arXiv:2304.04769v1 [math.CO] 9 Apr 2023





越南—德国大学

计算机科学系

and

法兰克福应用科学大学信息学系

计算机科学学士学位论文

模式规避排列上的组合统计量

Thien Hoang





越南—德国大学

计算机科学系

and

法兰克福应用科学大学信息学系

计算机科学学士学位论文

模式避免排列上的组合统计量

作者：ThienHoang 指导教师：HuongTran
博士 联合指导教师：Manuel Clavel 教授、博士 提交日期：24.09.2021

本人确认，这篇计算机科学学士学位论文是我独立完成的，并已记录所使用的所有来源和材料。

越南平阳，2021年9月24日　　Thien Hoang

谨以此学位论文献给我自己。

“纯粹为了数学本身而学习，同样合理，也同样有价值，即使它没有直接的实际用途。”

——- James Grime

Acknowledgments

我谨向导师 Huong Tran 致谢，感谢她在我撰写学位论文期间给予的极大帮助和指导。

我还想向我的家人致以诚挚的谢意，感谢他们无条件的支持；也感谢我在 Pi MA 和大学里结识的朋友，是他们激励并塑造了今天的我。

摘要

Mahonian统计量的研究可追溯至1915年，当时MacMahon [8] 证明了在长度为n的排列集合上，主指标和逆序数具有相同的分布。此后，人们发现了许多Mahonian统计量，并投入了大量精力，试图寻找避开长度为3的经典模式的排列上两个Mahonian统计量之间的等分布。近年来，Amini [1] 和 Do等人 [5] 采用了多种方法对等分布进行了广泛研究，从使用生成函数、Dyck 路径、块分解到双射。在本学位论文中，我们将使用双射方法解决 Av(312)上 bast 和foze 之间的猜想等分布，并以组合方法细化 [5]中的两个已确立结果。

目录

致谢 **iv**

摘要 **v**

1. 引言 **1**

2. Com组合统计量及其分布 **3**
2.1. 排列模式：经典模式与邻接模式 3 2.2. 组合统计量.4 2.3. 统计量等分布.5

3. 主要结果 7
3.1. Av(231) 上 maj 与 makl 的等分布再探讨.7 3.1.1. 定义与记号.7 3.1.2. 双射 θ' : Av′(231) → Av′(231)，将升序集合转换为 Atop . . . . . 9 3.2. Av(312) 上 bast 与 foze 的等分布.13 3.3. Av(312) 上 foze″ 与 Av(321) 上 inv 的等分布.15

4. 结论 **18**

A. 大众统计学 **19**

参考文献 第 2 章 **0**

1. 引言

根据 Rowntree [10], 的说法，“统计量”至少有四种含义：统计学这门学科；收集、处理或解读数据的方法；所收集的数据；最后是根据数据计算出的特定数值。本学位论文将探讨组合统计量，它最接近第四种含义；而我们要处理的“数据”是排列。一个统计量的分布概括了它在一个排列集上可能产生的所有取值及其出现频率。特别是，我们关注某些统计量对在某些排列集上的分布方式相同（即等分布）。

*Mahonian*统计量是一类组合统计量，它们在S_n （长度为n的所有排列组成的集合）上均匀分布。主指标是一个典型的Mahonian统计量，MacMahon [8]证明了它具有Mahonian性质。然而，当我们施加某些限制，例如要求排列避免某个模式 σ时，它们可能不再等分布。在模式避免排列集合$S_n(\sigma)$ 上的等分布问题更值得研究，因为当 σ 是长度为3的经典模式时，$|S_n(\sigma)|$ 是第n个Catalan数。这意味着，我们关于$S_n(\sigma)$ 的结果可以推广到其他Catalan对象。

在每个等分布问题中，我们给定两个统计量和两个模式避免集合。过去几十年来，研究人员发现了各种Mahonian统计量（一些示例见表 2.1）。此外，长度为3的经典模式共有六种。简单计算便可发现，待解决的等分布问题数量极其庞大。Amini [1] 对这些问题进行了广泛研究，并提出了许多关于等分布的猜想。证明等分布的方法有很多。Amini [1] 在证明中使用了块分解、Dyck 路径和生成函数。Do等人 [5] 则运用双射方法得出了更多结果。

在这篇学位论文中，我们将使用双射方法证明一个新的定理，同时重新构思 [5] 中的一些解法。我们成功证明了在 312-避免排列的集合上，两个Maho- nian统计量 bast和 foze 之间的等分布。此外，利用基于栈的算法，我们改进了将统计量 maj 转换为 makl的双射，该双射作用于 231-避免排列集。我们还为 foze$''$ 和inv 在 $S_n(312)$ 和 $S_n(321)$ 上的等分布给出了一个改进的组合证明（n 是任意正整数）。

学位论文分为四章：

- **第 1 章**旨在让读者从宏观层面了解我们试图解决什么问题，以及将如何解决这些问题。

- **第二章**介绍了学位论文中将频繁使用的一些正式定义和符号。

- **第3章** 在三个小节中提出了三个等分布问题；其中两个（第3.1节和第3.3节）是已有结果，并给出了精细的解答；另一个（第3.2节）则提出了我们刚发现的一种新等分布。

- **第4章** 将总结第3章中介绍的所有主要和次要结果，并简要探讨这一主题的研究可以如何进一步推进。

2. 组合统计量及其分布

本章将介绍在本学位论文中频繁使用的一些定义和符号。首先，我们会从排列、约化形式和模式等基本概念入手（第2.1节）；接着介绍一些组合统计量，以及它们与黏连模式之间的关系（第2.2节）；最后讨论避模式集合上的统计等分布问题（第2.3节）。

2.1. 排列模式：经典模式和黏连模式

长度（或大小）为 n 的排列 π 是由n 个两两不同且可比较的字母组成的一个排列，这些字母通常为 $\{1,2,\ldots,n\}$（记作 $[n]$）。我们也称 π 为一个n-排列。 π 的第i个元素记作 π_i，自然地，i 是 π_i的位置或索引。第一个元素的索引为 1（这与常见的使用从 0 开始的索引的编程习惯相反）。π 也可以看作一个函数，将i 映射到 π_i；因此，有时我们会将 $\pi(I)=\{\pi_i|i \in I\}$ 记作，其中$I \subseteq [n]$。

示例 1。 给定 $\pi = 4235167$ 和 $I = \{1,3,5,7\}$，则 $\pi(I) = \{4,3,1,7\}$。 △

π 的字母属于 $[n]$时，称其为约化形式。将一个排列约化，就是把其第i小的字母替换为i。当我们在下文定义模式的出现时，这一概念很有用。除非另有说明，本文中的所有排列均默认为约化形式。n-排列的集合记为S_n。

设 $\sigma \in S_m$ 和 $\pi \in S_n$（其中$m \leq n$）。如果存在 m个指标$i_1 < i_2 < \cdots < i_m$，使得 $\pi_{i_1}\pi_{i_2}\ldots\ldots\pi_{i_m}$的约化形式为 σ，则称 π 包含经典模式 σ。在这种情况下，$(i_1, i_2, \ldots\ldots, i_m)$称为 σ 的一个出现，或称为一个 σ-出现。如果 π不包含σ-出现，则称 π 避免 σ，或者称 π 是一个 σ-避免排列。 π 中 σ-出现的数量记作 $\sigma(\pi)$。

例 2. $(1, 3, 5)$ 是 $\pi = 4235167$ 中的一个 321 出现，因为 $\pi_1\pi_3\pi_5$ =431 的约化形式是 321。进一步来说， $\pi_1 > \pi_3 > \pi_5$ 类似于 $3 > 2 > 1$。另一个 321 出现是$(1, 2, 5)$。△

邻接模式是经典模式的一种特化形式，我们通过在排列中对某些连续字母加下划线来施加一些邻接限制。

示例3。 321是一种经典模式，但321 是一种邻接模式，其中匹配“3”和“2”的位置必须彼此相邻。在最后一个示例中， $\pi = 4235167$ 包含两个 321-模式出现，但只有 $(1, 2, 5)$ 是 321 的出现。 △

—

2.2. 组合统计量

组合统计量，或简称为 统计量，是一个映射st :$S \to \mathbb{N}$。例如，i 被称为 π 的一个从左到右最大值，如果 π_i 大于出现在它左侧的任何其他元素。统计量 lmax 定义为一个排列中从左到右最大值的数量。另一类统计量是集合诱导统计量，通常将其记号的首字母大写来表示，例如 Lmax 表示所有从左到右最大值组成的集合。关于学位论文中所使用的统计量及其定义的更完整列表，请参阅表 A.1。

当在一个排列集合上计算某个统计量时，我们关注它的分布，也就是该统计量取各个值的次数。若将 st 的分布表示为生成函数:

$$\sum_{\pi \in S} q^{\mathrm{st}(\pi)}$$

那么，q^x 的系数告诉我们，$\pi \in S$ 中有多少个值满足 $\mathrm{st}(\pi) = x$。

例4. 设 st 将S_3 中的每个排列映射到其 21-模式出现次数。我们有下表:

π	123	132	213	231	312	321
$\mathrm{st}(\pi)$	0	1	1	2	2	3

其分布可写为 $1 + 2q + 2q^2 + q^3$。在第二行中，我们可以看到，0 出现一次（对应项 $1q^0$），1 出现两次（对应项 $2q^1$），2 出现两次（对应项 $2q^2$），3 出现一次（对应项 $1q^3$）。△

示例 4 中的统计量也称为逆序数，即满足 (i,j)其中 $i < j$ 且 $\pi_i > \pi_j$的数对数量。π 的逆序数记作 $\mathrm{inv}(i)$。逆序数 inv 由 Rodrigues [9] 给出如下:

$$\sum_{\pi \in S_n} q^{\mathrm{inv}(pi)} = [n]_q!$$

其中 $[n]_q! = [n]_q[n-1]_q \ldots [1]_q$ 以及 $[k]_q = 1 + q + \cdots + q^{k-1}$。

后来，MacMahon [8] 证明，定义为 $\mathrm{maj}(\pi) = \sum_{i \in \mathrm{Des}(\pi)} i$ 的主指标在 S_n 上也具有相同的分布。具有这种分布的统计量称为 *Mahonian*统计量。此后，人们又发现了许多 Mahonian 统计量（见表 2.1）。Babson 和 Steingrımsson [2] 证明，一些 Mahonian 统计量可以表示为若干邻接模式出现次数的总和。例如，在表 2.1 中，主指标等于 132-出现次数、231-occurrence 出现次数等之和。按照第 2.1 节中的记号 $\sigma(\pi)$，有:

$$\mathrm{inv}(\pi) = 1\underline{32}(\pi) + 2\underline{31}(\pi) + 3\underline{21}(\pi) + \underline{21}(\pi) = (1\underline{32} + 2\underline{31} + 3\underline{21} + \underline{21})(\pi)$$

Name	邻接模式之和	参考文献
inv	$\underline{23}1 + \underline{31}2 + \underline{32}1 + \underline{21}$	Rodrigues [9]
maj	$1\underline{32} + 2\underline{31} + 3\underline{21} + \underline{21}$	MacMahon [8]
makl	$1\underline{32} + 2\underline{31} + \underline{32}1 + \underline{21}$	Clarke 等人 [4]
bast	$\underline{13}2 + \underline{21}3 + \underline{32}1 + \underline{21}$	Babson 和 Steingrımsson [2]
foze	$\underline{21}3 + 3\underline{21} + \underline{13}2 + \underline{21}$	Foata 和 Zeilberger [6]
foze′	$\underline{23}1 + \underline{31}2 + \underline{31}2 + \underline{21}$	Foata 和 Zeilberger [6]

表 2.1：若干 Mahonian统计量及其用邻接模式表示的表达式。命名方式沿用了 Amini [1] 的做法。

2.3. 统计量等分布

尽管所有 Mahonian统计量在 S_n 上具有相同的分布，但它们在 模式避免排列集合 上的分布可能不同，而找出哪些统计量对在某些成对的避模式集合上具有相同分布是非常重要的。令 σ 为一个模式，我们记 $S_n(\sigma)$ 由 σ-避免的 n-排列组成。我们还将 $\mathrm{Av}(\sigma) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} S_n(\sigma)$写作所有 σ-避免排列的集合。

给定两个统计量 st_1 和 st_2,，以及两个避模式集合，$S_n(\sigma_1)$ 和 $S_n(\sigma_2)$，如果满足以下等式，我们就称st_1 和 st_2 在 $S_n(\sigma_1)$ 和 $S_n(\sigma_2)$ 上等分布：

$$\sum_{\pi\in S_n(\sigma_1)} q^{\mathrm{st}_1(\pi)} = \sum_{\pi\in S_n(\sigma_2)} q^{\mathrm{st}_2(\pi)} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^+)$$

在这篇学位论文中，我们将考察这样的等分布：其中 st_1 和 st_2 是Mahonian 统计量，而 σ_1 和 σ_2 是长度为 3 的经典模式。研究集合 $S_n(\sigma_1)$ 和 $S_n(\sigma_2)$ 上的分布的一个动机是，它们的基数是第 n 个 Catalan数，并且这种等分布可以推广到其他 Catalan对象。

在证明 st_1 和 st_2 在 $S_n(\sigma_1)$ 与 $S_n(\sigma_2)$ 上等分布的诸多方法中，本文将重点关注双射方法。这意味着我们将寻找一个双射 $f : S_n(\sigma_1) \to S_n(\sigma_2)$，使得 $\mathrm{st}_1(\pi_1) = \mathrm{st}_2(f(\pi_1))$。若存在这样的双射，则自然可推出等分布。

排列上有三个所谓的*trivial*双射： 反转、补和逆双射。给定 $\pi \in S_n$:

- 反转: $r(\pi) = \pi_n\pi_{n-1}\ldots\pi_1$.
- 补: $c(\pi) = (n-\pi_1+1)(n-\pi_2+1)\ldots(n-\pi_n+1)$.
- 逆： π_i是 $i(\pi)$ 的第 i个条目。我们也将 $\pi^{-1} = i(\pi)$.

示例5. $r(4235167) = 7615324$, $c(4235167) = 4653721$, $i(4235167) = 5231467$ △

将上述双射推广到经典模式也是很自然的。设 b 是上述某个双射，很容易看出，如果 π 包含 σ 的 x 次出现，其中 σ 是一个经典模式，

然后 $b(\pi)$ 包含 x 出现 出现 $b(\sigma)$。因此，如果b 是若干个平凡双射的复合，该性质也成立。

至于邻接模式，仅应用反转和补（见 Vajnovszki [11]）。邻接模式的逆是一个双邻接模式，不在本学位论文的讨论范围内。当邻接模式被反转时，邻接限制也会随之反转。

示例6. $r(231) = 132$。注意，在231 中，出现的最后两个位置必须相邻，而在 132 中则是最前面的两个位置。另一方面，$c(231) = 213$。注意，当我们应用补映射时，相邻位置保持不变。△

排列上的平凡双射及其向模式的扩展，是我们解决某些等分布问题的基本工具，尤其是下一章第3.2节中 $\mathrm{Av}(312)$ 和 $\mathrm{Av}(312)$ 上的 bast 和 foze 这一对。

3. 主要结果

本章将讨论三个等分布问题。在第 3.1 节中，我们将重新探讨 Av(231) 上 maj和makl 的等分布，该结果由Do等人使用双射方法证明。 [5] 接下来，在第3.2节中，我们将利用第 3.1 节中的一些结果，建立Av(312) 上 bast 与foze 之间新的等分布关系。最后几节将重点研究 Av(231)和 Av(312) 上 foze$''$ 与inv之间的等分布关系，但将采用组合证明，而不是 [5]中的归纳证明。

3.1. 重新考察 Av(231 上 **maj**maj 与makl 的等分布)

如前所述，这里我们将重新考察 Av(231) 上的 maj 与 makl 这一对统计量；Do等人 [5]已通过双射方法证明了它们的等分布。为了构造将 Av(231) 上的 maj 转换为 makl 的双射 θ，我们需要一个中间双射 θ'，将 Av$'(231)$ 上的 Asc 转换为 Atop（以最大元素开头的避免231模式的排列集合）。接着， θ 将根据 θ' 来定义。在撰写学位论文期间，我们发现他们构造的 θ' 有误，因此开始编写新的实现，以确认下文定理 1 的正确性。

定理1。 Do等人 [5]。存在一个双射 θ' : Av$'(231)$ $\to$ Av$'(231)$，将统计量 升序集合转换为Atop。

首先，我们将介绍一些定义和记号，其中有些会在第3.2节中再次使用；然后，我们将给出一个算法，并证明它是上述 θ' 的有效实现。本节最后，我们将简要说明 θ : Av(231) $\to$ Av(231) 如何用 θ' : Av$'(231)$ $\to$ Av$'(231)$ 来定义。

3.1.1. 定义与记号

给定一个 n-排列 π，下降段 是一个极大集合 $\{i,i+1,\ldots,j\} \subset [n]$，满足 $\pi_i > \pi_{i+1} > \cdots > \pi_j$; 也就是说，将 $i-1>0$ 或 $j+1 \leq n$ 加入该集合后，集合将不再满足递减条件。一个逆下降段是集合 $\{i_1,i_2,\ldots,i_j\}$，满足 $\{\pi_{i_1},\pi_{i_2},\ldots,\pi_{i_j}\}$ 在 π^{-1} 中是一个下降段。若 $i_1 < i_2 < \cdots < ij$，则 $\pi_{i_1},\pi_{i_2},\ldots,^{\pi_{i_j}}$ 是公差为 -1 的等差数列。

假设 π 有k 个逆下降段$I_1,I_2,\ldots,I_k$，按照每个集合的最大元素排序，即 max(I_1) > max(I_2) $> \cdots >$ max(I_k)。在本学位论文中，默认任意排列的所有逆下降段均以这种方式排序。还容易看出，所有$I_1,I_2,\ldots,I_k$ 都是 $[n]$的一个划分。

例子 7。 给定 $\pi = 7651324$，其逆下降段为 $I_1 = \{1,2,3,7\}$、$I_2 = \{5,6\}$ 和$I_3 = \{4\}$。 △

逆下降段这一概念具有若干性质，尤其是在避免231模式的排列上，正如我们将在引理1和引理2中看到的那样。注意，引理1已在 [5], 中简要提及，但这里我们将考察其形式证明。

引理1。 Do等人。 [5]。给定 $\mathrm{Av}(231)$，则第一逆下降段 I_1 是$\mathrm{Rmax}(\pi)$。

证明。即使不知道 $\pi \in \mathrm{Av}(231)$，我们仍可看出 $\pi(I_1) = \{t,\ t-1,\ \ldots\ldots,\ \pi_n\}$ (n 是 π 的长度)。我们先证明 $t = n$，然后证明 $\mathrm{Rmaxl}(\pi) = \{n,\ n-1,\ \ldots\ldots,\ \pi_n\}$。

假设 $\mathrm{t} < \mathrm{n}$，即 $\mathrm{t}+1 \notin \pi(\mathrm{I}_1)$，那么 $\mathrm{t}+1$ 会在t 之前或之后出现。如果它在 t 之前，则逆下降段可以延长，因而不是极大的。如果它在 t之后，则 $\mathrm{t}(\mathrm{t}+1)\pi_n$ 是231的一次出现。在这两种情况下我们都得到矛盾，因此 $\mathrm{t}+1 \in \pi(\mathrm{I}_1)$，这又与假设$\mathrm{t}+1 \notin \pi(\mathrm{I}_1)$ 矛盾。因此，$\mathrm{t} = \mathrm{n}$，换句话说，$\pi(\mathrm{I}_1) = \{\mathrm{n},\ \mathrm{n}-1,\ \ldots\ldots,\ \pi_n\}$。

我们已经知道 $\pi_n \in \mathrm{Rmaxl}(\pi)$。如果 $\pi_n = \mathrm{n}$，那么确实有 $\mathrm{Rmaxl}(\pi) = \{\mathrm{n}\}$。否则，假设 $\pi_n + \mathrm{x} \in \mathrm{Rmaxl}(\pi)$ 且 $\pi_n + \mathrm{x} + 1 \leq \mathrm{n}$。当 $\mathrm{x} = 0$ 时，$\pi_n + \mathrm{x}$ 在排列中出现在 $\pi_n + \mathrm{x} + 1$ 之后。$\mathrm{x} > 0$ 时这一性质也成立；否则 $(\pi_n + \mathrm{x})(\pi_n + \mathrm{x} + 1)\pi_n$ 就是 231 的一次出现。此外，在 π 中，$\pi_n + \mathrm{x} + 1$ 和 $\pi_n + \mathrm{x}$ 之间出现的字母都小于 $\pi_n + \mathrm{x}$，否则就会导致一次 231 的出现。因此，$\pi_n + \mathrm{x} + 1 \in \mathrm{Rmaxl}(\pi)$。由归纳法可得，$\mathrm{Rmaxl}(\pi) = \{\pi_n, \pi_n + 1, \ldots\ldots,\ \mathrm{n}\}$。 □

引理2。 给定 $\pi \in \mathrm{Av}(231)$，i 是一个上升，当且仅当存在 $j > 1$ 使得 $i = \max(I_j)$。

证明。 假设$i < n$ 是一个上升，我们总能找到$j \leq 1$ ，使得$i \in I_j$。假设$i \neq \max(I_j)$，那么对于某些$i' > i$和$i' \in I_j$，有 $\pi_i > \pi_{i'}$，因此$(i, i+1, i')$ 是模式 231 的出现，这与原假设 $\pi \in$Av(231)矛盾。 □

以下性质也在 [5], 中被提及，证明相当直接，因此我们仅在此将其作为注记呈现。

注记 1. *Do*等人 *[5].*给定 $\pi \in \mathrm{Av}(231)$:

- 如果移除 π_i 其中 $i \in I1$，我们得到一个新的排列 $\pi' \in \mathrm{Av}(231)$ ，它具有$k-1$个逆下降段 I'_1、I'_2、……、I'_{k-1} 以及 $\pi(I2) = \pi'(I'_1)$。
- 如果 $u < v$ 那么 $\pi(I_u) > \pi(I_v)$.
- $\{\max(I1), \max(I2), \ldots, \max(I_k)\} = \mathrm{Rmin}(\pi)$.

给定两个整数集合 A 和B。我们有以下几个定义:

定义 1. 若存在 $x,y \in A$，$x < z$，使得 $\forall y \in A$ 时有 $y < x$ 或 $y > z$，且 $\forall y \in B$ 时有 $x < y < z$，则称 B 嵌套于 A。

定义 2. 如果 $\max(A) < \min(B)$ 或$\max(B) < \min(A$，则称 A 和 B 不相交).

例8. 给定$A = \{1,2,8\}$、$B = \{4,6,7\}$、$C = \{3,5\}$、$D = \{9\}$，则B 和C 都包含在A中；A 与 D 互不相交；B 和C 彼此既不包含，也不互不相交。△

下面这个来自 [5] 的命题也是逆下降段的一项基本性质；我们将需要用它来判断一个排列是否避免231模式（参见引理6）。

命题 1。 Do等人 [5]。令 I_u 和 I_v 为 π 的两个逆下降段，则 $\pi \in \mathrm{Av}(231)$ 当且仅当对于任意一对 $u < v$，我们都有 I_u 和 Iv 要么嵌套，要么不相交。

3.1.2. 双射 θ' :$\mathrm{Av}'(231) \rightarrow \mathrm{Av}'(231)$ 将 升序集合 转换为 Atop

双射 θ' : Av′（231） $\rightarrow$ Av′（231）由 Do 等人 [5] 提出，并非从 Av′（231）到其自身的直接变换，而是由两个双射 θ'_1 和 θ'_2复合而成，如下所示:

$$\begin{gathered}\text{a permutation in } \mathrm{Av}'(231)\\ \theta'_1\\ \text{a pair of } \textit{consistent sequences}\\ \theta'_2\\ \text{a permutation in } \mathrm{Av}'(231).\end{gathered}$$

其中，相容序列由定义3给出。双射 θ'_1 由命题2支持，而命题2已在 [5]中得到完美证明。同时，θ'_2 由命题3支持；然而，其在 [5] 中的构造性证明是不正确的。因此，在本节中，我们将重新审视命题3，并找到 θ'_2的正确实现，从而确认 θ' （定理1）的有效性。

让我们来看一下上述定义3、命题2和命题3:

定义 3。 Do等人 [5]。如果满足以下条件，则称两个正整数序列 （$c_1, c_2,\ldots\ldots, c_k$）和（$m_1, m_2,\ldots\ldots, m_k$）是相容的:

- $c_1 \leq 2$
- $c_1 + c_2 + \cdots + ck = n$
- $n = m_1 > m_2 > \cdots > mk$
- $mi > ci + ci_{+1} + \cdots + ck$（对于 $1 < i \leq k$）

命题2。 Do等人 [5]。给定一致序列对$(c_1, c_2, \ldots\ldots, c_k)$ 和$(m_1, m_2, \ldots\ldots, m_k)$，存在唯一的排列 $\pi \in \mathrm{Av}'(231)$ 满足:

- $|Ii| = ci$，其中 Ii 是 π 的第 i 个逆下降段。
- 升序集合$(\pi) = \{m_2, m_3, \ldots, mk\}$.

命题3。 Do等人 [5]。给定一致序列对$(c_1, c_2, \ldots, c_k)$ 和$(m_1, m_2, \ldots, m_k)$，存在唯一的排列 $\pi \in \mathrm{Av}'(231)$ 满足:

- $|Ii| = ci$，其中 Ii 是 π 的第 i 个逆下降段。

- Atop(π) = $\{m_2, m_3, \ldots\ldots, mk\}$。

为了证明命题3，我们将从一对一致序列构造出唯一的 π，使得 π 遵循给定条件。算法1是我们使用两个栈构造一个231-排列的方法。对栈的操作包括栈顶（读取栈顶而不修改栈）、弹出（读取栈顶并将其从栈中移除）以及转移（从栈 $\mathscr{A}$ 弹出并将其压入栈 $\mathscr{B}$）。算法中有三个主要步骤需要重点关注，即第 8 行（简称 L8）、L12 和 L15。

算法 1。 计算满足命题3的 π

```
1: 过程 转移(𝒜: 栈<整数>, ℬ: 栈<整数>)
2:     栈顶 ← 𝒜.弹出()
3:     ℬ.push(栈顶)
4: 结束过程

5: 过程ComputePermutation(c: Array<Int>, m: Array<Int>)
6:     (n, p, k) ← (m_1, n, c.size())
7:     对于 i ← 1, 2, ..., k do
8:         对于 j ← 1, 2, .., c_i 执行        ▷ 将(n − ∑_{t=1}^{i−1} c_t), ....., (n − ∑_{t=1}^{i} c_t + 1) 压入 𝒜。
9:             𝒜.压入(p)
10:            p ← p − 1
11:        结束循环
12:        当 𝒜不为空且 𝒜.top() /∈ {m_2, m_3, ....., m_k} 时
13:            转移(𝒜, ℬ)
14:        结束 while 循环
15:        如果 𝒜非空 则
16:            转移(𝒜, ℬ)
17:        结束 if 语句
18:    结束 for 循环
19: 结束过程
```

我们可以简要讨论算法 1 的思路。在每个以变量 i 为循环变量的 for 循环中，我们将一个逆下降段的元素压入 $\mathscr{A}$(L8)，这样当它们被转移到$\mathscr{B}$ 时，就能保持原有顺序，从而在生成的排列中形成一个逆下降段。从 $\mathscr{A}$ 转移元素到 $\mathscr{B}$时，如果遇到某个所需的上升顶点（L12 和 L15），我们就会停在该元素处，并进入下一个 for 循环，以接收下一个逆下降段的元素。压入 $\mathscr{A}$的元素按降序排列，因此下一个转移到 $\mathscr{B}$ 的元素会使其正下方的元素成为生成的排列中的上升顶点。为了进一步理解该算法，我们来看一个例子。

示例9. 查找 $\theta'(7642135)$.

在本第 3.1 节开头，我们说过， θ 是 θ'_1 和 θ'_2的复合。第一步 θ'_1是找出与给定排列对应的一致序列对，如下所示

命题2中所述。为此，我们只需确定上升集合以及逆下降段的长度。

• 三个逆下降段，$\{1,2,7\}$、$\{3,6\}$、$\{4,5\}$。这将得到 $c = (3、2、2)$。

将上升集合记为 $\{5,6\}$。这将得到 $m = (7, 6, 5)$。

在第二步中，θ'_2，我们通过应用算法 1中的 ComputePermutation 程序将这对序列转换为一个排列。我们如下展示该过程：

	操作	**结果**
最初,	$\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 为空。 栈顶 栈是开口。	$\mathscr{A}$ $\mathscr{B}$
迭代 $i = 1$	L8：由于$c_i = 3$，我们依次将 7、6、5 压入 $\mathscr{A}$。	5 6 7 $\mathscr{A}$ $\mathscr{B}$
	L12: 栈顶$(\mathscr{A}) = 5 \in M$，不做任何操作。	(不变)
	L15: 转移栈顶 (5)的 $\mathscr{A}$到 $\mathscr{B}$.	6 7 $\mathscr{A}$ 5 $\mathscr{B}$
迭代 $i = 2$	L8：由于$c_i = 2$，我们依次将 4、3 压入 $\mathscr{A}$。	3 4 6 7 $\mathscr{A}$ 5 $\mathscr{B}$
	L12：栈顶$(\mathscr{A}) = 3 \notin M$，我们转移它至 $\mathscr{B}$。	4 6 7 $\mathscr{A}$ 3 5 $\mathscr{B}$
	L12：栈顶$(\mathscr{A}) = 4 \notin M$，我们转移将其转换为 $\mathscr{B}$。	6 7 $\mathscr{A}$ 4 3 5 $\mathscr{B}$
	L12：栈顶$(\mathscr{A}) = 6 \in M$，什么也不做。	(未改变)
	L15：将 $\mathscr{A}$的栈顶（6）转移到 $\mathscr{B}$。	7 $\mathscr{A}$ 6 4 3 5 $\mathscr{B}$
迭代 $i = 3$	L8：因为 $c_i = 2$，我们依次将 2、1 压入 $\mathscr{A}$。	1 2 7 $\mathscr{A}$ 6 4 3 5 $\mathscr{B}$
	L12: 栈顶$(\mathscr{A}) = 1 \notin M$，我们转移将其设为 $\mathscr{B}$。	2 7 $\mathscr{A}$ 1 6 4 3 5 $\mathscr{B}$
	L12: 栈顶$(\mathscr{A}) = 2 \notin M$，我们转移它到 $\mathscr{B}$。	7 $\mathscr{A}$ 2 1 6 4 3 5 $\mathscr{B}$
	L12：栈顶（$\mathscr{A}$） $= 7 \notin M$，我们转移它到 $\mathscr{B}$。	$\mathscr{A}$ 7 2 1 6 4 3 5 $\mathscr{B}$

在最后一步，从栈 $\mathscr{B}$ 栈顶到底部读取，得到 $\theta'(7642135) = 7216435$。我们可以确认，升序集合$(7642135) = \mathrm{A}top(7216435)$ 以及逆下降段的长度相同。△

为了证明算法 1的正确性，我们将证明该算法定义良好（引理3 和引理 4），并且结果 π 满足命题 3 中的条件（引理 5 ）。

引理 3. 算法 *1* 的第 *12* 行之后， $\mathscr{A}$ 为空当且仅当 $i = k$。因此， π 是一个 n-排列。

证明。首先，考虑$i < k$的情形，我们证明在第 12 行之后 $\mathscr{A}$ 始终非空。第 8 行之前:

- 如果存在条目 $x \in \mathscr{A}$ 使得 $x \in M$，那么在第 12 行中我们无法清空整个栈（由于条件 $\mathrm{top}(\mathscr{A}) \notin M$）。
- 如果不存在这样的条目x，那么我们会意识到，m2、m3、. ..、mi属于 $\sum_{t=1}^{i-1}$ ct个最大的 [n]，并且已经被压入 $\mathscr{B}$。由此可知，mi_{+1} 不在其中，即$\mathrm{mi}_{+1} \le \mathrm{n} - \sum_{t=1}^{i-1}$ ct $\Leftrightarrow$ $\mathrm{mi}_{+1} \le \sum_{t=i}^{k}$ ct。此外，一致对告诉我们，$\mathrm{mi}_{+1} > \sum_{t=i+1}^{k}$ ct，因此 $\mathrm{n} - \sum_{t=1}^{i} \mathrm{t} < \mathrm{mi}_{+1} \le \mathrm{n} - \sum_{t=1}^{i-1}$ t。这意味着 mi_{+1} 将在第8 行被压入 $\mathscr{A}$，从而阻止第 12 行清空 $\mathscr{A}$。

因此，当 $i < k$ 时， $\mathscr{A}$ 在第12 行之后始终非空。因此，在每次迭代中，我们都成功地将一个条目 $x \in M$ 从 $\mathscr{A}$ 转移到 $\mathscr{B}$，而在最后一次迭代（$i = k$）中，我们已经没有这样的条目了。条件栈顶$(\mathscr{A}) \notin M$ 将始终为真，而第 12 行会清空整个栈 $\mathscr{A}$。

□

引理 4。 算法 *1* 的结果 π 避免 *231* 模式。

证明。 假设其中包含一个模式 231 的出现(x, y, z)。我们确定， $\mathscr{A}$始终是单调递增的（从栈顶到底部）。当 π_z 从 $\mathscr{A}$ 弹出并压入$\mathscr{B}$时，所有大于 π_z的元素，除了已经在 $\mathscr{B}$中的元素，都在 $\mathscr{A}$中。如果我们再向 $\mathscr{A}$压入更多元素，它们肯定都小于 π_z。由于$x < y$， π_y 必定在 π_x之前从 $\mathscr{A}$ 弹出，因此π_y 必定比 π_x更靠近栈顶。然而，我们有 $\pi_y > \pi_x$，这与 $\mathscr{A}$单调递增的性质相矛盾。

□

引理 5。 结果 π 来自算法 *1*，具有:

- $\mathrm{A}top(\pi) = \{m2, m3, \ldots, mk\}$
- k 个逆下降段 I_1、I_2、.....、Ik（按每个集合的最大元素降序排列）
- $Ij = cj$（其中 $1 \le j \le k$）

证明。 假设mj $(j > 1)$在第$i < $ 次迭代的第*k</style}*行 *15* 被压入。在第$i + 1$次迭代中，更多元素被压入 $\mathscr{A}$，不难看出所有这些元素都小于mj，而下一个转移到 $\mathscr{B}$ 的元素将是其中之一。因此mj 确实是

一个上升顶点。另一方面，给定$x \not\in \{m_2,m_3,\ldots\ldots, m_k\}$，它必定是在第 12 行被压入$\mathscr{B}$ 的。由于 $\mathscr{A}$按从栈顶到底部递增的顺序排列，继x 之后压入 $\mathscr{B}$的下一个字母将大于x，使x 成为下降底点，而不是上升顶点。因此，Atop $= \{m_2, m_3, \ldots\ldots, m_k\}$。

由于 π 有 $k-1$ 个上升顶点，因此它有 k 个逆下降段（引理2）。此外，对于某个 $i \leq k$，我们在第i次迭代的第8行中依次压入了 $(n - \sum_{t=1}^{i-1} c_t)$、$(n - \sum_{t=1}^{i-1} c_t - 1)$、……、$(n - \sum_{t=1}^{i} c_t + 1)$。因此，它们将在 π 中按该顺序出现，形成一个长度为c_i的逆下降段。

□

唯一性的证明将略去，因为通过常规计数可知，给定 n，一致的序列对的数量（关于 n 和 $k \leq n$）等于长度为n 且以n开头的避免231模式的排列的数量。

由命题2和命题3可知，所定义的双射 θ' 证明了定理1是一个真命题。现在，我们关注第 3.1 节的原始问题，即 maj 和 makl 在 Av(231)上的等分布。正如我们所提到的，找到 θ'之后，我们将用 θ'来定义 θ；更准确地说，我们将其定义为包含 θ'的直和。

定义 4. 给定两个排列 α 和 β，其长度为 $|\alpha| + |\beta|$ 的直和 $\pi = \alpha \oplus \beta$ 定义为：

$$\pi_i = \begin{cases} \alpha_i & if \quad i \leq |\alpha| \\ \beta_{i-|\alpha|} + |\alpha| & if \quad i > |\alpha| \end{cases}$$

给定 $\pi \in \mathrm{Av}(231)$，令 $\pi^{(1)}, \pi^{(2)}, \ldots, \pi^{(t)} \in \mathrm{Av}'(231)$ 满足 $\pi = \pi^{(1)} \oplus \pi^{(2)} \oplus \cdots \oplus \pi^{(t)}$。定义 θ 为：$\theta(\pi) = \theta'(\pi^{(1)}) \oplus \theta'(\pi^{(2)}) \oplus \cdots \oplus \theta'(\pi^{(t)})$，则由 [5] 得到以下结果：

定理2。 Do等人 [5]。 θ 将maj 转换为makl，作用于Av(231)。

在下一节中，我们将看到定理2将如何帮助我们证明 bast 和 foze 在 Av(312) 上的等分布。

3.2. Av(312) 上 bast 与 foze 的等分布

Amini[1]，将 Av(312) 上 base 与 foze 的等分布列为一个猜想，本节将证明该猜想确实成立。此前，我们通过双射 θ 证明了 Av(231) 上的一个等分布；并注意到$c \circ r(231) = 312$ 与$c \circ r(312) = 231$。由此我们想到，可以先通过$c \circ r$将 Av(312) 中的一个排列转换为 Av(231) 中的排列，再应用 θ，然后通过$c \circ r$将结果转换回 Av(312) 中的排列。下面给出相应的示意图和定理：

$$\mathrm{Av}(312) \xrightarrow{c \circ r} \mathrm{Av}(231) \xrightarrow{\theta} \mathrm{Av}(231) \xrightarrow{c \circ r} \mathrm{Av}(312)$$

定理 em 3. 双射复合 $\Theta = c \circ r \circ \theta \circ c \circ r$ 将bast 变换为foze，定义在Av(312)上 .

为了证明这一点，我们先来看一下这个引理：

引理6. 给定 $\pi \in \mathrm{Av}(231)$，213-出现的数量为 $n - \mathrm{rmax}(\pi) - \mathrm{rmin}(\pi) + 1$。

证明。 设逆下降段为 $I_1, I_2, \ldots I_k$。设$(x、y、y+1)$ 是 213 的一个可能出现。容易看出，y 是一个上升；根据引理2，存在一个值 $1 < j \leq k$，使得$y = \max(I_j)$。设i、t 为整数，且$y+1 \in I_i$，$x \in I_t$，那么$i < j$。

若$t = j$，则立即可得 $\pi_y < \pi_x$ 和 $\pi_x < \pi_{y+1}$，因此$(x、y、y+1)$ 是 213 的一个出现。考虑其他情况：

- $t \leq i \Rightarrow \pi_x > \pi_{y+1} \Rightarrow (x、y、y+1)$ 不是 213 的一个出现。
- i < t < j $\Rightarrow$ max(Ii) > max(It) > max(Ij) = y。若 y + 1 = max(Ii)，则这种情况绝不会发生，因为 y 与 y + 1之间不存在整数。否则，考虑四个位置 x < y + 1 < max(It) < max(Ii)。它们依次属于 It、Ii、It、Ii，因此 Ii 和 It 既不包含彼此，也不互不相交，这与命题1矛盾。因此，这种情况绝不会发生。
- $t > j \Rightarrow \pi_x < \pi_y \Rightarrow (x,y,y+1)$ 不是 213 的一次出现。

$\Rightarrow$ 对于每个上升$y = \max(I_j)$，都有 $|I_j| - 1$ 个可能的 x 值，使得$(x,y,y+1)$是 213 的一次出现。

将该公式对所有 $1 < j \leq k$ 求和，我们得到 213 的出现次数为：

$$\begin{aligned} 213(\pi) &= \sum_{j=2}^{k} (|I_j| - 1) = \sum_{j=2}^{k} |I_j| - (k-1) \\ &= n - |I_1| - k + 1 = n - \mathrm{rmax}(\pi) - \mathrm{rmin}(\pi) + 1 \end{aligned}$$

□

既然引理已得到证实，让我们回到原来的问题——定理 3.

证明。定理*3*。根据定理2，我们知道 θ 将 maj 变为 makl，即给定 θ： $\pi \mapsto \tau$则 $\mathrm{maj}(\pi) = \mathrm{makl}(\tau)$。此外还可推出 $\mathrm{Rmax}(\pi) = \mathrm{Rmax}(\tau)$ 以及 $\mathrm{Rmin}(\pi) = \mathrm{Rmin}(\tau)$([5])，因此 $213(\pi) = 213(\tau)$。

利用表 2.1 中的结果，我们得到：

$$\begin{aligned} &\mathrm{maj}(\pi) = \mathrm{makl}(\tau) \\ \Leftrightarrow\ &(132 + 231 + 321 + 21)(\pi) = (132 + 231 + 321 + 21)(\tau) \\ \Leftrightarrow\ &(132 + 321 + 21)(\pi) = (132 + 321 + 21)(\tau) \qquad (\pi, \tau \in \mathrm{Av}(231)) \\ \Leftrightarrow\ &(213 + 132 + 321 + 21)(\pi) = (132 + 321 + 213 + 21)(\tau) \qquad (213(\pi) = 213(\tau)) \end{aligned}$$

将$c \circ r$ 应用于 π 和 τ 以及所有黏连模式，会得到一个新的等式 :

$$(\underline{13}2+\underline{21}3+\underline{32}1+\underline{21})(c\circ r(\pi))=(\underline{21}3+3\underline{21}+\underline{13}2+\underline{21})(c\circ r(\tau))$$
$$\text{bast}(c\circ r(\pi))=\text{foze}(c\circ r(\tau))$$

这是 ob 显然，$\Theta(c\circ r(\pi))=c\circ r(\tau)$。因此，$\Theta$ 将 bast 转换为 Av(31 上的 foze 2).

□

上述证明是一个组合证明，因为它利用了邻接模式表达式，并统计模式的出现次数，从而得出关于等分布的结论。下一节将展示组合方法如何应用于另一种等分布。

3.3. Av(312) 上的 foze″ 与避免模式 321 的排列类上的 inv 的等分布

Simion-Schmidt 双射 ψ： Av(312) $\to$ Av(321) 通过保持从左到右最大值的位置不变，并将其他字母按升序重新排列，将排列 π 变为 τ。本节将证明以下定理：

定理 4。 ψ 将foze″ 在 Av(312) 上的统计量转换为inv 在 Av(321)上的统计量。

尽管下面的组合证明比 [5], 中的归纳证明更长，但它在推导过程中展示了许多优美的公式（例如引理 8、11、12、13）。

回顾一下，若 (x,y) 满足 $x<y$ 且 $\tau_x>\tau_y$，则称其为 τ 中的一个逆序；而 $\text{inv}(\tau)$ 表示 τ中的逆序数。此外，令 $\text{inv}(\tau,i)$ 表示 τ中满足 $x=i$的逆序对 (x,y) 的数量。下面给出前两个引理：

引理 7。 给定任意排列 τ 以及 $i\in\text{Lmax}(\tau)$，则 $\text{inv}(\tau,i)=\tau_i-i$。

证明。 排列中有 τ_i 个比 τ_i-1 小的数，并且其中 $i-1$ 个数位于 τ_i 之前，因为 $i\in$ Lmax(τ)。因此，有 τ_i-i 个比 τ_i 小且位于 τ_i之后的数。

□

引理 8. (i,j) 是 $\tau\in\text{Av}(321)\Rightarrow i\in$ 从左到右最大值(τ)中的一个逆序对。

证明。 由于 $\tau\in$ Av(321)，移除从左到右最大值（它们构成一个递增子序列）后，我们得到一个递增序列。换句话说，它是由两个递增序列合并而成的 （见 Callan [3]）。我们很快就会发现，若要(i,j) （其中$i<j$）成为一个逆序对，i 和j 必须属于不同的子序列，否则就会发生 $\tau_i<\tau_j$。换句话说，它们中必有一个是从左到右最大值。另一方面，j不可能是从左到右最大值，否则就会导致 $\tau_i<\tau_j$。因此，i 必定是从左到右最大值。

□

结合引理 7 和引理 8 的结果，我们只需通过对所有 $i\in$ Lmax(τ)中的 $\text{inv}(\tau,i)$ 求和，即可计算$\tau\in$ Av(321) 的所有逆序。

引理 9。 给定 $\tau \in \mathrm{Av}(321)$:

$$\mathrm{inv}(\tau) = \sum_{i \in \mathrm{Lmax}(\tau)} (\tau_i - i)$$

引理 7 给出了当(π,i) 满足$i \in \mathrm{Lmax}(\pi)$ 且 π 为任意值时，inv 的公式。当 $\pi \in \mathrm{Av}(312)$ 时，我们可以将该公式推广到任意$i \in [n]$。将 $\mathrm{plmax}(\pi,i)$ 记为不大于i 的最近一个从左到右最大值（字母p代表*previous*，即“前一个”）。

引理 10。 给定 $\pi \in \mathrm{Av}(312)$ 以及某个 $i \in [n]$,, 则

$$\mathrm{inv}(\pi, i) = \mathrm{inv}\left(\pi, \mathrm{plmax}(\pi, i)\right) - (i - \mathrm{plmax}(\pi, i))$$

证明。 我们可以看出 $\pi_i > \pi_{\mathrm{plmax}(\pi,i)}$ 和 $\pi \in \mathrm{Av}(312)$，因此对任意$j > i$，都有 $\pi_i < \pi_j \Leftrightarrow \pi_{\mathrm{plmax}(\pi,i)} < \pi_j$。所以，我们只需排除位于位置 $\mathrm{plmax}(\pi,i)$ 与i 之间的$(i - \mathrm{plmax}(\pi,i))$ 项（也包括i 本身）。 □

根据表 2.1，我们知道 $\mathrm{foze}''(\pi) = (231 + 3\underline{12} + 3\underline{12} + 2\underline{1})(\pi)$。然而，由于$\pi \in \mathrm{Av}(312)$，$\mathrm{foze}''(\pi) = (231 + 21)(\pi)$。下面两个引理将给出每个邻接模式的公式:

引理 11。 给定 $\pi \in \mathrm{Av}(312)$，则

$$\underline{23}1(\pi) = \sum_{i \in \mathrm{Lmax}(\pi)} (\pi_i - i) - n + \mathrm{lmax}(\pi)$$

证明。 若$(x-1, x, y)$ 是模式 231 的出现，则$x \in \mathrm{Lmax}(\pi)$；因为若$x \notin \mathrm{Lmax}(\pi)$，则 $(\mathrm{plmax}(\pi,x), x-1, x)$ 将会是模式 312 的一次出现。

对于某个$i \in \mathrm{Lmax}(\pi)\backslash\{1\}$，模式 231 的出现$(i-1, i, j)$ 的数量为 $\mathrm{inv}(\pi, i-1)$，根据引理 11，这等于:

$$\begin{aligned}
\mathrm{inv}(\pi, i-1) &= \mathrm{inv}(\pi, \mathrm{plmax}(\pi, i-1)) - (i - 1 - \mathrm{plmax}(\pi, i-1) \\
&= \pi_{\mathrm{plmax}(\pi,i-1)} - \mathrm{plmax}(\pi, i-1) - (i - 1 - \mathrm{plmax}(\pi, i-1)) \\
&= \pi_{\mathrm{plmax}(\pi,i-1)} - i + 1
\end{aligned}$$

在所有 $i \in \mathrm{Lmax}(\pi)\backslash\{1\}$ 上对该值求和，我们有:

$$\begin{aligned}
\underline{23}1(\pi) &= \sum_{i \in \mathrm{Lmax}(\pi)\backslash\{1\}} (\pi_{\mathrm{plmax}(\pi,i-1)} - i + 1) \\
&= \sum_{i \in \mathrm{Lmax}(\pi)\backslash\{1\}} \pi_{\mathrm{plmax}(\pi,i-1)} - \sum_{i \in \mathrm{Lmax}(\pi)\backslash\{1\}} i + \mathrm{lmax}(\pi) - 1 \\
&= \sum_{i \in \mathrm{Lmax}(\pi)\backslash\{1\}} \pi_{\mathrm{plmax}(\pi,i-1)} - \sum_{i \in \mathrm{Lmax}(\pi)} i + \mathrm{lmax}(\pi) \\
&= \sum_{i \in \mathrm{Lmax}(\pi)\backslash\{n\}} \pi_i - \sum_{i \in \mathrm{Lmax}(\pi)} i + \mathrm{lmax}(\pi) \\
&= \sum_{i \in \mathrm{Lmax}(\pi)} \pi_i - n - \sum_{i \in \mathrm{Lmax}(\pi)} i + \mathrm{lmax}(\pi)
\end{aligned}$$

□

引理 12. 给定 $\pi \in$ 避免(312) 和 $1 \leq y < n$，则

$$y \in \mathrm{Des}(\pi) \Leftrightarrow y+1 \notin \mathrm{Lmax}(\pi)$$

这意味着：

$$\underline{21}(\pi) = \mathrm{des}(\pi) = n - \mathrm{lmax}(\pi)$$

证明。显然，$y \in \mathrm{Des}(\pi) \Rightarrow y+1 \notin \mathrm{Lmax}(\pi)$。另一方面，当$y+1 \notin \mathrm{Lmax}(\pi)$时，假设$y$是一次上升，则$(\mathrm{plmax}(\pi,y), y, y+1)$构成一个312-出现（矛盾）。因此，$y$必为一次下降。

由于 $1 \leq y < n$，共有$n-1$种可能取值，其中有$\mathrm{lmax}(\pi)-1$种取值满足条件$y+1 \in \mathrm{Lmax}(\pi)$。因此，下降数为$n-1-(\mathrm{lmax}(\pi)-1) = n-\mathrm{lmax}(\pi)$。

□

由引理 11 和引理 12，我们可以得出：

引理 13。给定 $\pi \in \mathrm{Av}(312)$：

$$\mathrm{foze}''(\pi) = \sum_{i \in \mathrm{Lmax}(\pi)} (\pi_i - i)$$

回顾一下，Simion-Schmidt 双射 $\psi: \pi \mapsto \tau$ 保持从左到右最大值的集合，即 $\mathrm{Lmax}(\pi) = \mathrm{Lmax}(\tau)$。已知 $\pi \in \mathrm{Av}(312)$ 和 $\tau \in \mathrm{Av}(321)$，结合引理 13 和引理 9 的结果，我们可以确认 $\mathrm{foze}''(\pi) = \mathrm{inv}(\tau)$，因此定理 4 成立。

在下一章中，我们将总结并概述我们所做的贡献，以及我们撰写学位论文时采用的一些方法。

4. 结论

在结束这篇学位论文之前，我们想着重谈谈我们如何为一个等分布问题找到双射。假设给定两个统计量 st_1 和 st_2，，以及两个排列集 $S_n(\sigma_1)$ 和 $S_n(\sigma_2)$，我们猜想它们是等分布的。对于较小的 n，我们可以将 $S_n(\sigma_1)$（分别将 $S_n(\sigma_2)$）分组/划分为若干子集，并根据 st_1 （分别 st_2）在这些子集上取值的大小为其标记。接下来，我们希望找到第三个统计量 st_3，使其在任意两个具有相同划分标签的子集 $A_1 \subseteq S_n(\sigma_1)$ 和 $A_2 \subseteq S_n(\sigma_1)$ 上均等分布。之后，我们会寻找一个双射，它不仅将 st_1 转换为 st_2，，还保留 st_3。我们找到的统计量 st_3 越多，推断双射可能形式的机会就越大。我们编写了一个计算机程序，从大约 20 个著名统计量组成的集合中尝试不同的 st_3，候选项（更多内容见 Kitaev [7] 的附录 A）。

例如，在研究 Av(312) 上的 bast 和 foze 这一对统计量时，我们发现，未知的双射可能保留 head、head_i、last、lmax 和 lmin 这些统计量。随后我们注意到，Do等人 [5] 给出的一个双射也保留 lmax 和 lmin，于是我们编写了该双射的程序，后来发现它也解决了我们的等分布问题。在确信这个双射正确后（通过对较大的排列进行测试），我们便开始着手证明。在另一次尝试中，为了证明 Av(132) 上 makl 和 bast 的等分布，我们也采用了这种方法，并发现未知的双射解 γ 可能保留以下一个或多个统计量：asc、des、head、lds、lir_i、lmax、lmin、peak_i、valley_i、zeil（定义见 Kitaev [7] ）。然而，我们尚未找到这个双射，因此问题仍未解决。

总而言之，我们证明了一项新的等分布，并改进了两项已有等分布的证明。我们展示了 Do等人 [5], 提出的双射 θ'的另一种构造，该双射将统计量升序集合转换为 Av'(231) 中的 Atop（第 3.1 节）。在此基础上，我们借助引理6（第 3.2 节）进一步证明了关于 Av(312) 上 bast 和 foze 的猜想等分布。我们还通过各种公式，对 Av(312) 上的 foze$''$ 与 Av(321) 上的 inv 之间的等分布问题给出了组合证明（第3.3节）。下面总结了已证明的等式，我们相信这将有助于其他研究人员解决更多等分布问题。

参考文献	等式	前提条件
引理6	$213(\pi) = n - \text{rmax}(\pi) - \text{rmin}(\pi) + 1$	$\pi \in \text{Av}(231)$
引理 8	$\text{inv}(\tau) = \sum_{i \in \text{Lmax}(\tau)}(\tau_i - i)$	$\tau \in \text{Av}(321)$
引理 11	$231(\pi) = \sum_{i \in \text{Lmax}(\pi)}(\pi_i - i) - n +$左至大值$(\pi)$	$\pi \in$避免(312)的排列
引理 12	$21(\pi) =$ 下降集合$(\pi) = n - \text{lmax}(\pi)$	$\pi \in \text{Av}(312)$
引理 13	$\text{foze}''(\pi) = \sum_{i \in \text{Lmax}(\pi)}(\pi_i - i)$	$\pi \in \text{Av}(312)$

A. 大众统计学

记号	描述	定义
Asc	上升集合	$\{i < n \mid \pi_i < \pi_{i+1}\}$
asc	上升数	$\lvert$升序集合$(\pi)\rvert$
Abot	上升底的集合	$\{\pi_i \mid i < n$ 和 $\pi_i < \pi_{i+1}\}$
Atop	上升顶部集合	$\{\pi_{i+1} \mid i < n$ 和 $\pi_i < \pi_{i+1}\}$
Des	下降集合	$\{i < n \mid \pi_i > \pi_{i+1}\}$
des	下降数	$\lvert$下降集合$(\pi)\rvert$
Dbot	下降底部集合	$\{\pi_{i+1} \mid i < n$ 以及 $\pi_i > \pi_{i+1}\}$
Dtop	下降顶部集合	$\{\pi_i \mid i < n$ 以及 $\pi_i > \pi_{i+1}\}$
Lmax	从左到右最大值的集合	$\{\pi_i \mid \pi_i > \pi_j$ 对于任意$j < i\}$
Lmaxl	从左到右最大值处的元素	$\pi(\text{Lmax}(\pi))$
lmax	从左到右最大值的数量	$\lvert\text{Lmax}(\pi)\rvert$
Lmin	从左到右的极小值集合	$\{\pi_i \mid \pi_i < \pi_j$ 对于任意 $j < i\}$
左到右极小值的位置	从左到右极小值处的元素	π(从左到右极小值(π))
lmin	从左到右极小值的数量	$\lvert$从左到右极小值$(\pi)\rvert$
Rmax	从右到左极大值的集合	$\{\pi_i \mid \pi_i > \pi_j$ 对于任意 $j > i\}$
Rmaxl	从右到左极大值处的元素	$\pi(\text{Rmax}(\pi))$
rmax	从右到左极大值的数量	$\lvert\text{Rmax}(\pi)\rvert$
Rmin	从右到左极小值的集合	$\{\pi_i \mid \pi_i < \pi_j$ 对于任意 $j > i\}$
右至左极小值	右至左极小值处的项	π(右至左极小值(π))
rmin	右至左极小值的数量	$\lvert$右至左极小值$(\pi)\rvert$

表 A.1：排列上的一些常见组合统计量和集合诱导统计量

参考文献

[1] Nima Amini. 避免模式的排列上的 Mahonian统计量的等分布。*arXiv* 预印本 *arXiv:1705.05298*，2017。[2] Eric Babson 和 Einar Steingrımsson. 广义排列模式及 Mahonian统计量的一种分类。*Sém.Lothar.Combin*，44(B44b):547–548，2000。[3] David Callan. 从 Dyck 路径到避免 321 模式的排列的双射：再探。*arXiv* 预印本 *arXiv:0711.2684*，2007。[4] Robert J Clarke、Einar Steingrımsson 和 Jiang Zeng. 排列和词上的新 Euler–Mahonian 统计量。应用数学进展，18(3):237–270，1997。[5] Phan Thuan Do、Thi Thu Huong Tran 和 Vincent Vajnovszki. 长度为三的模式避免排列上若干 Mahonian统计量的等分布。*arXiv* 预印本 *arXiv:2103.10357*，2021。[6] Dominique Foata 和 Doron Zeilberger. Babson–Steingrımsson 统计量确实是 Mahonian统计量（有时甚至是 Euler–Mahonian 统计量）。应用数学进展，27 (2-3):390–404，2001。[7] Sergey Kitaev. 排列与词中的模式。Springer Science & Business Media，2011。[8] Percy Alexander MacMahon. 组合分析，第一卷和第二卷，第137卷。美国数学会，2001。[9] Olinde Rodrigues. 关于排列中产生的逆序或错排的注记。*J. deMath*，4(1839):236–240，1839。[10] Derek Rowntree. 轻松学统计：献给非数学人士的入门读物。Penguin Londres，1981。[11] Vincent Vajnovszki. sn (132) 上若干长度为三的邻接模式的等分布。信息处理快报，130:40–45，2018。