arXiv:2304.04739v1 [math.CO] 10 Apr 2023

广义 n-级数与德拉姆复形

S. K. DEVALAPURKAR 和 M. L. Misterka

摘要。本文旨在研究交换环 R 上“广义 n-级数”的一些基本代数性质和组合性质。这些级数是满足一个温和条件的函数 $s : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to R$ 。广义 n-级数的一个特殊例子是 q-整数 $\frac{q^n-1}{q-1} \in \mathbb{Z}[\![q-1]\!]$。给定一个广义 n-级数 s，可以定义阶乘（通过 $n!_s = \prod_{i=1}^{n} s(n)$）和二项式系数的 s-类比。我们证明，帕斯卡恒等式、二项式恒等式、卢卡斯定理和范德蒙德恒等式均有 s-类比；当广义级数为 q-整数级数时，这些结果分别特化为相应的 q-类比。我们还研究定义在整数环上的广义 n-级数的增长率。最后，我们定义 (q-)导数的一个 s-类比，并证明仿射直线上的庞加莱引理和卡蒂埃同构的 s-类比，以及一个由 Bhatt-Lurie 给出的拉回方块。

目录

1. 引言 3 1.1. 概述 3 1.2. 常用记号表 5 1.3. 致谢 5 2. s-二项式系数 6 2.1. 二项式系数的一种推广 6 2.2. 广义 n-级数的数论性质 8 2.3. s-二项式定理 9 2.4. s-卢卡斯定理 13 2.5. s-范德蒙德恒等式 16 3. 整数环上的广义 n-级数 19 3.1. 字典序较小的非负整数广义 n-级数 19 3.2. 字典序较小的非负整数 GNS 的上界 20 3.3. 严格递增整数 GNS 的下界 21 3.4. 更一般的 s-卢卡斯定理 23 4. 广义 n-级数与德拉姆复形 27 4.1. s-德拉姆复形的基本性质 27 4.2. 庞加莱引理和卡蒂埃同构的s-类比 29

这项工作的部分内容是在第一作者获得 PD 索罗斯奖学金、Inpher 和 NSF DGE-2140743 资助期间完成的。

4.3. 形式群律 n-级数与 s-导数 32 4.4. Weyl代数的一个变体 39 4.5. Bhatt-Lurie 笛卡尔方块的一个类比 42 参考文献 51

1. 引言

1.1. 摘要。 Bhatt、Drinfeld、Lurie、Morrow、Scholze及其他学者近期的工作（例如参见 [**BMS18, BS19, Sch17, Dri21, Dri22, BL22**]）表明，q-变形在算术几何中扮演着核心角色，它们对应于经典数论和代数几何概念。 q-变形理论背后的基本前提是， q-整数 $[n]_q = \frac{q^n-1}{q-1}$ 展现出许多与普通整数相似的性质。这一思想有着悠久的历史[1]：其基本思想至少可以追溯到欧拉（例如参见 [**Eul53**]）、雅可比以及对基本超几何级数的研究。导数的一个 q-类比源于 1909年 的 Jackson（参见 [**Jac09**]）。关于 q-变形微积分的阐述，读者可参阅 [**KC02**] 一书。

形式群律理论同时推广了普通整数和 q-整数（有关形式群律基础知识的简要总结，请参见回顾 4.3.1；详细论述请参见 [**Haz78, Rav86**] ）。具体而言，每个环 R 上的形式群律 F 都会为每个整数 $n \in \mathbb{Z}$ 定义一个在 R 上的幂级数序列 $\langle n \rangle$ 。对于加法形式群律 $x + y$，我们有 $\langle n \rangle = n$；而对于乘法形式群律 $x + y + xy$，则可以将 $\langle n \rangle = [n]_q$。本文旨在探讨， q-变形数学的某些方面（例如基本组合公式的 q-类比，以及 [**Sch17**]的 q-德拉姆复形的性质）是否能够推广到任意形式群律。推动我们开展这项研究的主要动机之一，是 Arpon Raksit 未发表的一项观察：同伦论方法自然地提示人们研究在前述 Bhatt-Morrow-Scholze 工作中出现的德拉姆复形的“F-类比”，以及 [**Dev23a**，第 3 节的计算。3].[2]

我们的主要观察是，定义和研究这些“F-类比物”并不需要形式群律的结构。相反，以下这种弱得多的结构就足够了：

定义 (定义 2.1.4)。固定一个环 R （始终假设为交换环且带单位元）。一个广义 n-级数（*GNS*）上的 R 是一个函数 s： 整数环$_{\geq 0} \to R$，满足：

(1) $s(0) = 0$, *(2)* $s(n)$ 对于任意 $n > 0$ 都不是零因子, *(3)* $s(n-k) \mid s(n) - s(k)$ 对于所有 $n > k > 0$。

例如，映射 s : 整数环$_{\geq 0} \to$ 整数环$[\![q-1]\!]$，将 $n \mapsto [n]_q = \frac{q^n-1}{q-1}$ 映为自身，定义了一个 GNS。

在本文正文中，我们证明，这个简单的定义足以证明经典组合恒等式的若干类似结果，也足以研究经典代数德拉姆复形的一种“s-变形”。本文的结果不依赖任何复杂工具；相反，本文旨在展示定义 2.1.4 的有效性。本文的工作似乎与 Bhargava 的 [**Bha00**], 密切相关，但我们并未尝试进行比较。

若 $n \geq 0$，令 $n!_s = \prod_{k=1}^{n} s(k)$，并令 $\binom{n}{j}_s = \frac{n!_s}{s!_s (n-j)!_s}$ 分别表示 s-类比的阶乘和二项式系数。我们的主要组合结果

[1]任何讲述 q-变形历史的资料，作者都将不胜感激！[2]由于实际的同伦理论在本文中并未发挥任何作用，感兴趣的读者可参阅下文的注 4.3.24 了解更多。

如下；关于其中一些结果的完整陈述，请读者参阅正文。

定理 A. 固定一个 *GNS* s 于 R之上。以下结论成立：

(1) 帕斯卡恒等式（命题 *2.1.3*）：

$$\binom{n}{k}_s = \binom{n-1}{k-1}_s + \frac{s(n)-s(k)}{s(n-k)}\binom{n-1}{k}_s.$$

*(2)*二项式定理和 q-二项式定理的一个 s-类比；参见定理*2.3.7*。*(3)* 卢卡斯定理（命题 *2.4.8*）：假设 $s(1)=1$ 且

$$s(a+b) \equiv s(a)+s(b) \pmod{s(a)s(b)}$$

对于所有 a，$b \in$ 整数环$_{>0}$。那么，对于任意素数 p 以及任意非负整数n_1，n_0，k_1，k_0使得 n_0，$k_0 < p$，我们有

$$\binom{n_1 p + n_0}{k_1 p + k_0}_s \equiv \binom{n_1}{k_1}\binom{n_0}{k_0}_s \pmod{s(p)}.$$

*(4) Vandermonde*恒等式和 q-*Vandermonde* 恒等式的一个类似物；见定理 *2.5.4*。

在第 3节中，我们研究整数环上广义 n-级数的增长率。例如，我们在定理 3.3.1中证明：如果 $s(n)$ 是整数环上的严格递增广义n-级数，并且对于任意 $q \in$ 整数环$_{>0}$，它都不是 $n \mapsto [n]_q$ 的标量倍数，那么对于所有 $a \geq 0$，$s(n) = \Omega_a(a^n)$。

正如根据上述动机所料，广义 n-级数的一个重要例子类别来源于形式群律。回顾一下（见回顾4.3.1），交换环 R 上的形式群律是一个二元幂级数 $x +_F y \in R[\![x,y]\!]$，满足 $(x +_F y) +_F z = x +_F (y +_F z)$，并且$x +_F y \equiv x + y$ (模 $(x,y)^2$)。如果 $n \geq 0$ 是一个整数，则 F的 n-级数通过以下公式定义

$$[n]_F(t) = \overbrace{t +_F t +_F \cdots +_F t}^{n} \in tR[\![t]\!].$$

设 $\langle n \rangle_F = \underbrace{[n]_F(t)}_{t}$。为简单起见，假设 R 是无挠的。那么，映射 $\mathbf{Z}_{\geq 0} \to R[\![t]\!]$，将 $n \mapsto \langle n \rangle_F$ 发送到 $R[\![t]\!]$，定义了一个 GNS（命题 4.3.4）。

仿射直线 $\mathbf{A}^1 = \mathrm{Spec}\ R[x]$ 的 F-德拉姆复形 定义为上链复形

$$F\Omega_{\square,\mathbf{A}^1} = \left(R[\![t]\!][x] \xrightarrow{\nabla_F} R[\![t]\!][x]dx\right),\ x^n \mapsto \langle n \rangle_F x^{n-1}dx.$$

这最初由 Arpon Raksit 在未发表的工作中定义。通常的（q-）导数的许多解析性质在 F-导数中仍然成立：例如，我们证明（见推论 4.3.15），存在一个显式幂级数 $F\log(x)$，当 F 是 q-整数广义 n-级数时，它可以还原 q-对数，并且满足性质：$\nabla_F(F\log(x)) = 1/x$。

关于 F-德拉姆复形的主要结果可概括如下：

定理 B (定理 4.3.20 和 定理 4.5.10)。设 R 是一个（例如）无挠交换环，并设 F 是 R上的形式群律。

(1) 令 $R[\![t]\!]\langle x \rangle_F$表示环$R[\![t]\!][x, \frac{x^n}{[n]_F!}]_{n\geq 0}$。则庞加莱引理成立：复形 $F\Omega_{\square,\mathbf{A}^1} \otimes_{R[\![t]\!][x]} R[\![t]\!]\langle x \rangle_F$的上同调集中在零次，其中同构于 $R[\![t]\!]$。

(2) 卡蒂埃同构成立：在设定 $\langle p\rangle_F = 0$后，复形 $F\Omega_{\square,\mathbf{A}^1}$ 的第 i个上同调与 $F\Omega_{\square,\mathbf{A}^1}$的*Frobenius* 扭曲的第 i项同构。*(3)* 存在 [**BO78, BS19**] 中 *décalage* 同构关于$F\Omega_{\square,\mathbf{A}^1}$的一个类比。*(4)* 使用上述 F-类比 $F\log(x)$ 的 q-对数，我们证明了 [**BL22**,引理 3.5.18]中笛卡尔方块的一个推广。

除了最后一部分之外，上述结果事实上可以推广到任意 GNS（而不仅仅是由形式群律产生的 GNS），但表述会稍微复杂一些；参见第4.2 节。与上述组合结果一样，定理 4.3.20 在技术上并不复杂；然而，它旨在为一个更一般的计划提供蓝图，我们将在第 4.3节末尾概述该计划。特别地，我们提出了（几乎可以肯定是错误的）猜想 4.3.22，断言赋值 $R[x_1,\ldots,x_n] \mapsto (F\Omega_{\square,\mathbf{A}^1})^{\otimes_{R[\![t]\!]} n}$ 应当能够扩展为从交换 R-代数范畴到 E_∞-$R[\![t]\!]$-代数的 ∞-范畴的函子。

1.2. 常用记号表。 本文将介绍一些贯穿全文并会被大量使用的记号。为方便读者，我们在下表中汇总了其中常用的记号。

符号	定义	文中位置
$R[1/s]$	$R[s(1)^{-1}, s(2)^{-1}, \cdots]$	(1)
$c_s(n,k)$	$\frac{s(n)-s(k)}{s(n-k)}$	(2)
$(x+y)^n_s$	由特定条件刻画	定义 2.3.5
$C_s(n,k)$	$\frac{s(n+k)-s(n)-s(k)}{s(n)s(k)}$	记号 2.4.4
$\binom{n\mid m}{j\mid k}_s$	$\sum_{m<i_1<i_2<\cdots<i_j\le m+n}\left(\prod_{\ell=1}^{j} c_s(i_\ell, i_\ell-k+j-\ell)\right)$	定义 2.5.2
$\langle n\rangle_F(t)$	$\frac{[n]_F(t)}{t}$ 对于形式群律 $F(x,y)$	回顾 4.3.1
$\ell_F(t)$, $\mathscr{E}_F(t)$	形式群律的对数和指数函数	回顾 4.3.1
$F\log(x)$	$\frac{t}{\ell_F(t)}\log(x)$	推论 4.3.15
$\mathbf{G}^{\sharp,F}_m$	“F-除幂包”的 G_m 的零截面	定义 4.5.5

1.3. 致谢。 第一作者感谢 Ben Antieau、Dimitar Jetchev 和（尤其是）Arpon Raksit 就这一主题进行的讨论，也感谢 Michael Kural 在证明第4.5节关于乘法形式群律的主要结果时给予的帮助。第二作者感谢 Pavel Etingof 提出可能存在 s 类比的 q 二项式定理。最后，两位作者都感谢 PRIMES-USA 的主任和组织者提供合作机会，并感谢他们对本文提出的意见！

2. s-二项式系数

2.1. 二项式系数的推广。回顾，二项式系数$\binom{n}{k}$ 定义为

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

q-阶乘和 q-二项式系数定义如下：

$$[n]!_q = [1]_q \cdot [2]_q \cdot \cdots \cdot [n]_q, \qquad \binom{n}{k}_q = \frac{[n]!_q}{[k]!_q[n-k]!_q},$$

其中 $[n]_q = (q^n-1)/(q-1) \in \mathbf{Z}[\![q-1]\!]$。这两个定义的相似性暗示，同时推广通常的以及$q$-二项式系数或许值得研究；在这种推广中，元素序列 $n \in \mathbf{Z}$ 和 $[n]_q \in \mathbf{Z}[\![q-1]\!]$ 将由交换环中满足某些条件的元素序列取代。

定义2.1.1。设 R 是一个环，并设 s: 整数环$_{\geq 0} \to R$ 是一个函数，使得$s(0) = 0$，且对于所有 $n > 0$， $s(n)$ 都不是零因子。对于整数 $n \geq k \geq 0$，我们将 s-阶乘 $n!_s$ 定义为

$$0!_s = 1, \quad n!_s = \prod_{k=1}^{n} s(k),$$

以及 s-二项式系数 $\binom{n}{k}_s$ 由

$$\binom{n}{k}_s = \frac{n!_s}{k!_s(n-k)!_s}.$$

注 2.1.2. 一般而言，这个商在 R中未定义；然而，它在局部化中总是有定义的

$$R[1/s] := R[s(1)^{-1}, s(2)^{-1}, s(3)^{-1}, \dots]. \tag{1}$$

我们很快将限定在这样的情形： s-二项式系数是R的元素。

s-二项式系数不一定满足任何良好的性质，因为对 s没有任何限制。我们的第一个观察如下。

命题 2.1.3. 设 R 是一个环，且 s : 整数环$_{\geq 0} \to R$ 是满足以下条件的函数：

(1) $s(0) = 0$, *(2)* $s(n)$ 对任意 $n > 0$都不是零因子，
(3) $s(n-k) \mid s(n) - s(k)$ 对所有 $n > k > 0$均成立。

那么，对于所有整数 $n \geq k \geq 0$， s 二项式系数 $\binom{n}{k}_s$ 是 R 的一个元素，并且 s 二项式系数满足一个“s-帕斯卡恒等式”：对于所有 $n > k > 0$，

$$\binom{n}{k}_s = \binom{n-1}{k-1}_s + \frac{s(n)-s(k)}{s(n-k)}\binom{n-1}{k}_s.$$

证明。事实上，注意到在局部化 $R[1/s]$ 中，我们有：

$$\begin{aligned}\frac{s(n)-s(k)}{s(n-k)}\binom{n-1}{k}_s &= \frac{s(n)-s(k)}{s(n-k)}\frac{(n-1)!_s}{k!_s(n-k-1)!_s}\\ &= \frac{s(n)\cdot(n-1)!_s}{k!_s(n-k)!_s}-\frac{s(k)\cdot(n-1)!_s}{k!_s(n-k)!_s}\\ &= \frac{n!_s}{k!_s(n-k)!_s}-\frac{(n-1)!_s}{(k-1)!_s(n-k)!_s}\\ &= \binom{n}{k}-\binom{n-1}{k-1}.\end{aligned}$$

剩下要证明的是，对于所有 $n\geq k\geq 0$，$\binom{n}{k}_s\in R$。我们将对 n 使用归纳法。

基础情形显然，因为 $\binom{0}{0}_s=1\in R$。对于归纳步骤，假设对于某个固定的 n，以及所有满足 $n-1\geq k\geq 0$ 的 k，都有 $\binom{n-1}{k}_s\in R$。令 k 为满足 $n\geq k\geq 0$ 的整数。如果 $k=0$，那么 $\binom{n}{k}_s=1\in R$。否则，我们可以应用 s-帕斯卡恒等式：

$$\binom{n}{k}_s=\binom{n-1}{k-1}_s+\frac{s(n)-s(k)}{s(n-k)}\binom{n-1}{k}_s.$$

根据归纳法假设，右侧的两个 s-二项式系数属于 R，并且根据定理陈述中的条件 (c)，$^{s}{}_{(n)-s(k)}\ s(n-k)\in R$。因此，$\binom{n}{k}_s\in R$。这就完成了归纳法证明。□

受命题 2.1.3 的启发，我们得到如下结论：

定义 2.1.4. 设 R 是一个环。广义 n级数（*GNS*）在 R 上是一个函数 s : 整数环$_{\geq 0}\to R$，满足以下条件：

(1) $s(0)=0$, (2) 对任意 $n>0$, $s(n)$ 都不是零因子, (3) 对所有 $n>k>0$, $s(n-k)\mid s(n)-s(k)$。

如果 s 是广义 n-级数，我们将定义

$$c_s(n,k):=\frac{s(n)-s(k)}{s(n-k)}. \tag{2}$$

例 2.1.5 (整数)。包含映射 s : 整数环$_{\geq 0}\to$ 整数环 显然是整数环上的 GNS。

例 2.1.6(q-整数). 考虑函数 s : 整数环$_{\geq 0}\to$ 整数环$[\![q-1]\!]$ 给定为$s(n)=[n]_q$。这定义了一个 GNS：前两个条件得到满足，因为 $[0]_q=0$,$[n]_q\neq 0$ 对于 $n>0$，并且整数环$[\![q-1]\!]$ 是一个整环。对于第三个条件，注意到

$$\begin{aligned}[n]_q-[k]_q &= \frac{q^n-1}{q-1}-\frac{q^k-1}{q-1}=\frac{q^n-q^k}{q-1}\\ &= q^k\left(\frac{q^{n-k}-1}{q-1}\right)=q^k[n-k]_q.\end{aligned}$$

因此，s是整数环$[\![q-1]\!]$上的GNS，并且我们可以应用命题2.1.3，得出 $\binom{n}{k}_q\in$ 整数环$[\![q-1]\!]$ 对所有 $n\geq k\geq 0$均成立。 s-帕斯卡恒等式化为众所周知的 q-帕斯卡恒等式：

$$\binom{n}{k}_q=\binom{n-1}{k-1}_q+q^k\binom{n-1}{k}_q.$$

注2.1.7。可以通过定义 $\binom{n}{k}_s = 0$ （当 $k < 0$ 或 $k > n$ 时），将 s-二项式系数的定义扩展到任意整数 k 。使用这一扩展定义，当 $k = 0$ 时， s-帕斯卡恒等式仍然成立：

$$\binom{n-1}{-1}_s + \frac{s(n) - s(0)}{s(n-0)}\binom{n-1}{0}_s = 0 + 1 \cdot 1 = 1 = \binom{n}{0}_s.$$

这依赖于条件 $s(0) = 0$。帕斯卡恒等式对于 $k = 0$如果 $s(0) \neq 0$ 不成立这一事实，是在 GNS 的定义中加入条件 (1) 的动机之一。

2.2. 广义 n-级数的数论性质。 本节将证明广义 n-级数的一些数论性质，这些性质将在本文后续部分中发挥作用。本节的主要结果如下：

定理 2.2.1。令 s 为环 R上的广义 n-级数。那么，对于所有a， b， $n \in$ 整数环$_{\geq 0}$，

(1) $a \mid b \implies s(a) \mid s(b)$,*(2)* $a \equiv b$ (模 n) $\implies s(a) \equiv s(b)$ (模 $s(n)$), *(3)* 理想 $(s(a)\ s(b))$ 和 $(s($ 最大公约数 $(a, b)))$ 相等。

如果 $s(1)$ 在 R 中是一个单位元，那么对于所有 a， $n \in$ 整数环$_{\geq 0}$，

(4) a *is a unit in* $\mathbf{Z}/n \implies s(a)$ *is a unit in* $R/s(n)$.

注2.2.2。 在 $R =$整数环的情形下，定理 2.2.1 中理想的等价性等价于

$$\gcd(s(a), s(b)) = \pm s(\gcd(a, b)).$$

我们将通过一系列引理证明定理 2.2.1。固定一个环 R 上的广义 n-级数s 。

引理 2.2.3. 令 a， $b \in$ 整数环$_{\geq 0}$。则， $a \mid b$ 蕴含 s（a） $\mid s$（b）。

证明。我们将使用归纳法。基础情形： $s(a) \mid s(0)$，因为 $s(0) = 0$。归纳假设：设 $n \in \mathbf{Z}_{>0}$，并假设 $s(a) \mid s(a(n-1))$。那么，根据广义 n-级数定义中的整除条件，

$$s(a) \mid s(a(n-1)) = s(an - a) \mid s(an) - s(a),$$

因此 $s(a) \mid s(an)$。 □

引理2.2.4。设 a， b， $n \in$ 整数环$_{\geq 0}$。若 $a \equiv b$（模 n）则

$$s(a) \equiv s(b) \pmod{s(n)}.$$

该引理的另一种表述方式是， s 诱导出一个从 整数环$/n$到 $R/s(n)$的良定义函数。

证明。根据同余式的定义， $n \mid a - b$，因此由引理 2.2.3 可得 $s(n) \mid s(a-b)$。广义 n-级数的定义要求 that

$$s(a - b) \mid s(a) - s(b),$$

因此 $s(n) \mid s(a) - s(b)$，这意味着 $s(a) \equiv s(b)$ (模 $s(n)$)。 □

引理 2.2.5。 设 s（1）是 R 中的一个单位元。如果 a， $n \in$ 整数环$_{\geq 0}$ ，使得 a 在整数环$/n$中是一个单位元，那么 s（a）是 R/s（n）中的一个单位元。

证明。设 b 是 a 模 n 的乘法逆元。那么， $ab \equiv 1$（模 n）。由引理 2.2.3 和引理 2.2.4,

$$s(a) \mid s(ab) \equiv s(1) \pmod{s(n)}.$$

因此，在环 $R/s(n)$中， $s(a)$ 整除 $s(1)$，后者是一个单位元（因为它在 R中是一个单位元）。因此， $s(a)$ 是 $R/s(n)$ 中的一个单位元。□

引理 2.2.6。 令 a， $b \in$ 整数环$_{\geq 0}$。那么，我们有以下理想等价关系：

$$\big(s(\gcd(a,b))\big) = \big(s(a), s(b)\big).$$

证明。令 $d =$ 最大公约数(a,b)。根据引理2.2.3, $s(d) \mid s(a)$ 和 $s(d) \mid s(b)$, 因此$s(a)$ $s(b)$ $\in \big(s(d)\big)$。这意味着

$$\big(s(d)\big) \supseteq \big(s(a), s(b)\big).$$

对于另一个方向，我们可以利用贝祖等式，将 $d = am + bn$写成某些m、 $n \in \mathbb{Z}$。将该等式模 a 取模，得到 $d \equiv bn$ （模 a）。根据引理 2.2.4， $s(d) \equiv s(bn)$（模 $s(a)$）。因此，引理 2.2.3 表明,

$$s(d) \in s(bn) + \big(s(a)\big) \subset \big(s(a), s(b)\big),$$

从而 $\big(s(d)\big) \subseteq \big(s(a)$ $s(b)\big)$。这表明这两个理想相等。

□

2.3. s-二项式定理。

回顾 2.3.1. 二项式定理和 q-二项式定理是以下两个恒等式：

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k,$$

$$(x+y)_q^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q q^{k(k-1)/2} x^{n-k} y^k,$$

其中 $(x+y)_q^n$定义为

$$(x+y)_q^n = \prod_{k=0}^{n-1} (x + q^k y) = (x+y)(x+qy)\cdots(x+q^{n-1}y).$$

注意，括号中的 $x+y$ 是记号的一部分，不能将其视为求和；有关该记号，请参见 [**KC02**] 。

注 2.3.2。 对于熟悉 q-Pochhammer 符号 $(x+y)_q^n = x^n(-y/x;q)_n$ 和 $(a;q)_n = (1+(-a))_q^n$ 的读者。

现在，我们将陈述并证明一个关于 s-二项式系数的二项式定理类比。我们首先定义符号 $(x+y)_q^n$ 的一个类比。为说明这个定义的由来，回想一下， q-类比 $(x+y)_q^n$ 是 $\mathbb{Z}[\![q-1]\!][x,y]$ 中满足以下性质的唯一多项式：

- q-导数（关于 x ）作用于 $(x+y)_q^n$为 $[n]_q(x+y)_q^{n-1}$。这类似于这样一个事实：经典导数作用于 $(x+y)^n$ ，关于 x 为 $n(x+y)^{n-1}$。

- $(x+y)_q^0 = 1$.
- 若 $y = -x$，则 $(x+y)_q^n$对所有 $n > 0$ 均为 0。

要以类似的方式定义 s-类比物 $(x+y)_q^n$，我们需要一个 s-导数；我们将在第 4 节中详细阐述这一概念。

定义 2.3.3。令 s：整数环$_{\geq 0} \to R$ 为一个 GNS。s-导数是一个 R-线性映射 ∇_s：$R[x] \to R[x]$，在单项式上由 $\nabla_s(x^n) = s(n)x^{n-1}$给出。

注记 2.3.4。当 $n = 0$ 时，我们有 $\nabla_s(x^0) = s(0)x^{-1}$。除非 $s(0) = 0$，否则这在 $R[x]$ 中没有定义；当 s 是一个 GNS 时，这总是成立。接续注-记 2.1.7，这一观察是定义 GNS 时要求 $s(0) = 0$ 的另一个原因。

现在我们可以定义 $(x+y)_s^n$：

定义 2.3.5。令 s 为 R上的 GNS，使得 $R[1/s] = R[s(1)^{-1}、s(2)^{-1}、\ldots]$。定义 $(x+y)_s^n$，对于 $n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$，为 $R[1/s][x,y]$ 中的唯一多项式，使得以下三个条件成立：

(1) $(x+y)_s^0 = 1$；(2) 对所有 $n > 0$，$(x + (-x))_s^n = 0$；(3) $\nabla_{s,\,x}(x+y)_s^n = s(n)(x+y)_s^{n-1}$。

这里，$\nabla_{s,\,x}$：$R[1/s][x,y] \to R[1/s][x,y]$ 是由“关于 x 的 s-导数”给出的算子：它只是 s-导数∇_s 的 $R[1/s][y]$-线性扩张：$R[x] \to R[x]$ 到 $R[1/s][x,y]$。

引理 2.3.6。定义 *2.3.5* 中的符号 $(x+y)_s^n$ 是良定义的：它存在且唯一。此外，$(x+y)_s^n$ 是一个次数为 n 的齐次多项式。

证明。我们将对 n 使用归纳法。对于基础情形 $n = 0$，注意到 $(x+y)_s^0 = 1$，这是由条件 (1) 得出的。

对于归纳步骤，固定 $n > 0$，并假设对所有 $k < n$，$(x+y)_s^k$ 都有定义，且是次数为 k 的齐次多项式。我们可以利用定义在单项式上的 $R[1/s][y]$-线性算子 $I_{s,\,x}$，对 $s(n)(x+y)_s^{n-1}$进行 s-反导：$R[1/s][x,y] \to R[1/s][x,y]$，其定义为 $I_{s,\,x}(x^k) = s(k+1)^{-1}x^{k+1}$。根据定义，该算子生成的多项式不含 x-次数为 0 的项。尽管这个 s-反导数

$$f(x,y) = I_{s,x}(s(n)(x+y)_s^{n-1})$$

是次数为 n 的齐次多项式（因为算子 $I_{s,\,x}$ 使 x-次数增加 1），且满足条件 (3)，但它未必等于 $(x+y)_s^n$，因为它不一定满足条件 (2)。由于 $f(x,y)$ 是次数为 n 的齐次多项式，$f(x,-x)$ 是 x^n 的一个数乘倍数，记作 ax^n。于是，多项式

$$g(x,y) = f(x,y) - a(-y)^n$$

满足

$$\nabla_{s,x} g(x,y) = \nabla_{s,x} f(x,y) = s(n)(x+y)_s^{n-1}$$

and

$$g(x,-x) = f(x,-x) - a(-(-x))^n = ax^n - ax^n = 0.$$

因此，$(x+y)_s^n$ 存在，其一个可能的值为 $g(x,y)$，它是 n 次齐次的。

还需证明 $(x+y)_s^n$ 是唯一的。我们知道，任何满足 $(x+y)_s^n$条件的多项式$h(x,y)$，在所有具有正 x 次数的项上，都必须与 $g(x,y)$ 一致，因为它们关于 x 的 s 阶导数均为 $s(n)(x+y)_s^{n-1}$。因此，$h(x,y) - g(x,y)$ 是 y^n 的一个标量倍数，设为 by^n。令

$y=-x$ 得到 $b(-x)^n = h(x,-x) - g(x,-x)$，由条件 (2) 可知其值为 0，因此 $b=0$。所以，$h(x,y) = g(x,y)$。这证明了 $(x+y)_s^n$ 是唯一的，且等于$g(x,y)$。□

回顾第 2 节，我们最初将 s-二项式系数定义为环 $R[1/s] = R[s(1)^{-1}, s(2)^{-1}, \dots]$ 的元素，后来证明了（利用 s-帕斯卡恒等式），若 s 是 GNS，则所有 s-二项式系数都是 R 的元素。下面我们将对 $(x+y)_s^n$ 做类似的处理，并在证明 $(x+y)_s^n \in R[x,y]$ 时将 s-二项式定理作为引理。下面给出 s-二项式定理:

定理 2.3.7 (s-二项式定理)。设 s 是 R 上的 *GNS*。那么，作为 $R[1/s][x,y]$ 的元素，我们有:

$$(x+y)_s^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_s x^{n-k} y^k (0+1)_s^k.$$

证明。我们对 n 使用归纳法，归纳步骤主要是将引理 2.3.6 证明中的 s-反求导算子$I_{s,\,x}$ 应用于等式两边。对于基础情形，注意到若 $n=0$，等式两边均为 1。

对于归纳步骤，固定 $n>0$，并假设 s-二项式定理对 $n-1$ 成立:

$$(x+y)_s^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}_s x^{n-k-1} y^k (0+1)_s^k.$$

将等式两边乘以 $s(n)$，应用$I_{s,x}$，并利用 $R[1/s][y]$-线性，得到:

$$\begin{aligned} I_{s,x}(s(n)(x+y)_s^{n-1}) &= s(n) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}_s I_{s,x}(x^{n-k-1}) y^k (0+1)_s^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s(n)}{s(n-k)} \binom{n-1}{k}_s x^{n-k} y^k (0+1)_s^k. \end{aligned}$$

注意到

$$\frac{s(n)}{s(n-k)} \binom{n-1}{k}_s = \frac{s(n)(n-1)!_s}{s(n-k)k!_s(n-k-1)!_s} = \frac{n!_s}{k!_s(n-k)!_s} = \binom{n}{k}_s.$$

这意味着

$$I_{s,x}(s(n)(x+y)_s^{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}_s x^{n-k} y^k (0+1)_s^k.$$

右侧几乎看起来像我们要证明的 s-二项式定理的右侧，但求和上限是 $n-1$，而不是 n。为解决这一问题，在两边加上 $y^n(0+1)_s^n$，从而得到

$$I_{s,x}(s(n)(x+y)_s^{n-1}) + y^n(0+1)_s^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_s x^{n-k} y^k (0+1)_s^k.$$

我们只需证明左端等于 $(x+y)_s^n$。

令 $g(x,y)$ 为左端。$g(x,y)$ 关于 x 的 s 导数为 $s(n)(x+y)_s^{n-1}$，因为 $I_{s,\,x}$ 是一个 s 反导数算子（$\nabla_{s,\,x}$ 的右逆），且 $y^n(0+1)_s^n$ 关于 x 为常数。这等于 s 导数

$(x+y)_s^n$ 的导数，因此 $g(x,y)$ 在所有 x 次数为正的项上都与 $(x+y)_s^n$ 相同。$g(x,y)$ 和 $(x+y)_s^n$ 都是 n 次齐次的，因此 x 次数为 0 的项只有 y^n 项。$g(x,y)$ 中 y^n 的系数为 $(0+1)_s^n$，因为 $I_{s,x}$ 不会产生 x 次数为 0 的项。$(x+y)_s^n$ 的 y^n 项为 $(0+y)_s^n$，根据齐次性，它等于 $y^n(0+1)_s^n$，因此 $(x+y)_s^n$ 中 y^n 的系数也为 $(0+1)_s^n$。所以，$g(x,y) = (x+y)_s^n$，因此

$$(x+y)_s^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_s x^{n-k} y^k (0+1)_s^k.$$

这就是归纳步骤中我们需要证明的内容。 □

为了完成本小节，我们将证明，对于所有 GNS s over R 以及所有 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，$(x+y)_s^n$ 的系数都属于 R。这意味着，s-二项式定理实际上是 $R[x,y]$ 中的多项式等式，因此无需使用更大的环 $R[1/s][x,y]$ 即可表述。

命题 2.3.8。设 s 是环 R 上的一个 *GNS*。对于所有非负整数 n，有 $(x+y)_s^n \in R[x,y]$。

证明。只需证明，对于所有非负整数 n，$(0+1)_s^n \in R$，因为利用 s-二项式定理，我们可以得出

$$(x+y)_s^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_s x^{n-k} y^k (0+1)_s^k \in R[x,y].$$

在 s-二项式定理中令 $x=-1$ 和 $y=1$，得到

$$0 = ((-1)+1)_s^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_s (-1)^{n-k} (0+1)_s^k,$$

so

$$(0+1)_s^n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}_s (-1)^{n-k-1} (0+1)_s^k. \tag{3}$$

这是 $(0+1)_s^n$ 的递推关系。

为了证明 $(0+1)_s^n \in R$，我们将对 n 使用归纳法。对于基础情形，注意到 $(0+1)_s^0 = 1$，它是 R 的一个元素。对于归纳步骤，注意如果对于所有 $k < n$ 都有 $(0+1)_s^k \in R$，那么根据递推关系(3)以及 s-二项式系数属于 R 这一事实（命题 2.1.3），

$$(0+1)_s^n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}_s (-1)^{n-k-1} (0+1)_s^k \in R.$$

归纳法至此完成。 □

注记 2.3.9。利用递推关系 (3)，可以证明

$$\frac{(-1)^n (0+1)_s^n}{n!_s} = \sum_{\ell=1}^{n} \left(\sum_{k_1+\cdots+k_\ell=n} \left(\prod_{j=1}^{\ell} \frac{(-1)}{k_\ell!_s} \right) \right),$$

其中，内层求和遍历所有总和为 n 的正整数有序 ℓ 元组 $(k_1, k_2, \ldots, k_\ell)$。将内层求和与外层求和合并，右端可以

视为对 n 的所有组合（有序划分）求和。将 $(0+1)_s^n$ 单独提出来，得到

$$(0+1)_s^n = \sum_{\pi \text{ composition of } n} (-1)^{n-|\pi|} \binom{n}{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{|\pi|}}_s .$$

该被加项是一个 s-多项式系数，定义为

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_n}_s = \frac{n!_s}{k_1!_s \cdot k_2!_s \cdot \dots \cdot k_n!_s},$$

且 $|\pi|$ 表示 π的长度。

2.4. s-卢卡斯定理。

回顾 2.4.1. 卢卡斯定理指出，对所有素数 p 以及所有整数$n_1, n_0, k_1, k_0 \in$ 整数环$_{\geq 0}$，使得 $n_0, k_0 < p$,

$$\binom{n_1 p + n_0}{k_1 p + k_0} \equiv \binom{n_1}{k_1}\binom{n_0}{k_0} \pmod{p}.$$

存在该恒等式的 q 类比，称为 q-卢卡斯定理:

$$\binom{n_1 p + n_0}{k_1 p + k_0}_q \equiv \binom{n_1}{k_1}\binom{n_0}{k_0}_q \pmod{[p]_q}.$$

只要将模数 $[p]_q$替换为圆分多项式 $\Phi_p(q)$，那么当 p 为合数时，这个恒等式也成立。注意， q-卢卡斯定理右侧的第一个二项式系数并非 q-二项式系数。

下面给出卢卡斯定理的一个 s-类比:

定理 2.4.2 (s-卢卡斯定理)。 设 s 是 R 上的 *GNS*，满足 $s(1) = 1$ 且

$$s(a+b) \equiv s(a) + s(b) \pmod{s(a)s(b)} \tag{4}$$

对所有 $a, b \in$ 整数环$_{>0}$均成立。那么，对任意素数 p 以及满足 $n_0, k_0 < p$的任意非负整数 n_1, n_0, k_1, k_0，都有

$$\binom{n_1 p + n_0}{k_1 p + k_0}_s \equiv \binom{n_1}{k_1}\binom{n_0}{k_0}_s \pmod{s(p)}.$$

注 2.4.3。 定义 $\Phi_n(s) = \prod_{d|n} s(d)^{\mu(n/d)}$，其中 μ 表示 Möbius 函数。注意，Möbius 反演蕴含恒等式 $s(n) = \prod_{d|n} \Phi_n(s)$。可以证明 s-卢卡斯定理的一个“复合版本”，其中 $s(p)$ 被 $\Phi_n(s)$ 替换，但证明更为复杂。

本节余下部分中，我们固定 GNS s over R。为简化 s-Lucas 定理的表述，我们将使用以下记号:

记号 2.4.4. 对于整数 $a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$，我们定义

$$C_s(a,b) = \frac{s(a+b) - s(a) - s(b)}{s(a)s(b)} \in R[1/s].$$

因此，定理 2.4.2 中的附加条件 (4) 等价于：对于所有 $a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$， $C_s(a,b)$ 在 R 中有定义。

引理 2.4.5。 假设对所有 a， $b \in$ 整数环$_{>0}$， C_s（a， b）在 R 中有定义。那么，对于所有整数 $m > 0$ 和 $n > k \geq 0$,

$$c_s(mn, mk) \equiv 1 \pmod{s(m)}.$$

证明。根据定义，

$$c_s(mn, mk) - 1 = \frac{s(mn) - s(mk) - s(mn - mk)}{s(mn - mk)} = s(mk)C_s(mk, mn - mk).$$

由引理2.2.3， $s(m) \mid s(mk)$，所以右端可被 $s(m)$整除。因此， $c_s(mn, mk) - 1 \equiv 0$ (模 $s(m)$)。□

注记 2.4.6。这个引理的一个推论是一个有趣的事实：如果我们对每个正整数 m定义"重新缩放的"GNS $s_m(n) = s(mn)$，那么当我们模 $s(m)$化简时， s_m-二项式系数的帕斯卡恒等式与通常的帕斯卡恒等式相同。这意味着以下同余式：

引理 2.4.7。 假设对所有 a， $b \in$ 整数环$_{>0}$都定义了 $C_s(a, b)$。对于所有整数 $m > 0$ 和 $0 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k}_{s_m} \equiv \binom{n}{k} \pmod{s(m)}.$$

证明。我们将对 n 使用归纳法。对于基础情形，注意到如果 $n = 0$那么 $k = 0$, 因此两边均为1。对于归纳步骤，假设当用 $n - 1$ 替换 n 时，所需的命题为真。然后：

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k}_{s_m} &= \binom{n-1}{k-1}_{s_m} + c_{s_m}(n,k)\binom{n-1}{k}_{s_m} && \text{由 } s\text{-帕斯卡恒等式（命题 2.1.3），} \\
&= \binom{n-1}{k-1}_{s_m} + c_s(mn,mk)\binom{n-1}{k}_{s_m} && \text{by definition of } c_{s_m}, \\
&\equiv \binom{n-1}{k-1}_{s_m} + \binom{n-1}{k}_{s_m} && \text{by Lemma 2.4.5,} \\
&\equiv \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} && \text{by inductive hypothesis,} \\
&= \binom{n}{k} \pmod{s(m)} && \text{by Pascal's identity.}
\end{aligned}$$

因此，由归纳法可知，这对所有 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ 都成立。 □

定理 2.4.2 是一个略作变体的结果。

命题 2.4.8 （另一个 s-卢卡斯定理）。 设 s 是一个 *GNS*，满足 $s(1) = 1$。设 p 是素数，并设 n_1， n_0， k_1， $k_0 \in$ 整数环$_{\geq 0}$，使得 n_0， $k_0 < m$。那么，

$$\binom{n_1 p + n_0}{k_1 p + k_0}_s \equiv \binom{n_1}{k_1}_{s_p}\binom{n_0}{k_0}_s \pmod{s(p)},$$

其中 s_p 是注记 *2.4.6* 中的重缩放 *GNS*。

定理 2.4.2 的证明。由命题 2.4.8 和引理 2.4.7 可立即得到。□

注记 2.4.9. 命题 2.4.8 只是定理 2.4.2 的一个变体：将 $\binom{n_1}{k_1}$ 替换为$\binom{n_1}{k_1}_{s_p}$，并且不要求 $C_s(a, b)$ 是 R 的元素。

在我们完整地证明命题 2.4.8之前，我们将证明 $n_0 = k_0 = 0$ 的特殊情形。然后，我们将在一般结果的证明中将这一情形用作引理。

定理2.4.8的证明（在 $n_0 = k_0 = 0$ 的情况下）。展开 s-二项式系数 $\binom{pn}{pk}_s$ 的定义，我们得到

$$\binom{pn}{pk}_s = \frac{s(pn)s(pn-1)\cdots s(pn-pk+1)}{s(pk)s(pk-1)\cdots s(1)}.$$

根据引理2.2.5， $s(pn-j)$对于所有不被 p整除的 j 都是模 $s(p)$ 的单位元。结合引理 2.2.4，这意味着我们可以用 $s(pk-j)$ 约去 $s(pn-j)$（因为它们模 $s(p)$ 同余且都是单位元）。完成所有这些约分后，我们剩下

$$\binom{pn}{pk}_s = \frac{s(pn)s(p(n-1))\cdots s(p(n-k+1))}{s(pk)s(p(k-1))\cdots s(p)},$$

这正是 $\binom{n}{k}_{s_p}$。这意味着

$$\binom{pn}{pk}_s \equiv \binom{n}{k}_{s_p} \pmod{s(p)}.$$

将此与 $\binom{n}{k}_{s_p}$ 和 $\binom{n}{k}$ 的同余式结合，我们得到

$$\binom{pn}{pk}_s \equiv \binom{n}{k} \pmod{s(p)},$$

这是定理 2.4.8 在 $n_0 = k_0 = 0$ 时的特殊情形。 □

现在我们将把这一点扩展到有效范围 $0 \le n_0 < p$ 内的 n_0 的任意值。

$k_0 = 0$情形下的定理2.4.8的证明。我们已经在上文证明了 $n_0 = 0$的命题 2.4.8，因此令 $0 < n_0 < p$。注意， s-二项式系- 数的定义表明

$$s(n-k)\binom{n}{k}_s = \frac{n!_s}{k!_s(n-k-1)!_s} = s(n)\binom{n-1}{k}_s.$$

因此，

$$s(p(n_1-k)+n_0)\binom{pn_1+n_0}{pk}_s = s(pn_1+n_0)\binom{pn_1+n_0-1}{pk}_s.$$

由于 n_0 是模 p 的单位元，我们看到 $s(p(n_1-k)+n_0)$ 是模 $s(p)$ 的单位元。但根据引理 2.2.4， $s(p(n_1-k)+n_0)$ 与 $s(pn_1+n_0)$ 同余。由于二者都是单位元，这意味着

$$\binom{pn_1+n_0}{pk}_s \equiv \binom{pn_1+n_0-1}{pk}_s \pmod{s(p)}.$$

一个简单的归纳法证明给出

$$\binom{pn_1+n_0}{pk}_s \equiv \binom{pn_1}{pk}_s \pmod{s(p)}.$$

由此可得

$$\binom{pn_1+n_0}{pk}_s \equiv \binom{pn_1}{pk}_s \equiv \binom{n_1}{k} = \binom{n_1}{k}\binom{n_0}{0}_s \pmod{s(p)},$$

这正是 s-卢卡斯定理，其中 $k_0 = 0$。 □

最后，我们将通过归纳法将其推广到 k_0介于 0 和 $p-1$ 之间的任意值。

定理 2.4.8 的一般性证明。我们将对 k_0 使用归纳法。我们已经证明了上面的基础情形 $k_0 = 0$ 。假设我们已经证明归纳假设

$$\binom{pn_1 + n_0}{pk_1 + k_0 - 1}_s \equiv \binom{n_1}{k_1}\binom{n_0}{k_0 - 1}_s \pmod{s(p)}$$

对某个介于 0 和 $p-2$ （或 $0 < k_0 < p$）之间的 $k_0 - 1$ 成立。我们将证明，将 $k_0 - 1$ 替换为 k_0 后，它仍然成立。注意，对所有整数 $1 \leq k \leq n$,

$$s(k)\binom{n}{k}_s = \frac{n!_s}{(k-1)!_s(n-k)!_s} = s(n-k+1)\binom{n}{k-1}_s,$$

so

$$s(pk_1 + k_0)\binom{pn_1 + n_0}{pk_1 + k_0}_s = s(p(n_1 - k_1) + n_0 - k_0 + 1)\binom{pn_1 + n_0}{pk_1 + k_0 - 1}_s.$$

模 s（p）化简，得到

$$s(k_0)\binom{pn_1 + n_0}{pk_1 + k_0}_s \equiv s(n_0 - k_0 + 1)\binom{pn_1 + n_0}{pk_1 + k_0 - 1} \pmod{s(p)}.$$

So

$$\begin{aligned} s(k_0)\binom{pn_1 + n_0}{pk_1 + k_0}_s &\equiv s(n_0 - k_0 + 1)\binom{pn_1 + n_0}{pk_1 + k_0 - 1} \\ &\equiv \binom{n_1}{k_1} s(n_0 - k_0 + 1)\binom{n_0}{k_0 - 1}_s \\ &= \binom{n_1}{k_1} s(k_0)\binom{n_0}{k_0}_s \pmod{s(p)}. \end{aligned}$$

由于 $0 < k_0 < p$, s（k_0）是模 s（p）的单位元，因此可以从等式两边约去它，得到所需的同余式。因此，归纳证明完成。□

当环 R 是整数环时，有一个 s-卢卡斯定理的版本，允许 p 取任意自然数，而不仅仅是素数；参见定理 3.4.4。

2.5. s-范德蒙德恒等式。

回顾 2.5.1. 经典 Vandermonde 恒等式指出

$$\binom{m+n}{k} = \sum_j \binom{m}{k-j}\binom{n}{j};$$

它有一个 q-类比，称为 q-Vandermonde 恒等式:

$$\binom{m+n}{k}_q = \sum_j \binom{m}{k-j}_q \binom{n}{j}_q q^{j(m-k+j)}.$$

要陈述 Vandermonde 恒等式的一个 s-类比，我们需要一个定义。

定义 2.5.2. 对于 $m, n, k, j \in$ 整数环，满足 $0 \leq j \leq n$ 且 $0 \leq k - j \leq m$，定义

$$\binom{n|m}{j|k}_s = \sum_{I \subseteq (m, m+n] \cap \mathbf{Z} \atop |I| = j} \left(\prod_{\ell=1}^{j} c_s(i_\ell, n - (k - j + \ell)) \right),$$

其中 $I = \{i_1 < \cdots < i_j\}$。我们还对 $j < 0$ 或 $j > n$设定 $\binom{n|m}{j|k}_s = 0$。

注 2.5.3. 对于 $s(n) = n$，定义 2.5.2 中求和号内的乘积为 1，因此该和就是集合 $(m,\ m+n]\cap$整数环）的 j 元子集的数量，即 $\binom{n}{j}$。从这个意义上说，$\binom{n}{j}_s$ 是 $\binom{n}{j}$ 子集计数定义的一个 s 类比，它依赖于两个额外参数 m 和 k。另一类 s 二项式系数$\binom{n}{j}_s$ 则是 $\binom{n}{j}$代数定义的一个 s 类比。

定理 2.5.4 (s**-范德蒙德恒等式)。** 对所有 $m,n,k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 满足 $k\leq m+n$,

$$\binom{m+n}{k}_s=\sum_j\binom{m}{k-j}_s\binom{n}{j}_s,$$

其中求和遍历所有满足 $0\leq j\leq n$ 且 $0\leq k-j\leq m$ 的 $j\in$ 整数环 。

问题 2.5.5。如 [Sas18], 所述，q-范德蒙德恒等式对于 $\binom{m+n}{k}_q$ 可理解为源自动机胞腔分解的结果，该分解作用于 Grassmann 流形 $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^{m+n})$。定理 2.5.4 是否有动机解释？（本文其他部分证明的其他组合恒等式的 s-类比式也可以提出类似的问题。）

定理 2.5.4 的证明需要一个预备引理，它可视为 $\binom{n}{j}_s$ 的帕斯卡恒等式的类比。

引理 2.5.6. 对于所有满足 $0\leq k-j\leq m$ 的 $m,n,k,j\in$整数环，

$$\binom{n}{j}_s=\binom{n-1}{j}_s+c_s(m+n,m+n-k)\binom{n-1}{j-1}_s.$$

注意，这包括 $j<0$ 和 $j>n$ 这两种情况。

证明。我们将根据 I 是否包含 $m+n$，把 $\binom{n}{j}_s$ 的定义中的和拆分为两个和。若 $m+n\notin I$，则 I 遍历 $(m,m+n-1]\cap\mathbb{Z}$ 中所有由 j 个元素组成的子集。若 $m+n\in I$，则将其移除，得到 $(m,m+n-1]\cap\mathbb{Z}$ 中由 $(j-1)$ 个元素组成的子集。然后，由于 $i_j=m+n$，我们必须把乘积中的 $\ell=j$ 项提出来。因此我们有

$$\begin{aligned}
\binom{n}{j}_s&=\sum_{\substack{I\subseteq(m,m+n]\cap\mathbf{Z}\\|I|=j}}\left(\prod_{\ell=1}^{j}c_s(i_\ell,i_\ell-(k-j+\ell))\right)\\
&=\sum_{\substack{I\subseteq(m,m+n]\cap\mathbf{Z}\\|I|=j\\m+n\in I}}\left(\prod_{\ell=1}^{j}c_s(i_\ell,i_\ell-(k-j+\ell))\right)+\sum_{\substack{I\subseteq(m,m+n-1]\cap\mathbf{Z}\\|I|=j}}\left(\prod_{\ell=1}^{j}c_s(i_\ell,i_\ell-(k-j+\ell))\right)\\
&=\sum_{\substack{I\subseteq(m,m+n-1]\cap\mathbf{Z}\\|I|=j-1}}c_s(m+n,m+n-(k-j+j))\left(\prod_{\ell=1}^{j-1}c_s(i_\ell,i_\ell-(k-j+\ell))\right)+\binom{n-1}{j}_s\\
&=c_s(m+n,m+n-k)\binom{n-1}{j-1}_s+\binom{n-1}{j}_s.
\end{aligned}$$

重新排列后，证明即告完成。 □

定理 2.5.4 的证明。我们将对 n 使用归纳法来证明这一点。对于基础情形，注意如果 $n=0$，那么求和范围内的所有 j 都满足

$0 \leq j \leq 0$，因此要么求和为空（如果 $k-0>m$），要么只有一项，即 $j=0$（如果 $k-0 \leq m$）。定理的条件要求 $k \leq m+n=m$，因此该和恰有一项：

$$\sum_j \binom{m}{k-j}_s \binom{n}{j}\middle|\binom{m}{k}_s = \binom{m}{k}_s \binom{0}{0}\middle|\binom{m}{k}_s.$$

我们要证明这就是 $\binom{m}{k}_s$。$\binom{0}{0}\middle|\binom{m}{k}_s$ 的定义给出了这个相当退化的恒等式

$$\binom{0}{0}\middle|\binom{m}{k}_s = \sum_{\substack{I \subseteq (m,m] \cap \mathbf{Z} \\ |I|=0}} \left(\prod_{\ell=1}^{0} c_s(i_\ell, i_\ell - (k+\ell)) \right) = \sum_{I \subseteq \emptyset} 1 = 1,$$

由此完成基础情形。

对于归纳步骤，假设将 n 替换为 $n-1$ 后定理仍成立。我们首先将 s-Pascal 恒等式的一个变体应用于 $\binom{m+n}{k}_s$，并利用恒等式 $\binom{n}{k}_s = \binom{n}{n-k}_s$ 将其“翻转”：

$$\begin{aligned}
\binom{m+n}{k}_s &= \binom{m+n}{m+n-k}_s \\
&= \binom{m+n-1}{m+n-k-1}_s + c_s(m+n, m+n-k)\binom{m+n-1}{m+n-k}_s \\
&= \binom{m+n-1}{k}_s + c_s(m+n, m+n-k)\binom{m+n-1}{k-1}_s.
\end{aligned}$$

归纳假设给出：

$$\begin{aligned}
&\binom{m+n-1}{k}_s + c_s(m+n, m+n-k)\binom{m+n-1}{k-1}_s \\
&= \sum_j \binom{m}{k-j}_s \binom{n-1}{j}\middle|\binom{m}{k}_s + c_s(m+n, m+n-k) \sum_j \binom{m}{k-1-j}_s \binom{n-1}{j}\middle|\binom{m}{k-1}_s \\
&= \sum_j \binom{m}{k-j}_s \binom{n-1}{j}\middle|\binom{m}{k}_s + c_s(m+n, m+n-k) \sum_j \binom{m}{k-j}_s \binom{n-1}{j-1}\middle|\binom{m}{k-1}_s \\
&= \sum_j \binom{m}{k-j}_s \left(\binom{n-1}{j}\middle|\binom{m}{k}_s + c_s(m+n, m+n-k)\binom{n-1}{j-1}\middle|\binom{m}{k-1}_s \right).
\end{aligned}$$

根据引理 2.5.6，这等于

$$\sum_j \binom{m}{k-j}_s \binom{n}{j}\middle|\binom{m}{k}_s,$$

这就完成了归纳法。 □

3. 整数环上的广义 n-级数

3.1. 字典序较小的非负整数广义 n-级数。在对广义 n-级数进行计算时，若能有一些在 Z 上字典序较小（当 n 取较小值时接近 0）的例子，会很有帮助。我们将只考虑始终非负的整数 GNS。我们已经见过一些相对较小的整数广义 n-级数的例子： $s(n) = n$ 和$s(n) = [n]_q$。在介绍构造字典序较小 GNS 的算法之前，我们需要先给出一个定义：

定义3.1.1。设 R 是一个环，并设 $N \in$ 整数环$_{\geq 0}$。部分广义 n-级数是一个函数 s：$\{0, 1, \ldots, N\} \to R$，满足 $s(0) = 0$， $s(n)$ 对于$0 < n \leq N$不是零因子，并且对于所有 $0 \leq k \leq n \leq N$， $s(n-k) \mid s(n) - s(k)$。部分 GNS s 的扩张 是一个 GNS，它在 s的定义域上与 s 一致。

给定一个部分 GNS

$$s : \{0, 1, \ldots, N\} \to \mathbf{Z}_{\geq 0}$$

我们可以使用贪心算法来构造字典序最小的非负 GNS $\widetilde{s}$，它是 s 的扩张。

定义3.1.2。设给定一个部分 GNS s： $\{0, 1, \ldots, N\} \to$整数环$_{\geq 0}$。按如下方式定义函数 $\widetilde{s}$：整数环$_{\geq 0} \to$ 整数环$_{\geq 0}$： $\widetilde{s}(n) = s(n)$对于 $0 \leq n \leq N$，并且对于每个 $n > N$，我们根据 $\widetilde{s}(k)$ 的先前取值定义 $\widetilde{s}(n)$，使限制 $\widetilde{s}|_{\{0,1,\ldots,n\}}$ 成为部分 GNS 的最小正整数。

$\widetilde{s}$ 定义良好这一事实并非显然。我们必须证明，在算法的每一步中， $\widetilde{s}(n)$都存在。实际上，我们将证明一个更强的定理：

定理 3.1.3. *考虑以下在整数环上构造任意非负 GNS 的递归构造：从 $s(0) = 0$ 开始，并对每个按递增顺序从1 开始的 N，选择 $s(N)$ 作为一个任意的整数，使得 $s|_{\{0,1,\ldots,N\}}$ 是一个部分 GNS。无论作出何种选择，总是可以继续下去（绝不会产生矛盾）。*

证明。假设我们有一个定义域为 $\{0, 1, \ldots, N-1\}$ 的部分 GNS s，并且希望选择 $s(N)$。我们必须证明，存在 $s(N)$，使得对于所有 $0 < k < N$、 $s(N-k)$， $\mid s(N) - s(k)$。这等价于 $s(N) \equiv s(k)$（模 $s(N-k)$），因此我们实际上得到了一个线性同余式组。根据广义中国剩余定理，只要任意两个同余式不相互矛盾，该同余式组就有解。我们想证明，将两个同余式 $s(N) \equiv s(N-k)$（模 $s(k)$）和 $s(N) \equiv s(N-j)$（模 $s(j)$）模最大公约数($s(k)$ $s(j)$) 化简后，它们会变成同一个同余式。也就是说，我们想证明

$$s(N-k) \equiv s(N-j) \pmod{\gcd(s(k), s(j))}.$$

由引理 2.2.6， $\gcd(s(k)\ s(j)) = \pm s(\gcd(k, j))$。又由于

$$N - k \equiv N \equiv N - j \pmod{\gcd(k, j)},$$

所需的同余式必定成立，这是由引理 2.2.4 得出的。 □

我们已经看到，正整数的许多数论性质对于任意 GNS 仍然成立。然而， $s(n) = n$ 与其他 GNS 之间存在一些重要差异。例如，若 $n = p^j m$ 且 $p \nmid m$，则 n/p^j是模 p 的单位元。对于其他广义 n-级数，这通常并不成立；利用定理 3.1.3，我们可以构造一个反例。

例 3.1.4. 令 s 为定义域为 $\{0,1,\dots,6\}$、取值为 0、1、2、3、10、11、12 的部分 GNS 的扩张。可以手动验证，这构成一个部分 GNS。对于这个 GNS,

$$\frac{s(6)}{s(2)} = \frac{12}{2} = 6 \equiv 0 \pmod{s(2)}.$$

3.2.关于字典序较小的非负整数 GNS 的一个上界。在本节中，我们将把部分广义 n-级数写成数字列表，其中列表中的第一项是 $s(0)$。例如：

例 3.2.1. 通过函数 $s:\{0,1,2\} \to$ 整数环$_{\geq 0}$ 给定的 $0 \mapsto 0$, $1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 3$，定义一个部分广义 n-级数 0, 1, 3。若将定义 3.1.2 的算法应用于部分广义 n-级数 $0, 1, k$，其中 $k \in$ 整数环$_{>0}$，我们得到一个广义 n-级数 $0, 1, k, 1, k, \dots$，其中第 n 项在 $n = 0$ 时为 0，在 n 为奇数时为 1，在 n 为偶数且非零时为 k。若从一个更长的部分广义 n-级数 s 开始，例如 0, 1, 3, 4，那么广义 n-级数 $\widetilde{s}$ 开头为

$$0, 1, 3, 4, 9, 19, 552, 22081,$$

而接下来的几项是

$$219440979, 2669857856653708, 6558922971496604200448626056129.$$

当 n 增大时，这似乎增长得非常快，每一项的位数几乎都会翻倍。正如我们将看到的，$\widetilde{s}(n)$ 有界，且不超过

$$\widetilde{s}(n) < 12^{2^{n-4}}, \qquad n \geq 4, \text{ and}$$
$$\widetilde{s}(n) = \Omega_a(a^n), \qquad \forall a \geq 0.$$

上界（定理 3.2.5 的一个特例）将在下文证明，下界（定理 3.3.1 的一个特例）将在下一小节证明。

让我们首先证明 $\widetilde{s}$ 是严格递增的。

引理 3.2.2。 设 $N \geq 3$，并设 $s:\ \{0,1,\dots,N\} \to$ 整数环$_{\geq 0}$ 是一个严格递增的部分广义 n-级数。那么，$\widetilde{s}$ 也是严格递增的。

注记 3.2.3。 条件 $N \geq 3$ 很重要，因为我们已经看到，如果 $s = 0$，1，3（因此 $N = 2$），那么 $\widetilde{s} = 0$，1，3，1，3，.....，这并不是严格递增的。

证明。注意到 $s(2) > s(1) \geq 1$。令 $n > N$。我们将证明 $\widetilde{s}(n) > \widetilde{s}(n-1)$。根据引理 2.2.4，$\widetilde{s}(n) \equiv s(1)$（模 $s(n-1)$），因此要么 $\widetilde{s}(n) = s(1)$，要么$\widetilde{s}(n) > s(n-1)$。第一种情况不可能成立，因为 $\widetilde{s}(n) \equiv s(2)$（模 $\widetilde{s}(n-2)$），且 $\widetilde{s}(n-2) \geq s(2) > s(1)$。因此，$\widetilde{s}(n) > \widetilde{s}(n-1)$。□

给定所有 $1 \leq k < n$ 对应的 $\widetilde{s}(k)$ 的值，只要 $\widetilde{s}$ 严格递增，$\widetilde{s}(n)$ 就有一个上界：

引理 3.2.4. 令 $s:\ \{0,1,\dots,N\} \to$ 整数环 为一个严格递增的部分广义n-级数，且 $N \geq 3$。那么，对于所有 $n > N$，

$$\widetilde{s}(n) < \operatorname{lcm}\{\widetilde{s}(k) \mid 0 < k < n\}.$$

证明。回顾一下，$\widetilde{s}$（定理 3.1.3）存在性的证明利用广义中国剩余定理，对所有 $0 < k < n$，由 $\widetilde{s}(k)$ 构造出 $\widetilde{s}(n)$。对于每个 $0 < k < n$，同余式为 $x \equiv \widetilde{s}(n-k)$（模 $\widetilde{s}(k)$），因此广义中国剩余定理证明了存在唯一解 x 模 $L =$ 最小公倍数$\{\widetilde{s}(k) \mid 0 < k < n\}$。

因此，存在一个同余式组的解，其中包含 $0 < x \leq L$。根据定义 3.1.2，最小正解是 $\widetilde{s}(n)$，所以 $\widetilde{s}(n) \leq L$。我们只需证明 $\widetilde{s}(n) \neq L$。

反设 $\widetilde{s}(n) = L$。那么，根据引理 2.2.4，$L \equiv \widetilde{s}(1)$（模 $\widetilde{s}(n-1)$）。但根据 L 的定义，L 可被 $\widetilde{s}(n-1)$ 整除，因此 $\widetilde{s}(1)$ 也可被 $\widetilde{s}(n-1)$ 整除。由于 $n-1 > N-1 > 1$，根据引理 3.2.2，$\widetilde{s}(1) < \widetilde{s}(n-1)$，这就产生了矛盾。□

利用集合的最小公倍数不大于其乘积这一事实，我们可以证明以下上界：

定理 3.2.5。设 $s\colon \{0,1,\dots,N\} \to$ 整数环 是一个严格递增的广义 n-级数部分序列，且满足 $N \geq 3$。那么，对于所有 $n > N$，

$$\widetilde{s}(n) < \Pi^{2^{n-(N+1)}},$$

其中 $\Pi = \prod_{k=1}^{N} s(k)$。

证明。我们将使用强归纳法。假设 $n > N$，并且对于所有 k，其严格位于 N 和 n 之间，

$$\widetilde{s}(k) < \Pi^{2^{k-(N+1)}}.$$

根据引理 3.2.4 和归纳假设，

$$\begin{aligned}
\widetilde{s}(n) &< \operatorname{lcm}\{\widetilde{s}(k) \mid 0 < k < n\} \leq \prod_{k=1}^{n-1} \widetilde{s}(k) \\
&\leq \left(\prod_{k=1}^{N} s(k)\right)\left(\prod_{k=N+1}^{n-1} \Pi^{2^{k-(N+1)}}\right) \\
&= \Pi \cdot \prod_{k=0}^{n-(N+2)} \Pi^{2^k} = \Pi \cdot \Pi^{\left(\sum_{k=0}^{n-(N+2)} 2^k\right)} \\
&= \Pi \cdot \Pi^{2^{n-(N+1)}-1} = \Pi^{2^{n-(N+1)}}.
\end{aligned}$$

归纳法至此完成。 □

注 3.2.6. 理解该定理的另一种方式是，递归定义的序列

$$a_n = \begin{cases} s(n) & \text{if } 0 \leq n \leq N, \\ \prod_{k=1}^{n-1} a_k & \text{if } n > N \end{cases}$$

对所有 $n > N$ 都恰好等于 $\Pi^{2^{n-(N+1)}}$，并且我们知道 $\widetilde{s}(n)$ 满足这一递推关系，但在 $n > N$ 时等式替换为 $<$，因此应当有 $\widetilde{s}(n) < a_n$ 对所有 $n > N$ 成立。

3.3. 严格递增整数广义 n-级数的下界。在上一节中，我们证明了部分 GNS 0, 1, 3, 4 的字典序最小扩张的一个上界，同时也陈述了一个下界。本小节旨在通过证明一个更一般的结果来证明这个下界。

定理 3.3.1。设 $s(n)$ 是整数环 $\mathbf{Z}$ 上的严格递增广义 n级数，且对于任意 $q \in \mathbf{Z}_{>0}$，它都不是 $n \mapsto [n]_q$ 的标量倍数。那么，对于所有$a \geq 0$，$s(n) = \Omega_a(a^n)$ 。

在此定理陈述中，我们采用约定：$[n]_1 = n$。为了证明定理3.3.1，我们将使用以下引理：

引理 3.3.2. 设 s 满足定理 *3.3.1* 的条件，并固定一个非负整数 a。那么，对于所有充分大的 n，

$$s(n+1) \neq as(n) + s(1).$$

证明. 取 $k \in$ 整数环$_{\geq 0}$，使得 $s(k+1) \neq as(k) + s(1)$。这样的 k 必然存在，因为否则对所有 $n \in$ 整数环$_{\geq 0}$，都有 $s(n+1) = as(n) + s(1)$。由此通过归纳法可得 $s(n) = s(1)[n]_q$，其中对所有 n 都有 $q = a$，这与我们关于 s 的假设矛盾。接下来，选取一个足够大的整数 N，使得

$$s(N-k) > \max\{s(k+1), as(k) + s(1)\}.$$

这总是可行的，因为 $s :$ 整数环$_{\geq 0} \to$ 整数环是严格递增的，因此无界。

为证明该引理，我们将证明对所有 $n \geq N$，都有 $s(n+1) \neq as(n) + s(1)$。反设存在 $n \geq N$，使得

$$s(n+1) = as(n) + s(1).$$

将该方程模 $s(n-k)$ 化简，并利用引理 2.2.4，得到

$$s(k+1) \equiv as(k) + s(1) \pmod{s(n-k)}.$$

但是 $n \geq N$，因此

$$s(n-k) \geq s(N-k) > \max\{s(k+1), as(k) + s(1)\},$$

因此，模数大于该同余式两边的值，这意味着它实际上是一个等式。这与以下事实矛盾：$s(k+1) \neq as(k) + s(1)$。□

定理 3.3.1 的证明。我们要证明，对于所有 $a \geq 0$，$s(n) = \Omega_a(a^n)$。只需对 $a \in$ 整数环$_{\geq 0}$ 证明这一点。对于每个满足 $0 < b < a$ 的整数 b，将引理 3.3.2 中的 a 替换为 b。由此得到一个整数 N_b，使得对于所有 $n \geq N_b$，

$$s(n+1) \neq bs(n) + s(1).$$

Let

$$N = \max\{N_b \mid 0 < b < a\}.$$

我们声称，对于所有 $n \geq N$，都有 $s(n+1) \geq as(n) + s(1)$。

要看出这一点，令 $n \geq N$。根据引理 2.2.4，

$$s(n+1) \equiv s(1) \pmod{s(n)},$$

因此，对于某个 $b \in$ 整数环，有 $s(n+1) = bs(n) + s(1)$。由于 s 严格递增，b 必定为正。我们要证明 $b \geq a$。若 $b < a$，则我们已在上文定义了 N_b，且$n \geq N \geq N_b$。因此，$s(n+1) \neq bs(n) + s(1)$，这就产生了矛盾。因此，$b \geq a$，所以

$$s(n+1) \geq as(n) + s(1).$$

为了完成证明，注意到该断言蕴含（通过归纳法）对所有$n \geq N$, $s(n) \geq a^{n-N}s(N)$，这意味着 $s(n) = \Omega_a(a^n)$，如同 $n \to \infty$。□

3.4. 更一般的 s-卢卡斯定理。 s-卢卡斯定理（命题 2.4.8）是模 $s(p)$ 的一个同余式，其中 s 是 GNS，且 p 是素数。q-卢卡斯定理有一种更一般的形式，允许 p 为合数：

$$\binom{n_1 p + n_0}{k_1 p + k_0}_q \equiv \binom{n_1}{k_1}\binom{n_0}{k_0}_q \pmod{\Phi_p(q)}.$$

在本小节中，我们将陈述并证明更一般的 q-卢卡斯定理在 $n_0 = k_0 = 0$ 情形下的 s-类比。

回想备注 2.4.3 中圆分多项式的 s-类比 $\Phi_n(s)$。

定理 3.4.1. 如果 s 是整数环上的 *GNS*，那么对于所有 $n > 0$，$\Phi_n(s) \in$整数环 。

我们将通过证明 $\Phi_n(s) \in$ 整数环 来证明这一点。

$$\Phi_n(s) = \frac{s(n)}{\operatorname{lcm}\{s(n/p) \mid p \text{ prime factor of } n\}}.$$

这里有一个引理：

引理 3.4.2. 令 S 为任意正整数多重集。然后，

$$\operatorname{lcm}(S) = \prod_{\substack{\text{multiset } A \subseteq S \\ A \neq \emptyset}} \gcd(A)^{(-1)^{|A|-1}}.$$

这个引理可以使用初等数论的工具来证明。注意，当 s 是一个二元素多重集 $\{a, b\}$ 时，该公式化简为 $\operatorname{lcm}(a,b) = ab/$ 最大公约数 (a,b)。

引理3.4.2 的证明。我们可以将右端分解为其素数幂因子。令 p 为素数，并令 T 为多重集 $\{v_p(a) \mid a \in S\}$，其中 $v_p(a)$是 p 在 a 的素因数分解中的指数。我们试图证明的等式右端中 p 的指数为

$$\sum_{\substack{\text{multiset } B \subseteq T \\ B \neq \emptyset}} (-1)^{|B|-1} \min(B),$$

因为 p 的幂的最大公约数是 p 的最小指数次幂。我们要证明这等于 $v_p(\operatorname{lcm}(S))$，也就是 $\max(T)$。令 $T = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$，其中 $k = |T|$ 和 $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$。我们将计算每个 a_j 在求和中被计数的次数。由于 $\max(T) = a_n$，我们必须证明 a_n 被计数一次，而对于所有 $1 \le j < n$，a_j 被计数 0 次。

设 $1 \le j \le n$，且设 $1 \le k \le n$。我们想要计算有多少个子集 $B \subseteq T$ 的最小值为 j，基数为 n。这样的子集必须包含 a_j，但其余 $k-1$ 个元素 a_ℓ 可以任意组合，只要满足 $\ell > j$。这些剩余元素共有 $\binom{n-j}{k-1}$ 种选择。因此，a_j 在求和中被计数的次数为

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n-j}{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-j}{k}.$$

由于 $\binom{n-j}{k}$ 在 $k > n-j$ 时为零，这只是帕斯卡三角形第 $n-j$ 行的交错和；当 $n-j > 0$ 时结果为 0，当 $n-j = 0$ 时结果为 1。因此，a_j 被计数

在求和中，当 $j < n$ 时计数 0 次，当 $j = n$ 时计数 1 次

$$\sum_{\substack{B \subseteq P \\ B \neq \emptyset}} (-1)^{|B|-1} \min(B),$$

因此，总和等于 a_n。这意味着，在定理陈述中的等式左右两边， p 的指数均为 a_n。对每个素数 p 应用这一事实，即可证明该引理。□

定理 3.4.1 的证明。令 P 为 n的素因子集合，并令

$$r(n) = \frac{s(n)}{\operatorname{lcm}\{s(n/p) \mid p \in P\}}.$$

注意， $r(n) \in$ 整数环，因为引理 2.2.3 表明，对于 n的所有素因子 p， $s(n/p) \mid s(n)$。我们要证明 $\Phi_n(s) = r(n)$。

根据 $r(n)$ 的定义，

$$\frac{s(n)}{r(n)} = \operatorname{lcm}\left\{ s\left(\frac{n}{p}\right) \;\middle|\; p \in P \right\}.$$

由引理 3.4.2，取 $S = \{s(n/p) \mid p \in P\}$，可得其等于

$$\prod_{\substack{A \subseteq P \\ A \neq \emptyset}} \gcd\left\{ s\left(\frac{n}{p}\right) \;\middle|\; p \in A \right\}^{(-1)^{|A|-1}}.$$

引理 2.2.6 以及 s 非负这一事实意味着 s 保持最大公约数，因此

$$\gcd\left\{ s\left(\frac{n}{p}\right) \;\middle|\; p \in A \right\} = s\left(\gcd\left\{ \frac{n}{p} \;\middle|\; p \in A \right\} \right) = s\left(\frac{n}{\operatorname{lcm}(A)} \right).$$

这意味着

$$\frac{s(n)}{r(n)} = \prod_{\substack{A \subseteq P \\ A \neq \emptyset}} s\left(\frac{n}{\operatorname{lcm}(A)} \right)^{(-1)^{|A|-1}}.$$

将两边同时除以 $s(n)$，再取两边的倒数，得到

$$r(n) = \prod_{A \subseteq P} s\left(\frac{n}{\operatorname{lcm}(A)} \right)^{(-1)^{|A|}}.$$

（在右侧，我们去掉了条件 $A \neq \emptyset$，并将指数乘以 -1。）

我们需要计算每个 n 的因数 d 有多少种写法，可以表示为满足 $A \subseteq P$ 的 $\operatorname{lcm}(A)$。由于 A 的元素是互不相同的素数，$\operatorname{lcm}(A)$ 就是 A 中各元素的乘积。因此， $d = \operatorname{lcm}(A)$ 是平方自由的；给定 d， A （ d 的素因子集合）的取法唯一。所以我们得到

$$r(d) = \prod_{\substack{d \mid n \\ d \text{ square-free}}} s\left(\frac{n}{d}\right)^{\mu(d)},$$

利用这样一个事实：如果 A 是某个无平方因子数 d 的素因子集合，那么 $\mu(d)$ 就是 $(-1)^{|A|}$。由于对于非无平方因子的 d， $\mu(d) = 0$，我们可以去掉这一限制：

d 是无平方因子的:

$$r(n) = \prod_{d|n} s\left(\frac{n}{d}\right)^{\mu(d)} = \prod_{d|n} s(d)^{\mu(n/d)} = \Phi_n(s).$$

这正是我们想要证明的。 □

在证明复合 p 的 s-卢卡斯定理之前，我们先证明一个关于 $\Phi_n(s)$ 的引理。

引理 3.4.3。设 s 是一个非负整数 *GNS*，令 $m \in$ 整数环$_{>0}$，并令 a， $b \in$ 整数环$_{\geq 0}$，使得

$$a \equiv b \neq 0 \pmod{m}.$$

定义

$$d = \gcd(a, m) = \gcd(b, m).$$

那么，

$$\frac{s(a)}{s(d)} \equiv \frac{s(b)}{s(d)} \pmod{\Phi_m(s)}.$$

此外，该同余式的两边模 $\Phi_m(s)$均为单位元。等价地，由 $a \mapsto s(a)/s$(最大公约数$(a, m))$ 定义的函数 整数环$_{\geq 0} \to$ 整数环$_{\geq 0}$ 诱导出一个良定义函数

$$(\mathbf{Z}/m) \setminus \{0\} \to (\mathbf{Z}/\Phi_m(s))^{\times}.$$

证明。根据引理 2.2.4,

$$s(a) \equiv s(b) \pmod{s(m)}.$$

由于最大公约数$(s(m)\ s(d)) = s(d)$，这意味着

$$\frac{s(a)}{s(d)} \equiv \frac{s(b)}{s(d)} \quad \left(\mathrm{mod}\ \frac{s(m)}{s(d)}\right).$$

注意到】【。

$$\begin{aligned}\gcd\left\{\frac{s(m)}{s(d)} \;\middle|\; d \text{ proper divisor of } m\right\} &= \frac{s(m)}{\mathrm{lcm}\{s(d) \mid d \text{ proper divisor of } m\}} \\ &= \frac{s(m)}{\mathrm{lcm}\{s(m/p) \mid p \text{ prime factor of } m\}} \\ &= \Phi_m(s).\end{aligned}$$

在这串等式的第二步中，我们使用了以下事实：对于每个 d 真因子 m ，存在 p 素因子 m ，使得 $d \mid m/p$。我们还使用了引理2.2.3。由此可得，对于所有 d 真因子m， $\Phi_m(s)$ $\mid s(m)/s(d)$。特别地，对于 $d =$最大公约数(a, m) $=$最大公约数(b, m)，我们有

$$\frac{s(a)}{s(d)} \equiv \frac{s(b)}{s(d)} \pmod{\Phi_m(s)}.$$

为了完成证明，我们只需证明 $s(a)/s(d)$ 模 $\Phi_m(s)$ 是一个单位元。这是成立的，因为 $\Phi_m(s) \mid s(m)/s(d)$ 蕴含着。

$$\gcd\left(\Phi_m(s), \frac{s(a)}{s(d)}\right) \mid \gcd\left(\frac{s(m)}{s(d)}, \frac{s(a)}{s(d)}\right) = \frac{\gcd(s(m), s(a))}{s(d)} = \frac{s(d)}{s(d)} = 1. \qquad \square$$

定理 3.4.4 (s-卢卡斯定理的"复合版本")。 令 $m \in$整数环$_{>0}$ ， 并令 $n, k \in$ 整数环$_{\geq 0}$。 那么，

$$\binom{nm}{km}_s \equiv \binom{n}{k}_{s_m} \pmod{\Phi_m(s)}.$$

证明。根据定义，

$$\binom{nm}{km}_s = \frac{s(nm)s(nm-1)\cdots s(nm-km+1)}{s(km)s(km-1)\cdots s(1)} = \frac{\prod_{j=1}^{km} s(nm-km+j)}{\prod_{j=1}^{km} s(j)}.$$

我们的目标是将每个 $s(nm-km+j)$ 与对应的 $s(j)$ 在模$\Phi_m(s)$ 意义下约去。问题在于，通常它们并不是模 $\Phi_m(s)$ 的单位元。为了解决这个问题，我们将 $s(nm-km+j)$ 和 $s(j)$ 都除以 $s($最大公约数$(j,m))$:

$$\binom{nm}{km}_s = \frac{\prod_{j=1}^{km} s(nm-km+j)/s(\gcd(j,m))}{\prod_{j=1}^{km} s(j)/s(\gcd(j,m))}.$$

由于 $j \equiv nm-km+j$ (模 m)，我们可以对所有不被 m 整除的 j 应用引理 3.4.3, 从而得到

$$\frac{s(nm-km+j)}{s(\gcd(j,m))} \quad \text{and} \quad \frac{s(j)}{s(\gcd(j,m))}$$

它们模 $\Phi_m(s)$ 同余，且为单位元。

因此，对于每个不被 m 整除的 j ，我们可以将 $s(nm-km+j)/s($最大公约数$(j,m))$ 与 $s(j)/s($最大公约数$(j,m))$ 在模 $\Phi_m(s)$ 意义下约去。于是得到

$$\begin{aligned}
\binom{nm}{km}_s &= \frac{\prod_{j=1}^{km} s(nm-km+j)/s(\gcd(j,m))}{\prod_{j=1}^{km} s(j)/s(\gcd(j,m))} \\
&\equiv \frac{\prod_{\ell=1}^{k} s((n-k+\ell)m)/s(m)}{\prod_{\ell=1}^{k} s(\ell m)/s(m)} \\
&= \frac{\prod_{\ell=1}^{k} s((n-k+\ell)m)}{\prod_{\ell=1}^{k} s(\ell m)} \\
&= \binom{n}{k}_{s_m} \pmod{\Phi_m(s)}.
\end{aligned}$$

我们将乘积指标从 j 更改为 $\ell = j/m$，因为包含 $m \nmid j$ 的项在第二步中被消去了。□

注记3.4.5。 当 m 为素数时，定理3.4.4化为 s-Lucas 定理的 $n_0 = k_0 = 0$情形（命题 2.4.8）。

4. 广义 n-级数与德拉姆复形

4.1. 的基本性质 s-德拉姆复形。 在本小节中，我们将使用定义 2.3.3 中的 s-导数来定义“s-德拉姆复形”。回顾一下，这是 R-线性映射 $\nabla_s : R[x] \to R[x]$ 在单项式上由$\nabla_s(x^n) = s(n)x^{n-1}$给出。记 $\mathbf{A}^1 =$ 谱 $R[x]$ 表示 R上的仿射直线。

定义4.1.1。 s-德拉姆复形对于 $R[x]$ 是一个二项复形

$$s\Omega_{\square,\mathbf{A}^1} := (R[x] \xrightarrow{\nabla_s} R[x]dx).$$

此处，方框表示 $s\Omega_{\square,\ \mathbf{A}^1}$ 对坐标 x 的依赖。

注释 4.1.2. 将 s-德拉姆复形推广到多个变量很容易（例如，将 $s\Omega_{\mathbf{A}^n}$ 定义为 $s\Omega_{\square,\mathbf{A}}^{\otimes_R n}$）。由于证明下文结果的多变量类似结果很直接，我们将只研究单变量的情形。

示例4.1.3。 令 $s : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{Z}[\![q-1]\!]$ 表示来自示例2.1.6的 q-整数广义 n-级数。则定义 4.1.1 正是 [**Sch17**] 的 q-德拉姆复形。

命题 2.1.3的 s-Pascal 恒等式可以用 s-导数重新表述为：

引理 4.1.4. 存在算子等式：

$$\left[\frac{\nabla_s^k}{k!_s}, x\right] = \frac{\nabla_s^{k-1}}{(k-1)!_s}.$$

证明。设 $n > k \geq 0$ 为整数。由于 $\nabla_s(x^n) = s(n)x^{n-1}$，我们有

$$\nabla_s^k(x^n) = s(n)s(n-1)\cdots s(n-k+1)x^{n-k} = \frac{n!_s}{(n-k)!_s}x^{n-k}.$$

这意味着

$$\frac{\nabla_s^k}{k!_s}x^n = \binom{n}{k}_s x^{n-k}.$$

因此， s-帕斯卡恒等式可表述为：

$$\frac{\nabla_s^k}{k!_s}x^n = \frac{\nabla_s^{k-1}}{(k-1)!_s}x^{n-1} + x\frac{\nabla_s^k}{k!_s}x^{n-1}.$$

重新整理可得

$$\frac{\nabla_s^k}{k!_s}x^n - x\frac{\nabla_s^k}{k!_s}x^{n-1} = \frac{\nabla_s^{k-1}}{(k-1)!_s}x^{n-1}.$$

注意到左侧是一个算子对易子，可以将其写成

$$\left[\frac{\nabla_s^k}{k!_s}, x\right]x^{n-1} = \frac{\nabla_s^{k-1}}{(k-1)!_s}x^{n-1}.$$

这就得到了所需的算子等式。 □

注 4.1.5. 同样可以通过 s-导数重新表述 s-卢卡斯定理（命题 2.4.8）：也就是说，如果命题 2.4.8 的假设得到满足，那么对于任意素数 p 和任意满足 $n_0, k_0 < p$的非负整数 n_1, n_0, k_1, k_0，我们有

$$\frac{\nabla_s^{k_1p+k_0}}{(k_1p+k_0)!_s}(x^{n_1p+n_0}) \equiv \frac{\partial_{x^p}^{k_1}}{k_1!}(x^{n_1p})\frac{\nabla_s^{k_0}}{k_0!_s}(x^{n_0}) \pmod{s(p)}.$$

命题 4.1.6 (s-乘积法则)。 对于 R 上的 *GNS* s ， 在单项式上定义一个 R-双线性算子 $\star_s\colon R[x]\otimes_R R[x]\to R[x]$ ， 其定义为

$$x^a\star_s x^b = c_s(a+b+1,a)x^{a+b}$$

对于所有 a， $b\in$整数环{v7>。然后，对于所有 f， $g\in R[x]$,

$$\nabla_s(fg)=\nabla_s(f)g+f\star_s\nabla_s(g).$$

证明。由于 ∇_s 是 R-线性的，且 $\star_s$ 是 R-双线性的，该定理可由 f 和 g 为单项式 x^a 和 x^b的情形推出。在此情形下，

$$\begin{aligned}\nabla_s(x^a)x^b+x^a\star_s\nabla_s(x^b) &= s(a)x^{a-1}x^b+x^a\star_s s(b)x^{b-1}\\ &= s(a)x^{a+b-1}+s(b)c_s(a+b,a)x^{a+b-1}\\ &= \left(s(a)+s(b)\cdot\frac{s(a+b)-s(a)}{s(b)}\right)x^{a+b-1}\\ &= (s(a)+s(a+b)-s(a))x^{a+b-1}\\ &= s(a+b)x^{a+b-1}\\ &= \nabla_s(x^{a+b}).\end{aligned}$$

□

示例 4.1.7。 令 s :整数环$_{\geq 0}\to$ 整数环$[\![q-1]\!]$ 表示示例 2.1.6 中的 q-整数广义 n-级数。则

$$c_s(a+b+1,a)=\frac{[a+b+1]_q-[a]_q}{[b+1]_q}=\frac{q^{a+b+1}-q^a}{q^{b+1}-1}=q^a,$$

从而 $x^a\star_s x^b=q^ax^{a+b}=(qx)^ax^b$。特别地,

$$f(x)\star_s\nabla_s(g(x))=f(qx)\nabla_q(g(x)),$$

从而命题 4.1.6 归结为通常的 q-莱布尼茨法则。

例 4.1.8. 可以验证，函数 s : 整数环$_{\geq 0}\to$ 整数环$[\![q-1]\!]$ 定义如下

$$s(n)=\frac{1}{q-1}\frac{q^n-(2-q)^n}{q^n+(2-q)^n}\in\mathbf{Z}[\![q-1]\!]$$

定义了一个 GNS；参见例 4.3.2。由此可得

$$c_s(a+b+1,a)=2q^a(2-q)^a\frac{q^{b+1}+(2-q)^{b+1}}{(q^{a+b+1}+(2-q)^{a+b+1})(q^a+(2-q)^a)}.$$

特别地，与 q-整数广义 n-级数不同， $f(x)\star_s g(x)$ 没有简单的表达式。

推论 4.1.9. 固定一个关于 R 的 *GNS* s。那么复形 $s\Omega^{\bullet}_{\square,\mathbf{A}^1}$ 自然具有一个（非交换）微分分次 R-代数的结构。

证明。定义一个左模和右 $s\Omega^0_{\square,\mathbf{A}^1}=R[x]$-模结构于 $s\Omega^1_{\square,\mathbf{A}^1}$ 上如下：右模结构是显然的，而左模结构由 $g(x)\cdot f(x)dx=g\star_s f(x)dx$给出。于是，命题 4.1.6 的 s-莱布尼茨法则产生了 $s\Omega^0_{\square,\mathbf{A}^1}$-双模结构于 $s\Omega^1_{\square,\mathbf{A}^1}$ 上，使得 s-导数满足莱布尼茨法则；这正是微分分次 R-代数的结构。□

4.2. s-类比的庞加莱引理和卡蒂埃同构。庞加莱引理表明，在零特征的域 k 上，德拉姆复形的上同调集中在零次（其中它同构于k）。这一陈述的一个版本对整数环也成立。也就是说，如果整数环$\langle x\rangle$ = 整数环$[x, \frac{x^n}{n}!\,]_{n\geq 0}$表示整数环$[x]$的除幂包络，那么复形 $\Omega^{\bullet}_{\mathbf{Z}[x]/\mathbf{Z}}\otimes_{\mathbf{Z}[x]}$整数环$\langle x\rangle$的上同调集中在零次（其中它同构于整数环）。这可以直接推广到 s-德拉姆复形：

命题 4.2.1 (s-庞加莱引理)。令 s 为在 R 上的 *GNS*，并令 $R\langle x\rangle_s$表示环 $R[x, \frac{x^n}{n}!_s]_{n\geq 0}$。则复形 $s\Omega_{\square,\mathbf{A}^1}\otimes_{R[x]}R\langle x\rangle_s$ 的上同调集中在零次上，其中它同构于 R。

证明。我们需要证明 R-线性映射

$$R\langle x\rangle_s \xrightarrow{\nabla_s} R\langle x\rangle_s dx$$

是满射，且核为 R。满射性源于如下观察：$\nabla_s \frac{x^n}{n}!_s = \frac{x^{n-1}}{n-1}()!_s$；这也意味着 ∇_s 的核恰好是由常数生成的 R-子模 $R\langle x\rangle_s$。□

备注 4.2.2. 注意，环 $R\langle x\rangle_s$ 非零，因为元素 $n!_s \in R$不是零因子；事实上，$R\langle x\rangle_s$ 是 $R[1/s][x]$的子环。

s-德拉姆复形也满足卡蒂埃同构的一个类似形式。

回顾 4.2.3。卡蒂埃同构表明，如果 A 是一个光滑的F_p-代数，则存在一个典范同构$\Omega^i_{A/\mathbf{F}_p}\cong \mathrm{H}^i(\Omega^{\bullet}_{A/\mathbf{F}_p})$。如果 φ 表示 R上的 Frobenius，那么该同构大致由“$\frac{\varphi}{p^i}$”给出。当 $A=\mathrm{F}_p[x]$时，可以将卡蒂埃同构解释为给出一个典范同构

$$\Omega^i_{\mathbf{Z}[x^p]/\mathbf{Z}}\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{F}_p\cong \mathrm{H}^i(\Omega^{\bullet}_{\mathbf{Z}[x]/\mathbf{Z}}\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{F}_p)$$

发送 $d(x^p)\mapsto [x^{p-1}dx]$。在 [**Sch17** 中，命题 3.4], Scholze 证明了卡蒂埃同构的一个 q 类比。令 $\mathbf{Z}[\zeta_p]$ 表示商环 $\mathbf{Z}[\![q-1]\!]/[p]_q$，于是 ζ_p 表示一个本原的 p 次单位根。于是存在一个典范同构。

$$\Omega^i_{\mathbf{Z}[x^p]/\mathbf{Z}}\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Z}[\zeta_p]\cong \mathrm{H}^i(q\Omega^{\bullet}_{\mathbf{Z}[x]/\mathbf{Z}}\otimes_{\mathbf{Z}[\![q-1]\!]}\mathbf{Z}[\zeta_p]).$$

这两个结果都存在一个 s 类比。

命题 4.2.4. 设 s 是 R 上的 *GNS*，且 $s(1)$ 是 $R/s(p)$中的一个单位元。那么存在一个典范同构

$$s\Omega^i_{\square,\mathbf{A}^1}\otimes_R R/s(p)\cong \mathrm{H}^i(s\Omega_{\square,\mathbf{A}^1}\otimes_R R/s(p))$$

将 $x^n\mapsto x^{np}$ 映到零次，且 $x^n dx\mapsto [x^{np}x^{p-1}dx]$。

证明。我们先计算 $\mathrm{H}^0(s\Omega_{\square,\mathbf{A}^1}\otimes_R R/s(p))$，也就是 ∇_s 的核。注意，若 $a\in R$，则 $ax^n\mapsto as(n)x^{n-1}dx$。若 $p\mid n$，则 $s(p)\mid s(n)$，因此 $\nabla_s(ax^n)=0\in R[x]/s(p)$。若 $p\nmid n$，由引理 2.2.5 可知，$\nabla_s(ax^n)=0\in R[x]/s(p)$ 当且仅当 $s(p)\mid a$。这说明 $\mathrm{H}^0(s\Omega_{\square,\mathbf{A}^1}\otimes_R R/s(p))\cong R[x^p]/s(p)$。

要计算 $\mathrm{H}^1(s\Omega_{\square,\mathbf{A}^1}\otimes_R R/s(p))$，即 ∇_s的余核，我们需要确- 定 ∇_s的像。如果 $ax^n dx$ 在某个 $a\in R$下属于 ∇_s 的像，那么必定存在某个 $b\in R$，使得 $bs(n+1)=a$。如果 $p\mid n+1$，则可推出$a=0\in R/s(p)$；如果 $p\nmid n+1$，那么 $s(n+1)$ 是一个单位元（根据前面的讨论），所以

使得 $b = {}_{s}{}^{a}{}_{(n+1)}$。由此可知， ∇_s 的像恰好是 $\bigoplus_{p\nmid n+1} R/s(p)\{x^n dx\}$，因此

$$\operatorname{coker}(\nabla_s) = \bigoplus_{n\geq 1} R/s(p)\{x^{np-1}dx\} \cong \bigoplus_{n\geq 1} R/s(p)\{x^{p(n-1)}\cdot x^{p-1}dx\}.$$

这意味着 $\mathrm{H}^1(s\Omega^\square_{\mathbf{A}^1}\otimes_R R/s(p)) \cong R[x^p]/s(p)d(x^p)$，正如所需。 □

事实上，经典同构和 q-卡蒂埃同构是 Berthelot 和 Ogus 的一项更一般结果的特例 [**BO78**]。现在让我们回顾这一结论；随后我们将陈述并证明其关于广义 n-级数的类似结论。

回顾 4.2.5. 设 R 是一个环，且 $f \in A$ 是一个非零因子。若 $M^\bullet$ 是一个由 R-模组成的上链复形，并且逐项都是 f-无挠的，则 $décalage\eta_f M^\bullet$ 是 $M^\bullet[1/f]$ 的子复形，其定义为

$$(\eta_f M)^i = \{x \in f^i M^i \mid dx \in f^{i+1}M^{i+1}\}.$$

参见 [**BMS18**，第 6] 节以及 [**BO78**]。décalage 构造的一个基本性质如下。令 $\mathrm{H}^\bullet(M/f)$ 表示底层分次阿贝尔群为 $\bigoplus_{i\in\text{整数环}} \mathrm{H}^i(M/f)$、微分由$f$-Bockstein β: $\mathrm{H}^i(M/f) \to \mathrm{H}^{i+1}(M/f)$ 给出的复形。那么存在一个自然的复形同构。

$$\eta_f(M)/f \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^\bullet(M/f). \tag{5}$$

我们只需要考虑 $M^\bullet$逐项无挠的情形；不过需要指出， η_f 保拟同构，因此可以将 η_f 扩张为导出范畴上的一个（非正合）函子 $L\eta_f$: $D(R) \to D(R)$。

设 k 是特征为 $p > 0$的完美域。Berthelot 和 Ogus 的一个结果（见 [**BO78**]）的一个非常特殊的情形表明，若 $W(k)$ 是 k 的 Witt 向量环，且 A 是一个 $W(k)$-代数，则存在一个 Frobenius[3] 半线性同构 $\Omega_A \xrightarrow{\sim} L\eta_p\Omega_A$。为简单起见，假设 Ω_A 无 p挠；此时利用$f = p$ 应用 (5)，便定义了一个复形之间的同构

$$\eta_p(\Omega_A)/p \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^\bullet(\Omega_A/p). \tag{6}$$

注意，若记 $A_0 = A/p$，则 $\Omega_A/p \cong \Omega^{A_0/k}$。Frobenius 半线性同构 $\Omega_A \xrightarrow{\sim} L\eta_p\Omega_A$ 给出一个 Frobenius 半线性等价 $\Omega_{A_0/k} \xrightarrow{\sim} \eta_p(\Omega^{A_0})/p$。比较 (6) 的左右两边，即可得到 A_0的卡蒂埃同构。

类似的结果在 [**BS19**，定理 1.16(4)] 中针对 q-德拉姆复形得到了证明：也就是说，如果 A 是一个光滑的 $\mathbb{Z}_p[\zeta_p]$-代数，那么存在一个 Frobenius 半线性等价 $q\Omega_A \xrightarrow{\sim} L\eta_{[p]_q} q\Omega_A$。如上所述，使用带有 $f = [p]_q$ 的 (5) 可恢复卡蒂埃同构的 q-类比。

正如预期的那样， s-德拉姆复形也有一个 décalage结果：

命题 4.2.6. 固定一个 *GNS* s，其定义在 R 上，并满足：

(1) 存在一个环自同态 φ: $R \to R$，它将 $s(n) \mapsto {}_{(np)\,s(p)}{}^{s}$ 映射到该处。*(2)* $s(1)$ 是 $R/s(p)$中的一个单位元，并且 R 是 $s(p)$-进完备的。

[3]在一般情况下，Ω_A 上 Frobenius 的存在性并不显然，并且取决于晶体上同调的存在。

记 $\mathbf{A}^{1,(p)} =$ 谱 $R[x^p]$，并定义映射 Φ： $s\Omega_{\square,\mathbf{A}^{1,(p)}} \to s\Omega_{\square,\mathbf{A}^1}$ 如下

$$R[x^p] \xrightarrow{\varphi} R[x],\ in\ degree\ 0,$$
$$R[x^p]d(x^p) \xrightarrow{\varphi, d(x^p)\mapsto s(p)x^{p-1}dx} R[x]dx,\ in\ degree\ 1.$$

然后 Φ 通过拟同构 $\varphi^* s\Omega_{\square,\mathbf{A}^{1,(p)}} \xrightarrow{\sim} \eta_{s(p)} s\Omega_{\square,\mathbf{A}^1}$进行分解。

证明。由于 $s\Omega_{\square,\ \mathbf{A}^1}$ 是 $s(p)$-无挠的，我们可以直接计算复形$\eta_{s(p)} s\Omega_{\square,\ \mathbf{A}^1}$。如果 $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \in R[x]$，那么

$$\nabla_s f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n s(n) x^{n-1}.$$

由于对于任意 $j \geq 0$， $s(p) \mid s(pj)$，我们可知 $\nabla_s f(x) \in s(p)R[x]$ 当且仅当$s(p) \mid a_n$ 对 $p \nmid n$ 成立。因此，

$$\eta_{s(p)} s\Omega_{\square,\mathbf{A}^1} = \left(R[x^p] + s(p)R[x] \xrightarrow{\nabla_s} s(p)R[x]dx \right).$$

映射 Φ 显然经由包含映射 $\eta_{s(p)} s\Omega_{\square,\ \mathbf{A}^1} \subseteq s\Omega_{\square,\ \mathbf{A}^1}$分解。接下来只需验证映射 $\varphi^* s\Omega_{\square,\ \mathbf{A}^{1,\ (p)}} \to \eta_{s(p)} s\Omega_{\square,\ \mathbf{A}^1}$ 在上同调上诱导同构。注意到

$$\mathrm{H}^0(s\Omega_{\square,\mathbf{A}^{1,(p)}}) \cong R,$$
$$\mathrm{H}^1(s\Omega_{\square,\mathbf{A}^{1,(p)}}) \cong \bigoplus_{n\geq 1} R/s(n)\{(x^p)^{n-1}d(x^p)\},$$

类似地

$$\mathrm{H}^0(\eta_{s(p)} s\Omega_{\square,\mathbf{A}^1}) \cong R,$$
$$\mathrm{H}^1(\eta_{s(p)} s\Omega_{\square,\mathbf{A}^1}) \cong \bigoplus_{n\geq 1} (s(p))/(s(np))\{x^{np-1}dx\} \oplus \bigoplus_{p\nmid m} (s(p))/(s(m)s(p))\{x^{m-1}dx\}.$$

环自同态 φ 将 R 的 $s(n) \mapsto {}^{s\ (np)}\ s\ (p)$ 映射为，并且 $s(p)$ 是 R 中的非零因子，因此我们看到 φ 下降为一个同构

$$\varphi^*(R/s(n)) \xrightarrow{\sim} R/\tfrac{s(np)}{s(p)} \xrightarrow{\sim} (s(p))/(s(np)).$$

如果 $p \nmid m$，那么根据引理 2.2.5， $s(m)$ 是 $R/s(p)$ 中的单位元；由于 R 是 $s(p)$-进完备的，这意味着 $s(m)$ 本身就是 R 中的单位元。由此可得 $0 \cong R/s(m) \xrightarrow{\sim} (s(p))/(s(m)s(p))$。综合这些结果，我们看到映射 $\varphi^* s\Omega_{\square,\ \mathbf{A}^{1,\ (p)}} \xrightarrow{\sim} \eta_{s(p)} s\Omega_{\square,\ \mathbf{A}^1}$ 是一个拟同构。□

在命题 4.2.6 中，要求 R 是 $s(p)$-进完备的条件相当强。例如， p-进数学中最基本的工具之一是勒让德公式；广义 n-级数也有一个类似的公式。

命题 4.2.7 (s-勒让德公式的类似结果)**.** 设 s 是满足命题 *4.2.6* 假设的 R上的 *GNS*。对于任意 $n \geq 0$，有

$$n!_s = u \prod_{j\geq 1} \varphi^{j-1}(s(p))^{\lfloor n/p^j \rfloor}$$

对于某个单位元 $u \in R^\times$。

证明。论证是对 [**BS19** 引理 12.6] 的直接改编。由于 R 是 $s(p)$-进完备的，我们知道，若 $p \nmid m$，则 $s(m)$ 是 R 中的一个单位元。这意味着

$$\begin{aligned}(np)!_s &= u\prod_{i=1}^{n} s(np) = u\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{s(np)}{s(p)}\cdot s(p)\right)\\ &= us(p)^n\prod_{i=1}^{n}\varphi(s(n)) = us(p)^n\varphi(n!_s),\end{aligned}$$

其中 $u = \prod_{1\le j\le np, p\nmid j} s(j)$ 是 R中的单位元。利用上述恒等式，归纳地从 n 中剥去 p 的幂，即可得到所需结论。□

这意味着以下类似于 [**BS19** 的结果，即引理 12。5]，该结果给出了允许“s-除幂”的判据。

推论 *4.2.8*。设 s 是满足命题 *4.2.6*假设的 *GNS*，且假设对于任意 $n \ge 0$，$\varphi(n!_s)$ 是 $R/s(p)$ 中的非零因子。设 A是一个 $s(p)$-完全平坦的 R-代数，配备一个 R-线性乘法映射 ϕ: $\varphi^* A \to A$ 和一个元素 $x \in A$，使得 $\varphi(x) = x^p$，且 $\varphi(x)$ 可被 $s(p)$ 整除。那么 $n!_s \mid x^n$，即 $\frac{x^n}{n}!_s$ 在 A 中是定义良好的。

证明。由于 $s(j)$ 在 R 中是一个单位元，因此只需证明：对于任意 $n \ge 0$，如果 $n!_s \mid x^n$，那么 $(np)!_s \mid x^{np}$。根据（命题 4.2.7 的证明），只需证明 $\varphi(n!_s)s(p)^n \mid x^{np}$。由于 $\varphi(n!_s)$ 是 $R/s(p)$ 中的非零因子（根据假设），根据 A 的平坦性，它也是 $A/s(p)$ 中的非零因子。因此，只需证明 $\varphi(n!_s)$ 和 $s(p)^n$ 分别整除 x^{np}。由于 $n!_s \mid x^n$，显然 $\varphi(n!_s) \mid \varphi(x^n) = x^{np}$。由于根据假设 $s(p) \mid x^p$，我们还可看到 $s(p)^n \mid x^{np}$，正如所需。□

4.3.形式群律 n-级数和 s-导数。一些最重要（且易于理解）的广义 n-级数例子来自形式群律。在本节中，我们将固定一个基交换环 R。

回顾 4.3.1. 交换环 R 上的（一维）形式群律是一个二元幂级数 $F(x,y) \in R[\![x,y]\!]$，满足 $F(F(x,y)\ z) = F(x,F(y,z))$，且 $F(x,y) \equiv x+y (\mathrm{mod}\ (x,y)^2)$。有时，为方便起见，我们将 $F(x,y)$记作 $x +_F y$。形式群律的态射 f: $F \to G$ 是一个幂级数 $f(x) \in R[\![x]\!]$，满足 $f(F(x,y)) = G(f(x)\ f(y))$；若一个态射存在复合逆，则称其为同构。

若 $n \ge 0$ 是一个整数，则 F 的 n-级数由下式定义：

$$[n]_F(t) = \overbrace{F(t,F(t,F(t,\dots F(t,t)\dots)))}^{n} = \overbrace{t +_F t +_F \cdots +_F t}^{n}.$$

利用形式群律中逆元的存在性，可以将其扩展到所有整数 $n \in \mathbb{Z}$。n-级数 $[n]_F(t)$ 是 $R[\![t]\!]$ 的元素，并且总是可被 t 整除。我们将定义 $\langle n\rangle_F(t) := [n]_F(t)/t$（其中约定 $\langle 0\rangle_F(t) = 0$）。有时，为了记号上的方便，我们简单地将它们写作 $[n]_F$ 和 $\langle n\rangle_F$（隐含它们是关于 t 的函数）。如果 R 是一个 $\mathbb{F}_p$-代数，那么对于某个 $h > 0$，要么有 $[p]_F(t) = 0$，要么有 $[p]_F(t) = \lambda t^{p^h} + O(t^{p^h+1})$。如果 v_j 表示 $[p]_F(t)$ 中 t^{p^j} 的系数，那么当 $v_j = 0$ 对于 $j < n$ 成立时，称 F 具有 高度 $\ge n$；如果 v_n 是一个单位元，则称 F 具有 高度 n。

如果 $\mathbb{Q} \subseteq R$，那么每个形式群律 $F(x,y)$ 都可以通过对数与加法形式群律同构。设 $F_y(x,y) = \partial_y F(x,y)$；则对数由积分给出

$$\ell_F(x) := \int_0^x \frac{dt}{F_y(t,0)}.$$

我们用 $\mathscr{E}_F(x)$ 表示它的复合逆，因此 $F(x,y) = \mathscr{E}_F(\ell_F(x)+\ell_F(y))$。注意，对于任意 $n \in$ 整数环中的元素，都有 $[n]_F(t) = \mathscr{E}_F(n\ell_F(t))$。

例 4.3.2. 固定一个基交换环 R。多项式 $F(x,y) = x+y$称为加法形式群律，而 $\langle n\rangle_F(t) = n$。多项式$F(x,y) = x+y+xy$ 称为乘法形式群律，而

$$\langle n\rangle_F(t) = \frac{(1+t)^n - 1}{t} \in R[\![t]\!].$$

注意，$\langle n\rangle_F = [n]_q$，其中我们设 $q = t+1$。幂级数 $F(x,y) = \frac{x+y}{1+xy}$称为双曲形式群律（因为它描述了 tanh 的加法律），而对 n 作简单归纳可得

$$\langle n\rangle_F(t) = \frac{1}{t}\frac{(1+t)^n - (1-t)^n}{(1+t)^n + (1-t)^n} = \frac{1}{q-1}\frac{q^n - (2-q)^n}{q^n + (2-q)^n} \in R[\![q-1]\!].$$

注 4.3.3。给定一个定义在（例如无挠）交换环 R 上的形式群律 $F(x,y)$，可以定义一个定义在 $R[\![t]\!]$ 上的“重标度”形式群律 $F(x,y)$，其特征是满足性质 $\widetilde{F}(x,y) = \frac{1}{t}F(xt,yt)$。注意，在特殊纤维（即 $t=0$）上，$F(x,y)$ 退化为加法形式群律。在 ($R\otimes$有理数域)$[\![t]\!]$ 上，对数 $\widetilde{\ell}_F(x)$ 由 $\frac{1}{t}\ell_F(tx)$ 给出；注意，这个幂级数在 t 中没有极点项，因为 $x \mid \ell_F(x)$（因此 $tx \mid \ell_F(tx)$）。

我们首先证明，只要 F 满足一个较弱的条件，映射 $n \mapsto [n]_F(t)$ 就是 $R[\![t]\!]$ 上的 GNS。幂级数 ℓ_F 的存在，是由形式群律产生的 GNS 尤其性质良好的主要原因。

命题 4.3.4。设 F 是环 R上的形式群律，并假设对于任意 $n>0$，$[n]_F(t) \in R[\![t]\!]$ 都不是零因子。定义 $s:$整数环$_{\geq 0} \to R[\![t]\!]$ 为 $s(n) = [n]_F(t)$。那么，s 是 $R[\![t]\!]$上的 *GNS*。类似地，将 $s_F(n)$ 映到 $= \langle n\rangle_F(t)$ 的函数 $s_F:$ 整数环$_{\geq 0} \to R[\![t]\!]$是 $R[\![t]\!]$上的 *GNS*。

证明。显然，若 s 是 GNS，则 s_F也如此。现在我们通过检验定义 2.1.4 中的条件来证明 s 是 GNS。条件 (1) 显然成立，因为 $[0]_F = 0$。条件 (2) 已在定理陈述中假设。

对于条件 (3)，令 $G(x) \in R[\![t]\!][\![x]\!]$ 为幂级数 $F(t,x)$。那么，

$$[n+1]_F - [k+1]_F = G([n]_F) - G([k]_F).$$

由于对于每个 $j \geq 0$，$x-y$ 整除 $x^j - y^j$，且 G 是幂级数，因此 $x-y$ 也整除 $G(x) - G(y)$。特别地，$s(n) - s(k) = [n]_F - [k]_F$ 整除 $G([n]_F) - G([k]_F)$；但 $G([n]_F) - G([k]_F) = [n+1]_F - [k+1]_F$ 恰好是 $s(n+1) - s(k+1)$，所以 $s(n)-s(k)$ 整除 $s(n+1)-s(k+1)$。归纳可得，对于所有 $n,k,j \in$整数环$_{\geq 0}$，$s(n)-s(k)$ 整除 $s(n+j) - s(k+j)$。对于 $k=0$，这给出对于所有 $n,j \in$整数环$_{\geq 0}$，$s(n) \mid s(n+j) - s(j)$。重新标记指标后，得到 $s(n-k) \mid s(n) - s(k)$，这就证明了条件 (3)。□

引理 4.3.5。 设 F 是一个环 R上的形式群律。如果 $n \in$ 整数环$_{>0}$ 在 R 中不是零因子（例如， R 是无挠的），那么 $[n]_F$ 和 $\langle n\rangle_F$ 在 $R[\![t]\!]$中都不是零因子。

证明。假设为导出矛盾， $[n]_F(t)$ 对某个 n （同样的论证也适用于 $\langle n\rangle_F$）是一个零因子。那么存在一个幂级数$f(t) \in R[\![t]\!]$ 使得

$$f(t) \cdot [n]_F(t) = 0.$$

由此可知， $f(t)$ 和$[n]_F(t)$ 的最低次数项的系数之积必须为 0。由于 $[n]_F(t)$的最低次数项是 nt，这意味着 n乘以 $f(t)$的最低次数系数为 0。特别地， n 是R中的零因子。□

定义 4.3.6. 设 F 是一个定义在 R 上的形式群律，使得对于任意 $n > 0$， $[n]_F(t) \in R[\![t]\!]$ 都不是零因子。[4] 令 $F\Omega_{\square,\mathbf{A}^1}$ 表示由与 GNS s 相关联的 s- 德拉姆复形给出的微分分次$R[\![t]\!]$-代数：$\mathsf{Z}_{\geq 0} \to R$发送 $n \mapsto \langle n\rangle_F$。我们将 $F\Omega_{\square,\mathbf{A}^1}$ 称为仿射直线 $\mathbf{A}^1 = \operatorname{Spec} R[x]$的 F-德拉姆复形；我们也将微分 ∇_F 称为F-导数。

例 4.3.7】【。

- 对于加法形式群律， $\langle n\rangle_F = n$；因此得到的 F-德拉姆复形就是通常的德拉姆复形。
- 对于乘法形式群律， $\langle n\rangle_F = [n]_q$；因此所得的$F$-德拉姆复形就是 q-德拉姆复形。注意，可以通过 $f(x) \mapsto {}^{f_{(qx)-f(x)\ (q-1)x}}$ 直接在多项式上定义F-导数（而不只是定义在单项式上）。这可以直接由命题 4.3.9 看出：确实，

$$\mathscr{E}_F(\ell_F(t)z) = \frac{(1+t)^z - 1}{t} = \frac{q^z - 1}{q-1},$$

且算子 $q^{x\partial_x}$ 将 $f(x)$ 发送到 $\mapsto f(qx)$。

注记 4.3.8. 可以考虑 F-德拉姆复形的一个略微变体，即由复形

$$C^\bullet := (R[\![t]\!][x] \to R[\![t]\!][x]dx)\,,\ x^n \mapsto [n]_F x^{n-1}dx.$$

这是函数 s 的 s-德拉姆复形：$\mathsf{Z}_{\geq 0} \to R$ sending $n \mapsto [n]_F$。于是存在拟同构 $F\Omega_{\square,\mathbf{A}^1} \simeq \eta_t C^\bullet$。

当有理数域 $\subseteq R$ 时，存在 F-阶导数的一般公式。

命题 4.3.9。 假设有理数域 $\subseteq R$，并设 F 是定义在 R上的形式群律。那么，在 $R[\![t]\!][x]$ 上有一个 $R[\![t]\!]$-线性算子等式：

$$\nabla_F = \frac{1}{tx}\mathscr{E}_F(\ell_F(t)x\partial_x).$$

特别地，存在典范同构 $F\Omega_{\square,\mathbf{A}^1} \cong \Omega_{\mathbf{Q}[x]/\mathbf{Q}} \otimes_{\mathbf{Q}} R[\![t]\!]$。

[4]下面的许多结果并不依赖于这一假设；但我们仍然保留它，因为命题 4.3.4 允许我们立即将上文关于广义 n-级数的许多结果迁移过来。有兴趣的读者应当不难在以下结果中根据需要去除这一条件。

证明。令 ∇'_F 表示右侧的表达式。根据 ∇_F 的定义，只需验证对于每个 $m \geq 1$，都有 $\nabla'_F(x^m) = \langle m\rangle x^{m-1}$。记$\mathscr{E}_F(t) = \sum_n a_n t^n$；则

$$\begin{aligned}\nabla'_F(x^m) &= \frac{1}{xt}\sum_n a_n \ell_F(t)^n (x\partial_x)^n (x^m)\\ &= \frac{1}{xt}\sum_n a_n (m\ell_F(t))^n x^m\\ &= \frac{1}{t}\mathscr{E}_F(m\ell_F(t))x^{m-1} = \langle m\rangle x^{m-1},\end{aligned}$$

如所愿。 □

注 4.3.10. 由于每个 Q-代数上的形式群律都同构于加法形式群律，因此命题 4.3.9 的最后一个陈述是以下更一般观察的特例：如果 F_1 和 F_2 是同构的形式群律，那么相应的德拉姆复形也同构。

示例4.3.11。 利用命题 4.3.9，我们可以将双曲形式群律的 F-导数明确写出。在此情形下， $\mathscr{E}_F(t) = \tanh(t)$，因此 $\ell_F(t) = \tanh^{-1}(t)$，并且

$$\mathscr{E}_F(\ell_F(t)z) = \tanh(z\tanh^{-1}(t)) = \frac{q^z - (2-q)^z}{q^z + (2-q)^z},$$

其中 $q-1=t$。由于算子 $q^{x\partial_x}$ 将 $f(x)$ 发送到 $\mapsto f(qx)$， F-导数可以表示为

$$\nabla_F : f(x) \mapsto \frac{1}{(q-1)x}\frac{f(qx) - f((2-q)x)}{f(qx) + f((2-q)x)}.$$

例 4.3.12. 设 $R_0 = \mathbb{F}_p[v_n]$。那么，存在唯一的形式群律（称为*Honda* 形式群律；参见 [**Hon70**]）定义在 R_0 上，其特征是它的 p-级数由 $[p]_F(t) = v_n t^{p^n}$ 给出。这意味着在 $R_0[\![t]\!]$ 中相差一个单位元的意义下，我们有 $[m]_F(t) = v^{v_p(m)} t^{m^n}$，其中 $v_p(m)$ 表示 m 的 p-进赋值。定义在 R_0 上的形式群律可提升为定义在$R = \mathbb{Z}_p[v_n]$ 上的形式群律，使得在 $R\otimes\mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}_p[v_n]$ 上，其对数为

$$\ell_F(x) = \sum_{j\geq 0} v_n^{\frac{p^{jn}-1}{p^n-1}} \frac{x^{p^{jn}}}{p^j}.$$

例如，如果 $n=1$ 并且我们添加 v_1 的 $(p-1)$ 次方根 β，这实质上就是 Artin–Hasse 指数的对数，因此

$$\ell_F(x) = -\frac{1}{\beta}\sum_{p\nmid d}\frac{\mu(d)}{d}\log(1-(\beta x)^d).$$

对于一般的 n，也可以作类似的表述。回忆一下，多对数由 $\mathrm{Li}_s(x) = \sum_{j\geq 1}\frac{x^j}{j^s}$ 定义，因此$\mathrm{Li}_1(x) = -\log(1-x)$。如果 β 表示 p^n-1 次根 v_n，那么 $\ell_F(x)$ 可以理解为 $\frac{1}{\beta}\mathrm{Li}^{1/n}(\beta x)$ 的“p^n-典型”版本。

当 $n=1$ 时，所得的$\mathbb{F}_p[\![t]\!]$ 上的 F-德拉姆复形与 q-德拉姆复形模 p 的约化密切相关：事实上，注意到乘法形式群律的 p-级数同余于 t^p （模 p）。所得的整数环$_p[v_1]$ 上的提升形式群律是乘法形式群的 p-典型化

定律（见 [**Rav86**，附录 2]）。对于更高的 n，所得的 F-德拉姆复形在性质上类似于 $n=1$ 的情形。例如，我们有

$$\mathrm{H}^0(F\Omega_{\square,\mathbf{A}^1}) \cong \mathbf{F}_{p^n}[v_n][\![t]\!],\ \mathrm{H}^1(F\Omega_{\square,\mathbf{A}^1}) \cong \bigoplus_{j\geq 1} \mathbf{F}_{p^n}[v_n,t]/(v_n^{v_p(j)}t^{j^n})\{x^{j-1}dx\}.$$

例4.3.13。设 $n\geq 1$，令 k 为特征为 $p>0$的代数闭域，并令 $R=W(k)[\![u_1,\cdots,u_{n-1}]\!]$表示 Lubin-Tate 环。令 F表示与 k上所选高度为 n 的形式群律的普遍变形相关联的形式群律。那么，所得的 F-德拉姆复形在 $n=1$时特化为 q-德拉姆复形。对于一般的 n，这个 F-德拉姆复形与色谱同伦论中的深层现象密切相关（参见注 4.3.24）。

引理 4.3.14 (F-泰勒展开)。设 F 是定义在 R 上的形式群律，使得对于任意 $n>0$，$[n]_F(t)\in R[\![t]\!]$ 都不是零因子。若 $f(x)\in(R\otimes$有理数域$)[\![t,x-1]\!]$，则存在一个泰勒展开

$$f(x)=\sum_{n\geq 0}\nabla_F^n(f(x))|_{x=1}\frac{(x-1)_s^n}{n!_F}.$$

此处，$(x-1)_s^n$表示定义 *2.3.5* 中的符号，其中 $y=-1$。

证明。这与 [**AL20**，命题 4.4] 中的论证相同。首先，注意，如果 $g(x)\in(R\otimes$有理数域$[\![t,x-1]\!])$是一个函数，使得 $\nabla_F^n(g(x))|_{x=1}=0$对所有 $n\geq 0$都成立，那么 $g=0$。事实上，由于 ∇_F只是模 t意义下的通常导数，我们看到 $g(x)$可被 t 整除。设 $g(x)=tg_1(x)$；那么，$\nabla_F^n(g_1(x))|_{x=1}=0$ 对所有 $n\geq 0$ 都成立，所以 $t\mid g_1(x)$。继续下去，我们看到 $g(x)$可被 t 无限次整除，因而为零（因为 t 是拓扑幂零的）。

现在我们可以将上述观察应用于

$$g(x):=f(x)-\sum_{n\geq 0}\nabla_F^n(f(x))|_{x=1}\frac{(x-1)_s^n}{n!_F}.$$

根据 $(x-1)_s^n$ 的定义，我们知道 $\nabla_F(\frac{(x-1)^n}{s!_F})=\frac{(x-1)_s^{n-1}}{(n-1)!_s}$；因此，对于所有 $n\geq 0$，$\nabla_F^n(g(x))|_{x=1}=0$，从而 $g=0$，如所求。□

推论 4.3.15 (F-对数)。设 F 是 R 上的一个形式群律，满足对任意 $n>0$，$[n]_F(t)\in R[\![t]\!]$ 不是零因子。考虑函数 $F\log(x)\in(R\otimes$有理数域$)[\![t,x-1]\!]$，其定义为 $\frac{t}{\ell_F(t)}\log(x)$。那么，我们有：

(1) $\nabla_F(F\log(x))=\frac{1}{x}$。*(2)* $F\log(xy)=F\log(x)+F\log(y)$。*(3)* 存在一个级数展开

$$F\log(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{\langle -n+1\rangle_F\cdots\langle -1\rangle_F}{n!_F}(x-1)_s^n.$$

证明。第一条陈述由命题4.3.9得出。事实上，记$\mathscr{E}_F(y)=\sum_{n\geq 1}a_ny^n$；$F(x,y)\equiv x+y$(模 $(x,y)^2$) 的条件迫使 $a_1=1$。由于

$$(x\partial_x)(F\log(x))=\frac{t}{\ell_F(t)}(x\partial_x)\log(x)=\frac{t}{\ell_F(t)},$$

我们看到,

$$x\nabla_F(F\log(x)) = \frac{1}{t}\sum_{n\geq 1} a_n \ell_F(t)^n (x\partial_x)^n (F\log(x))$$
$$= \frac{1}{t}\left(\ell_F(t)\cdot\frac{t}{\ell_F(t)} + \sum_{n\geq 2} a_n \ell_F(t)^n (x\partial_x)^n (F\log(x))\right).$$

第二个和为零，因为对于 $n \geq 2$, $(x\partial_x)^n(F\log(x)) = 0$ 。第一项相消后得到 $x\nabla_F(F\log(x)) = 1$，正如所需。

第二个陈述显然。对于第三个陈述，注意到

$$\nabla_F^n(F\log(x)) = \nabla_F^{n-1}(1/x) = \langle -n+1\rangle_F \cdots \langle -1\rangle_F x^{-n}.$$

在 $x = 1$ 处求值，并应用引理 4.3.14，即得所需结论。 □

警告 4.3.16. F-对数 $F\log(x)$ 并不等同于与形式群律相关的对数 $\ell_F(x)$。这种令人遗憾的术语源于试图同时仿照标准术语“q-对数”和“乘法形式群律的对数”。

注 4.3.17. 推论 4.3.15 意味着 $F\log(x)$ 是环 $R[\![t]\!]\left[x^{\pm 1}, \frac{}{(x-1)^n\ {}^{n}_{s}!_F}\right]$ 中一个定义良好的类；这是 F-类似物士的函数环，该类似物是 $(\mathbb{G}_m)_{R[\![t]\!]}$ 的单位截面的除幂完备化。

注记 4.3.18. 推论 4.3.15(3) 中的形式级数可以针对任意 GNS s 写出；当它存在且收敛时，其 s 导数形式上为 $1/x$。不过，我们选择仅在 GNS 由形式群律导出的情况下陈述推论 4.3.15，因为在其他情况下，很难对所得的形式级数进行计算分析。

例 4.3.19. 当 F 是整数环 $\mathbb{Z}$ 上的乘法形式群律时，函数 $F\log(x)$ 可以认作 q 对数

$$\log_q(x) = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1} q^{-\binom{n}{2}} \frac{(x-1)(x-q)\cdots(x-q^{n-1})}{[n]_q} \in \mathbf{Q}[\![q-1, x-1]\!].$$

事实上，这可由推论 4.3.15(3) 以及观察到 $\langle -j\rangle_F = [-j]_q = -q^{-j}[j]_q$ 得出。关于 q 对数的更多内容，参见 [**AL20**，第 4] 节。

我们来总结上一节中的一些结果，将其特化到 F-德拉姆复形：

定理 4.3.20. 设 R 是一个交换环，并设 F 是 R 上的一个形式群律，使得对于任意 $n > 0$, $[n]_F(t) \in R[\![t]\!]$ 都不是零因子。令$\hat{}\mathbf{G} =$ 形式谱 $R[\![t]\!]$ 表示 R上的形式群。那么：

(1) 令 $R[\![t]\!]\langle x\rangle_F$ 表示环 $R[\![t]\!][x, \frac{x^n}{[n]_F!}]_{n\geq 0}$。于是庞加莱引理成立：复形 $F\Omega_{\square,\mathbf{A}^1} \otimes_{R[\![t]\!][x]} R[\![t]\!]\langle x\rangle_F$ 的上同调集中在零次，其中它同构于 $R[\![t]\!]$。*(2)* 卡蒂埃同构成立：存在一个典范同构，将$(x^p)^n \mapsto x^{np}$ 映至零次，将$(x^p)^n d(x^p) \mapsto [x^{np}x^{p-1}dx]$。注意$\hat{}\operatorname{Spf} R[\![t]\!]/[p]_F \cong \mathbf{G}[p]$。

$$F\Omega^i_{\square,\mathbf{A}^{1,(p)}} \otimes_{R[\![t]\!]} R[\![t]\!]/\langle p\rangle_F \cong \mathrm{H}^i(F\Omega_{\square,\mathbf{A}^1} \otimes_{R[\![t]\!]} R[\![t]\!]/\langle p\rangle_F)$$

(3) décalage 同构成立：将 $R[\![t]\!]$ 换成其 $\langle p\rangle_F$-进完备化。令 $\varphi\colon\ R[\![t]\!] \to R[\![t]\!]$ 表示 R- 代数映射，它将 $t \mapsto [p]_F(t)$,ˆ ˆ 映至由乘以 p 的映射 $\mathbf{G} \to \mathbf{G}$ 在环上诱导的映射。于是存在一个拟同构 $\varphi^* F\Omega^{\square}_{-,\mathbf{A}^{1,(p)}} \xrightarrow{\sim} \eta_{\langle p\rangle_F} F\Omega^{\square}_{-,\mathbf{A}^1}$。

*(4)*推论 *4.2.8*的假设得到满足，因此存在一个判定是否容许"F-除幂"的准则。也就是说，将 $R[\![t]\!]$ 替换为其 $(p, \langle p\rangle_F)$-进完备化，并假设对于任意 $n \geq 0$, $\varphi(n!_F)$ 在 $R[\![t]\!]/\langle p\rangle_F$中都是非零因子。令 A 为一个带有 $R[\![t]\!]$-线性乘法映射 $\phi\colon \varphi^* A \to A$ 的 $\langle p\rangle_F$- 完全平坦 $R[\![t]\!]$- 代数。如果 $x \in A$ 是一个满足 $\varphi(x) = x^p$ 且 $\langle p\rangle_F \mid \varphi(x)$ 的元素，那么 $\frac{x^n}{n!_s} \in A$。

证明。第一部分是命题 4.2.1。第二部分是命题 4.2.4，其中命题中的假设成立，因为 $\langle 1\rangle_F = 1$。第三部分（以及第四部分）是命题 4.2.6的应用。注意，第一个假设由 φ 的构造可知成立：$R[\![t]\!] \to R[\![t]\!]$: 事实上，$\varphi$ 发送

$$s(n) = \frac{[n]_F(t)}{t} \mapsto \frac{[n]_F([p]_F(t))}{[p]_F(t)} = \frac{[np]_F(t)}{[p]_F(t)} = \frac{s(np)}{s(p)}.$$

第二个假设由关于 $R[\![t]\!]$ 的假定推出。 □

注 4.3.21. 利用注 4.3.10，可以将定理 4.3.20 推广到 R （更确切地说，Spec R）被形式群模叠代替的情形。不过，本文不再进一步讨论这一点。

受 [**Sch17** 启发，我们提出如下猜想 3.1], 。事实上，沿着 [**Dri22**] 对环叠所作的考察强烈表明，这个猜想是错误的，但我们仍然陈述了它，希望能借此推动对这类问题的研究。Arpon Raksit 告知第一作者，他目前正在研究这个猜想的某种变体。

猜想 4.3.22. 令Poly_R 表示多项式 R-代数及其间的R-代数映射所构成的范畴。设 F 是定义在 R 上的形式群律，并且对任意 $n > 0$, $[n]_F(t) \in R[\![t]\!]$ 都不是零因子。那么，存在一个函子$\Gamma_{F\text{-dR}}(-) : \mathrm{Poly}_R \to \mathrm{CAlg}(R[\![t]\!])$ ，其取值落在$\mathbf{E}_\infty$-$R[\![t]\!]$-代数的 ∞-范畴中，并将 $R[x_1, \cdots, x_n] \mapsto F\Omega^{\square}_{-,\mathbf{A}^n}$.[5] 此外，定理 *4.3.20* 的每一部分都可以推广到 $\Gamma_{F\text{-dR}}(-)$。

备注 4.3.23. 如果前述猜想成立，那么构造 $F\Omega^{\square}_{-,-}$就可以通过左 Kan 扩张推广到所有（动画） R-概形：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Poly}_R^{\mathrm{op}} & \xrightarrow{\Gamma_{F\text{-dR}}(-)} & \mathrm{CAlg}(R[\![t]\!])^{\mathrm{op}} \\ \downarrow & \nearrow_{\Gamma_{F\text{-dR}}(-)} & \\ \mathrm{Sch}_R^{\mathrm{op}} & & \end{array}$$

我们预计，所得函子 $X \mapsto \Gamma_{F\text{-dR}}(X)$（如果存在的话）会相当有趣。当 F 为乘法形式群律时，猜想 4.3.22 成立，而所得赋值 $X \mapsto \Gamma_{F\text{-dR}}(X)$ 就是 [**BS19**] 的 q-de Rham 上同调。

[5]换言之，赋值 $R[x_1, \cdots, x_n] \mapsto F\Omega^{\square}_{-,\mathbf{A}^n}$ 在多项式 R-代数的 R-代数映射下是函子性的。

我们以讨论构造 F-德拉姆复形背后的动机来结束本节。由于这并非本文的主要主题，我们只能简要说明。

注 4.3.24. 设 A 是一个具有复定向的偶周期 $\mathbb{E}_\infty$-环。那么，Quillen 定义了一个典范形式群律 $F(x,y)$，其定义在$R := \pi_0(A)$上；其底层形式群为形式谱 $\pi_0(A^{hS^1})$。令 $\tau_{\geq 0}A$ 表示 A的连通覆盖，并令 $\mathrm{F}^\star_{\mathrm{ev}}\mathrm{HP}(\tau_{\geq 0}A[x]/\tau_{\geq 0}A)$ 表示 $\tau_{\geq 0}A[x]$ 的周期循环同调上的偶过滤（定义见 [**HRW22**]）。赋值$A \mapsto (\tau_{\geq 0}A)^{tS^1}$ 是注 4.3.3 中构造“重缩放”形式群律的同伦论类比；换言之，形式谱 $\pi_0((\tau_{\geq 0}A)^{tS^1})$ 是 Quillen 形式群形式谱 $\pi_0(A^{hS^1})$ 的重缩放类比。

ArponRaksit 的未发表工作表明，F-德拉姆复形 $F\Omega^{\square,\mathbf{A}^1}$是 $\mathrm{HP}(\tau_{\geq 0}A[x]/\tau_{\geq 0}A)$的第零个相关分次部分$\mathrm{gr}^0_{\mathrm{ev}}$。[6] 特别地，在此情况下，$F$-德拉姆复形具有 $\mathbb{E}_\infty$-$R[\![t]\!]$-代数结构。定理4.3.20 的每一部分都有同伦类比：例如，定理 4.3.20(3) 的 décalage 同构在 [**Dev23b**，命题 3.5.3] 中得到证明。

当 $A = \mathrm{KU}$ 表示周期复 K 理论（因此 $\tau_{\geq 0}A = \mathrm{ku}$ 表示连通复 K 理论）时，A 上的形式群律 π_0恰好是乘法形式群律；因此，q-德拉姆复形是 $\mathrm{gr}^0_{\mathrm{ev}}\mathrm{HP}(\mathrm{ku}[x]/\mathrm{ku})$。正如 [**DR23**], 所解释的，$\mathrm{HP}(\mathrm{ku}[x]/\mathrm{ku})$ 的 p-完备化可以通过 $\mathbb{Z}_p[\zeta_p][x]$ 的拓扑负循环同调来理解；这是 Bhatt-Scholze 通过棱柱上同调构造 q-德拉姆上同调的一种同伦论类比 [**BS19**] 。

当 $A = E_n$ 是与Lubin-Tate形式群相关的MoravaE-理论（见例4.3.13），而 $\tau_{\geq 0}A = e_n$ 是其连通覆盖时，例4.3.13 的 F-德拉姆复形作为 $\mathrm{gr}^0_{\mathrm{ev}}\mathrm{HP}(e_n[x]/e_n)$ 出现。周期循环同-调$\mathrm{HP}(e_n[x]/e_n)$在 Bhatt-Morrow-Scholze [**BMS19**], 的高阶色数类比工作中发挥着重要作用，并将在未来的工作中加以探讨。

尽管这并不完全属于上述框架，但第一作者希望在未来的工作中证明：当 $A = L^s(\mathbb{Z})$ 是整数的对称L理论（见 [**HLN21**]）时，与双曲形式群律相关联的 F-德拉姆复形与 $\mathrm{gr}^0_{\mathrm{ev}}\mathrm{HP}(L^s(\mathbb{Z})[x]/L^s(\mathbb{Z}))$密切相关。这体现了这样一个观察（可追溯至赫尔布鲁赫符号定理）：与 $L^s(\mathbb{Z})$上的复形定向相关联的形式群律的对数由双曲正切函数 $\tanh(x)$ 给出。

4.4. Weyl代数的一种变体。众所周知，基交换环 R 上的经典德拉姆复形与仿射直线上的微分算子构成的通常的 Weyl代数互为 Koszul 对偶：

$$\mathscr{D}_{\mathbf{A}^1} = R\langle x, \partial_x\rangle/([\partial_x, x] = 1).$$

加法形式群的备注 4.3.8 中的复形，也与这个 Weyl代数的一个缩放类似物 $R[\![t]\!]\langle x, D\rangle/([D,x] = t)$ Koszul 对偶；这种缩放相当于将 ∂_x 替换为 $t\partial_x$。对于任意形式群律，这一事实也有类似情形，下面我们将对此进行说明。事实证明，这样做要方便得多，便于...

[6]运用类似的方法，还可以证明，备注 4.3.8 中的 F-德拉姆复形变体是 $A[x]$的负循环同调中的第零关联分次部分 $\mathrm{gr}^0_{\mathrm{ev}}\mathrm{HC}^-(A[x]/A)$。

研究 $\mathbb{G}_m$ 的 Weyl代数，因此我们将限制在该情形。 [**Dev23a** 第 3 节中简要提到了本节的部分讨论内容。照例，固定一个基交换环 R 以及其上的形式群律 $F(x,y)$ R。

定义 4.4.1. $\mathbb{G}_m$ = 谱 $R[x^{\pm 1}]$ 的 F-*Weyl* 代数 定义为由下式给出的结合 $R[\![t]\!]$-代数：

$$F\mathscr{D}_{\square,\mathbf{G}_m} := R[\![t]\!]\langle x^{\pm 1}, y\rangle^{\wedge}_{y}/(yx = xF(y,t)).$$

例 4.4.2. 对于加法形式群律，定义 4.4.1 中施加的关系就是 $yx = x(y+t)$，或者等价地， $[y,x] = tx$。这通过将 y 映射到缩放向量场 $tx\partial_x$，定义了 $F\mathscr{D}_{\square,\mathbf{G}_m}$ 与 $\mathbb{G}_m$ 的缩放Weyl代数之间的一个同构。

例 4.4.3. 对于乘法形式群律，记 $q = 1+t$。若定义 $\widetilde{y} = 1+y$，则定义 4.4.1 中施加的关系就是

$$(\widetilde{y}-1)x = x(q\widetilde{y}-1),$$

或者等价地， $\widetilde{y}x = qx\widetilde{y}$。注意， $\widetilde{y}$ 作为算子 $q^{x\partial_x}$ 作用，因此我们得到 $F\mathscr{D}_{\square,\mathbf{G}_m}$ 与 $R[\![q-1]\!]\langle x^{\pm 1}, q^{x\partial_x}\rangle/(q^{x\partial_x}x = qxq^{x\partial_x})$ 在理想 $(q^{x\partial_x}-1)$ 处的完备化之间的同构。这个代数本质上是 $\mathbb{G}_m$ 的 q-Weyl 代数，有时也称为“量子环面”，以及环面上的 q-差分算子代数。

引理 4.4.4。 代数 $R[\![t]\!][x^{\pm 1}]$ 具有典范的左 $F\mathscr{D}_{\square,\,\mathbf{G}_m}$-模结构，其中 y 的作用将 $x^n \mapsto [n]_F x^n$映射为。

证明。注意，

$$(yx)(x^n) = [n+1]_F x^{n+1} = xF([n]_F, t)x^n = xF(y,t)x^n,$$

从而上述规定的作用满足定义 4.4.1 中的关系。 □

下面的结果说明备注 4.3.8 中的复形与 F-Weyl代数互为 Koszul 对偶，相关证明概要见 [**Dev23a**，命题 3.3.9]。下文不会用到此结果，因此这里只为完整起见陈述如下。

命题 4.4.5。 导出张量积$R[\![t]\!][x^{\pm 1}] \otimes_{F\mathscr{D}_{\square,\,\mathbf{G}_m}} R[\![t]\!][x^{\pm 1}]$ 可识别为复形

$$C^{\bullet} \otimes_{R[x]} R[x^{\pm 1}] \cong \left(R[\![t]\!][x^{\pm 1}] \to R[\![t]\!][x^{\pm 1}] d\log(x)\right),\ x^n \mapsto [n]_F x^n d\log(x).$$

注 4.4.6。 在 [**Dev23a** 的第 3 节中， R 我们证明了：如果 R 是一个复定向的偶周期 $\mathbb{E}_\infty$- 环，且 $F(x,y)$ 是定义在 $\pi_0(R)$ 上的形式群律，那么 $F\mathscr{D}_{\square,\mathbf{G}_m}$ 就是环旋转等变同调 $\pi_*(R[\Omega T]^{h(T\times S^1{}_{\mathrm{rot}})})$，其中 T是秩为 1 的紧致环面（即圆，不要与环旋转圆混淆）。[7] 我们还解释了，根据注 4.3.24 的讨论，命题 4.4.5 中的 Koszul对偶是 $R[\Omega T]^{h(T\times S^1{}_{\mathrm{rot}})}$与负循环同调 $R[\mathscr{L}T_+]^{hS^1{}_{\mathrm{rot}}} = \mathrm{HC}^-(R[\Omega T]/R)$ 之间 Koszul对偶的一种体现。

[7]事实上，第一作者最初正是通过这种方式接触到 F-Weyl代数的，这篇文章原本也是打算讨论这个代数。然而，在从 Arpon Raksit 处了解到 F-德拉姆复形之后，作者意识到 F-德拉姆复形是一个更容易处理的对象，因此本文最终采用了目前的形式。

注4.4.7（梅林变换）。令 $\mathbb{A}^1_{R[\![t]\!]}$ 表示带有坐标 y的 $R[\![t]\!]$上的仿射直线，从而整数环Z通过映射 $y \mapsto F(y,t)$作用在 $\mathbb{A}^1_{R[\![t]\!]}$ 上。由定义 4.4.1 和莫里塔理论可知，$F\mathscr{D}_{\square,\mathbf{G}_m}$-模的范畴等价于$\mathbb{A}^1_{R[\![t]\!]}/\mathbb{Z}$ 上的准凝聚层范畴，其中这些层是 y-完备的。对于加法形式群律的情形，这是梅林变换的一个 t-变形，它给出了 $\mathscr{D}_{\mathbf{G}_m}$-模范畴与$\mathbb{A}^1/\mathbb{Z}$ 上的准凝聚层范畴之间的等价（其中 Z 通过 $y \mapsto y+1$作用）。

现在让我们描述 $F\mathscr{D}_{\square,\mathbf{G}_m}$ 的中心的一些特殊性质。

回顾 4.4.8. 普通 Weyl代数在特征 $p>0$ 下具有的一项性质是它有一个很大的中心：具体来说，若 R 是一个 $\mathbb{F}_p$-代数，则存在一个同构 $Z(\mathscr{D}_{\mathbf{G}_m}) \cong R[x^{\pm p}, x^p\partial_x^p]$，它将 $Z(\mathscr{D}_{\mathbf{G}_m})$ 与 Frobenius 扭曲 $(\mathbb{G}_m)^{(p)}$ 的余切丛上的函数环等同起来。注意，$x^p\partial_x^p \equiv (x\partial_x)^p - x\partial_x$ (模 p)。在 $\mathscr{D}_{\mathbf{G}_m}$ 与德拉姆复形之间的 Koszul对偶下，对 $Z(\mathscr{D}_{\mathbf{G}_m})$ 的这一等同实际上与卡蒂埃同构 $\mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{\mathbf{G}_m/R}) \cong \Omega^*_{(\mathbf{G}_m)^{(p)}/R}$ Koszul对偶。

因此，自然会想要描述 $F\mathscr{D}_{\square,\mathbf{G}_m}$ 的中心；这导出了以下结果，它与定理 4.3.20(b) 的卡蒂埃同构是 Koszul 对偶的。

定理 4.4.9. $F\mathscr{D}_{\square,\mathbf{G}_m} \otimes_{R[\![t]\!]} R[\![t]\!]/\langle p\rangle_F$ 的中心可识别如下：

$$Z(F\mathscr{D}_{\square,\mathbf{G}_m} \otimes_{R[\![t]\!]} R[\![t]\!]/\langle p\rangle_F) \cong R[\![t]\!]\left[x^{\pm p}, \prod_{j=0}^{p-1}(y +_F [j]_F)\right]/\langle p\rangle_F.$$

证明. 注意到

$$yx^p = x^pF(y,[p]_F) \equiv x^py \pmod{\langle p\rangle_F},$$

因此，x^p 位于 $F\mathscr{D}_{\square,\mathbf{G}_m} \otimes_{R[\![t]\!]} R[\![t]\!]/\langle p\rangle_F$ 的中心。类似地，由于 $\prod_{j=0}^{p-1}(y +_F [j]_F) \equiv \prod_{j=0}^{p-1}(y +_F [j]_F)$（模 $\langle p\rangle_F$），我们有

$$\prod_{j=0}^{p-1}(y +_F [j]_F)x = x\prod_{j=1}^{p}(y +_F [j]_F) \equiv x\prod_{j=0}^{p-1}(y +_F [j]_F) \pmod{\langle p\rangle_F},$$

因此，$\prod_{j=0}^{p-1}(y +_F [j]_F)$ 位于 $F\mathscr{D}_{\square,\mathbf{G}_m} \otimes_{R[\![t]\!]} R[\![t]\!]/\langle p\rangle_F$ 的中心。这定义了一个包含

$$R[\![t]\!]\left[x^p, \prod_{j=0}^{p-1}(y +_F [j]_F)\right]/\langle p\rangle_F \subseteq Z(F\mathscr{D}_{\square,\mathbf{G}_m} \otimes_{R[\![t]\!]} R[\![t]\!]/\langle p\rangle_F),$$

可以验证这是一个同构。 □

例 4.4.10。对于整数环上的加法形式群律（例如），我们有

$$\prod_{j=0}^{p-1}(y + jt) \equiv y^p - t^{p-1}y \pmod{p},$$

因此，在将 $y = x\partial_x$ 进行识别后，定理4.4.9推出缩放Weyl代数具有如下同构：

$$Z(F\mathscr{D}_{\square,\mathbf{G}_m}/p) \cong \mathbf{F}_p[\![t]\!][x^{\pm p}, (x\partial_x)^p - t^{p-1}x\partial_x].$$

将上述代数视为一个分次环，并令 t 和 $x\partial_x$ 的权重均为 1，就可以用多项式生成元替换 t （而不是使用幂级数变量）。将 t 取逆并取$\mathbf{G}_m$-不变元（这可理解为令 $t = 1$），随后得到环 $\mathrm{F}^p[x^{\pm p}, t^{-p}x^p\partial_x^p] = \mathscr{O}_{T^*\mathbf{G}_m^{(1)}}$。

示例 4.4.11。对于整数环上的乘法形式群律（例如），如果我们如上所述定义 $\widetilde{y} = y + 1$ （使得 $\widetilde{y} = q^{x\partial_x}$），则有

$$\prod_{j=0}^{p-1}(y +_F (q^j - 1)) = \prod_{j=0}^{p-1}(q^j\widetilde{y} - 1) \equiv q^{p(p-1)/2}(\widetilde{y}^p - 1) \pmod{[p]_q}.$$

注意，$q^{p(p-1)/2}$ 对于 $p > 2$是 1（模 $[p]_q$），但为 -1 （模 $[2]_q$）。无论哪种情况，$q^{p(p-1)/2}$ 都是一个单位元，因此定理 4.4.9 蕴含以下同构：

$$Z(F\mathscr{D}_{\square,\mathbf{G}_m}/[p]_q) \cong \mathbf{Z}[\zeta_p][x^{\pm p}, q^{px\partial_x}].$$

注 4.4.12. 由于 $F\mathscr{D}_{\square,\ \mathbf{G}_m}$ 可以从秩为 1 的紧致环面 T的等变同调$\pi_*(R[\Omega T]^{h(T\times S^1_{\mathrm{rot}})}$)中恢复（见注4.4.6），因此很自然会想知道，是否可以从仿射格拉斯曼流形的视角解释定理 4.4.9。在 R 是普通（整系数）同调或 K 理论的情况下，这一问题已在 [**Lon17**] 中得到解答——事实上，其中的方法具有足够的几何性，甚至适用于更一般的 R （并且还可以将 T 替换为更一般的连通紧致李群！），因此我们请读者参阅同上引文，以进一步讨论这一问题。

4.5.Bhatt-Lurie 笛卡尔方块的一个类比。在本节中，我们将固定一个 p-完全平坦的整数环p-代数 R 以及一个形式群律$F(x, y)$，其定义在 R上（因此 R是无挠的）。符号 $R[\![t]\!]$ 将始终表示形式幂级数环的p-进完备化，并且所有构造都将在（p, t）-进 $R[\![t]\!]$-概形的范畴内部进行。（为便于阅读，我们省略记号中的完备化。）令 ˆG 表示相应的形式群，从而其底层形式概形为形式谱 $R[\![t]\!]$。

在 [**BL22** 中，引理 3.5.18], Bhatt-Lurie 证明了存在如下的、定义在 R 上的群概形笛卡尔方块：

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G}_m^\sharp & \xrightarrow{\log} & \mathbf{G}_a^\sharp \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle x\mapsto \exp(px)} \\ \mathbf{G}_m & \xrightarrow[x\mapsto x^p]{} & \mathbf{G}_m^{(1)}. \end{array} \tag{7}$$

取垂直商，我们得到$\mathbf{G}_m/\mathbf{G}_m^\sharp$ 与$\mathbf{G}_m^{(1)}/\mathbf{G}_a^\sharp$之间的一个同构；可以将$\mathbf{G}_m/\mathbf{G}_m^\sharp$ 识别为 $\mathbf{G}_m$ 的“德拉姆栈”$\mathbf{G}_m^{\mathrm{dR}}$（例如参见 [**Bha22**]），因此该同构用群概形 $\mathbf{G}_a^\sharp$ 描述了 $\mathbf{G}_m^{\mathrm{dR}}$。

上述文献中对 (7) 的证明使用了方形中出现的群概形与 Witt向量环概形之间的关系。在本节中，我们证明这一结果的一个 F 类比（见定理 4.5.10）；在加法形式群律的情形下，这重新证明了 (7)。我们首先声明，在

当 F 是乘法形式群律时，这一结果是在第一作者与 Michael Kural 的讨论中得到的。此外，本节中的论证关键依赖于 (12)，其 q 类比（例 4.5.8）由 Michael Kural 证明。以下任何错误都完全归咎于第一作者！

ˆ定义 4.5.1。 备注 4.3.3 给出了 Spf $R[\![t]\!]$ 上的形式群 G_t，其对数为 $\widetilde{\ell}_F(x) = \frac{1}{t}\ell_F(tx)$。令 x 表示 $\hat{\mathsf{G}}_t$ 上的坐标，从而其底层形式概形为 Spf $R[\![t,x]\!]$。令 $\hat{\mathsf{G}}_t^\vee$ 表示 $\hat{\mathsf{G}}_t$ 的 Cartier 对偶 $\mathrm{Hom}(\hat{\mathsf{G}}_t, (\mathbb{G}_m)_{R[\![t]\!]})$；关于形式群 Cartier 对偶的一般性质，参见 [**Dri21** 的第 3] 节。元素 $x \in \mathscr{O}_{\hat{\mathbf{G}}_t}$ 定义了一个同态 $\tau\colon \hat{\mathsf{G}}_t^\vee \to (\mathbb{G}_a)_{R[\![t]\!]}$。

˜观察 4.5.2。 在 ($R\otimes$有理数域)$[\![t]\!]$ 上，备注 4.3.3 中的重新缩放对数 ℓ_F 定义了形式群的一个同构 $\widetilde{\ell}_F\colon \hat{\mathsf{G}}_t \xrightarrow{\sim} (\hat{\mathbb{G}}_a)_{(R\otimes\mathbb{Q})[\![t]\!]}$。因此，典范配对 $\hat{\mathsf{G}}^t \times_{R[\![t]\!]} \hat{\mathsf{G}}_t^\vee \to (\mathbb{G}_m)_{R[\![t]\!]}$ 纳入如下图表

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathsf{G}}^t \times_{R[\![t]\!]} \hat{\mathbf{G}}_t^\vee & & \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \widetilde{\ell}_F\times \mathrm{id}}\ \sim & \searrow^{\mu} & \\ (\hat{\mathbb{G}}_a)_{(R\otimes\mathbb{Q})[\![t]\!]} \times_{R[\![t]\!]} \hat{\mathbf{G}}_t^\vee & \xrightarrow[\nu]{} & (\mathbb{G}_m)_{(R\otimes\mathbb{Q})[\![t]\!]}. \end{array}$$

由于 $R[\![t]\!]$ 是 (p,t)-进完备的，$(\hat{\mathbb{G}}_a)_{R[\![t]\!]}$ 的 Cartier 对偶可识别为 $(\mathbb{G}_a^\natural)_{R[\![t]\!]}$的除幂完备化。配对 ν 是由其自身经基变换得到的$R[\![t]\!]$，其中它由以下公式给出

$$\nu : (x,y) \mapsto \exp(xy).$$

由此可得，配对 μ 由下式给出

$$\mu(x,y) = \exp(\widetilde{\ell}_F(x)y).$$

这可以展开为关于 x 的幂级数:

$$\mu(x,y) = \sum_{n\geq 0} \beta_n(y)x^n.$$

展开 Cartier 对偶的定义，并利用 $R[\![t]\!]$ 是 p-无挠的（根据我们的假设，R 是一个 p-完全平坦的整数环$_p$-代数），我们看到，$\hat{\mathsf{G}}_t^\vee$ 上的函数环的底层 $R[\![t]\!]$-模由下式给出（即 (p,t)-进完备化）：

$$\mathscr{O}_{\hat{\mathbf{G}}_t^\vee} = R[\![t]\!]\{\beta_n(y)\}_{n\geq 0}.$$

例 4.5.3. 当 F 是乘法形式群律时，函数 μ 就是

$$\mu(x,y) = \exp\left(\frac{y}{q-1}\log(1+(q-1)x)\right) = (1+(q-1)x)^{y/(q-1)};$$

其幂级数展开为

$$\mu(x,y) = \sum_{n\geq 0} \frac{\prod_{j=0}^{n-1}(y-j(q-1))}{n!}x^n.$$

这个表达式在 [**Dri21**] 中发挥着重要作用。

例 4.5.4. 当 F 是双曲形式群律（因此 $\ell_F(x) = \tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$）时，函数 μ 为

$$\mu(x,y) = \exp\left(\frac{y}{2(q-1)}\log\left(\frac{1+(q-1)x}{1-(q-1)x}\right)\right) = \left(\frac{1+(q-1)x}{1-(q-1)x}\right)^{y/2(q-1)}.$$

这个函数的幂级数展开式有些复杂：可以证明，写成 $\mu(x,y) = \sum_{n\geq 0}\beta_n(y)x^n$ 后，我们有 $\beta_0 = 1, \beta_1 = y$，并且存在一个递推关系

$$\beta_{n+2}(y) = \frac{y\beta_{n+1}(y) + n(q-1)^2\beta_n(y)}{n+2}.$$

利用计算机可以算出，这个展开式的前几项为

$$\mu(x,y) = 1 + yx + \frac{y^2}{2}x^2 + \frac{2(q-1)^2y + y^3}{3!}x^3 + \frac{8(q-1)^2y^2 + y^4}{4!}x^4 + \frac{24(q-1)^4y + 20(q-1)^2y^3 + y^5}{5!}x^5 + \cdots.$$

注意到 $\beta_n(y) \equiv \frac{y^n}{n!}$（模 2），这反映了双曲形式群经基变换到 $\mathbb{F}_2$ 后与加法形式群同构这一事实。

定义 4.5.5. 令 $\mathbf{G}_m^{\sharp,F}$ 表示由 (p,t) 进完备化给出的形式谱 $\mathrm{Spf}\, R[\![t]\!]$ 上的形式概形

$$\mathbf{G}_m^{\sharp,F} = \mathrm{Spf}\, R[\![t]\!]\left[y^{\pm 1}, \frac{(y-1)_s^n}{n!_F}\right]_{n\geq 0}.$$

这可以看作是 $(\mathbf{G}_m)_{R[\![t]\!]}$ 的恒等截面的“F-除幂包”。赋予 $\mathbf{G}_m^{\sharp,F}$ 群概形结构，使余乘法映射为 $y \mapsto y \otimes y$。这个定义是否良定并非显而易见，但我们将在下文的推论 4.5.9 中证明这一点。存在一个典范同态 $\mathrm{can} : \mathbf{G}_m^{\sharp,F} \to (\mathbf{G}_m)_{R[\![t]\!]}$。

注意，注记 4.3.17 表明 $F\log(y)$ 定义了 $\mathbf{G}_m^{\sharp,F}$ 的坐标环中的一个元素；也就是说，它定义了一个映射 $F\log : \mathbf{G}_m^{\sharp,F} \to (\mathbf{G}_a)_{R[\![t]\!]}$。事实上，这是一个同态，因为 $F\log(y_1y_2) = F\log(y_1) + F\log(y_2)$。

命题 4.5.6。 在底空间 $(R\otimes$有理数域$)[\![t]\!]$ 上工作。于是，$\mu(x, F\log(y))$ 关于变量 y 的迭代 F-阶导数为

$$\nabla_{F,y}^n \mu(x, F\log(y)) = \frac{x(x +_{\widetilde{F}} \langle -1\rangle_F(t)) \cdots (x +_{\widetilde{F}} \langle -n+1\rangle_F(t))}{y^n}\mu(x, F\log(y)). \tag{8}$$

证明。注意：

$$\mu(x, F\log(y)) = \sum_{n\geq 0}\beta_n(F\log(y))x^n = \exp(F\log(y)\widetilde{\ell}_F(x))$$
$$= \exp\left(\frac{t}{\ell_F(t)}\log(y)\cdot\frac{\ell_F(tx)}{t}\right) = \exp\left(\log(y)\frac{\ell_F(tx)}{\ell_F(t)}\right) = y^{\frac{\ell_F(tx)}{\ell_F(t)}};$$

第三个等式使用了通过推论 4.3.15给出的 $F\log(y)$ 的定义，以及通过注记4.3.3 给出的 $\ell_F(x)$的定-~~)</style}~~义。由此可以推导出(8)；让我们以一种相当低效的方式来说明这一点。为记号简便起见，记 $a = \frac{\ell_F(tx)}{\ell_F(t)}$为，以便

$$y^a = \sum_{m\geq 0}\frac{a(a-1)\cdots(a-(m-1))}{m!}(y-1)^m,$$

和 $\partial_y y^a = ay^{a-1}$。

现在我们可以利用命题 4.3.9，通过归纳法计算迭代的 F-导数。我们从基础情形 $n=1$ 开始。注意到 $(y\partial_y)y^a = ay^a$，因此

$$(y\partial_y)^m y^a = a^m y^a \tag{9}$$

通过对 m 进行简单的归纳法。记 $\mathscr{E}_F(z) = \sum_{m\geq 0} b_m z^m$；那么利用 (9)，我们有：

$$\begin{aligned}\nabla_{F,y}\mu(x,F\log(y)) &= \frac{1}{yt}\sum_{m\geq 0} b_m \ell_F(t)^m (y\partial_y)^m y^a = \frac{1}{yt}\sum_{m\geq 0} b_m \ell_F(t)^m a^m y^a \\ &= \frac{y^a}{yt}\sum_{m\geq 0} b_m \ell_F(tx)^m = \frac{y^a}{yt}\mathscr{E}_F(\ell_F(tx)) = \frac{tx}{yt}\cdot y^a \\ &= \frac{x}{y}y^a = \frac{x}{y}\mu(x,F\log(y)),\end{aligned}$$

如所需。

迭代 F-导数的证明类似。事实上，注意到 (9) 意味着对任意 $j\geq 0$，我们有：

$$(y\partial_y)^m\left(\frac{\mu(x,F\log(y))}{y^j}\right) = (y\partial_y)^m y^{a-j} = (a-j)^m y^{a-j} = (a-j)^m\frac{\mu(x,F\log(y))}{y^j}. \tag{10}$$

假设 (8) 对 n 成立；那么：

$$\begin{aligned}\nabla_{F,y}^{n+1}\mu(x,F\log(y)) &= \nabla_{F,y}\nabla_{F,y}^n\mu(x,F\log(y)) \\ &= x(x+_{\widetilde{F}}\langle -1\rangle_F(t))\cdots(x+_{\widetilde{F}}\langle -n+1\rangle_F(t))\nabla_{F,y}\left(\frac{\mu(x,F\log(y))}{y^n}\right).\end{aligned} \tag{11}$$

右侧的导数可以如下计算：

$$\begin{aligned}\nabla_{F,y}\left(\frac{\mu(x,F\log(y))}{y^j}\right) &= \frac{1}{yt}\sum_{m\geq 0} a_m\ell_F(t)^m(y\partial_y)^m\left(\frac{\mu(x,F\log(y))}{y^j}\right) \\ &= \frac{1}{yt}\sum_{m\geq 0} a_m\ell_F(t)^m\left(\frac{\ell_F(tx)}{\ell_F(t)}-j\right)^m\frac{\mu(x,F\log(y))}{y^j} \\ &= \frac{\mu(x,F\log(y))}{y^j}\frac{1}{yt}\sum_{m\geq 0} a_m(\ell_F(tx)-j\ell_F(t))^m \\ &= \frac{\mu(x,F\log(y))}{y^j}\frac{1}{yt}\mathscr{E}_F(\ell_F(tx)-j\ell_F(t)).\end{aligned}$$

由于

$$\ell_F(tx)-j\ell_F(t) = \ell_F(tx)+\ell_F([-j]_F(t)) = \ell_F(tx+_F[-j]_F(t))),$$

这变为

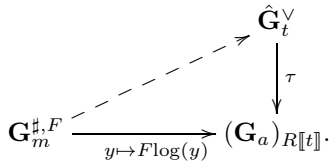
$$\begin{aligned}\nabla_{F,y}\left(\frac{\mu(x,F\log(y))}{y^j}\right) &= \frac{\mu(x,F\log(y))}{y^j}\frac{1}{yt}\mathscr{E}_F(\ell_F(tx+_F[-j]_F(t))) \\ &= \frac{\mu(x,F\log(y))}{y^j}\frac{x+_{\widetilde{F}}\langle -j\rangle_F(t)}{y}.\end{aligned}$$

将其代入 (11)，我们得到

$$\nabla_{F,y}^{n+1}\mu(x,F\log(y)) = x(x+_{\widetilde{F}}\langle -1\rangle_F(t))\cdots(x+_{\widetilde{F}}\langle -n+1\rangle_F(t))(x+_{\widetilde{F}}\langle -n\rangle_F(t))\frac{\mu(x,F\log(y))}{y^{n+1}},$$

如所愿。 □

推论4.5.7。存在一个虚线映射（其是 *over* $R[\![t]\!]$ 上的同态），填充以下图表：



证明。在观察 4.5.2 的记号下，我们需要证明对每个 $n \geq 0$，$\beta_n(F\log(y)) \in \mathscr{O}_{\mathbf{G}_m^{\sharp,F}}$。为证明这一点，我们在 ($R \otimes$ 有理数域)$[\![t]\!]$ 上进行运算，并利用引理 4.3.14 将$\mu(x, F\log(y))$展开为 $\binom{(y-1)^n}{s}_{!_F}$ 的幂级数。在命题~~ 4.5.6 ~~中的 (8) 处代入 $y = 1$，得到

$$\nabla_{F,y}^n \mu(x, F\log(y))|_{y=1} = x(x +_{\widetilde{F}} \langle -1\rangle_F(t)) \cdots (x +_{\widetilde{F}} \langle -n+1\rangle_F(t)).$$

由引理 4.3.14 可知，

$$\sum_{n\geq 0} \beta_n(F\log(y))x^n = \mu(x, F\log(y))$$

$$= \sum_{n\geq 0} x(x +_{\widetilde{F}} \langle -1\rangle_F(t)) \cdots (x +_{\widetilde{F}} \langle -n+1\rangle_F(t)) \frac{(y-1)_s^n}{n!_F}. \tag{12}$$

取右侧 x^n 的系数，将 $\beta_n(F\log(y))$ 表示为一个（$R \otimes$有理数域）$[\![t]\!]$-线性组合，组合项为除幂 $\binom{(y-1)^n}{s}_{!_F}$；但由于其中没有出现有理~~数分母~~，事实上这将 $\beta_n(F\log(y))$表示为一个 $R[\![t]\!]$-线性 combi- nation，组合项为除幂 $\binom{(y-1)^n}{s}_{!_F}$，正如所要求的那样。□

例 4.5.8. 当 F 是乘法形式群律时，(12) 化简为以下恒等式：

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\log_q(y)(\log_q(y) - (q-1)) \cdots (\log_q(y) - (n-1)(q-1))}{n!} x^n$$

$$= \sum_{n\geq 0} q^{-\binom{j}{2}} x(x - [1]_q) \cdots (x - [n-1]_q) \frac{(y-1)(y-q) \cdots (y-q^{n-1})}{[n]_q!}. \tag{13}$$

事实上，我们有

$$x +_{\widetilde{F}} [-n]_q = x + \frac{q^{-n}-1}{q-1} + (q^{-n}-1)x = q^{-n}x + [-n]_q = q^{-n}(x - [n]_q).$$

恒等式 (13) 是 Michael Kural 告知第一作者的，并启发了更一般的恒等式 (12)。

推论 4.5.9. $\mathbf{G}_m^{\sharp\, F,}$ 上的群结构是良定义的。

证明。假设 y_1 和 y_2 都具有 F-除幂 $\binom{(y-1)^n}{s}_{!_F}$；我们需要证明~~ y_1y_2 ~~的乘积也具有同样的性质。由于 $F\log(y_1y_2) = F\log(y_1) + F\log(y_2)$，可以将 $\beta_n(F\log(y_1y_2))$ 表示为 $\beta_n(F\log(y_1))$和$\beta_n(F\log(y_2))$的函数。利用推论 4.5.7 的证明中的恒等式(12) 可知，y_1y_2 也必须具有 F-除幂，正如所需。□

本节的主要结果如下：当 F 是加法形式群律时，它恢复了 (7)。利用注记 4.3.10，事实上可以将ˆ定理4.5.10 加以推广，使其在基底 $R[\![t]\!]$ （或者更确切地说，G = 形式谱 $R[\![t]\!]$）被形式群的模空间叠上的通用形式群 ˆ$\mathsf{G}^{\mathrm{univ}}$ 所替代时仍然成立，其中该模空间叠定义在 p-幂零环上。

定理 4.5.10. 存在一个定义在 $R[\![t]\!]$ 上的群概形笛卡尔方块：

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G}_m^{\sharp,F} & \xrightarrow{y\mapsto F\log(y)} & \hat{\mathbf{G}}_t^{\vee} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{can}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \langle p\rangle^*} \\ (\mathbf{G}_m)_{R[\![t]\!]} & \xrightarrow[y\mapsto y^p]{} & (\mathbf{G}_m^{(1)})_{R[\![t]\!]}. \end{array} \tag{14}$$

ˆ右侧的映射是与同态 p整数环 $\to \mathbf{G}_t$ 将$p \mapsto \langle p\rangle_F(t)$对应的 ***Cartier*** 对偶。特别地，存在一个扩张

$$0 \to (\mu_p)_{R[\![t]\!]} \to \mathbf{G}_m^{\sharp,F} \xrightarrow{F\log} \hat{\mathbf{G}}_t^{\vee} \to 0.$$

证明。为了验证该图表是交换的，我们需要验证 $\mathscr{O}_{\mathbf{G}_m^{\sharp,F}}$ 的元素相等：

$$y^p = \langle p\rangle^*(F\log(y)).$$

由于 R 在整数环$_p$上是 p-完全平坦的，因此存在一个单射 $R[\![t]\!] \subseteq (R \otimes$有理数域$)[\![t]\!]$；所以只需在$(R \otimes$有理数域$)[\![t]\!]\{\beta_n(y)\}_{n\geq 0}$中检验所需的恒等式。根据观察 4.5.2， $\langle p\rangle^*$ 可以表示为

$$\begin{aligned} \langle p\rangle^*(z) &= \exp(z\widetilde{\ell}_F(\langle p\rangle_F(t))) = \exp\left(z\frac{\ell_F(t\langle p\rangle_F(t))}{t}\right) \\ &= \exp\left(z\frac{\ell_F([p]_F(t))}{t}\right) = \exp\left(p\frac{\ell_F(t)}{t}z\right). \end{aligned} \tag{15}$$

注意，这也是 $\exp\left(\ell_F([p]_F(\underbrace{t}_{t}z))\right)$。由此可得

$$\langle p\rangle^*(F\log(y)) = \exp\left(p\frac{\ell_F(t)}{t}F\log(y)\right) = \exp\left(p\frac{\ell_F(t)}{t}\frac{t}{\ell_F(t)}\log(y)\right) = \exp(p\log(y)) = y^p,$$

正如所需。

为验证该方块是笛卡尔方块，首先注意到水平映射都是满射。对于 $(\mathsf{G}_m)_{R[\![t]\!]}$ 上的 Frobenius，这显然成立。对于映射 $F\log$，定义 $F\exp(z) := \exp(\ell_F(t)\, t\ z)$，使得 $F\exp(z) = \sum_{n\geq 0}\beta_n(z)$。存在一个同态 ˆ$\mathsf{G}_t^{\vee} \to (\mathsf{G}_m)_{R[\![t]\!]}$，它将 $z \mapsto F\exp(z) := \exp(\ell_F(t)\, t\ z)$ 送到 $z = F\log(F\exp(z))$。利用 (12) 和 $y = F\exp$，可知 $F\exp$ 落在 $\mathsf{G}_m^{\sharp F}$ 中，也就是说，$(F\exp(\underbrace{z\ -1}_{n})^{n}_{s})\,!_F$ 在 $\mathscr{O}$ˆ$\mathsf{G}_t^{\vee}$ 中定义良好。这意味着 $F\log$ 是满射。

还需证明 $F\log : \mathsf{G}_m^{\sharp F} \to$ ˆ$\mathsf{G}_t^{\vee}$ 的核同构于 $(\mu_p)_{R[\![t]\!]}$。注意到 $F\log(y) = 0$ 意味着 $\log(y) = 0$，根据笛卡尔方块 (7)，当且仅当 $y^p = 1$ 时这成立。反过来，若 $y^p = 1$，则

$$p \cdot F\log(y) = F\log(y^p) = 0,$$

这意味着 $F\log(y) = 0$。 □

例 4.5.11. 由定理 4.5.10 可知，$\mathrm{G}_m^{\sharp,F}$ 是由 $(\mu_p)^{R[\![t]\!]}$ 对 $\hat{}\mathrm{G}_t^\vee$ 的扩张。在 $R=$整数环$_p$ 上的乘法形式群律情形，这在 [**Dri21**] 中得到了研究。具体而言，在 [**Dri21** 的第 5.3 节1], 中证明了，存在一个由函子给出的扩张 $\widetilde{G}_Q$，它是由 $(\mu_p)^{\mathbf{Z}_p[\![q-1]\!]}$ 对 $(\hat{}\mathrm{G}_{m,\ q-1})^\vee$ 的扩张。

$$\widetilde{G}_Q : R \mapsto \{(q,x,u) \in R^\times \times W(R) \times R^\times \mid q-1 \text{ is nilpotent}, 1+\Phi_p([q])x = [u^p]\}.$$

这里，$W(R)$表示 R的 p-典型Witt 向量环。Drinfeld 证明，群概形 $\widetilde{G}_Q$ 是整数环 $_p[\![q-1]\!]$ 上的$\mathrm{G}_m^{\sharp,F}$ 的同构（作为 $(\hat{}\mathrm{G}_{m,\ q-1})^\vee$的扩张，其扩张对象为 $(\mu_p)^{\mathbf{Z}_p[\![q-1]\!]}$）。

如 [**Dri21**，附录D] （另见 [**Dev23b**，备注C.3] 以及示例 4.5.3），Cartier 对偶 $(\hat{}\mathrm{G}_{m,q-1})^\vee$ 可识别为

$$(\hat{\mathbf{G}}_{m,q-1})^\vee = \operatorname{Spf} \mathbf{Z}_p[\![q-1]\!]\left[y, \frac{\prod_{j=0}^{n-1}(y-j(q-1))}{n!}\right]_{n\geq 0}.$$

由 (15)，同态 $\langle p\rangle^*$ 对应于可逆元

$$\langle p\rangle^*(z) = \exp\left(p\frac{\log(q)}{q-1}z\right) = q^{pz/(q-1)};$$

这个元素在 [**Dri21**] 中起着重要作用。注意，这也可以写成

$$\langle p\rangle^*(z) = \sum_{n\geq 0}\frac{\prod_{j=0}^{n-1}(z-j(q-1))}{n!}[p]_q^n = \sum_{n\geq 0}\frac{\prod_{j=0}^{n-1}(pz-j(q-1))}{n!}.$$

在这种情况下，定理 4.5.10 因而特化为给出一个定义在 $\mathrm{Z}_p[\![q-1]\!]$ 上的笛卡尔方块:

$$\begin{array}{ccccc} \widetilde{G}_Q & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{G}_m^{\sharp,F} & \xrightarrow{y\mapsto \log_q(y)} & \hat{\mathbf{G}}_{m,q-1}^\vee \\ & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{can}} & & \downarrow{\scriptstyle z\mapsto q^{pz/(q-1)}} \\ & & (\mathbf{G}_m)_{\mathbf{Z}_p[\![q-1]\!]} & \xrightarrow[y\mapsto y^p]{} & (\mathbf{G}_m^{(1)})_{\mathbf{Z}_p[\![q-1]\!]}. \end{array}$$

注记 4.5.12。在 [**Dri21** 的 5] 节中（特别是，在 [**Dri21** 的注记 5.7.5] 中），证明了 $(\hat{}\mathrm{G}_{m,q-1})^\vee$ 同构于群概形 $W_{\mathbf{Z}_p[\![q-1]\!]}[F-(1+[q]+\cdots+[q]^{p-1})],$，其中 $W_{\mathbf{Z}_p[\![q-1]\!]}$ 是定义在整数环 $\mathrm{Z}_p[\![q-1]\!]$ 上的 Witt 概形，而 $[q]\in W(\mathrm{Z}_p[\![q-1]\!])$ $\hat{}$ 是 q 的 Teichmüller 提升。对于更一般的形式群 G_t，本节的方法或许可以为 Cartier 对偶 $\hat{}\mathrm{G}_t^\vee$ 给出一个 Witt 向量模型，但我们尚未探索这一方向。

例 4.5.13. 如果 F 是双曲形式群律，那么 $\ell_F(t) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{t+1}{1-t}\right)$。令 $t=q-1$，则 (15) 表明。

$$\langle p\rangle^*(z) = \exp\left(p\frac{\log(\frac{q}{2-q})}{2(q-1)}z\right) = \left(\frac{q}{2-q}\right)^{pz/2(q-1)}.$$

指数中出现 2的分母意味着情形 $p>2$ 和$p=2$ 表现出显著差异。由于 $\frac{q}{2-q} = 1+(q-1)\cdot\frac{2}{2-q}$，也可以

写

$$\langle p\rangle^*(z)=\sum_{n\geq 0}\frac{\prod_{j=0}^{n-1}(pz-2j(q-1))}{n!}\left(\frac{1}{2-q}\right)^n=\sum_{n\geq 0}\frac{\prod_{j=0}^{n-1}(z-2j(q-1))}{n!2^n}\frac{[p]_q^n}{(2-q)^{pn}}.$$

用 $\hat{}\mathsf{G}_{h,q-1}$ 表示对应于缩放双曲形式群律的 $\mathsf{Z}_p[\![q-1]\!]$ 上的形式群。在此情形下，定理 4.5.10 专门化为 $\mathsf{Z}_p[\![q-1]\!]$ 上的一个笛卡尔方块：

$$\begin{array}{ccc}\mathbf{G}_m^{\sharp,F} & \xrightarrow{y\mapsto F\log(y)} & \hat{\mathbf{G}}_{h,q-1}^{\vee}\\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{can}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle z\mapsto\left(\frac{q}{2-q}\right)^{pz/2(q-1)}}\\ (\mathbf{G}_m)_{\mathbf{Z}_p[\![q-1]\!]} & \xrightarrow[y\mapsto y^p]{} & (\mathbf{G}_m^{(1)})_{\mathbf{Z}_p[\![q-1]\!]}.\end{array}$$

例 4.5.14。令 F 为整数环$_p$ 上的形式群律，它由将例 4.3.12的形式群律专门化到 $v_n=1$ 而得到$\hat{}$。令 $\mathsf{G}=$ 形式谱整数环$_p[\![t]\!]$ 表示 $\hat{}$ 相关的形式群，并令G_t 表示整数环$_p[\![t]\!]$上的缩放形式群。那么，(15) 表明 $\langle p\rangle^*(z)$ 是 $\exp\left(p^{\mathrm{Li}_{1/n}\left(\frac{t}{t}z\right)}\right)$ 的一个“p^n-典型”版本。若我们将 $E_p(t)$记作Artin–Hasse 指数，那么当 $n=1$时，$\langle p\rangle^*(z)$ 可以明确写出：

$$\langle p\rangle^*(z)=E_p(t)^{pz/t}=\prod_{p\nmid m}(1-t^m)^{-\frac{p\mu(m)z}{tm}}.$$

如果我们记作 $t=\widetilde{p}$ （沿用 [**BL22**] 的记号），那么此情形下的定理 4.5.10 特化为给出一个在整数环 $_p[\![\widetilde{p}]\!]$ 上的笛卡尔方块：

$$\begin{array}{ccc}\mathbf{G}_m^{\sharp,F} & \xrightarrow{y\mapsto F\log(y)} & \hat{\mathbf{G}}_{\widetilde{p}}^{\vee}\\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{can}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle z\mapsto E_p(\widetilde{p})^{pz/\widetilde{p}}}\\ (\mathbf{G}_m)_{\mathbf{Z}_p[\![\widetilde{p}]\!]} & \xrightarrow[y\mapsto y^p]{} & (\mathbf{G}_m^{(1)})_{\mathbf{Z}_p[\![\widetilde{p}]\!]}.\end{array}$$

这可以视为例 4.5.11 的 p-典型版本。

注 4.5.15. 典范同态 $\mathrm{can}:\mathsf{G}_m^{\sharp,F}\to,(\mathsf{G}_m)_{R[\![t]\!]}$ 余代数定义了商群堆 $\mathsf{G}_m^{F\mathrm{dR}}:=(\mathsf{G}_m)_{R[\![t]\!]}/\mathsf{G}_m^{\sharp,F}$,在 $R[\![t]\!]$上。通过直接计算可以证明，堆$\mathsf{G}_m^{F\mathrm{dR}}$的结构层的导出整体截面计算出 F-德拉姆复形 $F\Omega_{\square,\mathbf{G}_m}:=F\Omega_{\square,\mathbf{A}^1}\otimes_{R[\![t]\!][y]}R[\![t]\!][y^{\pm 1}]$。要点（此处省略论证）是存在一个 $R[\![t]\!]$-余代数的拟同构

(16)

$$R[\![t]\!][y^{\pm 1}]\otimes_{F\Omega_{\square,\mathbf{G}_m}}R[\![t]\!][y^{\pm 1}]\simeq R[\![t]\!]\left[y_1^{\pm 1},y_2^{\pm 1},\frac{(y_1-y_2)_s^n}{n!_F}\right]_{n\geq 0}\simeq\mathscr{O}_{\mathbf{G}_m^{\sharp,F}\times_{\mathrm{Spf}\,R[\![t]\!]}\mathbf{G}_m},$$

其中，左端的张量积是导出的，并且两边都隐式地关于 (p,t) 进完备。最后一个等价关系可由注意到 $(y_1-y_2)_s^n\underset{s}{=}{}_n\, y_2(y_1y_2^{-1}-1)_s^n$ 得出，因此添加 $(y_1-y_2)^n{}_{s}!_F$ 等价于添加F-除幂 $(y_1y_2^{-1}-1)^n{}_{s}!_F$。

在加法形式群律的情形下，(16)归结为 p-完备等价

$$\mathbf{Z}_p[y^{\pm 1}] \otimes_{\mathrm{dR}_{\mathbf{Z}_p[y^{\pm 1}]/\mathbf{Z}_p}} \mathbf{Z}_p[y^{\pm 1}] \simeq \mathrm{dR}_{\mathbf{Z}_p[y^{\pm 1}]/\mathbf{Z}_p[y_1^{\pm 1}, y_2^{\pm 1}]} \simeq \mathbf{Z}_p[y_1^{\pm 1}, y_2^{\pm 1}]\langle y_1 - y_2 \rangle \cong \mathscr{O}_{\mathbf{G}_m^\sharp \times_{\mathrm{Spf}\, \mathbf{Z}_p} \mathbf{G}_m}$$

它由 [**Bha12** 命题 8.5] 得出。对于乘法形式群律， [**Pri19**] 已证明了 (16)。

据此，定理 4.5.10 可以改述为以下两个陈述：

(1) 典范映射 $(\mathsf{G}_m)^{R[\![t]\!]} \to \mathsf{G}_m^{F\mathrm{dR}}$可经由 Frobenius $(\mathsf{G}_m)^{R[\![t]\!]} \to (\mathsf{G}_m^{(1)})^{R[\![t]\!]}$分解。

(2) 映射 $(\mathsf{G}_m^{(1)})^{R[\![t]\!]} \to \mathsf{G}_m^{F\mathrm{dR}}$是满射，其核同构于缩放形式群 $\hat{}\mathsf{G}_t$ 的 Cartier 对偶。这里，映射 $\hat{}\mathsf{G}_t^\vee \to (\mathsf{G}_m^{(1)})^{R[\![t]\!]}$ 是同态 $p\mathsf{Z} \to \hat{}\mathsf{G}_t$ 的 Cartier 对偶，该同态将 $p \mapsto \langle p \rangle_F(t)$ 送至相应元素。特别地，存在一个同构

$$\mathbf{G}_m^{F\mathrm{dR}} \simeq (\mathbf{G}_m^{(1)})_{R[\![t]\!]}/\hat{\mathbf{G}}_t^\vee$$

在形式谱 $R[\![t]\!]$之上。

关于乘法形式群律，这一图景已在 [**Dri21**]中得到详尽讨论。正如我们希望在未来的工作中阐明的那样，以上两个陈述是关于F-德拉姆复形的同伦论视角所自然导出的结果（见注 4.3.24）。我们也希望定理 4.5.10 有助于理解猜想 4.3.22，尤其是有助于理解 F-德拉姆上同调的一种“堆化方法”（遵循 [**BL22**, **Dri18**, **Dri22**,**Bha22**]）。事实上， F-除幂概形 $\mathsf{G}_m^{\sharp,F}$从代数几何角度来看先验地相当难以处理，但定理 4.5.10 表明，可以借助 $(\mathsf{G}_m)^{R[\![t]\!]}$ 以及缩放形式群 $\hat{}\mathsf{G}_t$的 Cartier 对偶，对其进行具体理解。

让我们最后指出，下面的结论是定理 4.5.10 的直接推论：

推论 4.5.16. 令$(\mathbf{G}_m^{\sharp,F})^\vee$ 表示$\mathbf{G}_m^{\sharp,F}$的 *Cartier* 对偶。那么，存在一个在 $R[\![t]\!]$ 上的推出方形：

$$\begin{array}{ccc} \underline{p\mathbf{Z}}_{R[\![t]\!]} & \xrightarrow{p \mapsto \langle p \rangle_F(t)} & \hat{\mathbf{G}}_t \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{\mathbf{Z}}_{R[\![t]\!]} & \longrightarrow & (\mathbf{G}_m^{\sharp,F})^\vee. \end{array}$$

参考文献

[AL20] J. Anschütz 和 A.-C. Le Bras。次数 2 的 p-完备化旋轮迹。Ann. K-Theory, 5(3):539–580, 2020。[Bha00] M. Bhargava。阶乘函数及其推广。Amer. Math. Monthly, 107(9):783–799, 2000。[Bha12] B. Bhatt。

p 1204 6560, -进导出 2012

de Rham 上同调。https://arxiv.org/abs/ .[Bha22] B. Bhatt。棱柱 F-规范。讲义见 https://www.math.ias.edu/ ~bhatt/teaching/mat549f22/lectures.pdf, 2022。[BL22] B. Bhatt 和 J. Lurie。绝对棱柱上同调。https://arxiv.org/abs/2201. 06120, 2022。[BMS18] B. Bhatt、M. Morrow 和 P. Scholze。积分 p-进 Hodge 理论。Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., 128:219–397, 2018。[BMS19] B. Bhatt、M. Morrow 和 P. Scholze。拓扑霍赫希尔德同调与积分 p-进 Hodge 理论。Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., 129:199–310, 2019。[BO78] P. Berthelot 和 A. Ogus。晶体上同调札记。Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1978。[BS19] B. Bhatt 和 P. Scholze。棱柱与棱柱上同调。https://arxiv.org/abs/ 1905.08229, 2019。[Dev23a] S. Devalapurkar。正则轨迹上的几何 Satake 色差。https://arxiv.org/abs/2303.09432, 2023。[Dev23b] S. Devalapurkar。拓扑霍赫希尔德同调、截断 Brown-Peterson 谱与拓扑 Sen 算子。https://arxiv.org/abs/2303.17344, 2023。[DR23] S. Devalapurkar 和 A. Raksit。待定。即将出版, 2023。[Dri18] V. Drinfeld。关于晶体的堆化方法。https://arxiv.org/abs/1810.11853, 2018。[Dri21] V. Drinfeld。在 Spf 整数环$_p$的棱柱化上定义的一维形式群。http: //arxiv.org/abs/2107.11466, 2021。[Dri22] V. Drinfeld。棱柱化。https://arxiv.org/abs/2005.04746, 2022。[Eul53] L. Euler。若干具有特殊性质的级数研究。Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, 3:86–108, 1753。可见 https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/190/。[Haz78] M. Hazewinkel。形式群及其应用，纯数学与应用数学丛书第 78 卷。Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York- London, 1978。[HLN21] F. Hebestreit、M. Land 和 T. Nikolaus。关于整数的 L-谱的同伦类型。J. Topol., 14(1):183–214, 2021。[Hon70] T. Honda。交换形式群理论。J. Math. Soc. Japan, 22:213–246, 1970。[HRW22] J. Hahn、A. Raksit 和 D. Wilson。交换环谱的拓扑循环同调上的动机滤过。https://arxiv.org/abs/2206.11208, 2022。[Jac09] F. Jackson。关于 q-函数及某种差分算子。Earth and Environmental Science Transactions of The Royal Society of Edinburgh, 46(2):253–281, 1909。[KC02] V. Kac 和 P. Cheung。量子微积分。Universitext。Springer New York, 2002。[Lon17] G. Lonergan。Steenrod 算子、库仑支与 Frobenius 扭曲 I。https://arxiv.org/abs/1712.03711, 2017。[Pri19] J. P. Pridham。通过 -环研究

q Λ 375 1 2 425 452, –de 2019

Rham 上同调。Math. Ann., (-): – 。[Rav86] D. Ravenel。复配边与球面的稳定同伦群。Academic Press, 1986。[Sas18] Sasha。q-范德蒙德恒等式能否提升为关于 F_q上的格拉斯曼流形的某种几何（动机）恒等式? https://mathoverflow.net/q/299582, 2018。[Sch17] P. Scholze。算术几何中的典范 q-变形。Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6), 26(5):1163–1192, 2017。