arXiv:2304.04698v1 [math.GT] 10 Apr 2023

曲面霍顿群

JAVIER ARAMAYONA、KAI-UWE BUX、HEEJOUNGKIM 和
CHRISTOPHER J. LEININGER

Abstract. 对于每个 $n \geqslant 2$，曲面霍顿群 $\mathcal{B}_n$ 都定义为某个恰有 n 个端且所有端均为非平面的曲面的渐近刚性映射类群。这些群与辫式霍顿群类似，事实上还包含辫式霍顿群。这些群也自然地出现在拓扑学中：闭 3-流形上深度为 1 的叶状结构中，纤维化分支的每个单值化同胚都共轭于某个 $\mathcal{B}_n$。作为无限型曲面的可数映射类群，这些群介于经典映射类群与大映射类群之间。我们首次研究曲面霍顿群，并证明了包括以下结果在内的若干结论：$\mathcal{B}_n$ 属于 F_{n-1} 型，但不属于 FP_n 型，这与辫式霍顿群的情形类似。

1. Introduction and results

对于 $n \geqslant 2$，记 Σ_n 为恰有n 个端的连通可定向曲面，其中所有端都是非平面的。我们将 Σ_n 视为如下构造的曲面：首先将一个带有两个边界分支的环面（称为一个片）粘到一个带有 n 个边界分支的球面的每个连通分支上；随后，逐步将一个片粘到前一步所得曲面的每个边界分支上。霍顿曲面群 $\mathcal{B}_n$是映射类群 $\mathrm{Map}(\Sigma_n)$ 的子群，其元素最终会以平凡的方式将片映到片；精确定义见第 2 节。

从这一角度看，群 $\mathcal{B}_n$ 是[16, 18, 2, 19, 1]中所考察的 Cantor曲面的渐近映射类群的自然类比。此外，这些群与 Houghton群及其编织的 亲属 [9]密切相关。事实上，利用 Funar对编织Houghton群 $\mathrm{br}H_n$ 的描述，即将其视为渐近刚性的映射类群 [15], ，我们将在下面的备注2.2 中简要解释如何看出 $\mathrm{br}H_n$ 可以实现为 $\mathcal{B}_n$的子群。

日期：2023年4月11日。J. A. 获得 PID2021-126254NB-I00 项目资助，以及由 MCIN/AEI/10.13039/501100011033 资助的 Severo Ochoa 奖 CEX2019-000904-S。K.-U.B. 获得德国研究联合会（DFG）通过项目 SFB-TRR 358/1 2023年 — 491392403 提供的资助。C.L. 获得 NSF 项目 DMS-2106419 的部分资助。

除了这一类比之外，群 $\mathcal{B}_n$ 自然地出现在对闭3–流形的深度-1叶状结构的研究中。更准确地说，非乘积连通分支是映射环面，由端周期同胚构成（见 [14]），并且每个这样的同胚都共轭到某个 $\mathcal{B}_n$ 中（见 [13, 推论 2.9]）。

1.1. 有限性性质。 回顾一下，若一个群具有有限 d-骨架的分类空间，则称其为 F_d 型；若将整数视为该群上的平凡模时，它具有一个在维数不超过 d的范围内为有限型的投射分解，则称其为 FP_d型。对于 F_d 型群，可以利用分类空间的万能覆盖的胞腔链复形得到这样的分解。因此，F_d型蕴含 FP_d型。

在 [19], Genevois–Lonjou–Urech中证明了，编织 Houghton 群 $\mathrm{br}H_n$ 是 F_{n-1} 型，但不是FP_n 型。我们的第一个结果是这一结果在我们所研究情形下的类似结论。

定理 1.1. *$\mathcal{B}_n$ 是 F_{n-1} 型，但不是 FP_n 型。*

为了证明定理 1.1，正如此类结果中常见的做法，我们将使用 Brown [7], 提出的一个经典判据，并以离散 Morse 理论的语言表述；详情见第 3 节。更具体地说，对于每个 $n \geqslant 2$，我们将构造一个有限维可缩立方复形，使 $\mathcal{B}_n$ 在其上作用，并在该复形上定义一个不变的离散 Morse 函数，使得其下降链接具有高度连通性。无论是在构造该复形还是在分析下降链接时，我们都大量运用了 [1] 中提出的方法。

1.2. 阿贝尔化。 Powell 的一个著名定理 [29]断言，亏格至少为三的有限型曲面 S 的纯 映射类群 $\mathrm{PMap}(S)$ 的阿贝尔化是平凡的。对于曲面 Σ_n，Patel、Vlamis 和第一作者的一项结果 [4, 推论 6]推出$H^1(\mathrm{PMap}(\Sigma_n), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{n-1}$。更一般地，无限型曲面的（纯）映射类群的阿贝尔化更为复杂；见[10, 11, 24, 26, 30]。利用 [4], ，我们计算了 $\mathcal{B}_n$ 的阿贝尔化 $\mathcal{B}_n^{ab}$，以及其纯映射类群 $P\mathcal{B}_n$的阿贝尔化。

定理 1.2。 对于所有 $n \geqslant 2$、$\mathcal{B}_n^{ab} = \{0\}$ 和 $P\mathcal{B}_n^{ab} \cong \mathbb{Z}^{n-1}$。

根据阿贝尔化的描述，我们还刻画了 $\mathcal{B}_n$的所有有限商，并证明它们受到严格限制；见命题 6.2。由此得到以下推论。

推论 1.3。 对于所有 m、$n \in \mathbb{N}$，群 $\mathcal{B}_n$ 和 $\mathrm{br}H_m$ 不可公度。

1.3. **标记图**。 根据定理 1.1， $\mathcal{B}_n$ 对所有 $n \geqslant 2$ 都是有限生成的，因此其粗几何是良定义的。在有限型情形中，映射类群的一个非常实用的拟等距模型是 Masur 和 Minsky 的标记图 [25]。对于曲面 Σ_n，标记图不再是一个好的模型，原因有几个。一个显而易见的问题是它不连通，而且一个标记的轨道可能位于不同的连通分支中。存在 $\mathcal{B}_n$–不变的连通分支，但即使这些连通分支也存在问题，因为它们不再是局部有限的。更糟的是，到任何此类连通分支的轨道映射都不是拟等距嵌入（参见第 7 节）。另一方面，存在（许多）确实可作为拟等距模型的局部有限子图，这是由下述结果和 Milnor-ˇSvarc 引理得出的（例如参见 [6]）。

定理 1.4. 对于所有 $n \geqslant 2$，都存在标记图的局部有限子图，使得 $\mathcal{B}_n$ 在其上余紧地作用。对于 $n \geqslant 3$，任意标记μ 都包含在这样的子图中。

最后的陈述对于 $n = 2$ 并不完全正确，因为在 Σ_2 上存在在 $\mathcal{B}_n$ 中具有无限稳定子的标记。

论文计划。 第 2 节包含关于曲面、映射类群以及 $\mathcal{B}_n$定义的相关背景；在第 3 节中，我们回顾 Brown 关于群的有限性性质的经典结果 [7]，并描述在我们所处情形下的相关工具。第 4 节构造一个可缩立方复形，在其上 $\mathcal{B}_n$ 作用良好，并且该复形类似于 [19, 1]的复形。在第 5 节中，我们将证明定理 1.1。随后，我们在第 6 节证明定理 1.2 和推论 1.3，并在第 7 节证明定理 1.4。

致谢。 作者感谢 Anne Lonjou 进行富有帮助的交流。

2. 曲面

本文中，所有曲面均假定为连通、可定向且第二可数。若一个曲面的基本群是有限生成的，则称该曲面为有限型；否则，它就是无限型。本文主要研究的无限型曲面，是端的数量有限且所有端均为非平面的曲面；具体构造见第 2.3 节。

2.1. **曲线与弧**。 在曲面 S 上，曲线 指的是 S上一条简单闭曲线的同痕类。所有曲线都是本质的，也就是说，它们不围成圆盘或单穿孔圆盘，也不与 ∂S的某个连通分支共同围成环带。弧是（相对于 ∂S）一条连接 S的两个边界分支的嵌入路径的同痕类。如果两条曲线/弧可以经过同伦变形而彼此不相交，我们就称它们不相交 。按照惯例，我们不区分曲线（分别地，弧）与其代表元。

2.2. **映射类群**。 S 的映射类群 Map(S) 是 S的保定向同胚的同痕类所构成的群；这里假设所有同胚和同伦都逐点固定 S 的边界。纯 映射类群 PMap(S) 是 Map(S) 的子群，其元素固定 S的每个端。当 S 为有限型时，众所周知，Map(S) 是 F_∞ [20]型的。另一方面，当 S 为无限型时，Map(S) 不可数。

当 S 为无限型时，Map(S) （事实上也包括 PMap(S)）的一个重要子群是紧支集映射类群 Map$_c(S)$，它由在 S的某个紧子集之外恒等的那些映射类组成。根据 Patel-Vlamis 的结果 [28]，当且仅当 S 至多有一个非平面端时，Map$_c(S)$ 在 PMap(S) 中（关于紧开拓扑）稠密；否则，PMap(S) 由 Map$_c(S)$ 及柄移位集合拓扑生成。

2.3. **刚性结构与曲面霍顿群**。本小节旨在描述曲面 Σ_n 以及引言中提到的、定义其渐近映射类群所必需的附加结构。这些定义连同表述它们所需的工具，与 [1, 第 3]节密切相关。

固定一个整数 $n \geqslant 2$。令 O_n 为一个具有 n 个边界分支的球面，这些边界分支标记为 b_1、.....、b_n；令 T为一个具有两个边界分支的环面，分别记为 $\partial^- T$ 和 $\partial^+ T$；我们将 $\partial^+ T$ 称为 T的顶部边界分支。我们固定一个方向反转同胚 λ： $\partial^- T \to \partial^+ T$，以及方向反转同胚$\mu_i$: $\partial^- T \to b_i$（其中 $i = 1$、.....、 n）。我们如下构造一个紧、连通、可定向曲面 $(M^i)_i$ 序列:

- $M^1 = O_n$;
- M^2 是将 T 的一份副本，使用同胚 μ_i粘合到 O_n 的每个边界分支上所得的结果；
- 对于每个 $i \geqslant 3$， M^i 是使用同胚 λ沿 M^{i-1}的每个边界分支粘合 T 的一份副本所得的结果。

曲面 Σ_n 是上述曲面 M^i 的并集。对于 $i \geqslant 2$， $M^i \smallsetminus M^{i-1}$的每个连通分支的闭包称为一个部件。根据构造，每个部件 $B \subset M^i \smallsetminus M^{i-1}$ 都是 T的一个粘合副本，因此都配备了一个规范同胚$\imath_B$： $B \to T$。我们称属于 M^{i-1}的 B的唯一边界分支为 B的顶部边界分支，因为它通过 $\imath_B$ 映射到 $\partial_+ T$。集合

$$\{\imath_B : B \text{ is a piece}\}$$

在 Σ_n 上称为刚性结构 。

Σ_n 的子曲面若是连通的，且由 O_n与有限个片段的并组成，则称其为适配的。适配子曲面的边界分支称为适配曲线。

设 $f\colon \Sigma_n \to \Sigma_n$ 是一个同胚。若存在一个适配子曲面 $Z \subset \Sigma_n$，称为 f的定义曲面，使得：我们称 f 是渐近刚性的。

- $f(Z)$ 是一个适配子曲面，而• f 在 Z之外是刚性的，也就是说，对于每个块 $B \subset \Sigma_n \smallsetminus Z$，我们都有 $f(B)$是一个块，并且 $f|_B \equiv \iota_{f(B)}^{-1} \circ \iota_B$。

定义 2.1（曲面霍顿群）。 曲面霍顿群$\mathcal{B}_n$ 是映射类群 $\mathrm{Map}(\Sigma_n)$ 的子群，其元素具有一个渐近刚性的代表元。

我们将用 $P\mathcal{B}_n$ 表示 $\mathcal{B}_n$ 与纯映射类群 $\mathrm{PMap}(\Sigma_n)$的交集。

注释 2.2。在 [15], Funar将辫式霍顿群 $\mathrm{br}H_n$ 描述为某些平面曲面的渐近刚性映射类群。将该平面曲面的 punctures替换为边界分支，然后对所得曲面进行加倍，便确定了一个同态$\mathrm{br}H_n \to \mathcal{B}_n$ ，类似于 Ivanov- McCarthy [23,第 2]节中的构造。

3. Finiteness properties

3.1. **Brown判据关于有限性性质**。本节回顾由Brown [7], 提出的一个经典判据，用于判断一个群是否具有某些有限性性质。我们指出，我们对该判据的表述不同于原始表述 [7], ，因为我们采用了 [5]中发展的<文献中感兴趣的读者可参阅 [5] 或 [1, 附录 A]以获取详尽讨论。

我们的设定是一个群 G，它通过置换胞腔的同胚X 作用在分片欧几里得 CW 复形X 上，并且这些同胚在胞腔上的限制是等距映射。一个*Morse*函数是在 X 上的胞腔逐片仿射映射 $h\colon X \to \mathbb{R}$，满足以下条件：它在每个闭胞腔上都取得唯一的最大值（位于一个顶点处，即该胞腔的顶顶点）。一个顶点 v 的下降链接$\mathrm{lk}^{\downarrow}(v)$ 是由包含 v 作为其顶顶点的胞腔的链接所张成的、其链接中的部分。值 $h(v)$ 通常被称为 v的高度。

我们将 X 中的顶点视为临界点，而顶点在 h 下的像是临界值。如果一个莫尔斯函数 $h\colon X \to \mathbb{R}$离散，那么它的临界值集合就是 $\mathbb{R}$ 的一个离散子集。现在，第一个定理可以表述如下。

定理 3.1 (Brown)。 设群 G 通过逐胞腔等距变换作用于可缩的分片欧几里得 *CW* 复形 X。假设 X 配备了一个离散的、 G-不变的莫尔斯函数 $h\colon X \to \mathbb{R}$，并令 $X^{\leqslant s}$ 表示完全包含在原像 $h^{-1}(-\infty$ 中的 X 的最大子复形， s]。假设

• 对于所有临界值 s， $X^{\leqslant s}$ 对 G 的商是有限的。• 每个胞腔稳定子都属于 F_∞ 型。• 存在 $d \geqslant 1$，使得对于充分大的临界值 s，以及 $v \in X$ 中满足 $h(v) \geqslant s$ 的每个顶点， v 在 X 中的下降链接是 d-球面的，即为 $(d-1)$-连通且维数为 d。• 对于每个临界值 s，都存在一个顶点 v，其在高度 $h(v) \geqslant s$ 处的下降链接不可缩。

那么 G是 F_d 型，但不是 FP_{d+1} 型。

证明。 该证明仿照了 Brown 对 [7, 推论 3.3] 的证明。

由于临界值的集合是离散的，我们可以按顺序为它们编号。现在，我们考虑由次水平复形 X_i 给出的 X 的滤过：$= X^{\leqslant s_i}$，其中 s_i 依次遍历这些临界值。滤过步骤X_{i+1} 是通过将下降链接锥化，从 X_i 到同伦意义下得到的。因此，下降链接是 $(d-1)$-连通这一假设意味着，X_i 到 X_{i+1} 的包含映射在维数不超过 $d-1$ 的同伦（以及同调）群上诱导同构，并且在维数 d的同伦（以及同调）群上诱导满同态。由于我们假设复形X 是可缩的，低于 d的维数中的同构最终都必须是平凡映射。由此可知，对于充分大的 i，次水平复形 X_i 是 $(d-1)$-连通的。根据 [7, 命题1.1和3.1] ，可推出 G 属于F_d型。

对于负向结论，我们关注维度为 d 的同调群系统 $\{H_d(X_i)\}_i$ 。我们已经注意到，当 i 足够大时，该系统中的态射是满射。因此，只有当同调群 $H_d(X_i)$ 对所有足够大的 i 都消失时，该系统才可能本质上平凡。然而，如果在从 X_i 到 X_{i+1} 的过渡过程中，我们遇到一个维度为 d 的不可缩 $(d-1)$-连通下降链接，那么该下降链接将在维度 d 上具有非平凡同调。因此，下降链接包含一个 d-循环。如果这个循环在 X_i 中是一个边界，那么将下降链接锥化就会提供另一种在 X_{i+1}中为其构造边界的方法，从而产生一个非平凡的 $(d+1)$-循环；但这是不可能的，因为 H_{d+1} 中的那个元素在未来永远无法被消去，因为我们只会对 d 维的链接进行锥化。因此，对于无穷多个 i，$H_d(X_i) \neq 0$ 。 □

显然，从该判据可以看出，用于分析空间连通性性质的工具可能会很有用。我们汇总在这种情况下所需的工具。

3.2. **传递连通性性质**。 我们约定每个空间都是 (-2)-连通的，且任何非空空间都是(-1)-连通的。

3.2.1. 完全连接。我们将根据其他复形的连通性性质以及它们之间的映射，推导出复形的连通性性质。一种方式

实现这一点通过完全连接复形这一概念得以形式化，该概念由 Hatcher 和 Wahl 在 [22] 中提出。

定义 3.2（完全连接复形）。设 Y 和 X 为单纯复形，且 π: $Y \to X$ 为单纯映射。若满足以下性质，则称 Y 是一个完全连接复形，其基底为 X（相对于映射 π）。

- π 是满射，并且在各个单形上是单射。• 对于每个单形 $\sigma = \langle v_0, \ldots\ldots, v_d \rangle$，其原像可以写成各顶点上的纤维的连接：

$$\pi^{-1}(\sigma) = \pi^{-1}(v_0) * \cdots * \pi^{-1}(v_d)\,.$$

由于 π 在单形上是单射，顶点在 Y中的 π-原像是离散的顶点集。由于 π 是满射，这些集合均非空。因此，对于 X中的每个 d-单形 σ，其 π-原像 $\pi^{-1}(\sigma)$ 是若干个非空离散集的 $d+1$ 联。

我们在两个地方利用完全连接：一次是将已知的连通性性质从 X 转移到 Y，另一次则反向进行。第一个方向较为困难，已由 Hatcher–Wahl [22] 证明。

在陈述结果之前，回顾一下，若一个单纯复形是 弱*Cohen–Macaulay* 的，维数为 $k+1$，则它是 k–连通的，并且每个单形 σ 的链接是 $(k - 维(\sigma) - 1)$–连通的。

命题 3.3。 [22, 命题 3。5] 设 π: $Y \to X$ 是一个完全连接。如果 X 是维数为 $k+1$的弱 *Cohen–Macaulay*，那么 Y也是如此。

向前推进是较容易的方向（并且隐含在Hatcher和Wahl [22] 给出的论证中）。参见 [1, 备注 A。15] 以获取明确说明。

命题 3.4。 假设 π: $Y \to X$ 是一个完全连接。那么 X 是 Y 的一个收缩，并继承所有可由群值函子或余函子的消失来表达的性质。特别地，如果 Y 是k-连通的，那么 X也是。

同样，很容易避免完全连接成为可缩的。

观察 3.5. 令 π: $Y \to X$ 为一个完全连接，并假设 X 中存在一个顶维单形 $\sigma = \langle v_0, \ldots, v_d \rangle$，使得每个顶点纤维 $\pi^{-1}(v_i)$ 至少包含两个点。那么，σ 上方的纤维包含一个 d-球面，它在 Y 的同调中定义了一个圈，且该圈不可能是边界，因为 Y 不包含维数为 $d+1$ 的单形。特别地， Y 不可缩。

3.2.2. 劣单纯形论证。从完全连接映射出去的映射是一种特别良好的投影。由 Hatcher 和 Vogtmann [21], 提出的劣单纯形论证利用子复形的包含映射

以及额外的局部信息，将环境复形的连通性性质传递给子复形。我们不采用该论证的原始阐述，因为我们发现 [1]中引入的语言更加便于使用。

设 X 是一个单纯复形，并假设给定一个映射 $\sigma \mapsto \bar{\sigma}$，它为 X 中的每个单形 σ 指派一个（可能为空的）面 $\bar{\sigma}$，该面属于 σ。我们假设满足以下两个条件：

- Monotonicity: $\sigma \leqslant \tau \implies \bar{\sigma} \leqslant \bar{\tau}$.
- Idempotence: $\bar{\bar{\sigma}} = \bar{\sigma}$.

若 $\bar{\sigma}$ 为空，则称单形 σ 为优单形；若 $\bar{\sigma} = \sigma$，则称其为劣单形。注意，由单调性可知， X 中的优单形构成一个子复形 X^{good}，我们称之为优子复形。

劣单形 σ 的优链接是满足 $\bar{\tau} = \bar{\sigma} = \sigma$ 的那些真上余面 $\tau > \sigma$ 所成偏序集的几何实现，即：

$$\mathrm{lk}^{\mathrm{good}}(\sigma) := \{\, \tau > \sigma \mid \bar{\tau} = \bar{\sigma} \,\}$$

以下命题出自 Hatcher–Vogtmann [21, 第 2 节, 1], 但此处表述取自 [1, 命题 A.7]。

命题 3.6. 假设存在某个数 $k \geqslant -1$，使得对每个劣单纯形 σ，优链接 $\mathrm{lk}^{\mathrm{good}}(\sigma)$ 都是 $(k - \text{维数}(\sigma))$连通的。那么，包含映射 $X^{\mathrm{good}} \hookrightarrow X$ 在 π_d 中对所有 $d \leqslant k$ 都诱导出同构，并在 π_{k+1}中诱导出一个满同态。

4. A contractible cube complex

证明定理 1.1 的策略广为人知，例如与 [8, 19, 1], 中采用的策略类似。具体而言，我们将构造一个可缩复形 $\mathfrak{X}$， $\mathcal{B}_n$ 以某种方式作用于其上，使我们能够应用上文第 3 节所述的 Brown [7]判据。

现在我们着手进行这一构造。主要对象的定义是对 [1], 中定义的逐字改编；与我们这里的情形唯一的不同之处，将出现在分析下降链接的连通性性质时。因此，我们将简要回顾 [1, Section 5], 中的构造；更详尽的介绍请参阅该文。

考虑有序对 $(Z,\ f)$，其中 $Z \subset \Sigma_n$ 是一个适配子曲面，且 $f \in \mathcal{B}_n$。若 $f_2^{-1} \circ f_1(Z_1) = Z_2$ 且 $f_2^{-1} \circ f_1$ 在Z_1的补集中是刚性的，则称两个这样的有序对 $(Z_1,\ f_1)$ 和 $(Z_2,\ f_2)$ 等价。直观地说， $(Z,\ f)$ 的等价类记录了 f 在 Z 之外的“非刚性”行为。例如，若 $f \in \mathcal{B}_n$ 在适配子曲面 Z之外是恒等映射，则 $(Z,\ f)$ 等价于 $(Z,\ \mathrm{id})$。另一个值得记住的例子是，若 $f_2^{-1} \circ f_1$ 使 Z 保持不变，并且在 Z之外是刚性的，则 $(Z,\ f_1)$ 与 $(Z,\ f_2)$ 等价。

我们用 $[Z,\ f]$表示 $(Z,\ f)$ 的等价类，并用 $\mathcal{S}$表示所有等价类构成的集合。群 $\mathcal{B}_n$ 通过如下方式作用于 $\mathcal{S}$:

$$g\cdot[Z,f]=[Z,g\circ f].$$

我们将上文所述一对 $(Z,\ f)$ 的复杂度 定义为 Z的亏格。或者，注意到 Z 是一个适配子曲面，因此它是 O_n 与若干个块的并。每个块对亏格的贡献均为 1，因此复杂度就是 Z中的块数。显然，等价的对子具有相同的复杂度，且该作用保持复杂度不变，因此我们得到一个 $\mathcal{B}_n$–不变的复杂度函数

$$h\colon \mathcal{S}\to\mathbb{Z}\subset\mathbb{R}.$$

给定顶点 $x_1,\ x_2\in\mathcal{S}$，我们称 $x_1\prec x_2$，如果存在 x_i的代表元 $(Z_i,\ f_i)$，其中 $i=1,\ 2$，使得 $f_1=f_2$、 $Z_1\subset Z_2$和 $Z_2\smallsetminus Z_1$是不相交的块之并。我们强调，$\prec$ 不是偏序。

关系 $\prec$ 可用于构造一个立方复形 $\mathfrak{X}$，使得$\mathcal{S}$ 是其 0-骨架。给定 $x_1\prec x_2$，集合 $\{x\mid x_1\le x\le x_2\}$ 是一个 d-立方体的顶点，其中 $d=h(x_2)-h(x_1)$。我们称 x_1 为该立方体的底部，因为它在所有顶点中使复杂度唯一达到最小值。由于 Σ_n 恰有 n 个端，复形 $\mathfrak{X}$ 是 n维的。

注意到，作用 $\mathcal{B}_n$ 在 $\mathcal{S}$ 上保持立方结构，并且复杂度函数 h 在线性延拓到立方体上后，成为一个$\mathcal{B}_n$-不变的复杂度函数（名称相同）

$$h:\mathfrak{X}\to\mathbb{R}_+.$$

对于 $k\geqslant 1$，记 $\mathfrak{X}^{\leqslant k}$ 为 $\mathfrak{X}$ 的子复形，它由复杂度为 $\leqslant k$的那些顶点张成。直接翻译 [1] 中命题 5.7 以及引理 6.2 和 6.3 的论证，可得以下结论:

定理 4.1。 立方复形 $\mathfrak{X}$ 是可缩的，并且$\mathcal{B}_n$ 在 $\mathfrak{X}$上的作用满足:

- 设 C是一个底顶点为 $x=[Z、\ f]$的立方体。那么， C 的 $\mathcal{B}_n$-稳定子同构于 $\mathrm{Map}(Z)$的一个有限扩张。特别地，每个立方体稳定子都属于 F_∞型。• 对于每个 $k\geqslant 1$， $\mathfrak{X}^{\leqslant k}$ 关于 $\mathcal{B}_n$ 的商是紧的。

鉴于上述定理，为了应用 Brown 的定理 3.1，我们需要证明下降链接具有正确的连通性性质。正如在 [1], 中一样，下降链接的连通性性质由片复形的连通性性质决定，现回顾其定义:

定义4.2 (片复形**)**。令 Z 为带边界的紧曲面，并令 Q 为一组边界圆。我们将片复形 $\mathcal{P}(Z,\ Q)$ 定义为 Z 的曲线复形的单纯子复形，其顶点是分隔曲线，这些曲线与 Q中的一个边界圆共同界定一个亏格为 1 的子曲面。如果 $Q=\partial Z$，我们将记作 $\mathcal{P}(Z,\ Q)=\mathcal{P}(Z)$。

这两个复形之间的关系由以下结果概括，其证明与 [1, 命题 6。6] 的证明完全相同。

命题 4.3。 设 $x = [Z\mathrm{id}]$ 是 $\mathfrak{X}$ 的一个顶点。则下降链接 $\mathrm{lk}^{\downarrow}(x)$ 是关于片复形 $\mathcal{P}(Z)$ 的完全连接。

命题 4.3 和命题 3.3 的一个直接推论如下。

推论 4.4。 如果 $\mathcal{P}(Z)$ 是维数为 k 的弱 *Cohen–Macaulay*，则下降链接 $\mathrm{lk}^{\downarrow}(Z)$ 也具有这一性质。

在结束本节之前，我们还需要更多关于这一完全连接的信息，以证明定理 1.1 的否定部分。具体来说，我们首先回顾，对于 $x = [Z, \mathrm{id}]$，完全连接映射$\eta\colon \mathrm{lk}^{\downarrow}(x) \to \mathcal{P}(Z)$ 定义如下。给定 $[W, g] \in \mathrm{lk}^{\downarrow}(x)$，存在一个片 $Y \subset \Sigma_n$，使得 $W \cup Y$ 是一个适配子曲面，并且 $[W \cup Y, g] = x = [Z, \mathrm{id}]$。由此可得 $g(W \cup Y) = Z$，因此 $g(Y)$ 是 $\mathcal{P}(Z)$ 的一个顶点。接着我们定义 $\eta([W, g]) = g(Y)$。有了这些，我们现在陈述将要用到的引理。

引理 4.5。 对于每个顶点 $X \in \mathcal{P}(Z)$，$\mathrm{lk}^{\downarrow}(x)$ 中的纤维是无限的。

证明。给定如上所述的 $X = \eta([W, g]) = g(Y)$，我们需要证明$\eta^{-1}(X)$ 是无限的。为此，令 $h\colon Y \to Y$为任意一个表示 $\mathrm{Map}(Y)$中某个元素的同胚。我们将 h 在Y 之外按恒等映射延拓为同名同胚，因此它表示 $\mathcal{B}_n$ 中的一个元素。注意，$g \circ h(W \cup Y) = g(W \cup Y) = Z$ 和 $g \circ h(Y) = g(Y) \subset Z$，而 $g \circ h$ 在 $Z = W \cup Y$之外是刚性的，因此 $[W, g \circ h] = [Z, \mathrm{id}]$，从而 $[W, g \circ h] \in \mathrm{lk}^{\downarrow}(x)$ 且 $\eta([W, g \circ h]) = g \circ h(Y) = g(Y) = X$。也就是说，$[W, g \circ h] \in \eta^{-1}(X)$ 是另一个顶点。此外，$[W, g \circ h] = [W, g]$ 当且仅当 $g^{-1} \circ g \circ h = h$ 在 W 之外是刚性的（模同伦）。由于 Y 是 W之外的一个片段，这只有在 h （在 Σ_n 中）同伦于一个限制在 Y上为恒等映射的同胚时才可能。只有当原同胚h 在 Y 上表示 $\mathrm{Map}(Y)$中的恒等元（模去在 Z 中 ∂Y 的本质分支内进行 Dehn 扭转）时，这才有可能（该扭转可以被“吸收”到W中）。由于 $\mathrm{Map}(Y)$ 模去由在该 ∂Y 分支内进行 Dehn 扭转生成的（中心）子群后仍是无限的，因此 $\eta^{-1}(X)$ 是无限的，证毕。□

5. Connectivity properties of piece complexes

在本节中，我们将建立片复形的连通性性质，并最终推导出 $\mathcal{B}_n$ 的有限性性质。

定理 5.1. 紧曲面的片复形 $\mathcal{P}(Z, Q)$ 是k-连通的，前提是 $g(Z) \geqslant 2k + 3$ 和 $|Q| \geqslant k + 2$。

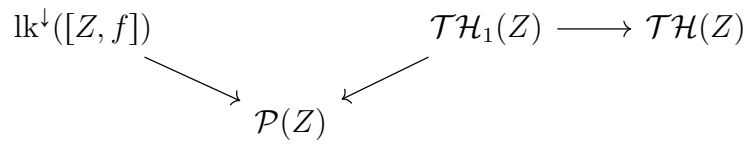
首先注意到，这意味着片复形是 Cohen–Macaulay 的。

推论 5.2。片复形 $\mathcal{P}(Z,Q)$ 是弱 *Cohen–Macaulay* 的，其维数为 $k+1$，前提是 $g(Z)\geqslant 2k+3$ 和 $|Q|\geqslant k+2$。

证明。注意，d-单形 σ 在 $\mathcal{P}(Z,\ Q)$ 中的链接同构于片复形 $\mathcal{P}(Z',\ Q')$，其中 Z' 是从 Z 中切去 σ 里的片后得到的，而 Q' 是 Q 中仍存在于 Z'里的那些边界圆的集合。于是，

$g(Z')=g(Z)-(\text{维数}(\sigma)+1)\geqslant 2k+3-\text{维数}(\sigma)-1\geqslant 2(k-\text{维数}(\sigma)-1)+3$ 且 $|Q'|=|Q|-(\text{维数}(\sigma)+1)\geqslant(k-\text{维数}(\sigma)-1)+2$。由此可知，根据定理 5.1，$\sigma$ 的链接是 $(k-\text{维数}(\sigma)-1)$–连通的，正如所需。□

为了分析片复形的连通性性质，我们将再引入两个复形：单射系缚把手复形$\mathcal{TH}_1(Z,\ Q)$，我们将看到它是关于 $\mathcal{P}(Z,\ Q)$ 的完全连接；以及系缚把手复形 $\mathcal{TH}(Z,\ Q)$，它将单射系缚把手复形包含为一个子复形。和之前一样，如果 $Q=\partial Z$，我们将简写为 $\mathcal{TH}_1(Z,\ Q)=\mathcal{TH}_1(Z)$ 和 $\mathcal{TH}(Z,\ Q)=\mathcal{TH}(Z)$。我们所用映射的示意图如下：



我们使用左箭头将连通性从片复形拉回到下降链接。我们将使用中间箭头将连通性从单射把手复形推送到片复形，并将使用从 $\mathcal{TH}_1(Z)$ 到 $\mathcal{TH}(Z)$ 的包含映射来应用劣单纯形论证，将连通性从系缚把手复形拉回到单射把手复形。系缚把手复形本身的连通性已在 [1] 中进行分析。

5.1.系缚把手复形。令 Z 表示一个紧致、连通且可定向的带边界曲面。我们称 Z 中一个避开边界 ∂Z、且同胚于单孔环面的子曲面 Z 为一个把手。

给定一个把手 T，考虑一条将 ∂T 与某个分支 $b\subset Z$ 相连的简单弧 α（或其同痕类）。需要指出的是，α 的同痕类并非相对于其端点取定，这与有时采用的做法不同。注意，$T\cup\alpha\cup b$ 的正则邻域是一个片。我们将 T 与 α 的并称为一个系缚把手，它通过系缚弧 α 系缚于 b，把手为 T。

定义 5.3（系缚把手复形）。设 Z 是一个紧致、可定向的连通曲面，Q 是 Z 的一组边界圆。系缚把手复形 $\mathcal{TH}(Z,\ Q)$ 是如下单纯复形

其 d-单形是由成对不相交的系缚把手构成的集合，每个把手都系缚于 Q 中的一个元素。

以下是 [1], 中的引理 10.12，该引理建立在 Hatcher-Vogtmann 的工作 [21]之上：

引理 5.4。系缚把手复形 $\mathcal{TH}(Z,Q)$ 是 k-连通的，前提是 Q 不为空且 $g(Z) \geqslant 2k+3$。

我们考虑系缚把手复形的以下子复形。

定义 5.5（单射系缚把手复形）。单射系缚把手复形 $\mathcal{TH}_1(Z,\ Q)$ 是 $\mathcal{TH}(Z,\ Q)$的子复形，由其中所涉及的把手系缚于 Q中两两不同的边界分支的那些单形组成。

我们之所以关注这个子复形，是因为它是片复形上的完全连接，这使我们能够推进其连通性。事实上，我们已经观察到，系绳把手连同其边界分支的一个小正则邻域同胚于一个片。这样我们便得到一个单纯映射

$$\pi : \mathcal{TH}_1(Z,Q) \to \mathcal{P}(Z,Q)\,.$$

下面给出 [1, 引理 8.8], ，其证明可原样应用于此情形：

命题 5.6. 映射 $\pi :\ \mathcal{TH}_1(Z,Q) \to \mathcal{P}(Z,Q)$ 是完全连接。

特别地，若 $\mathcal{TH}_1(Z,Q)$ 是 k-连通的，则根据命题 3.4，$\mathcal{P}(Z,\ Q)$ 也如此。因此，我们现在已将问题归结为分析单射系缚把手复形 $\mathcal{TH}_1(Z,Q)$的连通性性质。

定理 5.7. 单射系缚把手复形 $\mathcal{TH}_1(Z,Q)$ 是k-连通的，条件是 $g(Z) \geqslant 2k+3$ 和 $|Q| \geqslant k+2$。

证明. 我们从 k 开始对其作归纳，起始情形为 $k=-1$，此时结论显然。对于 $k \geqslant 0$，我们对$\mathcal{TH}(Z,Q)$中包含映射 $\mathcal{TH}_1(Z,Q)$ 使用劣单纯形论证。

考虑 $\mathcal{TH}(Z,Q)$ 中的一个单形 σ，并定义 $\bar{\sigma}$ 为 σ 中与 σ 中另一个把手连接到同一边界分支的那些系绳把手。注意，$\mathcal{TH}_1(Z,Q)$ 恰好由那些使得 $\bar{\sigma}$ 为空的单形 σ 组成，也就是说，是 $\mathcal{TH}(Z,Q)$ 的良好单形。参见图 5.1。

现在考虑一个劣单形 $\sigma = \bar{\sigma}$。至少需要两个系在同一边界分支上的把手才能构成一个劣单形。因此，

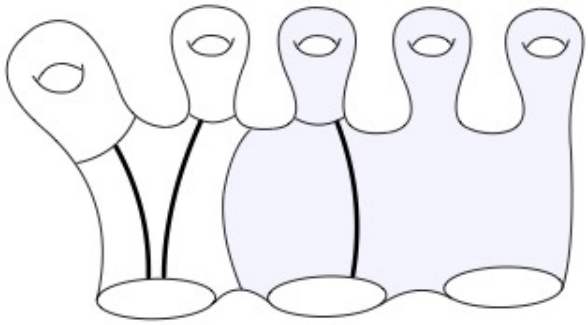


FIGURE 1. 该图展示了 Z 的一个例子，其中$g = 5$，且 $Q = \partial Z$ 有三个连通分支。这里有三个带系链的把手，它们定义了一个 2–单形 σ；而 $\bar{\sigma}$ 是由左侧两个带系链的把手张成的 1–单形。曲面 Z' 是阴影部分所示的子曲面，其亏格为 3，且有三个边界分支，但 Q' 仅由右侧两个连通分支组成。

维数$(\sigma) \geqslant 1$。因此，2 维$(\sigma) \geqslant 1 +$ 维数(σ) 或者，等价地，维数 $(\sigma) \geqslant {}^{1+}\overline{\text{维数}\quad(\sigma)}$

注意，优链接 $\mathrm{lk}^{\mathrm{good}}(\sigma)$ 同构于 $\mathcal{TH}_1(Z',\ Q')$，其中Z' 是通过切去 Z 得到的：对于σ中使用的每个边界圆，都切去该边界圆的一个邻域，以及 σ 中与之相交的所有系链和把手。集合 Q' 由 Q 中在 Z'里仍然存在的那些边界圆组成。见图 5.1。接下来，我们注意到以下不等式，它们使我们可以应用归纳假设。

$$\begin{aligned} g(Z') &= g(Z) - (\dim(\sigma) + 1) \\ &\geqslant g(Z) - 2\dim(\sigma) \\ &\geqslant 2k + 3 - 2\dim(\sigma) \\ &= 2(k - \dim(\sigma)) + 3 \end{aligned}$$

在劣单纯形中，每个被使用的边界分支都系链到至少两个把手，因此我们还得到以下估计：

$$\begin{aligned} |Q'| &\geqslant |Q| - \frac{\dim(\sigma) + 1}{2} \\ &\geqslant |Q| - \dim(\sigma) \\ &\geqslant k + 2 - \dim(\sigma) \\ &= (k - \dim(\sigma)) + 2 \end{aligned}$$

根据归纳假设，$\mathrm{lk}^{\mathrm{good}}(\sigma)$ 因而是 $(k–\dim(\sigma))$-连通的。根据命题 3.6，包含映射 $\mathcal{TH}_1(Z, Q) \hookrightarrow \mathcal{TH}(Z, Q)$ 对所有 $d \leqslant k$在 π_d 中诱导同构。由于 $\mathcal{TH}(Z, Q)$ 根据引理 5.4 是 k- 连通的，$\mathcal{TH}_1(Z, Q)$ 是 k- 连通的。□

定理 *5.1* 的证明。 该结果结合命题 5.6 和定理 5.7，并利用命题 3.4，即可得到。□

5.2. **定理 1.1 的证明**。 群 $\mathcal{B}_n$ 作用于 $\mathfrak{X}$，并保持离散 Morse 函数 $h\colon \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ 不变。根据定理 4.1，子水平复形是 $\mathcal{B}_n$-余紧的，且胞腔稳定子属于 F_∞ 型。

根据上述分析，顶点的下降链接维数为 $n-1$；对于高度为 $h \geqslant 2n$ 的顶点，它们是 $(n-2)$-连通的。由命题 4.3 和引理 4.5，下降链接是完全连接，其顶点纤维在一个有限维复形上为无限，因此根据观察 3.5，它们不可缩。

现在，Brown 判据 3.1 的假设均已验证，群 $\mathcal{B}_n$ 属于 F_{n-1} 型，但不属于 FP_n 型。

6. Abelianization

本节证明定理 1.2。论证依赖于构造来自 [4], 的纯映射类群的非平凡整数值同态；对于 n 棘面的曲面 Σ_n 这一特定情形，我们在此简要回顾相关内容。

令 γ 为一条定向曲线，将 Σ_n 的一个端 E 与其余部分分隔开，其中方向的选择使得 γ 右侧的 $\Sigma_n - \gamma$ 分支是 E 的一个邻域。那么，γ 定义了一个非零元素$[\gamma] \in H_1^{sep}(S,\ \mathbb{Z})$，即由分隔曲线的同调类张成的 $H_1(S,\ \mathbb{Z})$ 子群。

对于每个 $f \in \mathrm{PMap}(S)$ 以及 $\gamma \in H_1^{sep}(S,\ \mathbb{Z})$，[4] 的作者将一个整数 $\varphi_{[\gamma]}(f)$与之关联，该整数可以被视为 γ 与 $f(\gamma)$ 之间的“带符号亏格”（详情请参见 [4] 中的第 3 节）。随后，他们证明映射

$$\varphi_{[\gamma]}\colon \mathrm{PMap}(S) \to \mathbb{Z}$$

如此得到的是一个定义良好且非平凡的同态，它仅取决于同调类 $[\gamma]$, 参见 [4, 命题 3.3]。此外，根据 [4, 命题 4.4], ，这诱导出一个满同态

$$\Phi\colon \mathrm{PMap}(S) \to H^1_{sep}(S, \mathbb{Z}),$$

根据规则 $\Phi(f)([\gamma]) = \varphi_{[\gamma]}(f)$，其中 $H^1_{sep}(S,\ \mathbb{Z})$ 已由泛系数定理识别为 $\mathrm{Hom}(H_1^{sep}(S,\ \mathbb{Z}),\ \mathbb{Z})$。非正式地说，$\Phi(f)$ 告诉我们 f在每个端上“移转了多少亏格”。由（定理 5] 的证明） [4, 可知，Φ 是一个满同态，其核恰为 $\mathrm{PMap}_c(S)$，即紧支撑映射类群的闭包。在此时，就我们所讨论的特定情形而言，有：

定理 6.1 （ [4]的推论 6）。 $\mathrm{PMap}(\Sigma_n) = \overline{\mathrm{PMap}_c(\Sigma_n) \rtimes \mathbb{Z}^{n-1}}$。

当我们将 Φ 限制到纯子群 $P\mathcal{B}_n$ 时，Φ 的像由 $n-1$ 个柄平移 ρ_1，……，ρ_{n-1} 生成，这些平移属于 $P\mathcal{B}_n$。

尽管将 $P\mathcal{B}_n$ 限制时，我们不再具有定理 6.1 中的半直积结构，但该定理中的到 $\mathbb{Z}^{n-1}$ 的投影仍定义了一个满同态，并构成如下短正合列：

$$1 \to (\mathcal{B}_n)_c \to P\mathcal{B}_n \to \mathbb{Z}^{n-1} \to 1,$$

其中，$(\mathcal{B}_n)_c$ 是 $\mathcal{B}_n$ 与PMap$_c(\Sigma_n)$的交，这恰好是 $\mathcal{B}_n$的紧支撑元素。由于 $(\mathcal{B}_n)_c$ 是紧曲面的映射类群的直极限，Powell 的结果 [29] 意味着 $P(\mathcal{B}_n)_c^{ab} = \{0\}$，因此 $P\mathcal{B}_n^{ab} \cong \mathbb{Z}^{n-1}$。此时，$\mathcal{B}_n^{ab} = \{0\}$ 这一事实由上述内容以及自然的短正合序列可得

$$1 \to P\mathcal{B}_n \to \mathcal{B}_n \to \mathrm{Sym}(n) \to 1,$$

其中 Sym(n) 是由 n 个元素组成的对称群，而 $\mathcal{B}_n \to$ Sym(n)来自对 Σ_n的 n 端的作用。这是因为该作用可用于将 $P\mathcal{B}_n^{ab}$的生成元共轭为其逆元。这证明了定理 1.2。

我们注意到，$(\mathcal{B}_n)_c$ 是 $\mathcal{B}_n$ 的正规子群，因为紧支撑同胚的共轭仍然是紧支撑的。由上述同态可知，商群 $G = \mathcal{B}_n/(\mathcal{B}_n)_c$ 存在一个到 Sym(n) 的同态，其核为 $\mathbb{Z}^{n-1}$。不难显式构造出相应短正合序列的一个分裂，从而证明$G \cong \mathbb{Z}^{n-1} \rtimes$Sym$(n)$。因此我们得到一个短正合序列

$$1 \to (\mathcal{B}_n)_c \to \mathcal{B}_n \to (\mathbb{Z}^{n-1} \rtimes \mathrm{Sym}(n)) \to 1.$$

另一方面，Patel 和 Vlamis 的定理 4.6] 的证明（其本身依赖于 Paris 的一个结果 [27]）可以原样应用，以证明 $(\mathcal{B}_n)_c$ 没有非平凡的有限商，从而证明以下结论。

命题 6.2。 $\mathcal{B}_n$ 的每个有限商都通过到 $\mathbb{Z}^{n-1} \rtimes$对称群(n)的同态因子化。□

应用这一点和定理 1.1 可证明推论 1.3：

推论 *1.3*的证明。 首先注意，如果 $n \neq m$，那么定理 1.1 和 [19, 定理 5.24] 意味着这些群的有限性性质不同，因此它们不可能是可交换的。

如果 $n = m$、$\mathcal{B}_n$ 以及 brH_n 具有可公度性，那么在与有限指数纯子群取交之后，我们找到有限指数子群 $K < P\mathcal{B}_n$和 $J < P\mathrm{br}H_n$，使得 $K \cong J$。这里我们注意到，$P\mathrm{br}H_n$ 是相应作用于底层曲面的 n（非孤立）端上的核，而不是由纯辫子组成的子群。

应用命题 6.2，我们看到 $K^{ab} \cong \mathbb{Z}^{n-1}$，因此 $J^{ab} \cong \mathbb{Z}^{n-1}$ 也是如此。也就是说，两个阿贝尔化必然只是 $P\mathcal{B}_n$ 的阿贝尔化的限制，因而也是 $P\mathrm{br}H_n$，

分别。阿贝尔化的核因此必须分别是 $(\mathcal{B}_n)_c$ 和 $(\mathbf{br}H_n)_c$的有限指数子群。前者没有有限指数子群，而 $(\mathbf{br}H_n)_c$ 可以映射到$\mathbb{Z}$ （因为它是紧支撑辫群的直极限），因此拥有无穷多个非平凡有限指数子群。这一矛盾证明了 $\mathcal{B}_n$ 和 $\mathbf{br}H_n$ 不可公度。□

7. Marking graphs

曲面上的标记 μ 是一个裤分解，称为标记的基底$(\mu) = \bigcup_{\mathrm{i}} \alpha_{\mathrm{i}}$，并且为每个 α_i选择一条横截曲线 β_i；也就是说，一条曲线 β_i 满足 $i(\alpha_i, \beta_j) = 0$，如果 $i \neq j$ 且 $i(\alpha_i, \beta_i) = 1$，则根据 α_i 和 β_i 分别填充一个带一孔环面或四孔球面，取值为 1 或 2。Masur 和 Minsky [25]定义了一个图，其顶点是标记，并且两个标记之间相差初等变换，这种变换实质上交换 α_i 和 β_i的角色（并进行某种“清理”操作，以确保结果仍是一个标记）。令 $\mathcal{M}_n$ 表示 Σ_n的标记图。标记在映射类作用下的像仍是标记，而初等变换的定义意味着映射类群作用于标记图。

对于有限型的曲面 S，其标记图 $\mathcal{M}(S)$ 是局部有限的，且轨道映射是拟等距的，因为该作用是余紧的。然而，$\mathcal{B}_n$ 在 $\mathcal{M}_n$ 的不变分支上的作用并非余紧，因为可以找到任意多个彼此不同的标记同胚类型。此外，轨道映射甚至不是拟等距嵌入。事实上，若 μ 是一个标记，且 t_i 是在$\alpha_i \in$底(μ)上的德恩扭转，则 μ 到 $t_i(\mu)$ 的距离一致有界，而恒等元到 t_i 的距离则随着 $i \to \infty$趋于无穷大（因为这些都是有限生成群中的互异元素）。

为证明定理 1.4，我们需要以下内容。

引理 7.1。对于所有 $n \geqslant 2$ 以及任意标记 μ，$\mathcal{B}_n$ 中 μ 的稳定子要么是有限群，要么包含一个有限指数子群，该子群通过覆盖变换作用于 Σ_n。特别地，当 $n \geqslant 3$时，稳定子是有限群。

证明。在 Σ_n 上存在一个双曲度量，使得所有 $\alpha_i \in$ 基边(μ)的长度均为 1，并且所有 β_i 与 α_i 正交相交。于是，μ 的稳定子中的任意元素都通过等距变换作用于 Σ_n。引理现由以下事实得出：Σ_n 的等距变换群必然是离散的，因此对于 $n \geqslant 3$ 它是有限的；而对于 $n = 2$，其通过覆盖变换作用时则要么是有限的，要么是虚循环的。□

对于所有满足下述定理条件的 $n \geqslant 2$，构造 $\mathcal{M}_n$ 的 $\mathcal{B}_n$ 不变连通分支很容易，而该定理立即推出定理 1.4。

定理 7.2。 对于具有有限稳定子群的 $\mathcal{B}_n$ 不变连通分支 $\mathcal{M}_n^0 \subset \mathcal{M}_n$ 中的任意 μ，存在一个包含 μ 的局部有限子图 $\mathcal{X} \subset \mathcal{M}_n^0$，使得 $\mathcal{B}_n$ 在 $\mathcal{G}$ 上适当地且余紧地作用。

证明。 令 $\mathcal{G}$ 为一个有限子图，它是若干路径的并，这些路径将 μ 与其在某个固定的、属于 $\mathcal{B}_n$的有限生成集中的每个生成元作用下的像连接起来。此外，我们还假设 $\mathcal{G}$ 中的每个顶点都具有有限稳定子群。这对 $n \geqslant 3$而言是自动成立的，而对 $n = 2$而言也很容易做到。现在令 $\mathcal{X} = \mathcal{B}_n \cdot \mathcal{G}$。

显然， $\mathcal{B}_n$ 在 $\mathcal{X}$ 上余紧地作用，因为根据构造，$\mathcal{G}$的平移覆盖了 $\mathcal{X}$。我们唯一需要证明的是 $\mathcal{X}$ 是局部有限的。为此，只需证明

$$K = \{g \in \mathcal{B}_n \mid g \cdot \mathcal{G} \cap \mathcal{G} \neq \varnothing\}$$

是有限的。假设存在一个由互不相同的元素$\{g_n\} \subset K$组成的无限序列。令 $x_n \in \mathcal{G}$ 为一个满足 $y_n = g_n \cdot x_n \in \mathcal{G}$的顶点。 $\mathcal{G}$中只有有限个顶点，因此经过选取子序列（并重新编号）后， $x_n = x$ 和 $y_n = y$ 对某个 x， $y \in \mathcal{G}$成立。因此，对所有 n，都有 $g_1^{-1} g_n \cdot x = x$，于是 x 的稳定子群是无限的，矛盾。□

注 7.3. 证明 $\mathrm{Map}(S)$ 与有限型曲面 S 的标记图拟等距的意义在于，它使我们能够通过 Masur 和 Minsky 的子曲面投影及其距离公式[25]，根据局部信息对距离作出粗略估计。上文的 Dehn 扭转例子表明，我们不能指望为 $\mathcal{B}_n$得到类似的距离公式。然而，人们或许会想，是否存在某个受限的子曲面集合，使我们能够证明一个距离公式。或者，$\mathcal{M}_n$的所有元素或许仍有距离公式（只是由于它与 $\mathcal{M}_n$并非拟等距，这个公式无法迁移到 $\mathcal{B}_n$ 上）。

References

1. J. Aramayona, K.U. Bux, J. Flechsig, N. Petrosyan, and X. Wu. 康托流形的渐近映射类群及其有限性性质。arXiv 预印本 arXiv:2110.05318 (2021)。2. J. Aramayona, L. Funar. 沿康托集打孔的闭曲面的渐近映射类群。《莫斯科数学杂志》21 (2021)。3. J. Aramayona, N. G. Vlamis. 大映射类群：综述。载于 Ken'ichi Ohshika 和 Athanase Papadopoulos（编），《*Thurston* 传统中的几何与拓扑》，第12章，第459–496页。Springer，2020年。4. J. Aramayona, P. Patel, and N. G. Vlamis. 纯映射类群的第一整数上同调。*IMRN* 2020.22 (2020)：8973-8996。5. M. Bestvina, N. Brady. 群的 Morse 理论与有限性性质。《数学创刊》，129(3):445–470, 1997年。

6. M.R. Bridson and A. Haefliger. 非正曲率度量空间，数学科学基础丛书第319卷《数学科学基本原理》 *[]*。施普林格出版社，柏林，1999年。7. K. Brown，群的有限性性质。西北地区群上同调会议论文集（伊利诺伊州埃文斯顿，1985年）。《纯粹与应用代数杂志》44 (1987年)，第1–3期，45–75。8. K.-U. Bux, M. Fluch, M. Marschler, S. Witzel, M. Zaremsky, 辫式汤普森群属于 F_∞ 型。附录由 Zaremsky 撰写。《纯粹与应用数学杂志》718 (2016年)，59–101。9. F. Degenhardt, 若干无限阶循环群的群的有限性性质 ¨*opfenunendlicher Ordnung*，博士论文，法兰克福，2000年。10. G. Domat，附录由 R. Dickmann 撰写，大纯映射类群永远不是完美群。《数学研究快报》29 (3), 691–726。11. G. Domat, P. Plummer，大亏格一和零曲面的纯映射类群的第一上同调。《纽约数学杂志》26 (2020年)，322–333。12. B. Farb, D. Margalit，映射类群入门。普林斯顿数学丛书，第49卷。普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，*2012*年。13. E. Field, H. Kim, C. Leininger, and M. Loving，端周期同胚与映射环面的体积。《拓扑学杂志》16.1 (2023年): 57-105。14. S. R. Fenley，端周期曲面同胚与三维流形。《数学杂志》, 224(1):1–24, 1997年。15. L. Funar，作为映射类群的辫式霍顿群。*An. S¸tiint¸.Univ. Al. I. Cuza Ia¸si. Mat.* (N.S.) 53 (2007年)，第2期，229–240。16. L. Funar, C. Kapoudjian，关于一个零亏格万有映射类群。《几何与泛函分析》14 (2004年)，第5期，965–1012。17. L. Funar, C. Kapoudjian，辫式托勒密–汤普森群是有限呈示的。《几何与拓扑》12 (2008年)，第1期，475-530。18. L. Funar, C. Kapoudjian，一个无限亏格映射类群与稳定上同调。《数学物理通讯》287 (2009年)，第3期，784-804。19. A. Genevois, A. Lonjou, and C. Urech. 渐近刚性映射类群 I：辫式汤普森群与霍顿群的有限性性质。《几何与拓扑》26(3), 1385–1434。20. W. J. Harvey，关于 Teichm¨uller 空间中的分歧轨迹。《美国数学会汇刊》153 (1971年), 387–399。21. A. Hatcher, K. Vogtmann，曲面的系链与同调稳定性。《代数与几何拓扑》17 (2017年)，第3期，1871–1916。22. A. Hatcher and N. Wahl. 三维流形映射类群的稳定化。《杜克数学杂志》, 155(2):205–269, 2010年。23. N V Ivanov, J D McCarthy，Teichm¨uller 模- ¨ 群之间的单射同态。I,《数学创刊》135 (1999年) 425–486。24. J. Malestein, J. Tao，自相似曲面：对合与完美性。预印本，arXiv: 2106.03681。25. H. A. Masur and Y. N. Minsky. 曲线复形的几何。II. 层级结构。《几何与泛函分析》, 10(4):902–974, 2000年。

26.M.Palmer、X. Wu，具有不可数整系数同调的大型映射类群。预印本，arXiv:2212.11942。27. L. Paris，映射类群的小指标子群。《群论杂志》，13(4)：613–618，2010年。28. P. Patel、N. Vlamis，大型映射类群的代数与拓扑性质。《代数与几何拓扑》18（2018），第7期，4109–4142。29. J. Powell，关于曲面映射类群的两个定理。《美国数学会会刊》68（1978），第3期，347–350。30. N. Vlamis，三个完美映射类群。《纽约数学杂志》27（2021），468–474。

Instituto de Ciencias Matemáticas (ICMAT). Nicolás Cabrera, 13–15. 28049, Madrid, Spain

Fakultät für Mathematik. Universität Bielefeld. Postfach 100131. Universitätsstrasse 25. D-33501 Bielefeld, Germany

Department of Mathematics. Ohio State University. 231 West 18th Avenue, Columbus, OH, USA

Rice University Math Department – MS 136. P.O. Box 1892. Houston, TX 77005-1892, USA.