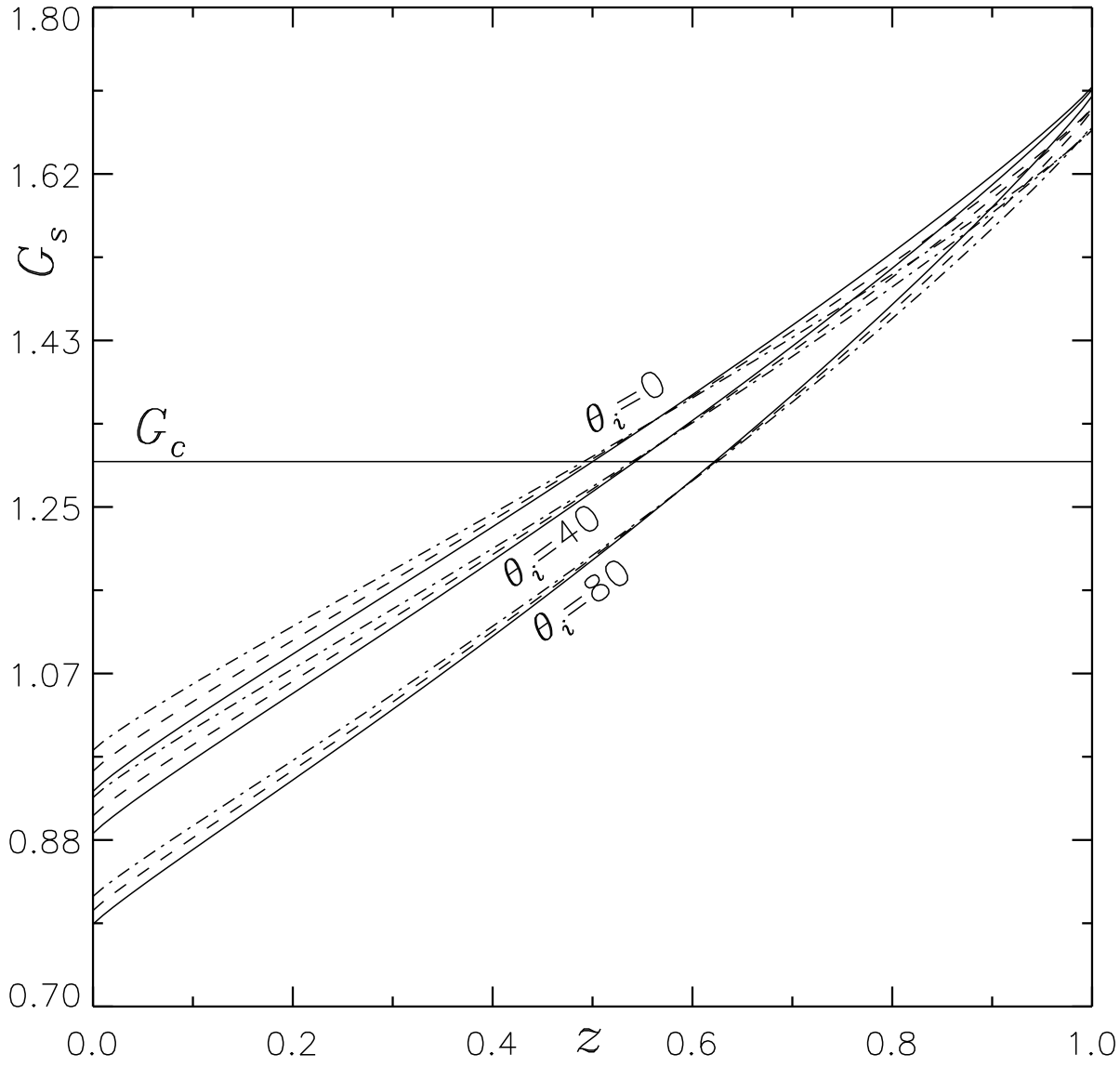


图3.在三种不同情况$\theta_i = 0$、40和80下，通过将前向散射系数A_1从 0变为0.8，均匀悬浮液中总强度的变化。这里，控制参数值$S_c = 20$、V_c =15、$k = 0.5$、$\omega = 0.4$和 $L_t = 1$保持不变。

并辅以下列方程

$$\int_0^1 n_s(z)dz = 1. \tag{34}$$

该方程展示了细胞守恒关系。方程（31）至（34）共同构成一个边值问题，可以通过采用打靶法的数值技术求解。

为说明平衡解，我们将 $S_c = 20$、$G_c = 1.3$、$J_D = 0.26$, $\tau_H = 0.5$, $\omega = 0.4$ 和 $(\theta_i) = 0$, 40,80 固定。然后，我们通过改变 A_1 来考察前向散射系数 A_1 。

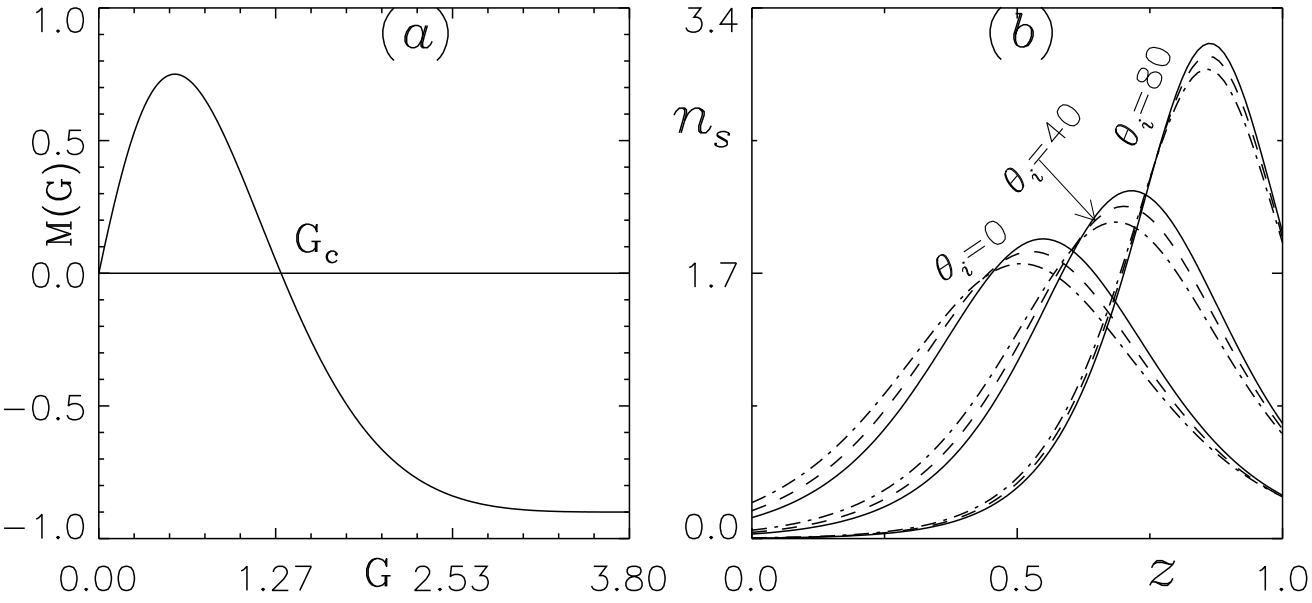


图4。（a）$G_c = 1.3$ 的趋性响应曲线；（b）对于三种不同情况$\theta_i = 0$、40和80，通过改变前向散射系数A_1从0到0.8得到的基态浓度分布变化。此处，控制参数值$S_c = 20$、$V_c = 15$、$k = 0.5$、$\omega = 0.4$和$I_t = 1$保持不变。

在总强度和基本平衡解上从 0 到 0.8。

图3说明了对于均匀悬浮液，当前向散射系数A_1 从0增加到0.8时，总强度G_s 如何随深度变化。随着A_1 增加，均匀悬浮液下半部的总强度G_s 增大，而在上半部则减小。

图4(a)展示了光强的趋光性函数曲线，其中 $G_c = 1.3$ 是临界值。另一方面，图4(b) 展示了在相同控制参数下，前向散射系数 A_1对平衡态亚层的影响。当 $\theta_i = 0$时，亚层在平衡态下形成于悬浮域的中部高度处。当 A_1 从 0 增加到0.8 时，平衡态下的亚层位置向底部移动。类似地，对于 $\theta_i = 40$和 80，平衡态下的亚层分别位于悬浮液深度的大约四分之三高度处和顶部。将A1从 0 增加到 0.8 会使每种情况下平衡态下的亚层向底部移动。

IV. 问题的线性稳定性

为了分析稳定性，采用线性扰动理论，通过以下方程向平衡态引入振幅为 $\varepsilon << 1$ 的小扰动。

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{U},n,L,<\boldsymbol{p}>] &= [0,n_s,L_s,<\boldsymbol{p_s}>]+\varepsilon[\boldsymbol{U}_1,n_1,L_1,<\boldsymbol{p}_1>]+\mathscr{O}(\varepsilon^2)\\ &= [0,n_s,L_s^c+L_s^d,<\boldsymbol{p}_s>]+\varepsilon[\boldsymbol{U}_1,n_1,L_1^c+L_1^d,<\boldsymbol{p}_1>]+\mathscr{O}(\varepsilon^2).\end{aligned} \tag{35}$$

将扰动变量代入方程 (12) 至 (14)，并通过收集关于平衡态的 o(ε) 项进行线性化，从而得到

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{U}_1 = 0, \tag{36}$$

其中 $\boldsymbol{U}_1$ =(U_1,V_1,W_1)。

$$S_c^{-1}\left(\frac{\partial \boldsymbol{U_1}}{\partial t}\right)+\boldsymbol{\nabla}P_e+Rn_1\hat{\boldsymbol{z}} = \nabla^2\boldsymbol{U_1}, \tag{37}$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial t}+V_c\boldsymbol{\nabla}\cdot(<\boldsymbol{p_s}>n_1+<\boldsymbol{p_1}>n_s)+W_1\frac{dn_s}{dz} = \boldsymbol{\nabla}^2 n_1. \tag{38}$$

如果$G = G_s+\varepsilon G_1+\mathscr{O}(\varepsilon^2)$ $=(G_s^c+\varepsilon G_1^c)$ $+(G_s^d+\varepsilon G_1^d)$ $+\mathscr{O}(\varepsilon^2)$，那么稳态准直总强度受到扰动，化简后得到

$$G_1^c = L_t\exp\left(\frac{-\int_z^1\tau_H n_s(z')dz'}{\cos\theta_0}\right)\left(\frac{\int_1^z\tau_H n_1 dz'}{\cos\theta_0}\right) \tag{39}$$

并且，G_1^d 由以下给出

$$G_1^d = \int_0^{4\pi}L_1^d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s})d\Omega. \tag{40}$$

同样地，我们可以求得扰动后的辐射热通量为

$$\boldsymbol{q}_1^c = -I_t(\cos\theta_0)\exp\left(\frac{-\int_z^1\tau_H n_s(z')dz'}{\cos\theta_0}\right)\left(\frac{\int_1^z\tau_H n_1 dz'}{\cos\theta_0}\right)\hat{z} \tag{41}$$

and

$$q_1^d = \int_0^{4\pi}L_1^d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s})\boldsymbol{s}d\Omega. \tag{42}$$

现在是该表达式

$$-M(G_s+\varepsilon G_1)\frac{\boldsymbol{q}_s+\varepsilon\boldsymbol{q}_1+\mathscr{O}(\varepsilon^2)}{|\boldsymbol{q}_s+\varepsilon\boldsymbol{q}_1+\mathscr{O}(\varepsilon^2)|}-M_s\hat{\boldsymbol{z}},$$

给出收集 O(ε) 项后的扰动游动方向

$$< \boldsymbol{p_1} >= G_1 \frac{dM_s}{dG}\hat{\boldsymbol{z}} - M_s \frac{\boldsymbol{q_1^H}}{\boldsymbol{q_s}}, \tag{43}$$

其中， $\boldsymbol{q}_1^H = [q_1^x, q_1^y]$ 是扰动辐射通量 $\boldsymbol{q}_1$ 的水平分量。现在将式 (46) 中的 $< \boldsymbol{p_1} >$ 值代入式 (41) 并化简，得到

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + V_c \frac{\partial}{\partial z}\left(M_s n_1 + n_s G_1 \frac{dM_s}{dG}\right) - V_c n_s \frac{M_s}{q_s}\left(\frac{\partial q_1^x}{\partial x} + \frac{\partial q_1^y}{\partial y}\right) + W_1 \frac{dn_s}{dz} = \nabla^2 n_1. \tag{44}$$

通过对方程(37)取二重旋度和 z分量，我们可以消去压力梯度 P_e以及u_1的水平分量。这使得方程(37)、(38)和(44)可约化为关于 W_1 和 n_1, 的两个方程，并可将其分解为正规模态:

$$W_1 = \tilde{W}(z)\exp(\gamma t + i(lx+my)), \quad n_1 = \tilde{N}(z)\exp(\gamma t + i(lx+my)). \tag{45}$$

扰动强度的控制方程 L_1 可以写成

$$\xi \frac{\partial L_1}{\partial x} + \eta \frac{\partial L_1}{\partial y} + \nu \frac{\partial L_1}{\partial z} + \tau_H (n_s L_1 + n_1 L_s) = \frac{\omega \tau_H}{4\pi}(n_s G_1 + G_s n_1 + A_1 \nu (n_s q_1 \cdot \hat{z} - q_s n_1)), \tag{46}$$

满足边界条件

$$L_1(x,y,z=1,\xi,\eta,\nu) = 0, \qquad (\pi/2 \le \theta \le \pi, 0 \le \phi \le 2\pi), \tag{47a}$$

$$L_1(x,y,z=0,\xi,\eta,\nu) = 0, \qquad (0 \le \theta \le \pi/2, 0 \le \phi \le 2\pi). \tag{47b}$$

式 (46) 表明，L_1^d 可表示如下。

$$L_1^d = \Psi^d(z,\xi,\eta,\nu)\exp(\gamma t + i(lx+my)).$$

由方程（39）和（40）可得

$$G_1^c = \left[L_t \exp\left(\frac{-\int_z^1 \tau_H n_s(z')dz'}{\cos\theta_0}\right)\left(\frac{\int_1^z \tau_H n_1 dz'}{\cos\theta_0}\right)\right]\exp(\gamma t + i(lx+my)) = \mathbb{G}^c(z)\exp(\gamma t + i(lx+my)), \tag{48}$$

and

$$G_1^d = \mathbb{G}^d(z)\exp(\gamma t + i(lx+my)) = \left(\int_0^{4\pi} \Psi^d(z,\xi,\eta,\nu)d\Omega\right)\exp(\gamma t + i(lx+my)), \tag{49}$$

其中， $\mathbb{G}(\mathrm{z}) = \mathbb{G}^c(\mathrm{z}) + \mathbb{G}^d(\mathrm{z})$ 是扰动后的总强度。同样地，由方程（41）和（42）可得

$$\boldsymbol{q}_1 = [q_1^x, q_1^y, q_1^z] = [P(z), Q(z), S(z)]\exp[\gamma t + i(lx+my)],$$

其中

$$[P(z),Q(z)]=\int_0^{4\pi}[\xi,\eta]\Psi^d(z,\xi,\eta,\nu)d\Omega,$$

注意，P(z)和 Q(z) 是由于散射而出现的。另一方面，S(z) 同时具有准直部分和漫射部分。S(z) 的准直部分与 $\boldsymbol{q}_1^c$ 相同。因此，S(z) 可表示为

$$S(z)=\boldsymbol{q}_1^c+\int_0^{4\pi}\Psi^d(z,\xi,\eta,\nu)\nu d\Omega,$$

现在，Ψ^d 满足。

$$\frac{d\Psi^d}{dz}+\frac{(i(l\xi+m\eta)+\tau_H n_s)}{\nu}\Psi^d=\frac{\omega\tau_H}{4\pi\nu}(n_s\mathbb{G}+G_s\tilde{N}(z)+A_1\nu(n_sS-q_s\tilde{N}(z)))-\frac{\tau_H}{\nu}I_s\tilde{N}(z),\quad(50)$$

满足边界条件

$$\Psi^d(1,\xi,\eta,\nu)=0,\qquad(\pi/2\le\theta\le\pi,0\le\phi\le2\pi),\tag{51a}$$

$$\Psi^d(0,\xi,\eta,\nu)=0,\qquad(0\le\theta\le\pi/2,0\le\phi\le2\pi).\tag{51b}$$

线性稳定性方程变为

$$\left(\gamma S_c^{-1}+k^2-\frac{d^2}{dz^2}\right)\left(\frac{d^2}{dz^2}-k^2\right)\tilde{W}=Rk^2\tilde{N}(z),\tag{52}$$

$$\left(\gamma+k^2-\frac{d^2}{dz^2}\right)\tilde{N}(z)+V_c\frac{d}{dz}\left(M_s\tilde{N}(z)+n_s\mathbb{G}\frac{dM_s}{dG}\right)-i\frac{V_c n_s M_s}{q_s}(lP+mQ)=-\frac{dn_s}{dz}\tilde{W}(z),\quad(53)$$

满足边界条件

$$\tilde{W}(z)=\frac{d\tilde{W}(z)}{dz}=\frac{d\tilde{N}(z)}{dz}-V_cM_s\tilde{N}(z)-n_sV_c\mathbb{G}\frac{dM_s}{dG}=0,\quad at\quad z=0,1.\tag{54}$$

这里，k 表示无量纲波数，由 l 和 m 的平方和的平方根确定。式（52）—（53）构成一个特征值问题，用于描述γ 与各无量纲参数之间的函数关系，包括 V_c, τ_H, ω、J_D, θ_i、A_1, l、m 和 R。方程（53）可表示为

$$\Lambda_0(z)+\Lambda_1(z)\int_1^z\tilde{N}(z)dz+(\gamma+k^2+\Lambda_2(z))\tilde{N}(z)+\Lambda_3(z)D\tilde{N}(z)-D^2\tilde{N}(z)=-Dn_s\tilde{W},\tag{55}$$

其中

$$\Lambda_0(z)=V_cD\left(n_s\mathbb{G}^d\frac{dM_s}{dG}\right)-\imath\frac{V_cn_sM_s}{q_s}(lP+mQ),\tag{56a}$$

$$\Lambda_1(z)=\tau_HV_cD\left(n_sG_s^c\frac{dM_s}{dG}\right)\tag{56b}$$

$$\Lambda_2(z) = 2\tau_H V_c n_s G_s^c \frac{dM_s}{dG} + V_c \frac{dM_s}{dM} D G_s^d, \tag{56c}$$

$$\Lambda_3(z) = V_c M_s. \tag{56d}$$

引入新变量

$$\tilde{\Theta}(z) = \int_1^z \tilde{N}(z')dz', \tag{57}$$

线性稳定性方程变为

$$\left(\gamma S_c^{-1} + k^2 - D^2\right)\left(D^2 - k^2\right)\tilde{W} = Rk^2 D\tilde{\Theta}, \tag{58}$$

$$\Lambda_0(z) + \Lambda_1(z)\tilde{\Theta} + (\gamma + k^2 + \Lambda_2(z))D\tilde{\Theta} + \Lambda_3(z)D^2\tilde{\Theta} - D^3\tilde{\Theta} = -Dn_s\tilde{W}. \tag{59}$$

边界条件变为,

$$\tilde{W} = D\tilde{W} = D^2\tilde{\Theta} - \Lambda_2(z)D\tilde{\Theta} - \Lambda_3(z)\frac{dM_s}{dG}\mathbb{G} = 0, \quad at \quad z = 0, 1, \tag{60}$$

且附加的边界条件为

$$\tilde{\Theta}(z) = 0, \quad at \quad z = 1. \tag{61}$$

V. 解题步骤

为求解方程（58）和（59），并计算固定其他参数时，(k, R) 平面上中性（临界）稳定性曲线或增长率 Re(γ) 随 R 的变化关系，采用了基于 Newton-Raphson-Kantorovich（NRK）迭代[23] 的四阶精度有限差分格式。满足 Re(γ) $= 0$ 的点构成的曲线称为临界（中性）稳定性曲线。如果该曲线上满足条件 Im(γ) $= 0$，则称生物对流解为定常（非振荡）解；若 Im(γ) $\neq 0$，则存在振荡解。当最不稳定模态仍位于中性曲线的振荡分支上时，就会发生过稳定性。出现振荡解时，定常分支与振荡分支之间存在一个公共点 (k_b)；此时，振荡分支是满足 k $\leq k_b$的点的轨迹。选取中性曲线 $R^{(n)}$(k)（n = 1, 2, 3, ...）上的某个最不稳定模态，即 (k_c, R_c)，并据此计算初始扰动的波长为 $\lambda_c = 2\pi/k_c$。若 n 个对流胞能够垂直上下排列，则称该生物对流解为 n 模态[18]。此外，所研究问题的估计参数与先前研究[12,13,17,18,20]中的相同。

VI. 数值结果

我们使用一组离散的固定参数，根据初始平衡解确定最不稳定模态。这些参数包括 $S_c = 20$、$G_c = 1.3$、$V_c = 10$、15、20、$\omega = 0.4$、J_D =0.26、0.48、$\theta_i = 0$、40、80和 $\tau_H = 0.5$、1，同时将A_1取为 $A_1 = 0$、0.4、0.8。为研究前向散射对生物对流的影响，我们考虑入射角的离散取值（$\theta_i = 0$、40、80）。对于 $\theta_i = 0$，平衡态下的亚层位置大约位于区域的中部。随着θ_i 增加到 40 和 80，亚层位置分别从中部移至四分之三高度处和区域顶部。不稳定区域宽度（WUR）是指从平衡态亚层位置到区域底部的距离，而不稳定区域浓度差（CDUR）定义为最大浓度与悬浮液底部浓度之差。如果 WUR 或 CDUR 较高，则表明悬浮液更加不稳定。

A. 前向散射弱于自遮蔽时

通过选取较低的散射反照率 ω，考察自遮蔽相对于散射的有效性，从而研究前向散射对生物对流起始的影响。此外，通过选取不同的消光系数 τ_H 来改变自遮蔽强度；具体而言，$\tau_H = 1$ 的高值表示自遮蔽强，$\tau_H = 0.5$ 的低值表示自遮蔽弱。整个研究中采用临界辐射强度 $g_c = 1.3$ 。

1. $V_c = 15$

(i) 当消光系数 $\tau_H = 0.5$

本节讨论在一组固定参数 $V_c = 15$、$\tau_H = 0.5$、ω =0.4 和 $J_D = 0.26$ 下，入射角为 $\theta_i = 0$、40、80 时，前向散射系数 A_1 对生物对流不稳定性的影响。我们将 A1 的值从 0 变化到 0.8，并研究平衡态下亚层位置以及 WUR 和 CDUR 的相应变化。

当 $\theta_i = 0$时，亚层出现在$A_1 = 0$ 的区域中部高度处。随着 A1 增大，平衡态下的亚层向区域底部移动，导致 WUR 和 CDUR 均减小。因此，临界瑞利数是.....的度量

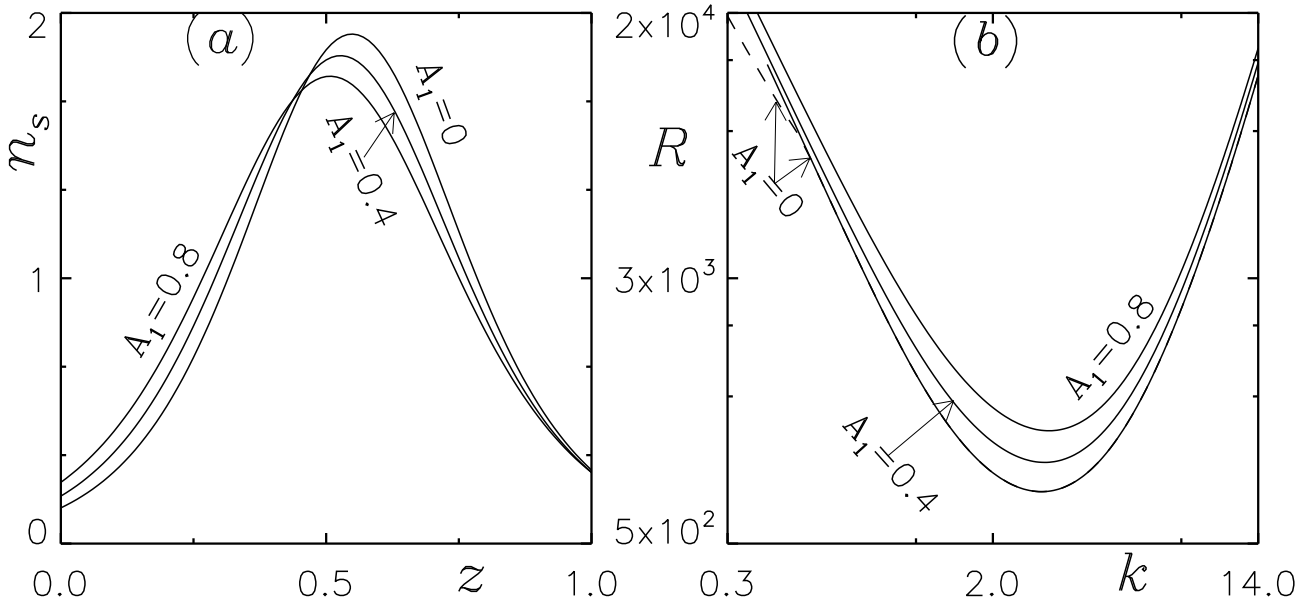


图5。（a）基本浓度分布，（b）不同入射角值θ_i对应的中性稳定曲线。在此，控制参数值 $S_c = 20$、$V_c = 15$、$k = 0.5$、$I_D = 0.26$ 和$\omega = 0.4$ 保持不变。

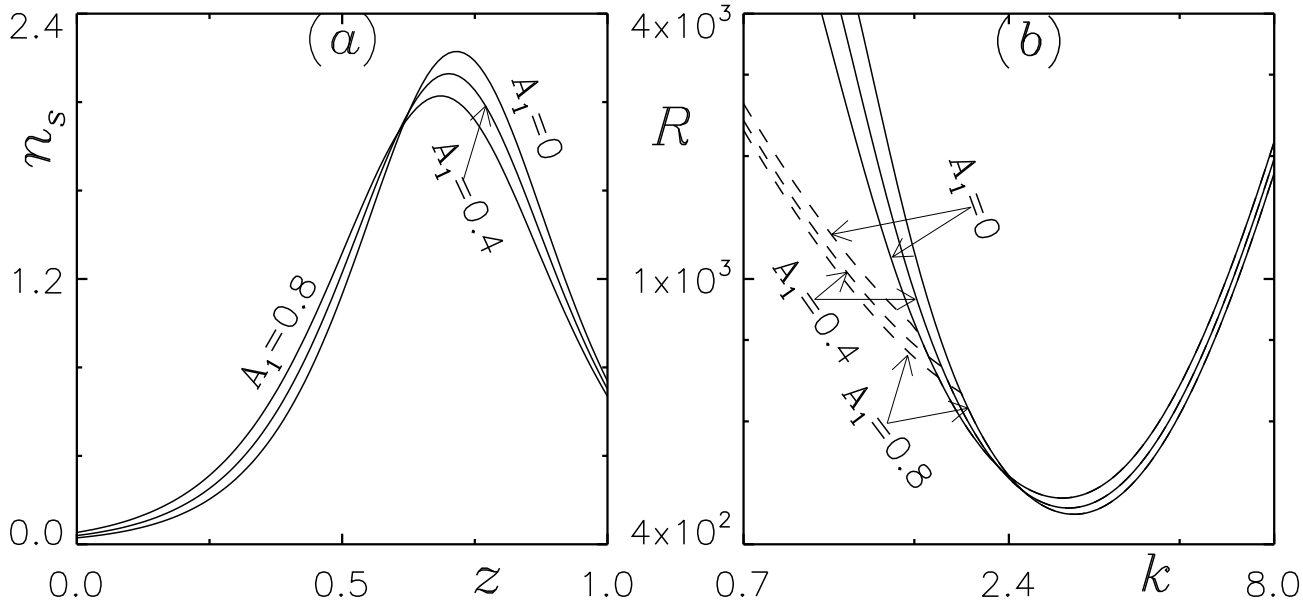


图6。(a) 基本浓度分布；(b) 入射角取不同值 θ_i 时对应的中性稳定曲线。这里，控制参数值 $S_c = 20$、$V_c = 15$、$k = 0.5$、$I_D = 0.26$ 和$\omega = 0.4$ 保持不变。

悬浮液稳定性会随着 A1 从 0 增加到 0.8 而提高。因此，悬浮液稳定性

增加（见图5）。

对于 $\theta_i = 40$，亚层位于区域高度的四分之三处，此时 $A_1 = 0$。随着 A_1 增加到 0.4 和0.8，亚层的位置向区域的中部高度移动。在这种情况下，随着 A_1 增加，WUR 和 CDUR 均降低。因此，临界瑞利数增加，悬浮液变得更加稳定，与 $\theta_i = 0$ 的情况类似（见图6）。

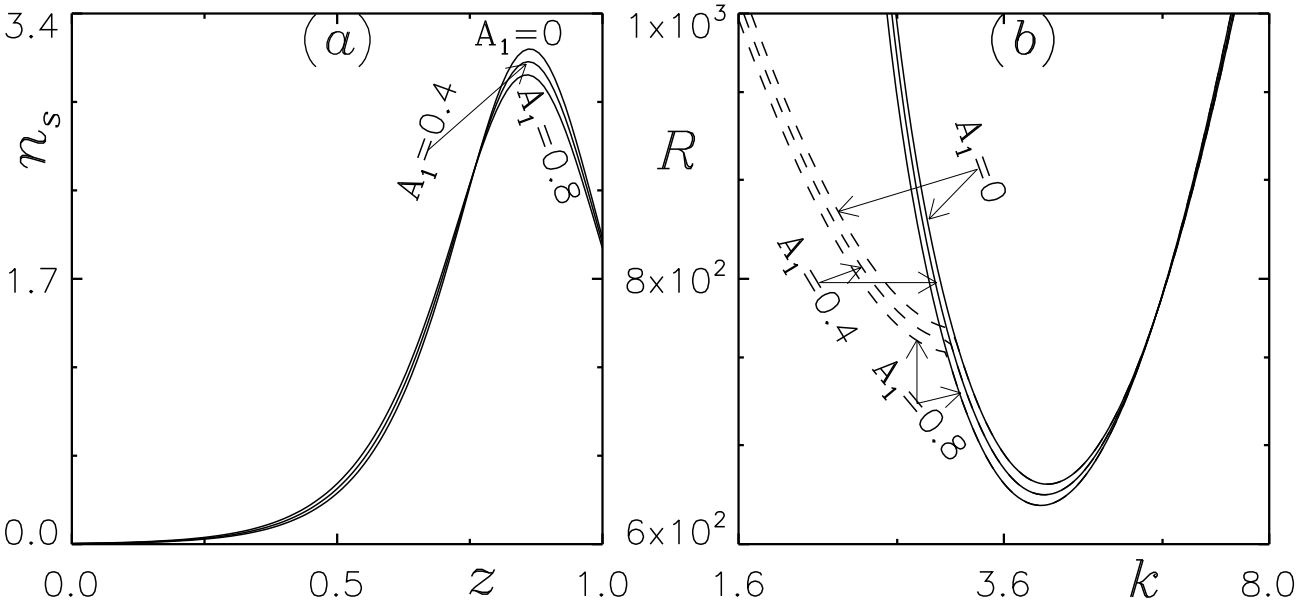


图7。(a) 基本浓度分布，(b) 入射角取不同值θ_i时对应的中性稳定曲线。这里，控制参数值$S_c = 20$、$V_c = 15$、$k = 0.5$、$I_D = 0.26$和$\omega = 0.4$ 保持不变。

对于 $\theta_i = 80$，亚层在区域顶部附近形成。在这里，对于所有 $A_1 = 0$、0.4和0.8的情况，WUR 保持不变，但随着 A1 从0增加到 0.8，CDUR减小。在这种情况下，CDUR的减小比WUR 的变化更为显著，导致临界瑞利数降低，使悬浮液变得不稳定（见图7）。

这里还观察到解的另一个有趣现象（振荡分支从定常分支分岔）。当 $\theta_i = 0$ for A $1 = 0$ 且当 $\theta_i = 40$，80 对所有 A_1，的取值时，会观察到这一现象，但初始平衡解中最不稳定模态对所有 θ_i 的取值均为定常模态。

(ii) 当消光系数 $\tau_H = 1$

让我们来考察 $V_c = 15$、$\tau_H = 1$、$\omega = 0.4$ 和 $J_D = 0.48$ 的前向散射效应

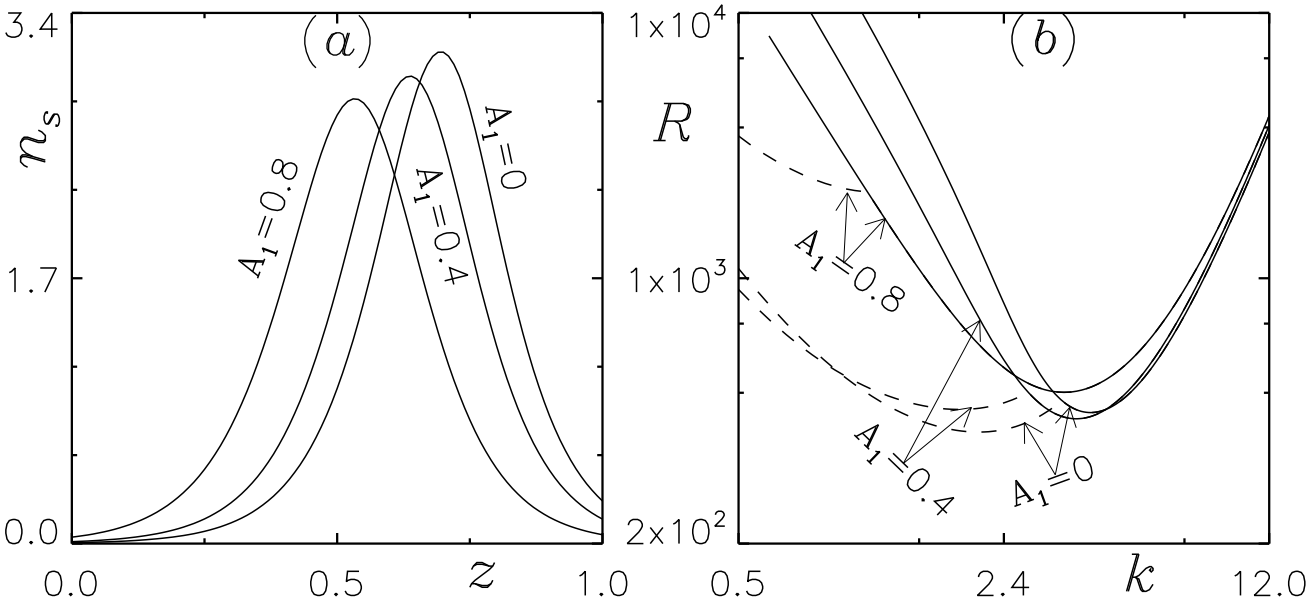


图 8. (a) 基本浓度分布；(b) 不同入射角 θ_i 下相应的中性稳定曲线。此处，控制参数值 $S_c = 20$、$V_c = 15$、$k = 0.5$、$I_D = 0.26$ 和 $\omega = 0.4$ 保持不变。

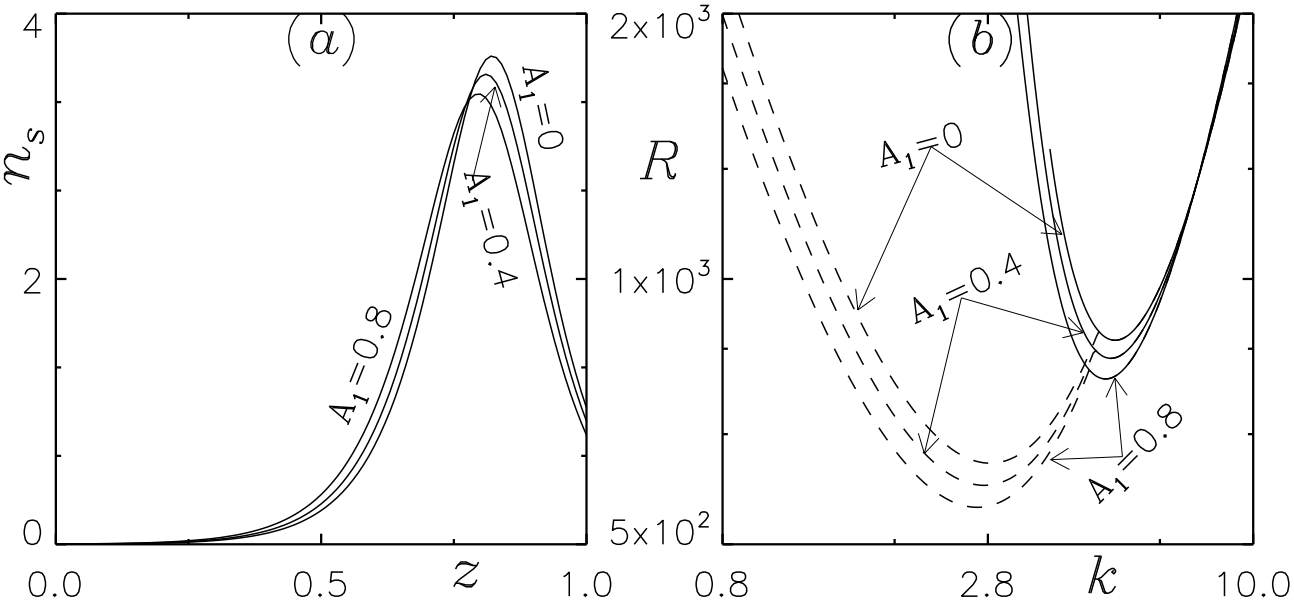


图 9. (a) 基本浓度分布；(b) 不同入射角 θ_i 下相应的中性稳定曲线。此处，控制参数值 $S_c = 20$、$V_c = 15$、$k = 0.5$、$I_D = 0.26$ 和 $\omega = 0.4$ 保持不变。

分别位于 $\theta_i = 0$、40 和 80
时的情况。

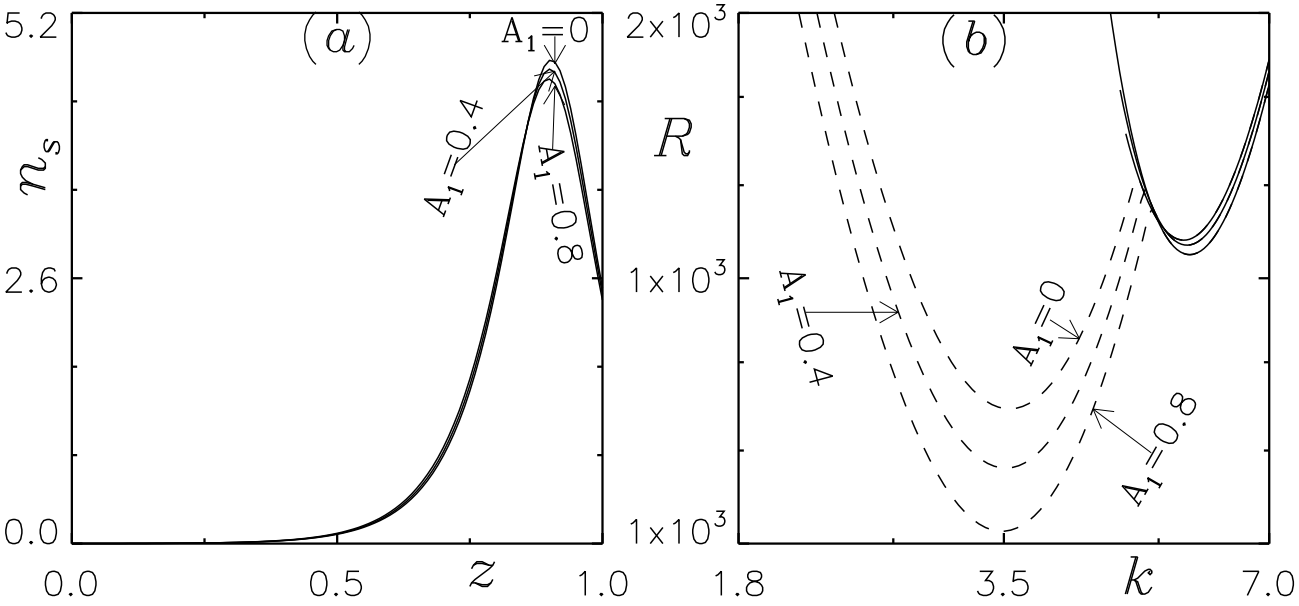


图 10. (a) 基本浓度分布；(b) 不同入射角 θ_i 下对应的中性稳定曲线。此处，控制参数值 $S_c = 20$、$V_c = 15$、$k = 0.5$、$I_D = 0.26$ 和 $\omega = 0.4$ 保持不变。

当 $\theta_i = 0$ 时，平衡状态下的亚层大致形成于区域高度的中部；随着 A_1 增至 0.4 和 0.8，亚层的位置向区域底部移动。此处，随着 A_1 增大，WUR 和 CDUR 均减小。因此，临界瑞利数增大，悬浮液变得更加稳定。在这种情况下，振荡分支从中性稳定曲线的定常分支分岔而出，但只有当 $A_1 = 0$ 时，解才变得过稳定（见图 8）。

现在，对于 $\theta_i = 40$，当 $A_1 = 0$ 时，平衡态下的亚层大约形成于区域四分之三高度处；随着 A_1 增加到 0.4 和 0.8，平衡态下亚层的位置向中部高度移动。在此，WUR 随着 A_1，的增加仅观察到极小的下降，但当 A1 从 0 增加到 0.8 时，CDUR 显著下降。在这种情况下，CDUR 的下降比 WUR 的下降更为有效，从而导致临界瑞利数降低，使悬浮液的稳定性减弱。在这里，初始平衡解中的最不稳定模态对于 A_1 的所有取值均为过稳定。

最后，对于 $\theta_i = 80$，亚层平衡态约在区域的 $z = 0.9$ 处形成；随着 A_1 增至 0.4 和 0.8，平衡态下亚层的位置向区域四分之三高度处移动。由于与 $\theta_i = 40$ 的情况处于相同区域，因此

临界瑞利数随 A_1 增大而降低。此处，在这三种情况下，振荡分支均从定常分支分岔，且初始平衡解中的最不稳定模态是过稳定的。表 I 总结了本节临界瑞利数（R_c）和波长（λ_c）的数值结果。

表 I. 表中显示了 I_D for$V_c = 15$ 增加时生物对流解的定量值，其他参数保持不变。

V_c	τ_H	ω	L_D	θ_i	A_1	λ_c	R_c	Im(γ)
15	0.5	0.4	0.26	0	0[a]	2	718.98	0
15	0.5	0.4	0.26	0	0.4	2	882.36	0
15	0.5	0.4	0.26	0	0.8	1.96	1101.18	0
15	0.5	0.4	0.26	40	0[a]	1.53	452.20	0
15	0.5	0.4	0.26	40	0.4[a]	1.57	463.92	0
15	0.5	0.4	0.26	40	0.8[a]	1.62	483.92	0
15	0.5	0.4	0.26	80	0[a]	1.2	648.90	0
15	0.5	0.4	0.26	80	0.4[a]	1.8	640.01	0
15	0.5	0.4	0.26	80	0.8[a]	1.8	631.11	0
15	1	0.4	0.48	0	0	2.96[b]	459.78[b]	12.58
15	1	0.4	0.48	0	0.4[a]	1.67	507.67	0
15	1	0.4	0.48	0	0.8[a]	1.79	618.54	0
15	1	0.4	0.48	40	0	2.18[b]	618.01[b]	20.06
15	1	0.4	0.48	40	0.4	2.24[b]	583.28[b]	19.22
15	1	0.4	0.48	40	0.8	2.32[b]	550.74[b]	18.19
15	1	0.4	0.48	80	0	1.74[b]	1190.06[b]	21.01
15	1	0.4	0.48	80	0.4	1.76[b]	1149.62[b]	21.89
15	1	0.4	0.48	80	0.8	1.77[b]	1108.00[b]	22.53

a 结果表明，中性曲线的 $R^{(1)}(k)$ 分支是振荡分支。 b 结果表明，振荡分支上出现了一个较小的解。

2. $V_c = 10$ 和$V_c = 20$

对 $V_c = 10$ 和 20 的前向散射系数取不同值时，生物对流不稳定性的数值分析结果表明，从平衡解出发的最不稳定模态表现出的趋势与 $V_c = 15$时观察到的趋势相似。生物对流不稳定性的数值结果详见表 II 和表 III。

表 II. 表中展示了$V_c = 15$ 下，随着I_D 增加，生物对流解的定量值；其他参数保持不变。

V_c	τ_H	ω	L_D	θ_i	A_1	λ_c	R_c	Im(γ)
10	0.5	0.4	0.26	0	0	2.24	1335.27	0
10	0.5	0.4	0.26	0	0.4	2.2	1577.07	0
10	0.5	0.4	0.26	0	0.8	2.11	1884.13	0
10	0.5	0.4	0.26	40	0	2.61	619.83	0
10	0.5	0.4	0.26	40	0.4	2.61	676.10	0
10	0.5	0.4	0.26	40	0.8	2.61	745.77	0
10	0.5	0.4	0.26	80	0[a]	2.15	457.32	0
10	0.5	0.4	0.26	80	0.4[a]	2.2	460.12	0
10	0.5	0.4	0.26	80	0.8	2.24	463.82	0
10	1	0.4	0.48	0	0[a]	1.96	592.73	0
10	1	0.4	0.48	0	0.4[a]	2	700.48	0
10	1	0.4	0.48	0	0.8	1.96	886.08	0
10	1	0.4	0.48	40	0[a]	1.69	533.12	0
10	1	0.4	0.48	40	0.4[a]	1.72	531.64	0
10	1	0.4	0.48	40	0.8[a]	1.75	534.64	0
10	1	0.4	0.48	80	0[a]	1.53	695.41	0
10	1	0.4	0.48	80	0.4[a]	1.53	692.53	0
10	1	0.4	0.48	80	0.8	1.53	688.86	0

a 结果表明，中性曲线的$R^{(1)}(k)$分支为振荡分支。b 结果表明，振荡分支上存在一个较小的解。

表 III. 表中展示了 I_D 增加时 $V_c = 15$ 对应的生物对流解的定量值，其中其他参数保持不变。

V_c	τ_H	ω	L_D	θ_i	A_1	λ_c	R_c	Im(γ)
20	0.5	0.4	0.26	0	0[a]	2	478.48	0
20	0.5	0.4	0.26	0	0.4[a]	2	577.36	0
20	0.5	0.4	0.26	0	0.8[a]	1.96	753.15	0
20	0.5	0.4	0.26	40	0[a]	1.53	552.23	0
20	0.5	0.4	0.26	40	0.4[a]	1.57	536.7	0
20	0.5	0.4	0.26	40	0.8[a]	1.62	524.43	0
20	0.5	0.4	0.26	80	0[a]	1.2	1049.65	0
20	0.5	0.4	0.26	80	0.4	1.8[b]	1017[b]	16.06
20	0.5	0.4	0.26	80	0.8	1.8[b]	984.16[b]	15.63
20	1	0.4	0.48	0	0	2.67[b]	423.32[b]	21.58
20	1	0.4	0.48	0	0.4	3.04[b]	379.34[b]	17.56
20	1	0.4	0.48	0	0.8	2.72[b]	718.49[b]	12.04
20	1	0.4	0.48	40	0	1.93[b]	820.65[b]	35.14
20	1	0.4	0.48	40	0.4	1.96[b]	750.14[b]	33.71
20	1	0.4	0.48	40	0.8	2.05[b]	680.13[b]	31.83
20	1	0.4	0.48	80	0	1.49[b]	1854.42[b]	38.81
20	1	0.4	0.48	80	0.4	1.52[b]	1779.89[b]	40.09
20	1	0.4	0.48	80	0.8	1.52[b]	1702.46[b]	40.98

a 结果表明，中性曲线的 $R^{(1)}(k)$ 分支是振荡的。b 结果表明，在振荡分支上存在一个较小的解。

VII. 结论

所提出的趋光性模型研究了刚性顶面对光诱导生物对流起始的影响；所研究的藻类悬浮液具有各向异性（前向）散射，并同时受到漫射通量和倾斜（非垂直）准直通量的照射。本分析采用线性各向异性散射系数。还通过对同一悬浮液进行线性分析，研究了生物对流不稳定性下的初始平衡解。

当均匀悬浮液中的前向散射系数 A_1 增大时，在平衡态下，悬浮液上半部的总强度降低，下半部的总强度升高。此外，随着 A_1 增大，悬浮液下半部总强度降低的临界值（上半部总强度升高的临界值）随之降低（升高）。随着 A_1 增大，亚层位置向区域底部移动。另一方面，亚层中的浓度也随着 A_1 增大而升高。

当平衡态下的亚层形成于区域中部附近时，随着前向散射系数 A_1 增大，临界波长减小，临界瑞利数增大。当亚层形成于区域顶部附近时，随着 A_1 增大，临界瑞利数和临界波长均减小。另一方面，当亚层位于区域高度的四分之三处附近时，对于自遮蔽较弱的悬浮液，临界瑞利数和临界波长均增大；而对于自遮蔽较强的悬浮液，随着 A_1 增大，临界波长增大，临界瑞利数减小。

似乎生物对流解的行为取决于悬浮液中的自遮蔽效应。对于弱自遮蔽悬浮液，振荡分支从中性稳定曲线的定常分支上分岔出来，但最不稳定解出现在定常分支上。因此，亚层解几乎在所有位置都保持定常。然而，对于强自遮蔽悬浮液，在平衡态下，亚层中几乎所有位置的生物对流解都会转变为过稳定解。

致谢

作者衷心感谢教育部（印度政府）通过GATE奖学金（注册号：MA19S43047204）提供的资金支持。

数据可用性

支持本文图表及本研究其他发现的数据均可在本文中获取。

参考文献

[1]J. R. Platt, 《自由游动生物培养物中的“生物对流图案”》, Science 133, 1766–1767（1961）。[2]T.J.Pedley和J.O.Kessler, 《游动微生物悬浮液中的流体动力学现象》, 《流体力学年度评论》24, 313–358（1992）。[3]N.A. Hill 和T. J.Pedley, 《生物对流》, 《流体动力学研究》37, 1（2005）。[4]M. A.Bees, 《生物对流的进展》, 《流体力学年度评论》52, 449–476（2020）。[5]A. Javadi、J.Arrieta、I.Tuval和 M.Polin, 《光-生物对流：实现对活性悬浮液中流动的光控制》, 《英国皇家学会哲学汇刊 A辑》378, 20190523（2020）。[6]H. Wager, 《VII. 重力对绿色裸藻（Euglenaviridis, Ehrb.）及其他微生物运动和聚集的影响》, 《伦敦皇家学会哲学汇刊：B辑, 生物学论文集》201, 333–390（1911）。[7]J.O.Kessler, 《游动微生物的协同行为和聚集现象》, 《当代物理学》26, 147–166（1985）。[8]J. O.Kessler和N.A. Hill, 《游动微生物动力学中物理学、生物学和几何学的互补性》, 载于《生物系统物理学》（Springer, 1997）, 第325–340页。[9]J.O.Kessler, 《游动微生物的外部动力学》, 《藻类学研究进展》4, 258–307（1986）。[10]C.R.Williams和 M. A.Bees, 《三种趋性之说：光-陀螺-趋重性生物对流》, 《实验生物学杂志》214, 2398–2408（2011）。[11]D.-P. Häder, 《绿色鞭毛虫眼虫（Euglenagracilis）的极性趋性、趋重性和垂直趋光性》, 《微生物学档案》147, 179–183（1987）。[12]M. K.Panda、R. Singh、A.C.Mishra和S.K. Mohanty, 《漫射入射辐射和准直入射辐射对趋光性生物对流的影响》, 《流体物理》28, 124104（2016）。[13]M.K.Panda, 《各向异性散射与漫射和准直照射对趋光性生物对流起始的影响》, 《流体物理》32, 091903（2020）。[14]B.Straughan, 《穿透对流的数学方面》（CRC Press, 1993）。

[15]R. V. Vincent 和 N. A. Hill，“趋光性藻类悬浮液中的生物对流”，《流体力学杂志》327，343–371（1996）。[16]S. Ghorai 和 N. A. Hill，“穿透性趋光生物对流”，《流体物理》17，074101（2005）。[17]S. Ghorai、M. K. Panda 和 N. A. Hill，“各向同性散射趋光性藻类悬浮液中的生物对流”，《流体物理》22，071901（2010）。[18]S. Ghorai 和 M. K. Panda，“各向异性散射趋光性藻类悬浮液中的生物对流”，《欧洲力学杂志B辑：流体》41，81–93（2013）。[19]M. K. Panda 和 R. Singh，“二维非散射悬浮液中的穿透性趋光生物对流”，《流体物理》28，054105（2016）。[20]M. K. Panda、P. Sharma 和 S. Kumar，“斜向照射对趋光性生物对流起始的影响”，《流体物理》34，024108（2022）。[21]S. Kumar，“斜向照射下的趋光性各向同性散射生物对流”，《流体物理》34，114125（2022）。[22]S. Kumar，“趋光性生物对流起始时刚性上表面下的各向同性散射”，《流体物理》35，024106（2023）。[23]J. R. Cash 和 D. R. Moore，“一种用于数值求解两点边值问题的高阶方法”，《BIT数值数学》20，44–52（1980）。[24]S. Kitsunezaki、R. Komori 和 T. Harumoto，“四膜虫的生物对流与前沿形成”，《物理评论E》76，046301（2007）。[25]J. Kessler，“路径与图案——游动细胞及其环境的相互动力学”，《理论生物学评论》1，85–108（1989）。[26]M. K. Panda 和 S. Ghorai，“各向同性散射悬浮液中的穿透性趋光生物对流”，《流体物理》25，071902（2013）。[27]N. A. Hill 和 D.-P. Häder，“一种用于描述游动微生物轨迹的有偏随机游走模型”，《理论生物学杂志》186，503–526（1997）。[28]A. Kage、C. Hosoya、S. A. Baba 和 Y. Mogami，“衣藻生物对流图案的剧烈重组：图案转变响应的定量分析”，《实验生物学杂志》216，4557–4566（2013）。[29]N. H. Mendelson 和 J. Lega，“枯草芽孢杆菌游动细胞产生的复杂行进条纹图案”，《细菌学杂志》180，3285–3294（1998）。

[30]S. M. Gittleson 和 T. L. Jahn，“短尾衣藻的图案式游动”，《美国博物学家》102，413–425（1968）。[31]N. S. Khan、T. Gul、M. A. Khan、E. Bonyah 和 S. Islam，“重力驱动的非牛顿纳米流体薄膜流动中陀螺趋性微生物的混合对流”，《物理学研究成果》7，4033–4049（2017）。[32]T. Hayat、A. Alsaedi 等，“具有熔化效应的纳米材料生物对流流动的发展”，《混沌、孤子与分形》148，111015（2021）。[33]F. P. Incropera、T. R. Wagner 和 W. G. Houf，“浅水层中辐射场预测与测量结果的比较”，《水资源研究》17，142–148（1981）。[34]K. J. Daniel、N. M. Laurendeau 和 F. P. Incropera，“浑浊水体中辐射吸收与散射的预测”（1979）。[35]N. A. Hill、T. J. Pedley 和 J. O. Kessler，“有限深度液层中陀螺趋性微生物悬浮液的生物对流图案生长”，《流体力学杂志》208，509–543（1989）。[36]M. F. Modest 和 S. Mazumder，《辐射传热》（Academic Press，2021）。[37]S. Chandrasekhar，“辐射传递”，Dover Publications Inc.，纽约（1960）。[38]S. Ghorai 和 R. Singh，“陀螺趋性羽流的线性稳定性分析”，《流体物理》21，081901（2009）。[39]W. H. Press，《Fortran数值算法》，《科学计算艺术》（1992）。