单原子的纳米光子腔冷却

Chenwei Lv，[1] Ming Zhu，[1] Sambit Banerjee，[1] 以及 Chen-Lung Hung[1, 2, *1]
美国印第安纳州西拉法叶市普渡大学物理与天文学系，邮编 47907[2]美国印第安纳州西拉法叶市普渡大学普渡量子科学与工程研究所，邮编 47907
（日期：2023年4月11日）

我们研究了与弱泵浦纳米光子腔强耦合的二能级原子的外部和内部动力学。我们计算了腔泵浦场产生的偶极力、摩擦力和随机力，并展示了腔体表面附近存在一个三维冷却区域。以双色倏逝场阱为例，我们进行了三维蒙特卡洛模拟，展示了通过动量扩散将单原子高效装载到阱中的过程，以及阱中心附近腔冷却的稳定性。我们的分析表明，腔冷却有望成为一种将冷原子直接从自由空间装载到表面微阱中的有效方法。我们还讨论了泵浦强度对原子捕获和装载效率的影响。

arXiv:2304.04741v1 [quant-ph] 10 Apr 2023

I. 引言

各种纳米光子平台上都已实现了强而高效的原子-光相互作用 [1], ，例如光学纳米光纤 [2–8], 纳米光纤腔 [9, 10], 微环谐振器 [11], 光子晶体波导和腔[12–14]。为了进一步实现与这些平台耦合的单原子的量子控制和操纵，在纳米尺度电介质附近高效地进行原子装载是一个关键要求。在光学纳米光纤上已经实现了采用远失谐红失谐光和蓝失谐光的双色倏逝场阱 [2–5, 9, 15, 16]。在条形、脊形或肋形波导平台 [17, 18] 以及光子晶体波导 [19] 上也提出了类似方案。基于光学力和真空力的更为特殊的阱也已被提出 [20–23]。在这些平台中，光学阱中心通常被设计在距电介质表面 $\lesssim 200$ nm处，以确保具有较大协同性参数 $\gtrsim O(10)$ 的强原子-光相互作用。势阱深度通常为 $\sim O(1)$ mK，并且在电介质表面上方一微米范围内迅速变化。这就要求采用高效的冷却方案，在较短的传播距离内将单原子减速并装载到这些表面阱中。迄今为止，利用传统磁光阱（MOT）和偏振梯度冷却进行原子装载，仅在悬置波导结构上得到过验证，而在一般的光子平台上尚未实现。诸如大面积表面散射光产生的不平衡辐射压力、面向自由空间的有限捕获角以及缺乏光学通道等效应，都可能导致低效的冷却和装载效率。

在此，我们提出了一种光学冷却方法，可利用导模场将单原子从自由空间高效地停下并装载到纳米尺度光子腔上。我们的方法基于腔冷却，通过在高品质因子纳米光子腔中，将原子-光相互作用耦合所产生的强作用同时连接到腔场与横向 和轴向原子运动。我们指出，腔冷-早在二十多年前就已被讨论 [24–30]，大量文献聚焦于自由空间镜围成的腔体中冷原子的运动耦合。在实验上，已经证明单原子可以借助单光子 [31, 32] 被囚禁在高精细度法布里-珀罗腔内，并且还可以使用弱腔探测场 [27, 28]进一步冷却。腔内冷却机制可以在腔缀饰态的图像下理解为西西弗斯型冷却 [24, 25],: 原子沿腔轴运动，并且与驻波模式之间存在位置依赖耦合。另一种方式是通过基于向腔模的优先散射的多普勒冷却来实现腔冷却 [26]。我们注意到，这些已确立的方法主要关注轴向冷却效应，因为只有当原子在亚微米距离尺度上经历显著的模式强度变化时，才会产生较大的冷却力。除了使用弱腔探测场之外，还可以从腔体侧面发射自由空间冷却光束 [30, 33], ，从而在二维和三维（3D）中实现双光子多普勒冷却。

在纳米光子腔冷却的背景下，可以利用纳米尺度光子结构周围强烈的倏逝场梯度来提供较大的阻滞力。倏逝场是纳米尺度波导和腔体中导模的一个defining特征，因为纳米结构中的强介质约束和全内反射会使模场强度在介质边界外迅速衰减。当原子从自由空间接近倏逝场区域时，可能会受到显著的横向冷却效应。问题在于，这种冷却力是否足以在很短的距离内降低运动原子的动能，从而使原子能够被俘获。文献 [34] 讨论了弱驱动纳米光纤腔周围原子运动的半经典动力学。文献 [35]讨论了色散区双频倏逝场阱中的横向冷却。在文献 [36], 中，在光学纳米光纤表面附近实现了接近原子运动基态的简并拉曼冷却。然而，据我们所知，弱驱动纳米光子腔附近倏逝场中的横向冷却尚未被

*邮箱：clhung@purdue.edu

进行了系统研究。

本文讨论如何利用相对于腔体和原子共振均蓝失谐的弱腔泵浦场来冷却原子并将其装载到表面阱中；见图1。具体而言，当原子飞向介电表面上方的强耦合区域时，增强的原子—光耦合会降低腔内光子数，从而产生摩擦力。我们表明，腔光子涨落能够提供随机的停止力，使单个原子在一次通过过程中装载到表面附近的光学阱中。原则上，这种方法可用于在一般纳米光子腔体上形成的表面微阱。为展示一个具体实例，我们讨论由矩形波导构成的腔体的冷却效应，并引入一种远失谐双色倏逝场阱，以探讨在泵浦频率可变时的冷却效果和原子装载效率。通过选择泵浦频率失谐量和双色陷阱阱中心的位置，随机装载的原子将持续受到阻尼力，并经历较小的动量扩散，从而达到较低的平衡温度，与常规腔冷却中讨论的情况类似 [37]。

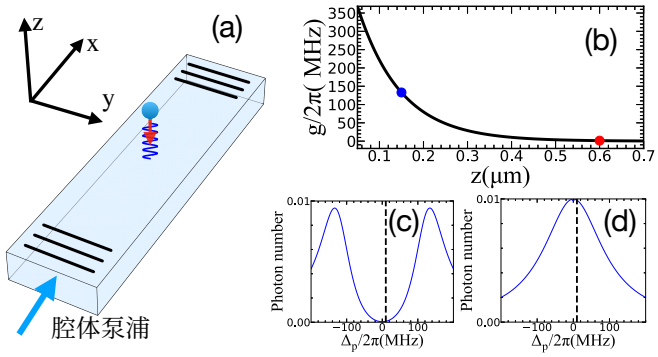

图1. 单原子的纳米光子腔冷却。(a) 由蓝失谐泵浦驱动的纳米光子腔附近，单原子（蓝色圆圈）接近强耦合区域时的腔冷却。(b)波导中心（$y=0$）处以及腔模的波腹（$x=0$）处的原子-光子耦合强度$g(z)$。波导顶面位于 $z=0$。(c-d) 原子处于强耦合（c）和弱耦合区（d）时的腔光子数，分别由（b）中的蓝色和红色圆圈标记，其随泵浦失谐 Δ_p 的变化，泵浦速率为 $\varepsilon=2\pi\times 10$ 兆赫。腔共振与自由空间原子共振对齐。

本文的组织结构如下。第二节回顾与驱动腔模耦合的原子的半经典模型。随后，我们在弱驱动极限下推导偶极力、摩擦力和扩散系数的解析表达式，并通过数值求解林德布拉德主方程，利用完整量子解验证并将这些结果扩展到较大的泵浦速率。在第三节中，我们研究冷却机制，并估算通过腔冷却结合双色倏逝场阱所达到的平衡温度。在第四节中，我们应用三维蒙特卡罗模拟验证原子阱的稳定性，并确定原子装载率。随后讨论腔探测光强度对冷却和俘获的影响。

II. 波导纳米光子腔体附近原子的半经典模型

我们首先描述该系统，并建立一个二能级原子与量子化腔模相互作用的模型。如图 1(a) 所示，经激光冷却的原子从磁光阱（MOT）中释放，通过飞行时间或光学导引 [11, 38]接近纳米光子腔。我们考虑一个沿简单矩形波导设置的光学腔。该腔由反射元件（例如光子.....）限定。

光子晶体反射镜或布拉格光栅。腔模场形成驻波，可由波导一端的泵浦光激发。

仅考虑内部自由度时，该原子-腔系统可由 Jaynes-Cumming 哈密顿量描述，

$$\hat{H}_{\rm JC}=-\hbar\Delta_{\rm c}\hat{a}^\dagger\hat{a}-\hbar\Delta_{\rm a}\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-+\hbar g(\mathbf{x})\left(\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-+\hat{a}\hat{\sigma}_+\right) \quad (1)$$

其中，$\hat{a}^\dagger(\hat{a})$ 是腔模的产生（湮灭）算符，$\hat{\sigma}_+=|e\rangle\langle g|$ 将原子基态 $|g\rangle$ 与激发态 $|e\rangle$ 耦合，$\hat{\sigma}_-=\hat{\sigma}_+^\dagger$、$\Delta_{\rm c(a)}=\omega_{\rm l}-\omega_{\rm c(a)}$ 分别是泵浦频率 $\omega_{\rm l}$ 相对于腔体（原子）共振频率 $\omega_{\rm c(a)}$ 的失谐，$\hbar$ 是约化普朗克常数。耦合强度 $g(\mathbf{x})=\sqrt{3\pi\gamma c^3/2V_m}\quad\omega_{\rm a}^2$ $V_m\equiv$ $\int\epsilon\quad|\quad|^2d^3x'/\epsilon\quad|\quad|^2$ $=$

(x) 取决于原子所在位置 x 处的模体积 (x) E(x) (x) E(x)（x、y、z） [18],，其中 ϵ(x) 是介电函数，γ 是自由空间中的原子衰减率，c 是光速。在矩形波导外部的倏逝场区域内，模场强度（驻波模）可用函数形式$|E(x)|\propto\cos(k_{\rm ax}x)\cos(y/q)\exp(-z/d)$ 近似表示，其中 $k_{\rm ax}$ 是轴向波数，q 和 d 是两个常数长度。在波导的中平面附近（$y=0$）且接近腔模的一个波腹处，原子-光子耦合强度可近似写成

$$g(\mathbf{x})=g_0\cos(k_{\rm ax}x)\cos(y/q)\exp(-z/d)\,, \quad (2)$$

其中，$g_0=g(0,\ 0,\ 0)$ 是波导表面上的最大耦合强度。图 1(b) 展示了一个示例原子-光子耦合强度，该强度通过对基模类 TM 模 [39] 采用近似解析描述计算得出；所用波导参数列于表I，泵浦场的自由空间波长为 $\lambda=852$ nm，接近铯原子的 D2 线共振。以下讨论均以铯为例。

以外部泵浦以速率 ε激发腔体，其动力学由

$$\hat{H}_{\rm pump}=-i\hbar\left(\varepsilon\hat{a}^\dagger-\varepsilon^*\hat{a}\right). \quad (3)$$

图 1(c) [(d)] 显示了腔光子数随泵浦失谐的变化，其中原子分别更靠近（远离）处于强（弱）耦合区域的波导，$g(z) \gtrsim \kappa$ [$g(z) \lesssim \kappa$]；在自由空间中，我们考虑腔共振与原子跃迁频率对齐的简单情况。泵浦失谐表示为 $\Delta_{\rm p} = \Delta_{\rm c} = \Delta_{\rm a}$。正如我们将在下文讨论的，在适当的失谐$g(z_{\rm t}) > \Delta_{\rm p} > 0$下，当原子接近波导时，这种配置会导致横向冷却，其中 $z_{\rm t}$ 是指定的阱中心。

我们注意到，在表面附近存在光学阱时，基态与激发态之间的交流斯塔克位移会导致原子共振发生偏移。这可能会在原子处于激发态时引发瞬态加热效应，也会使我们的冷却分析更加复杂。不过，对于 Cs [18, 40], Sr [16, 41], 和 Yb[42] 等原子种类，可以采用魔术波长来抵消差分光频移。为简化讨论，以下我们忽略表面附近光学阱所引起的差分光频移。

现在我们考虑原子耦合系统的完整动力学。将谐振腔光子衰减率 κ 和原子衰减率（$\Gamma = \gamma/2$）纳入考虑后，耦合系统的林德布拉德主方程可写为

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \mathcal{L}\hat{\rho} = -\frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}_{\rm JC} + \hat{H}_{\rm pump}, \hat{\rho}\right] + \kappa\mathcal{D}[\hat{a}]\hat{\rho} + \Gamma\mathcal{D}[\hat{\sigma}_-]\hat{\rho}, \tag{4}$$

其中，$\hat{\rho}$ 是原子-光子复合系统的密度矩阵，$\mathcal{L}$ 是刘维尔超算符，而耗散子形式为 $\mathcal{D}[\hat{b}]\hat{\rho} = 2\hat{b}\hat{\rho}\hat{b}^\dagger - \hat{b}^\dagger\hat{b}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{b}^\dagger\hat{b}$。

尽管我们对系统的内部自由度采用量子处理，但假设原子运动的速度远低于腔体动力学的变化速度。这是合理的，因为经过初始激光冷却后，原子温度低于多普勒极限，且初始速度 v 满足要求 $kv \ll \Gamma, \kappa$，其中 k 为光子波数。因此，我们近似认为，在任意瞬时时刻，原子-光子动力学都处于稳态，并通过随机方程 [37, 43], 对原子运动进行半经典处理。

$$\begin{aligned} M\frac{d^2x^i(t)}{dt^2} =& -\partial_i U(\mathbf{x}) + \langle \hat{F}^i(\mathbf{x})\rangle - \beta^{ij}(\mathbf{x})v_j(t) \\ &+ B^{ij}(\mathbf{x})w_j(t)\,, \end{aligned} \tag{5}$$

其中，$i, j = x, y, z$ 表示笛卡尔坐标。重复指标遵循求和约定（我们不区分上、下指标）。这里M 是原子质量，$U(\mathbf{x})$是表面阱势与原子-表面 Casimir-Polder 相互作用 [34] 之和。泵浦场诱导的稳态偶极力 $\langle \hat{F}^i\rangle$、摩擦力张量 β^{ij} 和扩散张量 $\mathbf{D} = \mathbf{B}\mathbf{B}^T/2$ 将在我们通过 Lindblad 主方程求得稳态后确定。

在以下各节中。为描述动量扩散，$w_j(t)$ 表示均值为零、方差为单位值的高斯随机变量 [44]。除了这一半经典模型之外，文献 [45] 还讨论了在腔量子电动力学场中考虑量子化原子运动的完整量子处理。

A. 静止原子受到的稳态力

对于静止原子，刘维尔超算符不随时间变化。稳态力为

$$\begin{aligned} \left\langle \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x})\right\rangle =& -\left\langle \nabla\left(\hat{H}_{\rm JC} + \hat{H}_{\rm pump}\right)\right\rangle \\ =& -\hbar\nabla g(\mathbf{x})\left\langle \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_- + \hat{a}\hat{\sigma}_+\right\rangle, \end{aligned} \tag{6}$$

其中 $\langle \hat{O}\rangle = \mathrm{Tr}(\hat{O}\hat{\rho}_0)$。这里，$\hat{\rho}_0$ 表示静止原子位于 $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$时的稳态密度矩阵。我们利用方程 $\mathcal{L}(\mathbf{x_0})\hat{\rho}_0 = 0$求解稳态密度矩阵。

利用主方程，我们首先在弱驱动极限下解析计算稳态密度矩阵，此时激发态布居和光子数都很小。我们可以将原子-光子系统的希尔伯特空间截断为 $|1,\ g\rangle$, $|0,\ e\rangle$ 和$|0,\ g\rangle$，其中 **0**，**1** 表示光子数。在泵浦强度 ε 的最低阶下，我们得到

$$\hat{\rho}_0^{\rm weak} = \frac{1}{|Q|^2}\times \begin{pmatrix} (\Gamma^2+\Delta_a^2)\varepsilon^2 & g(\Delta_a + i\Gamma)\varepsilon^2 & Q^*(\Gamma - i\Delta_a)\varepsilon \\ g(\Delta_a - i\Gamma)\varepsilon^2 & g^2\varepsilon^2 & -iQ^*g\varepsilon \\ Q(\Gamma + i\Delta_a)\varepsilon & iQg\varepsilon & \chi \end{pmatrix}, \tag{7}$$

其中 $\chi = |Q|^2 - (\Gamma^2 + \Delta_a^2 + g^2)\varepsilon^2$，满足 $\mathrm{Tr}\left(\hat{\rho}_0^{\rm weak}\right) = 1$，且 $Q = \Gamma\kappa + g^2 - \Delta_a\Delta_c - i(\Delta_c\Gamma + \Delta_a\kappa)$。因此，弱驱动极限下的稳态力为

$$\left\langle \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x})\right\rangle = -\frac{\varepsilon^2}{|Q(\mathbf{x})|^2}\hbar(\nabla g^2(\mathbf{x}))\Delta_{\rm a}\,. \tag{8}$$

类似地，我们可以写出平均腔光子数 $\bar{N}(\mathbf{x}) = \langle \hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle = \frac{\varepsilon^2}{|Q(\mathbf{x})|^2}\left(\Delta_a^2 + \Gamma^2\right)$，以及激发态布居数 $P_e(\mathbf{x}) = \langle \hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-\rangle = \frac{\varepsilon^2}{|Q(\mathbf{x})|^2}g(\mathbf{x})^2$。

由于我们关注的是原子接近波导时的横向 运动，因此我们首先讨论沿 z轴的最相关力和系数的大小，并展示它们在 $y = 0$处波导中平面上的数值。其他方向的影响将在后文讨论。为提供一个具体示例，我们假设腔衰减率为 $\kappa = 2\pi \times 100$ 兆赫，对应的品质因数为 $\bar{Q} = \omega_{\rm c}/(2\kappa)$，这对于最先进的纳米光子腔而言是 $\approx 1.5\times10^6$。出于后文将讨论的原因，泵浦失谐选为 $\Delta_{\rm p} = 2\pi\times 10$ 兆赫，原子衰减率为 $\Gamma = 2\pi \times 2.61$ 兆赫（针对铯D2线），如表I所示。

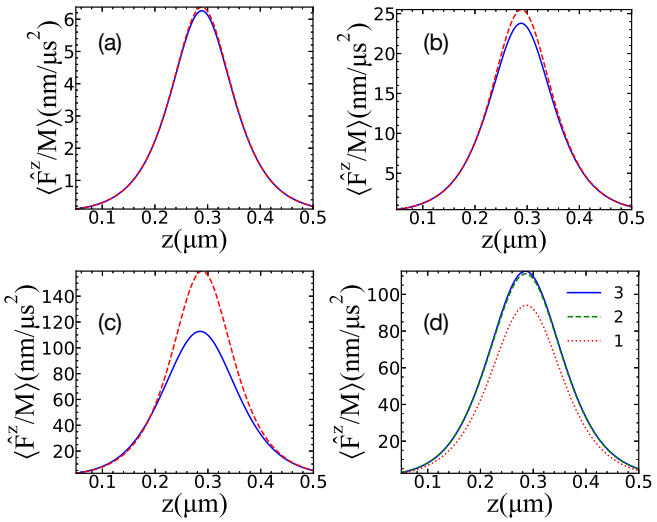

图 2. $\langle \hat{F}^z(0,0,z)\rangle$ 稳态力与原子位置z的关系，分别使用 $\varepsilon/2\pi =$ (a) 5、(b) 10 和 (c, d) 25兆赫计算，并采用表I 中列出的系统参数以及图1(b) 中所示的 $g(z)$。实线（虚线）为数值（解析）结果。在数值计算中，(a-c)中的希尔伯特空间截断于 $N = 4$ 个光子，而 (d) 中则截断于 $N = 1, 2, 3$，如图所示。

为验证弱驱动近似，我们对稳态 $\hat{\rho}_0$ 进行数值评估，并计算 $\hat{}$ 期望值 $\langle \mathbf{F}\rangle$。当泵浦速率为 $\varepsilon = 2\pi \times 5$兆赫时，在图 2(a) 中，我们展示了 $\langle \hat{F}_z\rangle$ 的数值结果与解析结果之间的一致性。该力指向远离波导的方向，实际上形成了一个排斥势。这个势垒可以轻易地被我们稍后将介绍的双色陷阱克服。正如我们接下来将讨论的，其涨落会导致动量扩散。

随着泵浦速率增加，由于激发态布居趋于饱和，模拟得到的力小于解析结果。图 2(b) 中，当 $\varepsilon = 2\pi \times 10$ 兆赫时，预测的最大力相差 10%；图 2(c) 中，当 $\varepsilon = 2\pi \times 25$ 兆赫时，相差 50%。在数值计算中，我们还考虑了希尔伯特空间中不同的截断光子数。图 2(d) 显示，当截断的腔光子数超过 2 时，最大腔泵浦力趋近于上限，这表明在所考虑的最高泵浦速率下，主要占据的是 $N \leq 3$ 福克态

表I。用于模拟的参数

参数	符号	数值
波导长度	L	164μ米
波导宽度	W	950nm
波导高度	H	360nm
原子自发衰减率	Γ	$2\pi \times 2.61$兆赫
腔衰减率	κ	$2\pi \times 100$兆赫
腔体泵浦激光失谐	Δ_p	$2\pi \times 10$兆赫

（$\varepsilon = 2\pi \times 25$ 兆赫）。在接下来的数值模拟中，为权衡结果精度与计算资源，我们将希尔伯特空间截断至光子数 $N = 4$ 。

最后，我们指出 $\langle \hat{F}^z\rangle$ 的峰值位置 $(\Delta_p^2 + \kappa^2)\sqrt{\Delta_p^2 + \Gamma^2}]^{1/4} > |\Delta_p|$ 对于弱驱动而言。无论泵浦失谐的大小如何，该位置总是在泵浦相对于上（下）腔体缀饰态的频率变为红失谐（蓝失谐）时出现。

B. 缓慢运动的原子所受的摩擦力

现在我们回顾原子缓慢移动时的系统动力学。作为对稳态情形的首阶修正，我们将主方程 Eq. (4) 中的 ∂_t 替换为流体动力学导数 $\partial_t + \mathbf{v}\cdot\nabla$，并考虑密度矩阵关于速度的展开。将 $\hat{\rho} = \hat{\rho}_0 + \hat{\rho}_1^i v_i + \ldots$ 代入其中

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\right)\hat{\rho} = \mathcal{L}\hat{\rho}\,, \tag{9}$$

并且，取 $\mathbf{v}$ 的一阶项，我们得到 [25, 34, 37]

$$v_i \partial_i \hat{\rho}_0 = \mathcal{L}\hat{\rho}_1^i. \tag{10}$$

稳态力的一阶修正是

$$F_1^i = -\mathrm{Tr}\left(v_j \hat{\rho}_1^j \partial_i \left(\hat{H}_{\mathrm{JC}} + \hat{H}_{\mathrm{pump}}\right)\right) = \beta^{ij} v_j, \tag{11}$$

其中 $\boldsymbol{\beta}$ 是一个 3×3 张量。当 $\beta^{ii} < 0$ 时，摩擦力与速度方向相反，沿 i 方向起阻尼作用。相反，当 $\beta^{ii} > 0$ 时，摩擦力会加热原子。非对角项会导致不同方向之间的速度转移。在弱驱动极限下，我们可以利用 $\hat{\rho}_0^{\mathrm{weak}}$ 计算 $\hat{\rho}^i_{,\,1}{}^{\mathrm{weak}}$，从而推导出解析公式。由于表达式较为复杂，我们将公式列于附录 A。

图 3 显示了沿z方向的摩擦系数 β^{zz}。在弱驱动极限下，数值结果与解析结果吻合良好，符合预期。在更强的泵浦速率下，饱和效应再次导致 β^{zz}弱于弱驱动近似。此外，随着腔体泵浦强度增加，最大阻尼力的位置略微向波导方向移动。

我们指出，当原子远离波导时，摩擦力会导致加热；但当原子穿过 $\langle \hat{F}^z\rangle$ 最大的区域，且泵浦光相对于腔缀饰态红失谐时，摩擦力会使原子冷却，此时更强的原子-光子耦合会降低腔光子数。阻尼的起源可用西西弗斯型冷却来解释：腔内光子数相对于原子运动存在延迟响应。随着原子在 g 增大的情况下逐渐靠近波导，延迟的减少

腔内泵浦光子（这是由于原子-腔相互作用时间有限）会使原子因排斥力而损失更多动能，从而产生阻尼。我们注意到，采用红失谐泵浦 $\Delta_{\rm p} < 0$ 也可以实现冷却，不过冷却区离波导更远，且 $\Delta_{\rm p} < -g$。

考虑图 3 中摩擦系数的大小，即使泵浦强度更大，冷却/加热效应也需要经过毫秒量级的时间才会变得显著。因此，虽然摩擦力可能使被阱俘获的原子保持低温，但仅凭这一效应仍不足以将自由空间中的原子装载到表面阱中，因为原子通常会在微秒量级的时间内穿过阱区。在下一节中，我们将讨论动量扩散的大小，并解释它为何能提供足够的随机停止力来装载原子。

C. 稳态扩散系数

在前面的章节中，我们讨论了静止状态下的偶极力，以及在特定条件下运动原子可能受到的冷却摩擦力。

如果原子一直处于阻尼区域内，其速度将降至零。然而，原子的动量展宽阻止运动达到基态，并使稳定受阱捕获的原子具有有限的平衡温度。这种效应由扩散系数表征。此外，正如我们将展示的，动量扩散也是一种重要机制，它能提供足够大的随机停止力，从而在原子进入阱区域时降低其动能。

力的涨落产生扩散张量

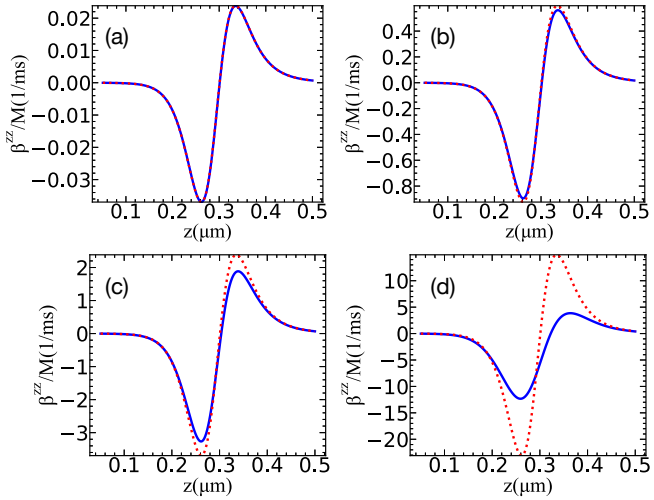

图 3. 位置相关的摩擦系数 $\beta^{zz}(0,\ 0,\ z)$，分别在 $\varepsilon/2\pi\ =$ (a) 1、(b) 5、(c) 10、(b) 25 兆赫下计算。实线（虚线）为数值（解析）结果。

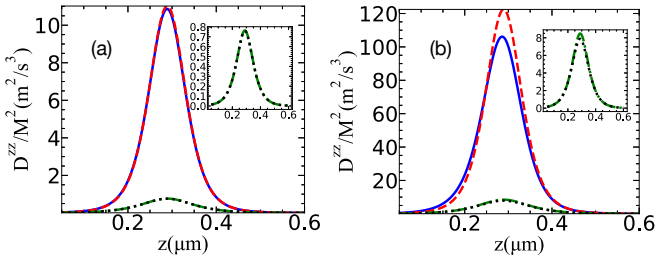

图 4. 位置相关的扩散系数 $D^{zz}(0,\ 0,\ z)$，分别在 $\varepsilon/2\pi\ =$ (a) 3 和 (b) 10 兆赫下计算。实线（虚线）显示偶极力 $D_{\rm dp}$ 的贡献，分别为数值（解析）计算结果。点线（点划线）显示自发辐射 $D_{\rm SE}$贡献的数值（解析）结果；插图展示了更小的尺度。

形式为 [43, 46]

$$D^{ij} = \mathrm{Re}\int_0^\infty dt\left[\left\langle \hat{F}^i(0)\hat{F}^j(t)\right\rangle - \left\langle \hat{F}^i(0)\right\rangle\left\langle \hat{F}^j(t)\right\rangle\right], \tag{12}$$

其中 $\hat{}F^i(0) = -\hbar\partial_i g(\hat{a}^\dagger\hat{}\sigma_- + h.c.)$。$\hat{}F^j(t)$ 表示在伴随主方程演化下，时刻 t 的算符 $\hat{}F^j(0)$，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{O} = \mathcal{L}^\dagger\hat{O} = &\frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}_{JC} + \hat{H}_{pump}, \hat{O}\right] \\ &+ \kappa\mathcal{D}^\dagger[\hat{a}]\hat{O} + \Gamma\mathcal{D}^\dagger[\hat{\sigma}_-]\hat{O}.\end{aligned} \tag{13}$$

显然，无论泵浦场 ε的强度如何，扩散张量都与 $\partial_i g\partial_j g$ 成正比。在原子-腔体系统中，动量扩散主要来自腔辅助光学偶极力以及向自由空间的自发辐射。由于直接应用 $\hat{}\rho_0^{\rm weak}$需要演化伴随主方程，我们将遵循文献 [25], 中的步骤，并应用量子回归定理，在弱驱动极限下解析计算扩散系数：

$$\mathbf{D}_{\rm dp} = \hbar^2\left(\nabla g\right)^2\frac{\varepsilon^2\Gamma}{|Q|^2}\left(1 + \frac{4\Delta_a g^2}{\Gamma}\frac{\Delta_c\Gamma + \Delta_a\kappa}{|Q|^2}\right), \tag{14a}$$

$$D_{\rm SE} = \hbar^2 k^2 g^2\frac{\varepsilon^2\Gamma}{|Q|^2}, \tag{14b}$$

其中，$(\nabla g)^2$ 应理解为一个矩阵 $\partial_i g\partial_j g$，而 $\mathbf{D}_{\rm SE} = D_{\rm SE}\mathbf{I}$ 是一个标量矩阵。完整推导见附录 B。

超出弱驱动范围后，式 (14a) 和 (b) 不再成立，因此我们需要数值计算 $\hat{}\rho_0$ 和式 (12)。具体而言，我们根据主方程演化 $\hat{}F^i(0)\hat{}\rho_0$，而不是 $\hat{}F^j(t)$，因为 $\langle\hat{}F^i(0)\ \hat{}F^j(t)\rangle = \mathrm{Tr}\left(\hat{}F^j(0)e^{\mathcal{L}t}\hat{}F^i(0)\hat{}\rho_0\right)^*$。

与摩擦系数 β 类似，我们关注沿 z-方向的动量扩散（D^{zz}）动力学。在图 4 中，展示了通过两种方法计算得到的两个系数分量 $D^{zz}_{\rm dp}$ 和 $D^{zz}_{\rm SE}$。

我们注意到，在弱驱动条件下，两个扩散系数都在与 $\langle F_z \rangle$ 相同的位置达到峰值。在所关注的区域内， D_{dp}^{zz} 比 D_{SE}^{zz} 大十倍以上，因而主导动量扩散。这是由于腔体增强的涨落和快速的倏逝衰减，$|\partial_z g/g| = d^{-1} \approx 10/\mu$ m$> k$。因此，在接下来的讨论中我们忽略 D_{SE}^{zz}，但会在完整的蒙特卡洛模拟中将其纳入。

扩散系数的大小对于将原子装载到保守阱中起着重要作用。根据式（14）， D_{dp} 与泵浦强度的平方成正比；当 $\varepsilon/2\pi$ 从 3 兆赫增至 10 兆赫时， D_{dp} 增加一个数量级。然而，由于饱和效应， D_{dp} 不可能无限增大。在泵浦速率为 10 兆赫且接近 $z \approx 300$ 纳米时，我们发现，在 $\Delta t \sim 100$ 纳秒的时间间隔内，速度扩散为 $\sqrt{D_{\mathrm{dp}} \Delta t / M} \approx 3$ 毫米/秒。这表明，速度扩散可占初始速度的相当大一部分，从而在原子穿过保守表面势时，提供一种去除动能的随机机制。这种随机力使阱能够初始装载，随后通过阻尼摩擦缓慢冷却，正如我们将在第四节中所展示的那样。

III. 单个原子的纳米光子腔冷却

本节讨论如何在波导附近高效冷却并囚禁单个原子。如图 2 所示，蓝失谐腔泵浦会在波导中平面上沿 z 方向产生排斥性的稳态力。为克服这一势垒并形成稳定的阱，我们引入双色倏逝场阱 [2, 15, 18]，以实现紧密的空间约束。原子经随机减速后，预计会在由腔泵浦场形成的冷却区内振荡。

在图 3 和图 4 中，我们发现，在弱驱动条件下，沿 z 方向的最大阻尼和扩散系数分别出现在约 z =250 nm 和 $z = 290$ nm 处。这种偏移是一个理想特征，因为接近波导的自由空间原子可以先受到较大的随机力而实现随机冷却，随后再受到较大的阻尼摩擦力，持续冷却并进入阱中。为防止原子因动量扩散而被随机加热并逃出阱，我们应将双色阱中心设在更小的 z 处，使其更靠近最大阻尼区域，并远离随机力显著（扩散系数较大）的区域。

A. 平衡温度

我们首先根据冷却区域内的动量扩散和阻尼，计算局域平衡温度。对于弱驱动的法布里-珀罗腔体 [25], 中，原子的平衡温度估计为 $k_B T_{\mathrm{eq}} = -D/\beta$, 其中 D 和 β 分别表示在一个波长 [37]范围内取平均的摩擦力和扩散系数。在三维情况下，局域平衡温度可估算为（附录 C）

$$k_B T_{\mathrm{eq}} = -\frac{1}{3} \mathrm{Tr}\big(\mathbf{D}\boldsymbol{\beta}^{-1}\big). \tag{15}$$

我们指出，在弱驱动极限下，平衡温度与泵浦强度及其激发的模式场分布无关。根据公式（14）和（A1），$\mathbf{D}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 均与腔体泵浦强度 ε^2成正比。当$\mathbf{D}_{\mathrm{SE}}$ 相较于 $\mathbf{D}_{\mathrm{dp}}$可以忽略时，二者还具有相同的矩阵形式 $\partial_i g \partial_j g$。因此，平衡温度主要由腔体和原子线宽、泵浦失谐以及原子-光子耦合强度决定。

为展示利用最相关系统参数对平衡温度进行优化的结果，我们在图5中进行了二维参数扫描，改变泵浦失谐 Δ_{p} 和原子位置 z （其控制 $g(z)$），同时采用中等泵浦强度 $\varepsilon = 2\pi \times 10$ 兆赫，并固定表I中列出的 κ 和 Γ 。我们选择这一泵浦速率，以实现足够高的冷却效率（见第IV节），同时保持接近弱驱动状态，如图3(c)和图4(b)所示。总体而言，在给定失谐下，摩擦系数的 zz 部分会随着原子位置 z 减小而由正值（加热）变为负值（冷却）。当 Δ_p 增大时，最大冷却位置和最大加热位置会向波导顶表面（$z = 0$）移动，如图5(a)所示。这一行为是可以预期的，因为要提升上方缀饰态的能量（以确保泵浦相对于缀饰态为红失谐），就需要在波导表面附近具有更强的原子-光子耦合强度。存在两个能够产生较大阻尼的最佳点：一个位于较小的 Δ_{p} 处，其数量级为Γ ，且 z较大；另一个位于较大的 Δ_{p} 和较小的z 处，并具有较强的原子-光子耦合。另一方面，图5(b)所示的扩散系数会随着 Δ_{p} 增大而增大，并在 z 减小时达到峰值，从而使由强耦合产生的 D_{dp} 贡献更大。

如图 5(c) 所示，如果原子被俘获在附近$z \approx 292$ nm 处，最低平衡温度约为 200 μK。然而，这是一个弱耦合位置，协同性较低，可能不适用于需要强原子-光子耦合或高协同性的腔量子电动力学实验。因此，接下来我们考虑泵浦失谐较大的情况，即$\Delta_p = 2\pi \times 10$ 兆赫，此时最低平衡温度略有升高，为 $T_{\mathrm{eq}} \approx 324$ μK（$\equiv T_0$），对应位置为$z_{\mathrm{c}} \approx 224$ nm。

我们注意到，在实际实验中，可以对光学阱中心和泵浦失谐进行初始调节，以便在弱耦合位置实现更高的冷却/装载效率。腔冷却后，可以将阱中心调节至强耦合位置，同时不牺牲初始冷却性能。我们

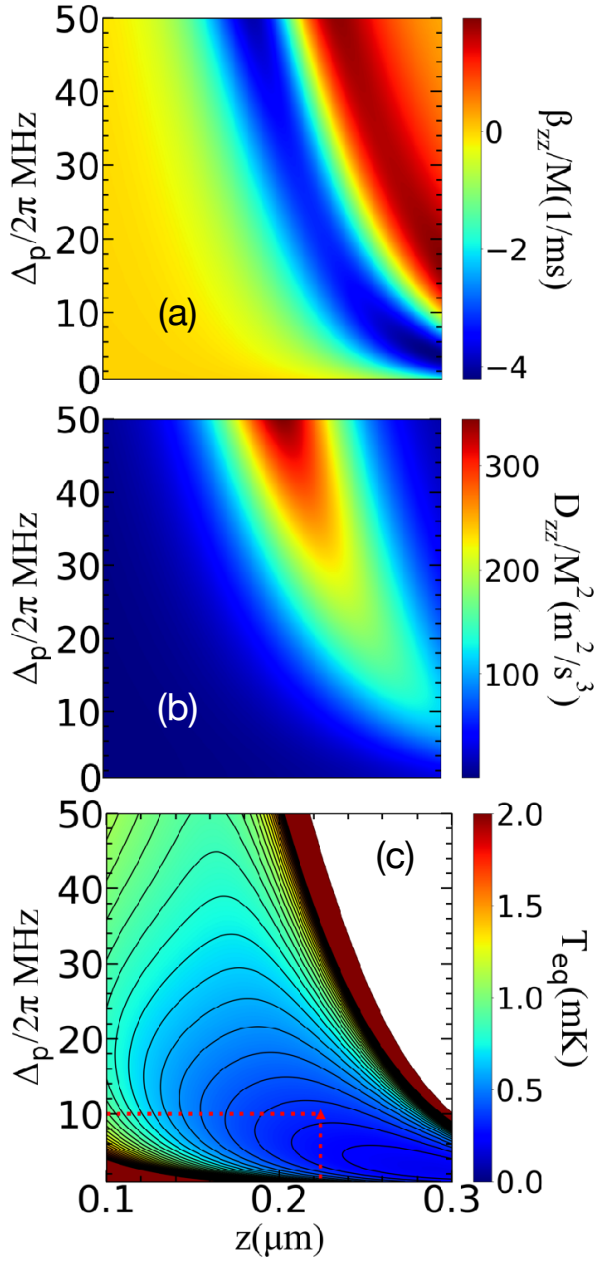

图 5. (a) 摩擦系数和 (b) 扩散系数随泵浦失谐 Δ_p 和原子位置 z的变化。(c) 局域平衡温度 $T_{\rm eq}(\Delta_p,\ z)$，使用公式（15）估算。三角形符号和点线表示第 III A 节中选取的参数。其他参数与图 2 相同。(a-b) 中的 $\varepsilon = 2\pi \times 10$ 兆赫和 (c) 中的 $\varepsilon = 2\pi \times 10$ 兆赫均与 ε 无关。

还要指出，预期的冷却性能不如自由空间中的多普勒极限（$\sim$ 100 μK）或高精细度腔冷却。这是由于较大的原子—光子耦合会产生较大的随机力，而这对于使原子减速并进入表面阱是必要的。

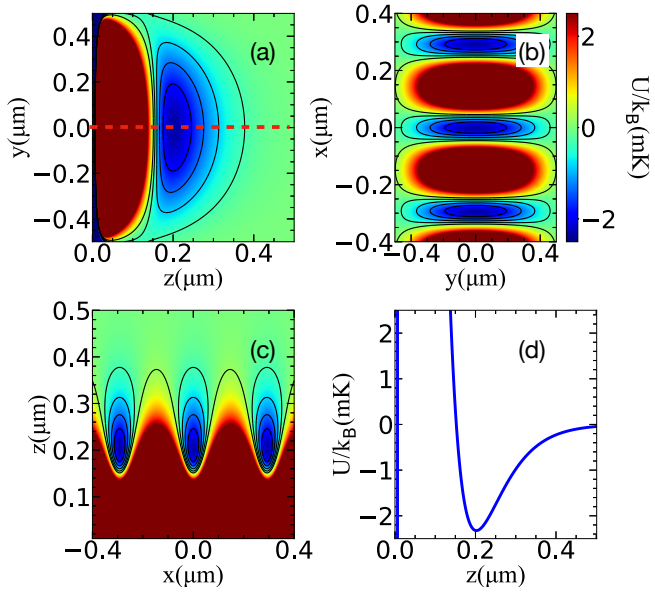

图 6. 双色倏逝场阱的截面图：(a) $U(0,y,z)$，(b) $U(x,y,z_{\rm t})$，以及 (c) $U(x,0,z)$。(d) 沿着 (a) 中所示虚线的 $U(0,0,z)$。

B. 捕获势

在本节中，我们讨论一种示例性的双色倏逝场阱，该阱将原子局域在所需冷却位置 $z_{\rm c}$ 的附近。我们将总阱势写成以下形式

$$U(\mathbf{x}) = \alpha_b \mathcal{I}_{\rm blue}|\mathbf{E}_b(\mathbf{x})|^2 + \alpha_r \mathcal{I}_{\rm red}|\mathbf{E}_r(\mathbf{x})|^2 - \frac{C_4}{z^3(z+\tilde{\lambda})}. \tag{16}$$

其中，$\alpha_{b(r)}$、$\mathcal{I}_{\rm blue(red)}$ 和 $\mathbf{E}^{b(r)}$ 分别是蓝失谐（红失谐）倏逝场的标量极化率、强度和归一化电场分布。方程中的最后一项是卡西米尔–波尔德相互作用的近似形式。对于铯原子，我们用 $C_4/\hbar \approx 2\pi \times 267\,\mathrm{Hz}\cdot\mu\mathrm{m}^4$ 和 $\tilde{\lambda} \approx 136\,\mathrm{nm}$ 来表征原子与 Si_3N_4 表面的相互作用 [18]。在矩形介质波导附近，电场不存在封闭的解析形式。与腔模类似，我们用沿各个方向的单一波矢来近似电场 [39]。或者，也可以使用有限元分析对电场进行数值计算。

图 6 绘出了双色陷阱的一个示例。为了沿波导轴向（x- ）形成一个紧束缚阱，我们令蓝失谐场沿 x 轴传播，而红失谐场形成驻波。可以通过从波导的一端或两端选择性地注入光来实现这一点（假设腔体布拉格反射镜对这些频率远离共振的模式是透明的）。因此，双色陷阱形成了一个由表面阱构成的一维晶格

沿 x方向。沿竖直的 z 方向，倏逝场呈指数衰减，但两个衰减长度不同的双色势叠加后形成稳定的势阱最低点。双色阱的 z 位置（和深度）可通过调节蓝失谐场和红失谐场的相对（和绝对）强度来控制。在图 6 中，我们选择 $\mathcal{I}_{\rm red}/\mathcal{I}_{\rm blue} = 0.33$，使阱中心位于 $z_{\rm t} \approx 200$ nm，略小于$z_{\rm co}$。这一选择考虑了阱在图 6(d) 中的不对称轮廓 [ ] 以及图 5(c) 中所示的低平衡温度范围较宽这一特点。

C. 其他方向的冷却

在前面的章节中，我们主要关注沿 z 方向的动力学。在本节中，我们研究阱中心 $z_{\rm t} = 200$ nm附近以及沿 x 和 y 方向的摩擦力和扩散系数，考察冷却条件是否成立。由于$\mathbf{D}$和 $\boldsymbol{\beta}$ 都是具有三维位置依赖性的 3×3矩阵（见附录D），在不偏离主要关注点的情况下，我们首先根据公式（15）计算三维平衡温度。

利用计算得到的 $\mathbf{D}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$，我们绘制了相应的 $T_{\rm eq}$(x)，以及在 $y-z$、$x-y$和 $x-z$ 平面中的样本截面，这些平面相交于陷阱中心 $\mathbf{x}_{\rm t} = (0,0,z_t)$。结果如图 7(a-c) 所示。我们发现了一个宽广的三维冷却范围（彩色阴影区域），几乎覆盖整个单点陷阱区域。由于耦合常数 g 具有周期性，冷却范围也会沿腔轴呈周期性出现；在此我们假设腔泵浦场的波腹与双色陷阱中单个阱的中心在$x=0$处重合。我们注意到，由于泵浦场和红失谐陷阱场中的轴向波数失配，位于较大 $|x|$ 处的一些阱位点可能会移入加热区（白色区域）。

将图7与图 6进行比较，我们发现，在 $x-y$和 $y-z$ 平面内，中心阱区域主要与 $T_{\rm eq} \lesssim 0.5$ mK范围内的冷却区重叠。预计受困原子运动将在由 $U-U_0 \lesssim 0.5$ mK界定的相应区域内振荡，其中U_0 表示局域势能最低点。图 7(a-c)绘出了模拟轨迹的投影，展示了阱中心附近腔冷却原子的运动。原子的半经典轨迹通过蒙特卡洛方法进行模拟，我们将在下一节中详细讨论该方法。

现在我们评论 $\boldsymbol{\beta}$ 和 $\mathbf{D}$ 矩阵中各个组成部分的作用。在冷却区内，我们发现
摩擦系数 $\beta_{xx} < 0$ 为负，但比 β_{zz}小一个数量级。对于 β_{yy} （以及 $D_{xx,\ yy}$ ）也能得出类似结论，因此 β_{zz} （以及D_{zz}）是冷却的主要组成部分。这可以理解为 β_{ij}, $D_{ij} \propto \partial_i g \partial_j g$ 以及在阱中心附近的 $\partial_x g \approx \partial_y g \approx 0$。我们指出， D_{xx} 和 β_{xx}在冷却区之外确实会急剧增加，沿着x轴。然而，只要双色陷阱提供足够强的约束，防止原子游荡到加热区，这就不会影响冷却。最后，非对角项会使不同方向上的动能相互混合，从而趋向三维热平衡。

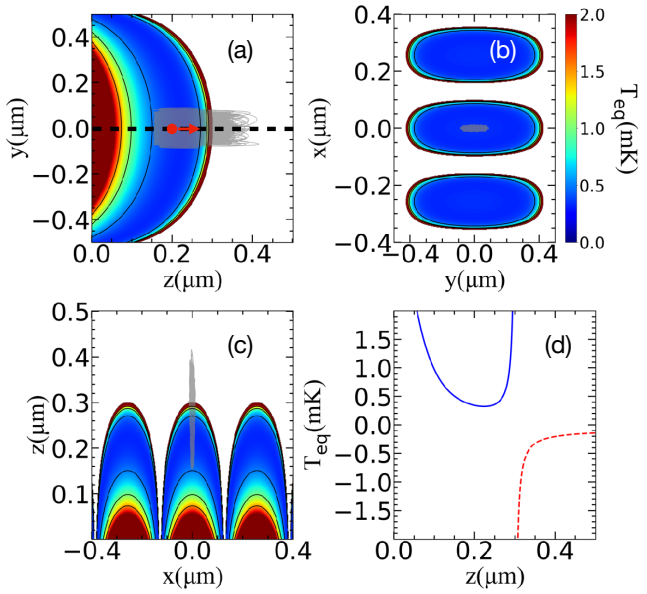

图 7. 局部平衡温度的截面图。(a) $T_{\rm eq}(0,y,z)$，(b) $T_{\rm eq}(x,y,z_{\rm t})$，以及 (c) $T_{\rm eq}(x,0,z)$。(d) 沿着如 (a) 所示的虚线的$T_{\rm eq}(0,0,z)$。负的 $T_{\rm eq}$ 表示加热摩擦力。(a-c)中的阴影区域是单个受阱原子轨迹 $\mathbf{x}(t)$的投影，该轨迹定义于方程 (17)中，原子最初位于阱中心附近，初速度为 45 cm/s，如 (a) 中的红色球体和箭头所示。

IV. 腔冷却的蒙特卡洛模拟

在第 II 节的半经典模型中，我们将原子的质心运动视为经典运动。通常这一近似成立，因为双色陷阱的频率为~ O(100) kHz [18], ，比原子的衰减率低一个数量级以上。为模拟冷却性能，我们通过数值求解朗之万方程，进行三维蒙特卡洛模拟，

$$\frac{dx^i}{dt} = v^i, \tag{17a}$$

$$M\frac{dv^i}{dt} = -\partial_i U + \langle \hat{F}^i \rangle - \beta^{ij} v_j + B^{ij} w_j, \tag{17b}$$

其中，我们忽略了远失谐双色陷阱所产生的加热效应。我们采用 $4^{\rm th}$阶龙格–库塔方法，以时间步长 Δt数值求解微分方程的非随机部分。

对于随机部分，我们直接应用欧拉-丸山方法，其中会生成一个方差为 $w_i(n\Delta t)w_j(n'\Delta t) = \frac{1}{\Delta t}\delta_{ij}\delta_{nn'}$ 且均值为零的高斯随机向量，用于每一步中的演化；在数值计算中，我们使用了 $\Delta t = 8$ns。这里，$\bar{\cdot}\cdot$ 表示随机平均，δ_{ij} 是克罗内克δ函数。高斯随机向量与 B^{ij} 矩阵相乘，以计及在时间区间$(n, n+1)\Delta t$ 内施加的随机力。

我们使用表I中列出的参数来构建一个原子-腔系统和一个双色陷阱。除非另有说明，以下模拟均采用这些参数进行三维蒙特卡罗模拟。我们监测单个阱内的原子轨迹，而不考虑周期性晶格势。当原子沿任意方向逃出势阱时，即认为原子丢失。

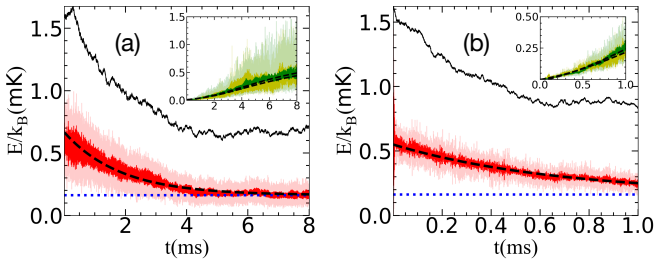

图 8. 沿 z方向的平均总能量（黑色曲线）和动能（浅红色曲线），由原子初始位置为 $z_t = 200$ nm、初始速度为 45 cm/s 且远离波导运动的蒙特卡洛模拟获得，分别对应 $\varepsilon/2\pi =$ (a) 5MHz 和 (b) 10MHz。红色曲线表示在滑动时间窗（0.8 μs）内平均的动能，以减小涨落。插图显示 v_x^2/v_z^2 和 v_y^2/v_z^2 （浅色曲线）及其时间滑动平均值（深色曲线）。虚线由指数拟合获得，点线表示 $\frac{1}{2}k_BT_0$，其中 $T_0 = 324\mu$K 为最小平衡温度。

A. 阱内原子的腔冷却

首先，我们模拟最初位于阱中心附近的原子的行为。为展示腔冷却的稳定性，我们将一个原子初始化在 $z_t = 200$ 纳米处，其初始速度为 $v_0 = 45$ 厘米/秒，小于逃逸速度。这对应于初始动能 $E_\mathrm{k} \approx 1.6$ 毫开尔文。平均至 ~ 50 条轨迹后得到的能量如图8 所示。这些最初温度较高的原子可以在4和 0.6毫秒内被有效冷却，所对应的频率分别为 $\varepsilon/2\pi = 5$兆赫和 10 兆赫。为简便起见，此处未绘制势能；由于不对称阱 [47] 中存在非谐修正，势能略高于动能。总能量在$k_B\times$0.7-0.8毫开尔文处变得稳定，而 z方向上的动能趋近于 $k_\mathrm{B}T_0/2$，在图 8 中以蓝色点线表示。我们注意到，z方向和 x, y方向上的冷却与加热效应达到平衡，从而导致总能量出现平台。根据附录C，我们用指数函数拟合沿各方向的平均动能，并发现对于 $\varepsilon/2\pi = 5$ 和 10 兆赫，沿 x, y, z方向的有效摩擦系数分别为 $\beta_\mathrm{eff}/M =$ –(0.08, 0.07, 0.54) 毫秒$^{-1}$ 和–(0.51, 0.41, 1.48) 毫秒$^{-1}$。当 x, y方向完全热化时，三维完全平衡将在更长时间后发生。图 7 (a-c) 展示了一条示例轨迹。

我们指出，如果增大 ε，冷却速率可能会进一步提高。然而，由于饱和效应，其提升速度可能不会快很多。此外，更大的泵浦强度会增大随机力。它最终由于阱深有限，会导致原子被随机加热而逃出阱。不过，通过增加势深，仍然可以抑制随机逃逸。在接下来的研究中，我们选择 $\varepsilon = 2\pi \times$10 兆赫，以节省模拟时间，同时避免过大的随机力。

B. 将自由空间原子装载到阱中

最后，我们模拟了腔辅助自由空间原子装载到双色陷阱中的过程。在蒙特卡洛模拟中，原子初始位于 $z_0 = 500$ nm 处，此处的偶极势为 $U(z_0) = -k_B \times 45$ μK。原子初速度为 $v_z = -8$cm/s，对应于渐近无穷远处的初始动能 $E_\mathrm{k} = k_B \times 6$ μK；经过 0.8 ms 的冷却时间后，500 条轨迹中有 31 条成功捕获原子并使其达到平衡。这对应于 $P \sim 6$ % 的捕获概率。图 9(a) 展示了渐近无穷远处捕获概率随初始动能的变化。当我们提高初速度时，原子被捕获的可能性会降低，因为发生较大能量耗散的可能性会减小。捕获率近似呈指数衰减，其关系为$P(E_\mathrm{k}) = 0.053e^{-E_\mathrm{k}/k_BT_\mathrm{eff}}$，其中 E_k 为初始动能，$T_\mathrm{eff} \approx 57$ μK 是根据拟合确定的有效阈值温度；偏振梯度冷却原子很容易达到 $T < T_\mathrm{eff}$。

如果将泵浦速率降低至 $\varepsilon = 2\pi\times5$ 兆赫，捕获概率会显著下降，因为摩擦力和扩散的大小随之减小。这一效应表明，动量扩散对于原子在表面势阱中减速至关重要。在轴向腔冷却中，原子可以穿过多个势垒，最终停留在一个晶格位点并达到热平衡。另一方面，将原子横向装载到表面阱中则要求更高，因为表面上方只有一个势垒。冷却必须在一次通过或一次往返过程中充分发生。单靠摩擦力可能不足以实现这一点（如图 3 所示），而动量扩散会产生足够大的随机力，从而耗散原子进入阱时获得的动能。因此，较大的扩散系数更为理想。

在我们的模拟中，我们还考虑了非零的 v_x, v_y,

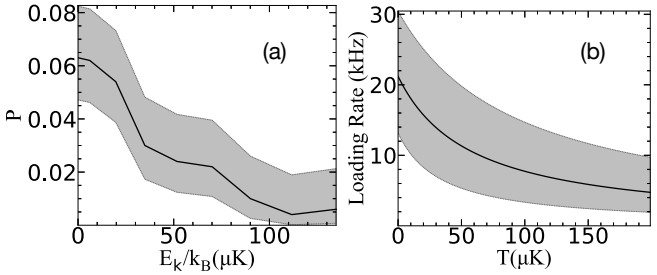

图 9. (a) 在渐近无穷远处，俘获概率随初始动能 E_{k} 变化的蒙特卡洛模拟， t=800 μs。(b) 原子通量为 400 kHz 时，初始温度为 T 的原子对应的陷阱装载率。阴影区域表示 95% 置信区间。

覆盖有限的立体角。事实证明，只要原子仍能到达陷阱冷却区域，起作用的就只有初始动能。在最近的一项实验中， [11], 一束原子通量为 ∼400 原子/ms、立体角分布范围较小的冷原子束可以被引导至波导。利用这项技术，我们可以估算不同初始温度 T下可能达到的腔辅助陷阱装载率。假设原子通量恒定，并对玻尔兹曼分布下的初始速度进行积分，我们得到一个随温度变化的装载率，如图 9(b) 所示。在初始温度为$T < 50$ μK 时，装载率为 $\gtrsim$10原子/ms。

V. 总结

我们研究了在表面微阱存在时，与弱泵浦纳米光子腔强耦合的原子的运动。文中回顾了偶极力、摩擦力和扩散系数的解析与数值计算。我们考虑了在略高于弱驱动极限、强度足够大的蓝失谐泵浦场下实现高效腔冷却。以铯原子为例，通过完整的三维蒙特卡洛模拟，我们表明，初始温度为 $\lesssim 50$ μ K 的单原子可以高效装载到深度为毫开尔文量级的表面阱中，俘获概率超过 2%。我们的方法为在纳米光子腔表面附近装载单原子提供了可行途径；通过考虑利用多原子缀饰态进行多普勒冷却，该方法还有望扩展到多原子装载。

致谢

本工作得到了美国空军科学研究办公室（资助编号: FA9550-22-1-0031）的支持。

附录 A：弱驱动极限下摩擦系数的表达式

在弱驱动极限下，摩擦力系数的完整表达式形式为

$$\begin{aligned}\beta^{ij} =& -\hbar(\partial_i g\partial_j g)\varepsilon^2 4\left(-\Delta_a^3\Delta_c^4\Gamma-\Delta_a^2\Delta_c^3 g^2\Gamma+\Delta_a\Delta_c^2 g^4\Gamma\right.\\&+\Delta_c g^6\Gamma-\Delta_a\Delta_c^4\Gamma^3+\Delta_c^3 g^2\Gamma^3-2\Delta_a^3\Delta_c^2 g^2\kappa\\&+2\Delta_a g^6\kappa+2\Delta_c g^4\Gamma^2\kappa-2\Delta_a^3\Delta_c^2\Gamma\kappa^2\\&-\Delta_a^2\Delta_c g^2\Gamma\kappa^2+3\Delta_a g^4\Gamma\kappa^2-2\Delta_a\Delta_c^2\Gamma^3\kappa^2\\&\left.+\Delta_c g^2\Gamma^3\kappa^2-2\Delta_a^3 g^2\kappa^3-\Delta_a^3\Gamma\kappa^4-\Delta_a\Gamma^3\kappa^4\right)\frac{1}{|Q|^6}\\&-\hbar(\partial_i g\partial_j g)\varepsilon^2 4\left(-2\Delta_a^2\Delta_c^2\Gamma+2g^4\Gamma-2\Delta_c^2\Gamma^3\right.\\&-4\Delta_a^3\Delta_c\kappa+4\Delta_a^2 g^2\kappa-4\Delta_a\Delta_c\Gamma^2\kappa+4g^2\Gamma^2\kappa\\&\left.+2\Delta_a^2\Gamma\kappa^2+2\Gamma^3\kappa^2\right)\frac{\Delta_a g^2}{|Q|^6},\end{aligned} \tag{A1}$$

其中， Q 在公式（7）下方定义。

附录 B：弱驱动极限下扩散系数的推导

我们遵循参考文献 [25]附录中的步骤来计算扩散系数 D。在本节中，我们的目标是用算符的期望值表示 D 的公式。对于自发辐射对扩散系数的贡-献，我们引用以下结果

$$D_{\mathrm{SE}} = \hbar^2 k_L^2 \Gamma \left\langle \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- \right\rangle . \tag{B1}$$

我们注意到，真空模在波导附近的几何形状有所不同，这可能会导致不同的D_{SE}。这里我们采用自由空间结果，将其与腔模诱导的扩散系数进行比较。

关于原子-腔体相互作用对扩散系数的贡献，我们首先为简便起见定义一些向量和矩阵:

$$\vec{Y} = \begin{pmatrix} \hat{Y}_1 \\ \hat{Y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{\sigma}^- \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} i\Delta_c - \kappa & -ig \\ -ig & i\Delta_a - \Gamma \end{pmatrix},$$

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} \hat{X}_1 \\ \hat{X}_2 \\ \hat{X}_3 \\ \hat{X}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}^- + \hat{\sigma}^+\hat{a} \\ \frac{1}{i}\left(\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}^- - \hat{\sigma}^+\hat{a}\right) \\ \hat{a}^\dagger\hat{a} \\ \hat{\sigma}^+\hat{\sigma}^- \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -(\Gamma+\kappa) & -(\Delta_a-\Delta_c) & 0 & 0 \\ \Delta_a-\Delta_c & -(\Gamma+\kappa) & -2g & 2g \\ 0 & g & -2\kappa & 0 \\ 0 & -g & 0 & -2\Gamma \end{pmatrix},$$

$$\vec{I} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}^- + \hat{\sigma}^+ \\ -i\left(\hat{\sigma}^- - \hat{\sigma}^+\right) \\ \hat{a} + \hat{a}^\dagger \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{Y}_2 + \hat{Y}_2^\dagger \\ -i\left(\hat{Y}_2 - \hat{Y}_2^\dagger\right) \\ \hat{Y}_1 + \hat{Y}_1^\dagger \\ 0 \end{pmatrix}.$$

根据公式(12) 中扩散系数的定义，由原子-腔体相互作用产生的扩散系数是

$$D_{\mathrm{dp}}^{ij} = \hbar^2(\partial_i g \partial_j g)\,\mathrm{Re}\int_0^\infty dt\left\langle \delta\hat{X}_1(0)\delta\hat{X}_1(t)\right\rangle, \quad \text{(B2)}$$

引入缩写的地方

$$\langle a_\nu, a_\mu\rangle = \langle \delta a_\nu \delta a_\mu\rangle = \langle a_\nu a_\mu\rangle - \langle a_\nu\rangle\langle a_\mu\rangle. \quad \text{(B3)}$$

根据量子回归定理和海森堡运动方程

$$\frac{d}{dt}\left\langle \hat{X}_1(0), \vec{Y}(t)\right\rangle = \mathbf{A}\left\langle \hat{X}_1(0), \vec{Y}(t)\right\rangle, \quad \text{(B4a)}$$

$$\frac{d}{dt}\left\langle \hat{X}_1(0), \vec{X}(t)\right\rangle = \mathbf{C}\left\langle \hat{X}_1(0), \vec{X}(t)\right\rangle + \varepsilon\left\langle \hat{X}_1(0), \vec{I}(t)\right\rangle. \quad \text{(B4b)}$$

对 $\xi(t)$ 定义的拉普拉斯变换写作

$$L\{\xi(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\xi(t). \quad \text{(B5)}$$

当 $s=0$ 时，考虑拉普拉斯变换

$$L\{\left\langle \hat{X}_1(t), \hat{X}_1(0)\right\rangle\} \equiv L_{\hat{X}_1\hat{X}_1} = \int_0^\infty dt\left\langle \delta\hat{X}_1(0)\delta\hat{X}_1(t)\right\rangle,$$

我们注意到，$L_{\hat{X}_1\hat{X}_1}$ 是根据式 (B2) 计算$\mathbf{D}_{\mathrm{dp}}$ 的关键要素。

为求得 $L_{\hat{X}_1\hat{X}_1}$ 的值，利用了拉普拉斯变换的一个性质，

$$L\{\frac{d}{dt}\xi(t)\} = -\xi(0) + sL\{\xi(t)\}. \quad \text{(B6)}$$

对方程（B4）两边应用拉普拉斯变换，沿用相同的记号可得

$$\left\langle \hat{X}_1(0), \vec{Y}(0)\right\rangle = \mathbf{A}L_{\hat{X}_1\vec{Y}}, \quad \text{(B7a)}$$

$$\left\langle \hat{X}_1(0), \vec{Y}^\dagger(0)\right\rangle = \mathbf{A}^* L_{\hat{X}_1\vec{Y}^\dagger}, \quad \text{(B7b)}$$

$$\left\langle \hat{X}_1(0), \vec{X}(0)\right\rangle = \mathbf{C}L_{\hat{X}_1\vec{X}} + \varepsilon L_{\hat{X}_1\vec{I}}. \quad \text{(B7c)}$$

应考虑方程 (B7b)，因为$\vec{I}$ 中的分量是 Y和 $\vec{Y}^\dagger$中的线性组合。

初始条件 $\left\langle \hat{X}_1(0), \hat{O}(0)\right\rangle$ 可根据式 (B3)，直接通过稳态下特定算符的期望值计算得到。在弱驱动极限下，这些表达式还可以利用量子噪声理论进一步简化。

$$\begin{aligned}
&\left\langle \hat{X}_1(0), \vec{Y}(0)\right\rangle = \vec{\mathbf{0}},\\
&\left\langle \hat{X}_1(0), \vec{Y}^\dagger(0)\right\rangle = \begin{pmatrix}\langle\hat{\sigma}_+\rangle\\ \langle\hat{a}^\dagger\rangle\end{pmatrix},\\
&\left\langle \hat{X}_1(0), \vec{X}(0)\right\rangle = \begin{pmatrix}\langle\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-\rangle + \langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle\\ -i(\langle\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-\rangle - \langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle)\\ \langle\hat{\sigma}_+\hat{a}\rangle\\ \langle\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-\rangle\end{pmatrix}.
\end{aligned} \quad \text{(B8)}$$

Combining Eqs. (B7) and (B8)，我们可以获得 $\hat{X}_1\hat{X}_1$ 和 $\hat{X}_1\hat{Y}$ 通过求解线性方程，从而推导出$\mathbf{D}_{\mathrm{dp}}$ 在式(14a)中的公式。

附录 C：局域平衡温度的推导

朗之万方程中的随机力由维纳过程给出。对于一维情形，速度的变化可写为

$$Mdv(t) = \beta v(t)dt + \sqrt{2D}dW(t), \quad \text{(C1)}$$

其中 $d\overline{W}=0$ 和 $dW(t)dW(t') = \delta(t-t')dtdt'$。最终速度变为

$$v(t) = e^{\beta t/M}v(0) + \sqrt{2D/M^2}\int_0^t e^{\beta(t-s)/M}dW(s). \quad \text{(C2)}$$

取随机平均，可得

$$\begin{aligned}
\overline{v^2(t)} =& e^{2\beta t/M}v^2(0)\\
&+2D/M^2\int_0^t\int_0^t e^{\beta(t-s')/M}e^{\beta(t-s)/M}\overline{dW(s')dW(s)}\\
=& e^{2\beta t/M}\left(v^2(0) + \frac{D}{M\beta}\right) - \frac{D}{M\beta}.
\end{aligned} \quad \text{(C3)}$$

有效温度为

$$k_B T_{\mathrm{eff}} = -\frac{D}{\beta}. \quad \text{(C4)}$$

在三维情况下，速度增量为

$$Mdv_i(t) = \beta_{ij}v_j(t)dt + B_{ij}dW_j(t), \quad \text{(C5)}$$

其中 $i,j = x,y,z$，重复指标求和。假设 β_{ij} 矩阵为对角矩阵，我们可以直接写出

$$\overline{v^2(t)} = \sum_i\left(e^{2\beta_i t/M}\left(v_i^2(0) + \sum_j\frac{B_{ij}^2}{2M\beta_i}\right) - \sum_j\frac{B_{ij}^2}{2M\beta_i}\right) \quad \text{(C6)}$$

一般而言，当 $\boldsymbol{\beta}$ 不是对角形式时，我们可以将平衡平方速度$-\sum_{i,j}\frac{B_{ij}^2}{2M\beta_i}$ 改写为$-\mathrm{Tr}\left(\mathbf{D}\boldsymbol{\beta}^{-1}\right)/M$。我们使用了 $2\mathbf{D} = \mathbf{B}\mathbf{B}^T$。平衡温度为

$$k_B T_{\mathrm{eff}} = -\frac{1}{3}\mathrm{Tr}\left(\mathbf{D}\boldsymbol{\beta}^{-1}\right). \quad \text{(C7)}$$

附录 D：其他方向上的摩擦力和扩散系数

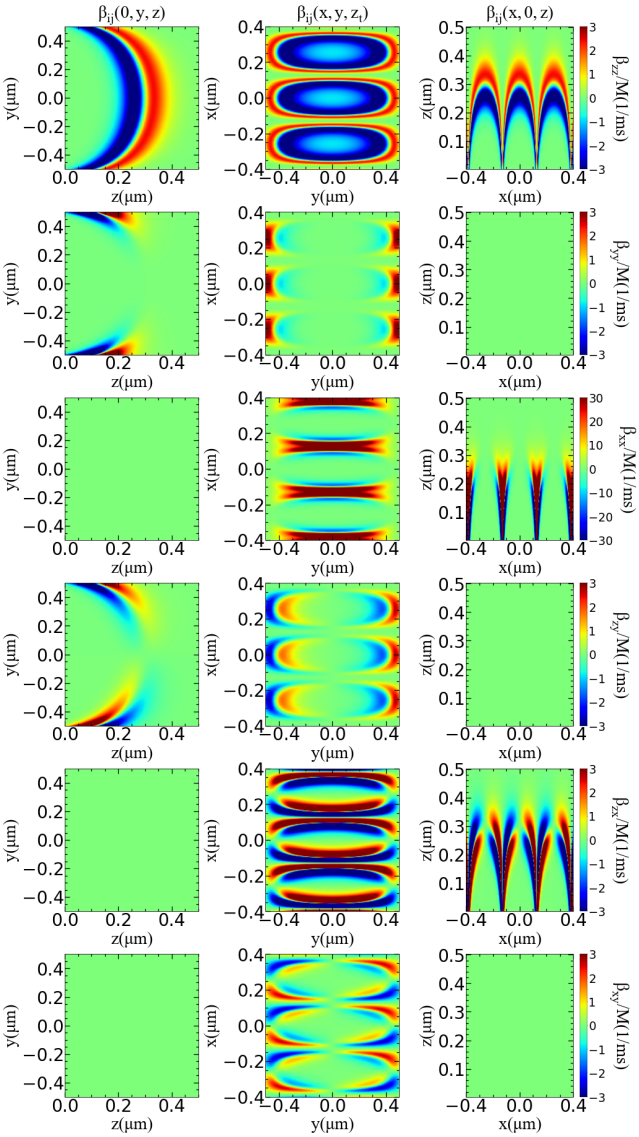

图 D1. 所有不同摩擦力张量分量的截面图 $\boldsymbol{\beta}$。

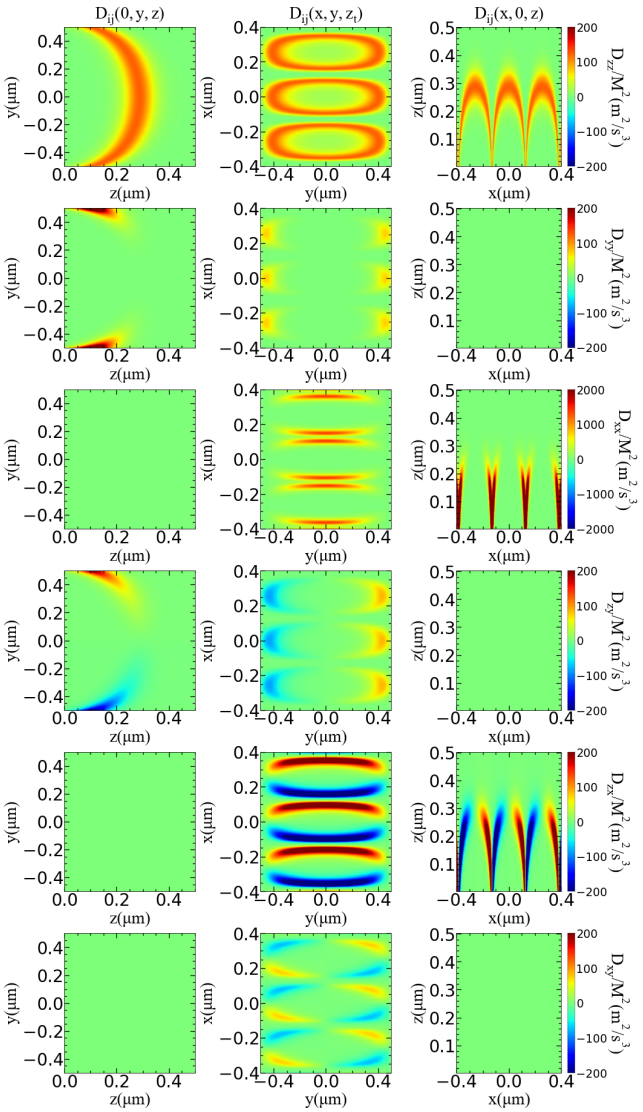

图 D2. 所有不同扩散张量分量的截面图 $\mathbf{D}$。

[1] D.Chang、J. Douglas、C.-L.Hung和 H. Kimble，《由原子和光子纳米晶格构建的量子物质：综述》，《现代物理评论》**90**，0310022018( )。[2] E. Vetsch、D. Reitz、G.Sagué、R. Schmidt、S.Dawkins和A. Rauschenbeutel，由囚禁于光学纳米光纤周围倏逝场中的激光冷却原子创建的光学接口，《物理评论快报》**104**，203603 (2010)。[3] A.Goban、K. Choi、D. Alton、D.Ding、C. Lacroûte、M. Pototschnig、T.Thiele、N.Stern和 H.Kimble，状态不敏感的补偿纳米光纤阱的演示，《物理评论快报》**109**，033603 (2012)。

[4] J.-B. Béguin, E. Bookjans, S. Christensen, H. Sørensen, J. Müller, E. Polzik 和 J. Appel，《一维光学晶格中亚泊松原子数分布的产生与探测》，《物理评论快报》**113**，263603（2014）。[5] N. V. Corzo, J. Raskop, A. Chandra, A. S. Sheremet, B. Gouraud 和 J. Laurat，《波导耦合的原子阵列单集体激发》，Nature **566**，359（2019）。[6] K. S. Rajasree, T. Ray, K. Karlsson, J. L. Everett 和 S. N. Chormaic，《在距离光学纳米光纤亚微米处产生冷里德伯原子》，Physical Review Research **2**，012038（2020）。[7] D. Hümmer, O. Romero-Isart, A. Rauschenbeutel 和 P. Schneeweiss，《利用量子纳米光子学探测表面束缚原子》，

《物理评论快报》**126**，163601（2021）。[8] J. V. Rakonjac, G. Corrielli, D. Lago-Rivera, A. Seri, M. Mazzera, S. Grandi, R. Osellame 和 H. de Riedmat-ten, 《光纤集成系统中光-物质纠缠的存储与分析》，《科学进展》**8**，eabn3919（2022）。[9] S. Kato 和 T. Aoki, 《囚禁单原子与全光纤腔之间的强耦合》，《物理评论快报》**115**，093603（2015）。[10] K. P. Nayak, J. Wang 和 J. Keloth, 《实时观测囚禁于纳米光纤腔并与之耦合的单原子》，Phys. Rev. Lett. **123**，213602（2019）。[11] X. Zhou, H. Tamura, T.-H. Chang 和 C.-L. Hung, 《通过光学导引将单原子耦合到纳米光子学回音壁模式谐振器》，《物理评论快报》**130**，103601（2023）。[12] J. D. Thompson, T. Tiecke, N. P. de Leon, J. Feist, A. Akimov, M. Gullans, A. S. Zibrov, V. Vuletić 和 M. D. Lukin, 《将单个囚禁原子耦合到纳米尺度光学腔》，《科学》**340**，1202（2013）。[13] A. Goban, C.-L. Hung, S.-P. Yu, J. Hood, J. Muniz, J. Lee, M. Martin, A. McClung, K. Choi, D. E. Chang，等，《光子晶体中的原子-光相互作用》，《自然-通讯》**5**，3808（2014）。[14] T. Đorđević, P. Samutpraphoot, P. L. Ocola, H. Bernien, B. Grinkemeyer, I. Dimitrova, V. Vuletić 和 M. D. Lukin, 《光镊中原子的纠缠传输与纳米光子学接口》，《科学》**373**，1511（2021）。[15] F. Le Kien, V. Balykin 和 K. Hakuta, 《利用亚波长直径光纤周围的双色倏逝光场实现原子阱和波导》，《物理评论A》**70**，063403（2004）。[16] K. Ton, G. Kestler, D. Filin, C. Cheung, P. Schneeweiss, T. Hoinkes, J. Volz, M. Safronova, A. Rauschenbeutel 和 J. Barreiro, 《在基于纳米光纤的光偶极阱中对碱土原子进行态不敏感囚禁》，arXiv 预印本 arXiv:2211.04004（2022）。[17] Y. B. Ovchinnikov 和 F. E. Ayi-Yovo, 《迈向基于光波导的全光学原子芯片》，《新物理学杂志》**22**，053003（2020）。[18] T.-H. Chang, B. M. Fields, M. E. Kim 和 C.-L. Hung, 《用于原子-光相互作用的悬空膜电路上的微环谐振器》，《光学》**6**，1203（2019）。[19] A. Bouscal, M. Kemiche, S. Mahapatra, N. Fayard, J. Berroir, T. Ray, J.-J. Greffet, F. Raineri, A. Levenson, K. Bencheikh，等，《用于连接慢光与囚禁冷原子的稳健半W1光子晶体波导的系统设计》，arXiv 预印本 arXiv:2301.04675（2023）。[20] C. Hung, S. Meenehan, D. Chang, O. Painter 和 H. Kimble, 《一维光子晶体中的囚禁原子》，《新物理学杂志》**15**，083026（2013）。[21] D. Chang, K. Sinha, J. Taylor 和 H. Kimble, 《利用纳米尺度量子真空力囚禁原子》，《自然-通讯》**5**，4343（2014）。[22] A. González-Tudela, C.-L. Hung, D. E. Chang, J. I. Cirac 和 H. Kimble, 《二维光子晶体中的亚波长真空晶格与原子-原子相互作用》，《自然-光子学》**9**，320（2015）。[23] S. Fuchs, R. Bennett, R. V. Krems 和 S. Y. Buhmann, 《光学势与卡西米尔-珀尔德势的非加和性》，《物理评论快报》**121**，083603（2018）。[24] P. Horak、G. Hechenblaikner、K. M. Gheri、H. Stecher 和 H. Ritsch, 《强耦合区中的腔诱导原子冷却》，《物理评论快报》**79**，4974（1997）。[25] G. Hechenblaikner、M. Gangl、P. Horak 和 H. Ritsch, 《在弱驱动高 Q 腔体中冷却原子》，《物理评论A》**58**，3030（1998）。[26] V. Vuletić 和 S. Chu, 《通过相干散射激光冷却原子、离子或分子》，《物理评论快报》**84**，3787（2000）。[27] P. Maunz、T. Puppe、I. Schuster、N. Syassen、P. W. Pinkse 和 G. Rempe, 《单原子的腔冷却》，《自然》**428**，50（2004）。[28] M. Wolke、J. Klinner、H. Keßler 和 A. Hemmerich, 《低于反冲极限的腔冷却》，《科学》**337**，75（2012）。[29] H. Ritsch、P. Domokos、F. Brennecke 和 T. Esslinger, 《腔体产生的动态光学势中的冷原子》，《现代物理评论》**85**，553（2013）。[30] M. Hosseini、Y. Duan、K. M. Beck、Y.-T. Chen 和 V. Vuletić, 《多原子的腔冷却》，《物理评论快报》**118**，183601（2017）。[31] C. J. Hood、T. Lynn、A. Doherty、A. Parkins 和 H. Kimble, 《原子-腔体显微镜：由单光子束缚在轨道上的单原子》，《科学》**287**，1447（2000）。[32] P. Pinkse、T. Fischer、P. Maunz 和 G. Rempe, 《用单光子捕获原子》，《自然》**404**，365（2000）。[33] V. Vuletić、H. W. Chan 和 A. T. Black, 《通过相干散射实现三维腔多普勒冷却和腔边带冷却》，《物理评论A》**64**，033405（2001）。[34] F. Le Kien 和 K. Hakuta, 《弱驱动光纤布拉格光栅腔中的原子运动：力、摩擦力和扩散》，《物理评论A》**81**，063808（2010）。[35] P. Domokos 和 H. Ritsch, 《动态光学倏逝波微阱中的高效装载与冷却》，《欧洲物理学快报》（EPL）**54**，306（2001）。[36] Y. Meng、A. Dareau、P. Schneeweiss 和 A. Rauschenbeutel, 《对光学捕获于距热表面 300 nm 处的原子进行近基态冷却》，《物理评论X》**8**，031054（2018）。[37] S. Van Enk、J. McKeever、H. Kimble 和 J. Ye, 《谐振器内光阱中单原子的冷却》，《物理评论A》**64**，013407（2001）。[38] X. Xu、K. Kim、W. Jhe 和 N. Kwon, 《用空心激光束高效光学导引捕获的冷原子》，《物理评论A》**63**，063401（2001）。[39] W. J. Westerveld、S. M. Leinders、K. W. A. van Dongen、H. P. Urbach 和 M. Yousefi, 《矩形硅光波导中 Marcatili 分析方法的扩展》，《光波技术杂志》**30**，2388（2012）。[40] H. Katori、M. Takamoto、V. Pal'chikov 和 V. Ovsian-nikov, 《利用工程化光移位阱中的中性原子实现超稳定光学钟》，《物理评论快报》**91**，173005（2003）。[41] T. Ido 和 H. Katori, 《Lamb-Dicke 区域中中性 Sr 原子的无反冲光谱学》，《物理评论快报》**91**，053001（2003）。[42] K. Guo、G. Wang 和 A. Ye, 《Sr 和 Yb 原子光学晶格钟的偶极极化率与魔术波长》，《物理学B辑：原子、分子与光学物理》**43**，135004（2010）。[43] J. Dalibard 和 C. Cohen-Tannoudji, 《激光光场中的原子运动：半经典理论与量子理论之间的联系——》

tum 描述，《物理学杂志B：原子与分子物理学》**18**，1661 (1985).[44] 我们注意到，尽管描述由例如自发辐射导致的三维动量扩散需要三个随机变量，但描述偶极力振幅涨落只需一个随机变量，因为力的方向始终沿着 ∇g。不过，这个引述的方程适用于一般情况。

[45] H. Walther，单原子量子光学，《物理学评论》**1998**，138（1998）。[46] J. Gordon 和 A. Ashkin，辐射阱中的原子运动，《物理评论A》**21**，1606（1980）。[47] M. Cini、F. Fucito 和 M. Sbragaglia，《量子力学与统计力学解题 （ Springer Milan，2012）。