arXiv:2304.04772v1 [math.SP] 10 Apr 2023

Neumann-Poincar´e 算子的特征值衰减率*

Shota Fukushima† Hyeonbae Kang‡ Yoshihisa Miyanishi§

摘要

若三维区域的边界足够光滑，则已知 Neumann-Poincar´e 算子的特征值衰减率，且该衰减率是最优的。本文研究边界正则性较低的区域，并根据边界的 H¨older 指数，推导 Neumann-Poincar´e 特征值衰减率的定量估计。特别是，这些估计表明，边界正则性越低，特征值衰减越慢。我们还证明了二维情形下类似的估计。这些估计不仅适用于衰减率尚不明确的低正则性边界，也适用于正则边界；对于后者，本文的结果显著改进了已有结果。

关键词：Neumann-Poincar´e 算子、特征值、奇异值、Schatten 类

MSC 2020：主要分类 47A75；次要分类 47G10

目录

1 引言 2

2 定理1.1 的证明 4

2.1 积分核的奇异性估计.4 2.2 Sobolev 空间中的核估计.8 2.3 Schatten 类与衰减率.11

*本研究得到韩国国家研究基金会资助（项目编号：2022R1A2B5B01001445），并获日本学术振兴会科学研究费助成事业资助（项目编号：21K13805 和 20K03655）。

†通讯作者。仁荷大学数学系及应用数学研究所，地址：韩国仁川 22212，Inha-ro 100号。电子邮箱：shota.fukushima.math@gmail.com

‡仁荷大学数学系与应用数学研究所，韩国仁川 Inha-ro 100号，邮编22212。电子邮箱：hbkang@inha.ac.kr§信州大学理学院数学科学系，日本松本市Asahi 3-1-1，邮编390-8621。电子邮箱： miyanishi@shinshu-u.ac.jp

3 定理的证明1.2 13
3.1 切向导数的估计.3.2 二维中的 Sobolev 条件和衰减率. 13
16

A NP 算子的正则性性质 17

1 引言

设 $d \geq 1$ 和 $\Omega \subset \mathbb{R}^{d+1}$ 是具有利普希茨边界 $\partial\Omega$ 的有界区域。
Neumann-Poincar´e 算子（简称 NP 算子）是由下式定义的边界积分算子。

$$\mathcal{K}^*[f](x) := \frac{1}{\omega_{d+1}} \text{p.v.} \int_{\partial\Omega} \frac{(x-y)\cdot\nu_x}{|x-y|^{d+1}} f(y)\, \mathrm{d}\sigma(y) \quad (x \in \partial\Omega).$$

这里 ω_{d+1} 是 $\mathbb{R}^{d+1}$中单位球面的面积， ν_x 是 $x \in \partial\Omega$ 上的外向单位法向量，p。v。 表示柯西主值。通过在 $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ [10], 上引入适当的内积，可将 NP 算子实现为自伴算子，因此它在 $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ 上的谱由本质谱和特征值组成。

如果 $\partial\Omega$ 是 $C^{1,\,\alpha}$ 对于某个 $\alpha > 0$，则 NP 算子在 $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ 上是紧的（参见推论A.2）。因此，它具有有限重数且聚积于 0 的特征值。我们将 j-th 特征值记为 $\mathcal{K}^*$ $\lambda_j = \lambda_j(\mathcal{K}^*)$，并按降序排列，即

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots (\to 0).$$

在三维情形（$d+1=3$）中，已在[11] 证明，如果 $\partial\Omega$ 是 $C^{2,\,\alpha}$ 对于某个 $\alpha > 0$，则 $|\lambda_j|$ 以 $j^{-1/2}$的速率衰减。事实上，已证明 $|\lambda_j|$呈现出渐近行为

$$|\lambda_j| \sim C j^{-1/2} \quad (j \to \infty)$$

以及某个常数 $C > 0$ ，其可用威尔莫尔能量和 $\partial\Omega$的欧拉示性数明确表示。此外，当 $\partial\Omega$光滑时，在 [13]中得到了正特征值和负特征值渐近行为的首项。然而，对于 $C^{1,\,\alpha}$三维空间中的区域，NP特征值的收敛速率尚不清楚，研究这一问题正是本文的目的之一。值得一提的是，具有 $C^{0,\,1}$ 边界的区域上的 NP 算子，即具有Lipschitz边界的区域上的 NP 算子，并不紧，且如[6, 7] 中所示，对于三维中的某些特殊区域，以及如 [2, 9, 14, 15] 中所示，对于相交圆盘和一般二维曲线区域，其特征值可能不会收敛到 0。

我们还处理二维中的类似问题（$d+1=2$）。对于二维情形， [12] 证明，如果 $\partial\Omega$ 是 C^k （$k \geq 2$），那么 NP 特征值以 $j^{-k+3/2}$ 的速率收敛到 0。更准确地说，$|\lambda_j| = o$证明了，当 $j \to \infty$ 时，对于任意 $\delta > 0$，$j^{-k+3/2+\delta}$。在 [8], 中证明了

即，如果 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是一个单连通域，具有 $C^{k,\alpha}$-边界，对某个$k \geq 1$ 和 $\alpha \in (0,1]$ 满足 $k+\alpha > 3/2$，则 $|\lambda_j| = O(j^{-k-\alpha+3/2})$当$j \to \infty$。特别地，在 $k=1$ 和 $\alpha > 1/2$的情况下，衰减估计$|\lambda_j| = O(j^{-\alpha+1/2})$成立。因此，$C^{1,\alpha}$ 且 $0 < \alpha < 1/2$ 的情形尚未解决。此外，该结果表明，如果 $k=1$ 且 $\alpha = 1/2$，那么衰减率为j^0，这使得 $C^{1,\alpha}$ 且 $0 < \alpha < 1/2$ 的情形没有存在空间，尽管在此类情况下特征值仍然衰减至 0。因此，我们研究 $C^{k,\alpha}$ 区域，并为 $k \geq 1$ 和 $\alpha \in (0,1]$获得衰减估计。事实证明，对于 $k+\alpha \geq 3/2$ 的情形，先前的结果可以得到显著改进。例如，可以证明，如果 $k=1$ 且 $\alpha = 1/2$，那么临界衰减为 $j^{-1/2}$。

本文在三维中的主要结果如下：

定理 1.1. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个有界区域，具有 $C^{1,\alpha}$ 边界 $\partial\Omega$，其中 $\alpha \in (0,1]$。我们有

$$|\lambda_j(\mathcal{K}^*)| = o(j^{-\alpha/2+\delta}) \quad (j \to \infty) \tag{1.1}$$

对任意 $\delta > 0$。

在二维中，主要结果如下：

定理 1.2. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个有界区域，具有 $C^{k,\alpha}$ 边界 $\partial\Omega$，其中正整数 k 和 $\alpha \in (0,1]$。我们有

$$|\lambda_j(\mathcal{K}^*)| = o(j^{-k+1-\alpha+\delta}) \quad (j \to \infty) \tag{1.2}$$

对所有 $\delta > 0$。

定理 1.1 和 1.2 表明，临界衰减指数为

$$q = \begin{cases} \alpha/2 & \text{if } d = 2, \\ k-1+\alpha & \text{if } d = 1 \end{cases} \tag{1.3}$$

其意义在于 $|\lambda_j(\mathcal{K}^*)| = o(j^{-q+\delta})$，对任意 $\delta > 0$均成立。如图 2 所示，临界指数曲线连接了 0（当 $\alpha = 0$时）和 $1/2$（当 $\alpha = 1$时）。临界指数 $1/2$ 已在 [11] 中得到证明，正如引言开头所述。图 1 比较了本文的临界指数与在[8, 12]中得到的临界指数。

定理 1.1 和 1.2 以关键方式运用了 [3] 的一个结果。该结果给出了希尔伯特空间上的紧积分算子属于 Schatten 类的必要条件。利用这一结果，我们证明 NP 算子的复合属于某个 Schatten 类。随后，我们运用 Weyl 引理——该引理指出，特征值的 ℓ^p-范数小于奇异值的 [3] -范数——来推导特征值的衰减率。 p中的必要条件是以算子积分核的 Sobolev 范数表示的。它表明，积分核的可微性越高，算子就属于 p-Schatten 类，其中 越小，进而意味着特征值衰减得越快。这解释了二维和三维中特征值衰减率的差异，如

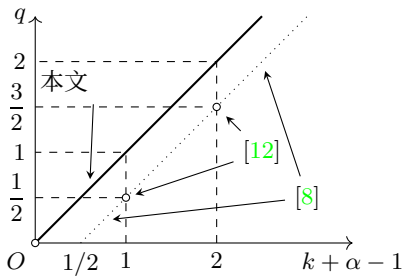

图 1： $d = 1$ 的临界衰减指数。

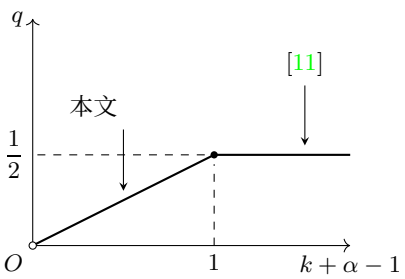

图 2： $d = 2$ 的临界衰减指数

图 1 和 2所示。如果 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 且 $\partial\Omega$ 为 $C^{k,\alpha}$，NP 算子的积分核可微性会提高，特征值的衰减也会越来越快，如k 或 α 增大时所示；这一点已在第 3 节中证明（如果 $\partial\Omega$ 是实解析的，那么特征值会以指数速度衰减 [1]）。然而，在三维中，只有当 $k = 1$ 和 α 增大时，积分核的可微性才会提高；若 $k \geq 2$，则不会提高，且无论 k 有多大，特征值都以 $j^{-1/2}$ 的速率衰减。

我们不知道定理 1.1 和 1.2 中的估计是否是最优的。就此而言，探究估计 $|\lambda_j| = O(j^{-q})$ 是否成立颇有意义，其中 q 是式 (1.3) 中给出的临界指数。

本文组织如下。在第 2节中，我们证明定理1.1。由于该证明同样适用于 $d = 1$ 的情形，我们在那里使用 $d = 1$，2。因此，当 $k = 1$时，这是定理 1.2 的另一种证明。第 3 节中给出的定理1.2 的证明大量使用了 NP算子的核的可微性性质。附录旨在证明NP算子在 Sobolev 空间上的正则性性质。作为这些正则性性质的推论，NP 算子在 $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ 上的紧性得以成立。此外还证明了，在 $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ 中对应于非零特征值的特征函数属于 $L^2(\partial\Omega)$。

定理 2 的证明1.1

2.1 积分核的奇异性估计

对于定理的证明1.1，我们首先对一个积分进行估计，该积分作为算子复合的积分核出现。在此处及下文中，我们使用惯用记号 $A \lesssim B$ 来表示存在一个正常数 C 使得 $A \leq CB$。

引理 2.1. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^{d+1}$ 是一个具有利普希茨边界的有界区域，且 $\alpha, \beta \in (0, d]$ 满足 $\alpha + \beta \leq d$。则对于所有满足 $x \neq y$ 的$x, y \in \partial\Omega$，以下估计成立：

$$\int_{\partial\Omega} \frac{1}{|x-z|^{d-\alpha}} \frac{1}{|z-y|^{d-\beta}} \, \mathrm{d}\sigma(z) \lesssim \begin{cases} |x-y|^{-d+\alpha+\beta} & \text{if } \alpha+\beta < d, \\ |\log|x-y|| & \text{if } \alpha+\beta = d. \end{cases} \tag{2.1}$$

证明。 设 $r=|x-y|$ 并将式（2.1）中的积分分解为

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega}\frac{1}{|x-z|^{d-\alpha}}\frac{1}{|z-y|^{d-\beta}}\,\mathrm{d}\sigma(z)&=\int_{|x-z|<r/2}+\int_{r/2\le|x-z|<2r}+\int_{|x-z|\ge 2r}\\&=:I_1+I_2+I_3.\end{aligned}$$

若 $|x-z|<r/2$，则 $|z-y|\ge|x-y|-|x-z|>r/2$。因此，我们有

$$I_1\lesssim\frac{1}{r^{d-\beta}}\int_{|x-z|<r/2}\frac{\mathrm{d}\sigma(z)}{|x-z|^{d-\alpha}}\lesssim r^{-d+\beta}\int_0^r\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho^{1-\alpha}}\lesssim|x-y|^{-d+\alpha+\beta}.$$

若 $r/2\le|x-z|<2r$，则 $|z-y|\le 3r$。因此，我们有

$$I_2\lesssim\frac{1}{r^{d-\alpha}}\int_{|y-z|<3r}\frac{\mathrm{d}\sigma(z)}{|y-z|^{d-\beta}}\lesssim|x-y|^{-d+\alpha+\beta}.$$

若 $|x-z|\ge 2r$，则 $\frac{1}{2}|z-y|\le|x-z|\le 2|z-y|$。因此，我们有

$$I_3\lesssim\int_{|x-z|\ge 2r}\frac{1}{|x-z|^{2d-\alpha-\beta}}\,\mathrm{d}\sigma(z)\lesssim\begin{cases}r^{-d+\alpha+\beta} & \text{if } \alpha+\beta<d,\\ |\log r| & \text{if } \alpha+\beta=d.\end{cases}$$

至此，证明完成。 □

对于正整数 n，我们定义线性算子 $\mathcal{L}_n$ 如下：

$$\mathcal{L}_n:=\begin{cases}\mathcal{K}^*(\mathcal{K}\mathcal{K}^*)^{(n-1)/2} & \text{if } n \text{ is odd},\\ (\mathcal{K}\mathcal{K}^*)^{n/2} & \text{if } n \text{ is even}\end{cases}\tag{2.2}$$

并将 $\mathcal{L}_n$ 的积分核记为 $L_n(x,y)$：

$$\mathcal{L}_n[f](x)=\int_{\partial\Omega}L_n(x,y)f(y)\,\mathrm{d}\sigma(y).$$

注意， $\mathcal{L}_1=\mathcal{K}^*$ 因此 $L_1(x,y)$ 是 NP 算子$\mathcal{K}^*$的积分核。我们强调，如果 $\partial\Omega$ 是 $C^{1,\alpha}$，那么

$$|L_1(x,y)|\lesssim\frac{1}{|x-y|^{d-\alpha}}.\tag{2.3}$$

我们推导了 $L_n(x,y)-L_n(x,y')$ 的估计，稍后将会用到。我们先从 $n=1$ 的情形开始。

引理 2.2. 存在一个常数 $C>0$，使得当 $2|y-y'|<|x-y|$ 时，有

$$|L_1(x,y)-L_1(x,y')|\le\frac{C|y-y'|}{|x-y|^{d+1-\alpha}}.\tag{2.4}$$

证明。为简化记号，令 $t = |y - y'|$ 和 $s = |x - y|$。有

$$\begin{aligned}
&|L_1(x,y) - L_1(x,y')| \\
&\lesssim \frac{|\nu_x \cdot (y - y')|}{|x-y|^{d+1}} + \left| \frac{1}{|x-y|^{d+1}} - \frac{1}{|x-y'|^{d+1}} \right| |\nu_x \cdot (x - y')| =: A_1 + A_2.
\end{aligned}$$

由于 $\partial\Omega$ 是 $C^{1,\,\alpha}$，我们有

$$|\nu_x \cdot (y - y')| \le |(\nu_x - \nu_y) \cdot (y - y')| + |\nu_y \cdot (y - y')| \lesssim s^\alpha t + t^{1+\alpha} \lesssim s^\alpha t,$$

由此我们推断

$$A_1 \lesssim \frac{t}{s^{d+1-\alpha}}.$$

由于 $2t < s$，我们有

$$|x - y'| \ge |x - y| - |y - y'| \ge s/2$$

and

$$|x - y'| \le |x - y| + |y - y'| \le 3s/2.$$

由此可得

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{|x-y|^{d+1}} - \frac{1}{|x-y'|^{d+1}} \right| &= \frac{||x-y'|^{d+1} - |x-y|^{d+1}|}{|x-y'|^{d+1}|x-y|^{d+1}} \\
&\lesssim \frac{||x-y| - |x-y'||}{s^{2d+2}} \sum_{j=1}^{d+1} |x-y'|^{j-1} |x-y|^{d+1-j} \\
&\lesssim \frac{|y-y'|}{s^{2d+2}} \times s^d = \frac{t}{s^{d+2}}.
\end{aligned}$$

此外，我们有

$$|\nu_x \cdot (x - y')| \le |x - y'|^{1+\alpha} \lesssim s^{1+\alpha},$$

结合上述估计，我们得到

$$A_2 \lesssim \frac{t}{s^{d+1-\alpha}}.$$

因此，（2.4）得证。 □

现在我们来处理 $n \ge 2$ 的情况。

引理 2.3。假设 $\alpha \le d/2$，并令 n 为满足 $n \le d/\alpha$ 的整数。那么存在一个常数 $C > 0$，使得，如果 $4|y - y'| < |x - y|$，则我们有

$$|L_n(x,y) - L_n(x,y')| \le \frac{C|y-y'|^\alpha}{|x-y|^{d-(n-1)\alpha}}.$$

证明。 由于情形 $n=1$ 已在引理 2.2中证明，我们假设 $n\geq 2$。我们用 $L_n'(x,\ y)$ 表示 $(\mathcal{K}^*\mathcal{K})^{(n-1)/2}$ 在 n 为奇数时的积分核，以及 $(\mathcal{K}\mathcal{K}^*)^{n/2-1}\mathcal{K}$ 在 n 为偶数时的积分核。注意，下列关系成立：

$$L_n(x,y)-L_n(x,y')=\int_{\partial\Omega}L_n'(x,z)(L_1(z,y)-L_1(z,y'))\,\mathrm{d}\sigma(z). \tag{2.5}$$

由于 $(n-1)\ \alpha<d$，我们可以反复应用引理2.1 推知

$$|L_n'(x,z)|\lesssim\frac{1}{|x-z|^{d-(n-1)\alpha}}$$

对于所有 $x,\ z\in\partial\Omega$ 满足 $x\neq z$。由（2.5）可得

$$|L_n(x,y)-L_n(x,y')|\lesssim\int_{\partial\Omega}\frac{|L_1(z,y)-L_1(z,y')|}{|x-z|^{d-(n-1)\alpha}}\,\mathrm{d}\sigma(z). \tag{2.6}$$

为简化记号，我们令 $t=|y-y'|$ 且 $s=|x-y|$。我们将（2.6）中的积分分解为两部分：

$$\int_{\partial\Omega}\frac{|L_1(z,y)-L_1(z,y')|}{|x-z|^{d-(n-1)\alpha}}\,\mathrm{d}\sigma(z)=\int_{|z-y|\leq 2t}+\int_{|z-y|>2t}=:I+J.$$

如果 $|z-y|\leq 2t$，那么 $|x-z|>|x-y|-|y-z|>s/2$ 由于 $4t<s,\ I$ 可估计如下：

$$\begin{aligned}
I&\lesssim\int_{|z-y|\leq 2t}\frac{|L_1(z,y)|+|L_1(z,y')|}{|x-z|^{d-(n-1)\alpha}}\,\mathrm{d}\sigma(z)\\
&\lesssim\int_{|z-y|\leq 2t}\frac{1}{|x-z|^{d-(n-1)\alpha}}\left(\frac{1}{|z-y|^{d-\alpha}}+\frac{1}{|z-y'|^{d-\alpha}}\right)\mathrm{d}\sigma(z)\\
&\lesssim\frac{1}{s^{d-(n-1)\alpha}}\left(\int_{|z-y|\leq 2t}\frac{1}{|z-y|^{d-\alpha}}\,\mathrm{d}\sigma(z)+\int_{|z-y'|\leq 3t}\frac{1}{|z-y'|^{d-\alpha}}\,\mathrm{d}\sigma(z)\right)\\
&\lesssim\frac{t^\alpha}{s^{d-(n-1)\alpha}}.
\end{aligned}$$

根据引理 2.2，有

$$J\lesssim t\int_{|z-y|>2t}\frac{\mathrm{d}\sigma(z)}{|z-y|^{d+1-\alpha}|x-z|^{d-(n-1)\alpha}}.$$

我们将右侧的积分分解为三部分：

$$\begin{aligned}
&\int_{|z-y|>2t}\frac{\mathrm{d}\sigma(z)}{|z-y|^{d+1-\alpha}|x-z|^{d-(n-1)\alpha}}\\
&=\int_{2t<|z-y|\leq s/2}+\int_{s/2<|z-y|\leq 2s}+\int_{2s<|z-y|}=:J_1+J_2+J_3.
\end{aligned}$$

如果 $|z-y| \le s/2$，那么 $|x-z| \ge |x-y| - |y-z| \ge s/2$，因此积分$J_1$ 可估计为

$$J_1 \lesssim \frac{1}{s^{d-(n-1)\alpha}} \int_{2t<|z-y|\le s/2} \frac{\mathrm{d}\sigma(z)}{|z-y|^{d+1-\alpha}} \lesssim \frac{1}{s^{d-(n-1)\alpha} t^{1-\alpha}}.$$

若 $|z-y| \le 2s$，则 $|x-z| \le |x-y| + |y-z| \le 3s$，因此 J_2 的估计为

$$J_2 \lesssim \frac{1}{s^{d+1-\alpha}} \int_{|x-z|\le 3s} \frac{\mathrm{d}\sigma(z)}{|x-z|^{d-(n-1)\alpha}} \lesssim \frac{1}{s^{d+1-n\alpha}} \lesssim \frac{1}{s^{d-(n-1)\alpha} t^{1-\alpha}},$$

其中，最后一个不等式成立是因为 $4t \le s$。如果 $|z-y| > 2s$，那么 $|x-z| \ge |z-y| - |x-y| > |z-y|/2$，因此 J_3 估计为

$$J_3 \lesssim \int_{2s<|z-y|} \frac{\mathrm{d}\sigma(z)}{|z-y|^{2d+1-n\alpha}} \lesssim \frac{1}{s^{d+1-n\alpha}} \lesssim \frac{1}{s^{d-(n-1)\alpha} t^{1-\alpha}}.$$

因此我们得到

$$J \le \frac{Ct}{s^{d-(n-1)\alpha} t^{1-\alpha}} \le \frac{Ct^{\alpha}}{s^{d-(n-1)\alpha}},$$

证明至此完成。 □

2.2 Sobolev 空间中核的估计

设 $H^{\mu,\,\nu}(\partial\Omega\times\partial\Omega)$ 是定义在 $\partial\Omega\times\partial\Omega$ 上的 Sobolev 空间，其关于第一个变量的阶数为 $\mu \ge 0$，关于第二个变量的阶数为 $\nu \ge 0$ （更多详情见 [3]）。本文只使用 $\mu = 0$ 这一情形。在此情形下，线性映射

$$A \in H^{0,\nu}(\partial\Omega \times \partial\Omega) \longmapsto (x \mapsto A(x,\cdot)) \in L^2(\partial\Omega, H^{\nu}(\partial\Omega))$$

给出自然同构 $H^{0,\nu}(\partial\Omega \times \partial\Omega) \simeq L^2(\partial\Omega\ H^{\nu}(\partial\Omega))$。这里 $H^{\nu}(\partial\Omega)$ 是定义在 $\partial\Omega$ 上、阶数为 ν 的 Sobolev 空间。已知，如果 $k \ge 0$ 是整数且 $0 < \alpha < 1$，那么 $H^{k+\alpha}(\partial\Omega)$ 上的 Sobolev 范数等价于该范数

$$\left(\sum_{j=0}^{k} \|\partial_{\tau}^{j} f\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 + \int_{\partial\Omega\times\partial\Omega} \frac{|\partial_{\tau}^{k} f(x) - \partial_{\tau}^{k} f(y)|^2}{|x-y|^{2\alpha+d}} \,\mathrm{d}\sigma(x)\mathrm{d}\sigma(y) \right)^{1/2} \tag{2.7}$$

其中 ∂_{τ} 是切向方向上的导数（见[4]）。在本文中，我们将范数（2.7）记为 $\|f\|_{H^{k+\alpha}}$。因此，范数

$$\begin{aligned} &\left(\int_{\partial\Omega} \|A(x,\cdot)\|_{H^{k+\alpha}}^2 \,\mathrm{d}\sigma(x) \right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{j=0}^{k} \|\partial_{\tau_y}^{j} A\|_{L^2(\partial\Omega\times\partial\Omega)}^2 \right. \\ &\quad \left. + \int_{(\partial\Omega)^3} \frac{|\partial_{\tau_y}^{k} A(x,y) - \partial_{\tau_y}^{k} A(x,y')|^2}{|y-y'|^{2\alpha+d}} \,\mathrm{d}\sigma(x)\mathrm{d}\sigma(y)\mathrm{d}\sigma(y') \right)^{1/2} \end{aligned} \tag{2.8}$$

等价于 $H^{0,k+\alpha}(\partial\Omega \times \partial\Omega)$ 上的范数。

引理2.4。设 $0 < \alpha \leq 1$ 和 $\partial\Omega$是 C^1, $^\alpha$。假设并令 n 为大于 $d/(2\alpha)$ 的最小整数。那么对于所有 $\nu \in (0, (2n\alpha - d)/2)$，有 $L_n \in H^{0,\nu}(\partial\Omega \times \partial\Omega)$，其中 L_n 是算子 $\mathcal{L}_n$ 的积分核，该算子定义于 (2.2) 中。

证明。假设 $0 < \nu < (2n\alpha - d)/2$。我们将证明

$$\sup_{x\in\partial\Omega} \|L_n(x,\cdot)\|_{H^\nu} < \infty,$$

这立即推出 $L_n \in H^{0,\nu}(\partial\Omega \times \partial\Omega)$，这是根据Sobolev 范数在 $H^{0,\nu}(\partial\Omega \times \partial\Omega)$ 上的表示式(2.8) 得出的。

我们首先处理 $\alpha \leq d/2$ 的情形。由于这两个算子的积分核均为$\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{K}^*$，其积分核为 $O(|x-y|^{-d+\alpha})$，当 $|x-y| \to 0$ 和 $n\alpha \leq d/2 + \alpha \leq d$时，通过反复应用引理 2.1 可以证明以下估计成立:

$$|L_n(x,y)| = \begin{cases} O(|x-y|^{-d+n\alpha}) & \text{if } n\alpha < d, \\ O(|\log|x-y||) & \text{if } n\alpha = d. \end{cases} \tag{2.9}$$

由于 $n\alpha \geq d/2$，我们有

$$\sup_{x\in\partial\Omega} \|L_n(x,\cdot)\|_{L^2(\partial\Omega)} < \infty$$

在两种情况下。

现在我们证明

$$\sup_{x\in\partial\Omega} \int_{\partial\Omega\times\partial\Omega} \frac{|L_n(x,y) - L_n(x,y')|^2}{|y-y'|^{2\nu+d}} \,\mathrm{d}\sigma(y)\mathrm{d}\sigma(y') < \infty. \tag{2.10}$$

我们将 $\partial\Omega \times \partial\Omega$ 分解为两个区域 $4|y-y'| < |x-y|$和 $4|y-y'| \geq |x-y|$，并分别在那里进行估计。

在区域 $4|y-y'| < |x-y|$，我们应用引理 2.3 得到

$$\begin{aligned} I_1 &:= \int_{4|y-y'|<|x-y|} \frac{|L_n(x,y) - L_n(x,y')|^2}{|y-y'|^{2\nu+d}} \,\mathrm{d}\sigma(y)\mathrm{d}\sigma(y') \\ &\lesssim \int_{\partial\Omega} \frac{\mathrm{d}\sigma(y)}{|x-y|^{2(d-(n-1)\alpha)}} \int_{4|y-y'|<|x-y|} \frac{\mathrm{d}\sigma(y')}{|y-y'|^{2\nu+d-2\alpha}}. \end{aligned}$$

由于 $2\nu + d - 2\alpha < 2(n-1)\alpha \leq d$，我们有

$$\int_{4|y-y'|<|x-y|} \frac{\mathrm{d}\sigma(y')}{|y-y'|^{2\nu+d-2\alpha}} \lesssim \frac{1}{|x-y|^{2\nu-2\alpha}},$$

并且因此

$$I_1 \lesssim \int_{\partial\Omega} \frac{\mathrm{d}\sigma(y)}{|x-y|^{2(d-n\alpha)+2\nu}} \lesssim 1,$$

其中第二个不等式成立是因为 $\nu < (2n\alpha - d)/2$。

在区域 $|x-y| \le 4|y-y'|$ 中，我们将估计

$$I_{2,1} := \int_{|x-y|\le 4|y-y'|} \frac{|L_n(x,y)|^2}{|y-y'|^{2\nu+d}}\,\mathrm{d}\sigma(y)\mathrm{d}\sigma(y')$$

and

$$I_{2.2} := \int_{|x-y|\le 4|y-y'|} \frac{|L_n(x,y')|^2}{|y-y'|^{2\nu+d}}\,\mathrm{d}\sigma(y)\mathrm{d}\sigma(y')$$

分别地。我们首先注意到 $n\alpha \le d$。若 $n\alpha < d$，则利用（2.9）中的第一个不等式可得

$$\begin{aligned} I_{2,1} &\lesssim \int_{\partial\Omega} \frac{\mathrm{d}\sigma(y)}{|x-y|^{2(d-n\alpha)}} \int_{|x-y|\le 4|y-y'|} \frac{\mathrm{d}\sigma(y')}{|y-y'|^{2\nu+d}} \\ &\lesssim \int_{\partial\Omega} \frac{\mathrm{d}\sigma(y)}{|x-y|^{2(d-n\alpha)+2\nu}} \lesssim 1. \end{aligned}$$

若 $n\alpha = d$，则利用（2.9）中的第二个不等式可得

$$\begin{aligned} I_{2,1} &\lesssim \int_{\partial\Omega} \mathrm{d}\sigma(y)\,|\log|x-y||\int_{|x-y|\le 4|y-y'|} \frac{\mathrm{d}\sigma(y')}{|y-y'|^{2\nu+d}} \\ &\lesssim \int_{\partial\Omega} \frac{|\log|x-y||}{|x-y|^{2\nu}}\,\mathrm{d}\sigma(y) \lesssim 1, \end{aligned}$$

其中最后一个不等式成立，因为 $\nu < (2n\alpha - d)/2 = d/2$。

由于 $|x-y'| \le |x-y| + |y-y'| \le 5|y-y'|$ 若 $|x-y| \le 4|y-y'|$，类似地可证明 $I_{2,\ 2}$. 1. 当 $\alpha \le d/2$ 时，证明完成。

现在假设 $\alpha > d/2$。那么 $d = 1$， $1/2 < \alpha \le 1$，并且 $n = 1$。在这种情况下，我们还有 $\nu < 1$ 。根据引理2.2，我们有

$$\begin{aligned} &\int_{2|y-y'|<|x-y|} \frac{|L_1(x,y) - L_1(x,y')|^2}{|y-y'|^{2\nu+1}}\,\mathrm{d}\sigma(y)\mathrm{d}\sigma(y') \\ &\lesssim \int_{\partial\Omega} \frac{\mathrm{d}\sigma(y)}{|x-y|^{4-2\alpha}} \int_{2|y-y'|<|x-y|} \frac{\mathrm{d}\sigma(y')}{|y-y'|^{2\nu-1}} \\ &\lesssim \int_{\partial\Omega} \frac{\mathrm{d}\sigma(y)}{|x-y|^{4-2\alpha+2\nu-2}} \lesssim 1, \end{aligned}$$

其中，第二个不等式成立是因为 $\nu < 1$ ，第三个不等式成立是因为 $\nu < (2\alpha - 1)/2$。

在区域 $2|y-y'| \ge |x-y|$中，我们利用（2.3）可得

$$\begin{aligned} &\int_{2|y-y'|\ge|x-y|} \frac{|L_1(x,y)|^2}{|y-y'|^{2\nu+1}}\,\mathrm{d}\sigma(y)\mathrm{d}\sigma(y') \\ &\lesssim \int_{\partial\Omega} \frac{\mathrm{d}\sigma(y)}{|x-y|^{2-2\alpha}} \int_{2|y-y'|\ge|x-y|} \frac{\mathrm{d}\sigma(y')}{|y-y'|^{2\nu+1}} \\ &\lesssim \int_{\partial\Omega} \frac{\mathrm{d}\sigma(y)}{|x-y|^{2-2\alpha+2\nu}} \lesssim 1. \end{aligned}$$

由于 $|x-y'| \le |x-y| + |y-y'| \le 3|y-y'|$ 若 $2|y-y'| \ge |x-y|$，同理可得

$$\int_{2|y-y'|\ge|x-y|} \frac{|L_1(x,y')|^2}{|y-y'|^{2\nu+1}} \mathrm{d}\sigma(y)\mathrm{d}\sigma(y') \lesssim 1.$$

由此可得

$$\int_{2|y-y'|\ge|x-y|} \frac{|L_1(x,y)-L_1(x,y')|^2}{|y-y'|^{2\nu+1}} \mathrm{d}\sigma(y)\mathrm{d}\sigma(y') \lesssim 1.$$

证毕。 □

2.3 Schatten 类与衰减率

记 $p>0$ 上的希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 所对应的 p 阶 Schatten 类为 $\mathcal{S}^p(\mathcal{H})$。它是由 $\mathcal{H}$ 上的紧算子 $\mathcal{A}$ 构成的类，满足 $\sum_{j=1}^{\infty} s_j(\mathcal{A})^p < \infty$，其中 $s_j(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{H}$ 上的第 j 个奇异值，按降序排列，即

$$s_1(\mathcal{A}) \ge s_2(\mathcal{A}) \ge \cdots (\to 0).$$

记 $\mathcal{A}$ 的特征值为 $\lambda_j(\mathcal{A})$，并按绝对值降序排列，即

$$|\lambda_1(\mathcal{A})| \ge |\lambda_2(\mathcal{A})| \ge \cdots (\to 0).$$

下面的引理给出了 Schatten 类中紧算子的特征值衰减率。

引理 2.5. 设 $p>0$。如果希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的紧算子 $\mathcal{A}$ 属于 Schatten 类 $\mathcal{S}^p(\mathcal{H})$，则有

$$|\lambda_j(\mathcal{A})| = o(j^{-1/p})$$

当 $j\to\infty$ 时。

证明。根据 Weyl 不等式，有

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j(\mathcal{A})|^p \le \sum_{j=1}^{\infty} s_j(\mathcal{A})^p < \infty$$

（见 [5, 第93] 页，例如）。令 N 为任意整数。由于 $|\lambda_j(\mathcal{A})| \ge |\lambda_{j+1}(\mathcal{A})|$ 对所有 $j\ge 1$，我们有

$$(j-N)|\lambda_j(\mathcal{A})|^p \le \sum_{k=N+1}^{j} |\lambda_j(\mathcal{A})|^p \le \sum_{k=N+1}^{\infty} |\lambda_k(\mathcal{A})|^p$$

对任意 $j>N$。由于 $|\lambda_j(\mathcal{A})|\to 0$ 当 $j\to\infty$ 时，我们有

$$\limsup_{j\to\infty} j|\lambda_j(\mathcal{A})|^p = \limsup_{j\to\infty}((j-N)|\lambda_j(\mathcal{A})|^p) \le \sum_{k=N+1}^{\infty} |\lambda_k(\mathcal{A})|^p.$$

通过发送 $N\to\infty$，我们得到 $\limsup_{j\to\infty} j|\lambda_j(\mathcal{A})|^p = 0$。 □

为了证明定理1.1，我们使用了 [3], 的一个结果，该结果指出，如果一个积分核属于某个 Sobolev 空间，那么相应的积分算子属于某个 Schatten 类。

定理2.6（[3, 定理 3.6]）。设 M 是一个 d维紧致定向流形，并固定一个处处不为零的光滑密度（例如，在 M 上赋予一个黎曼度量，并考虑与之关联的体积形式）。设 $\mathcal{A}$ 是积分算子

$$\mathcal{A}[f](x) = \int_M A(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y$$

并令 $\mu, \nu \geq 0$。若 $A(x,y) \in H^{\mu,\nu}(M \times M)$，则有 $\mathcal{A} \in \mathcal{S}^p(L^2(M))$ 对所有

$$p > \frac{2d}{d + 2(\mu+\nu)}.$$

根据定理 2.6，我们可以证明，NP算子 $\mathcal{K}^*$ 属于某个 Schatten 类，该类取决于 $\partial\Omega$ 的光滑性。在下文中，我们简单地将 $\mathcal{S}^p(L^2(\partial\Omega))$ 记为 $\mathcal{S}^p$。

定理 2.7。若 $0 < \alpha \leq 1$ 和 $\partial\Omega$ 是 $C^{1,\alpha}$，则对于所有 $p > d/\alpha$，我们都有 $\mathcal{K}^* \in \mathcal{S}^p$ 。

证明。设 n 为大于 $d/(2\alpha)$ 的最小整数。由引理2.4 和定理2.6 可得 $\mathcal{L}_n \in \mathcal{S}^p(L^2(\partial\Omega))$，对所有

$$p > \frac{2d}{d + 2(2n\alpha - d)/2} = \frac{d}{n\alpha}.$$

由于 $\mathcal{K}\mathcal{K}^*$ 是 $L^2(\partial\Omega)$ 上的非负自伴算子，且 $\mathcal{L}_n^*\mathcal{L}_n = (\mathcal{K}\mathcal{K}^*)^n$，我们有

$$s_j(\mathcal{L}_n) = \lambda_j((\mathcal{L}_n^*\mathcal{L}_n)^{1/2}) = \lambda_j((\mathcal{K}\mathcal{K}^*)^{1/2})^n = s_j(\mathcal{K}^*)^n.$$

因此，如果 $p > d/\alpha$，那么我们有

$$\sum_{j=1}^{\infty} s_j(\mathcal{K}^*)^p = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(\mathcal{L}_n)^{p/n} < \infty.$$

因此， $\mathcal{K}^* \in \mathcal{S}^p$。 □

定理 1.1 立即得出。

定理*1.1*的证明。 由于 $\partial\Omega$ 是 $C^{1,\,\alpha}$ 对某个 $\alpha > 0$，$\mathcal{K}^*$ 上的非零特征值 $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ 也是 $L^2(\partial\Omega)$ 上的特征值，反之亦然（见推论A.3）。应用定理 2.7 可得 $\mathcal{K}^* \in \mathcal{S}^p$ 对所有 $p > d/\alpha$均成立。因此，由引理 1.1可得2.5。 □

定理证明3.1.2

3.1 切向导数的估计

我们从与引理 2.2 类似的核估计开始。注意，函数 $y \mapsto L_1(x,y)$ 是 $C^{k,\alpha}$ 在固定 $x \in \partial\Omega$ 时，关于$\partial\Omega \setminus \{x\}$ 是 k 次连续可微的，并且第 k 阶导数 $\partial_{\tau_y}^k L_1(x,y)$ 在空间中连续

$$(\partial\Omega \times \partial\Omega) \setminus \{(x,x) \mid x \in \partial\Omega\}.$$

在本节中及下文， ∂_τ 表示沿 $\partial\Omega$的切向导数。

引理 3.1. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个有界区域，其 $C^{k,\alpha}$ 边界为 $\partial\Omega$，其中 k 为某个正整数，且 $\alpha \in (0,1]$。存在一个常数 $C>0$，使得不等式

$$|\partial_{\tau_y}^l L_1(x,y)| \le \frac{C}{|x-y|^{2-k+l-\alpha}} \tag{3.1}$$

对所有满足 $x \neq y$和 $l=0$的 $x,y \in \partial\Omega$，$1,\ldots,k$均成立。特别地，我们有

$$|\partial_{\tau_y}^{k-1} L_1(x,y) - \partial_{\tau_y}^{k-1} L_1(x,y')| \le \frac{C|y-y'|}{|x-y|^{2-\alpha}} \tag{3.2}$$

若 $2|y-y'|<|x-y|$，则成立。

对于引理 3.1的证明，我们需要做一些准备。设 $\gamma:\mathbb{R}\to\partial\Omega$ 的周期为 1，是 $C^{k,\alpha}$ Ω的参数化，使得 $\gamma'(t)\neq 0$ 对任意 t都成立。根据泰勒定理，我们可以将 $\gamma(t)$ 展开为

$$\gamma(s)-\gamma(t)=\sum_{j=1}^{k}\frac{\gamma^{(j)}(t)}{j!}(s-t)^j+R_k(t,s) \tag{3.3}$$

其中

$$R_k(t,s):=\frac{1}{(k-1)!}\int_t^s (s-\sigma)^{k-1}(\gamma^{(k)}(\sigma)-\gamma^{(k)}(t))\,\mathrm{d}\sigma.$$

引理 3.2。对于整数 $l=0$、1、2、.....、k 和 $m\ge 0$，我们有

$$\frac{\partial^l}{\partial s^l}\left(\frac{R_k(t,s)}{(t-s)^m}\right)=O(|t-s|^{k-m-l+\alpha})$$

作为 $|t-s|\to 0$。

证明。我们首先考虑 $m=0$ 的情形。我们有

$$\frac{\partial^l}{\partial s^l}R_k(t,s)$$
$$=\begin{cases}\dfrac{1}{(k-l-1)!}\displaystyle\int_t^s (s-\sigma)^{k-l-1}(\gamma^{(k)}(\sigma)-\gamma^{(k)}(t))\,\mathrm{d}\sigma & \text{if } 0\le l\le k-1,\\ \gamma^{(k)}(s)-\gamma^{(k)}(t) & \text{if } l=k.\end{cases}$$

因此我们得到

$$\left|\frac{\partial^l}{\partial s^l}R_k(t,s)\right| \lesssim \begin{cases} \left|\int_t^s (s-\sigma)^{k-l-1}|\sigma-t|^\alpha \,\mathrm{d}\sigma\right| & \text{if } 0\le l\le k-1, \\ |s-t|^\alpha & \text{if } l=k \end{cases}$$
$$\lesssim |s-t|^{k-l+\alpha}.$$

接下来我们考虑一般的 $m\ge 1$。根据莱布尼茨法则，我们有

$$\frac{\partial^l}{\partial s^l}\left(\frac{R_k(t,s)}{(t-s)^m}\right) = \frac{1}{(k-1)!(m-1)!}\sum_{r=0}^{l}\binom{l}{r}\frac{(m+l-r-1)!}{(t-s)^{m+l-r}}\frac{\partial^r}{\partial s^r}R_k(t,s).$$

利用 $m=0$ 情形的估计，我们得到

$$\left|\frac{\partial^l}{\partial s^l}\left(\frac{R_k(t,s)}{(t-s)^m}\right)\right| \lesssim \sum_{r=0}^{l}\frac{1}{|t-s|^{m+l-r}}|s-t|^{k-r+\alpha} \lesssim |s-t|^{k-m-l+\alpha}$$

如所需。 □

引理 3.3. 对于 $l=0$、1、.....、k，我们有

$$\frac{\partial^l}{\partial s^l}\frac{(t-s)^2}{|\gamma(t)-\gamma(s)|^2} = \begin{cases} O(1) & \text{if } 0\le l\le k-1, \\ O(|t-s|^{-1+\alpha}) & \text{if } l=k \end{cases}$$

作为 $|t-s|\to 0$。

证明。我们首先估计

$$\frac{\partial^l}{\partial s^l}\frac{|\gamma(t)-\gamma(s)|^2}{(t-s)^2}$$

对于 $0\le l\le k$。根据莱布尼茨法则，我们有

$$\frac{\partial^l}{\partial s^l}\frac{|\gamma(t)-\gamma(s)|^2}{(t-s)^2} = \sum_{r=0}^{l}\binom{l}{r}\frac{\partial^r}{\partial s^r}\frac{\gamma(t)-\gamma(s)}{t-s}\cdot\frac{\partial^{l-r}}{\partial s^{l-r}}\frac{\gamma(t)-\gamma(s)}{t-s}$$

从而

$$\left|\frac{\partial^l}{\partial s^l}\frac{|\gamma(t)-\gamma(s)|^2}{(t-s)^2}\right| \lesssim \sum_{r=0}^{l}\left|\frac{\partial^r}{\partial s^r}\frac{\gamma(t)-\gamma(s)}{t-s}\right|\left|\frac{\partial^{l-r}}{\partial s^{l-r}}\frac{\gamma(t)-\gamma(s)}{t-s}\right|. \tag{3.4}$$

由泰勒展开（3.3）和引理 3.2，可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^r}{\partial s^r}\frac{\gamma(t)-\gamma(s)}{t-s} &= \frac{\partial^r}{\partial s^r}\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{\gamma^{(j)}(t)}{j!}(s-t)^{j-1}+\frac{R_k(t,s)}{s-t}\right) \\ &= O(1)+O(|t-s|^{k-1-r+\alpha}) \\ &= \begin{cases} O(1) & \text{if } r\le k-1, \\ O(|t-s|^{-1+\alpha}) & \text{if } r=k. \end{cases}\end{aligned}$$

因此由（3.4）可得

$$\left|\frac{\partial^l}{\partial s^l}\frac{|\gamma(t)-\gamma(s)|^2}{(t-s)^2}\right| \lesssim \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \le l \le k-1, \\ |t-s|^{-1+\alpha} & \text{if } l = k. \end{cases} \tag{3.5}$$

现在我们令

$$F(t,s) := \frac{|\gamma(t)-\gamma(s)|^2}{(t-s)^2}.$$

并估计 $1/F(t,s)$ 的导数。我们从公式开始。

$$\frac{\partial^l}{\partial s^l}\frac{(t-s)^2}{|\gamma(t)-\gamma(s)|^2} = \sum_{m=1}^{l}\frac{(-1)^m m!}{F(t,s)^{m+1}}\sum_{\substack{i_1+\cdots+i_m=l \\ i_1,\ldots,i_m\ge 1}}\prod_{r=1}^{m}\frac{\partial^{i_r}}{\partial s^{i_r}}F(t,s). \tag{3.6}$$

由于 $F(t,s)$ 趋于 $|\gamma'(t)|^2$ 当 $s \to t$ 且 γ' 处处不为零时，我们可以将（3.6）估计为

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^l}{\partial s^l}\frac{(t-s)^2}{|\gamma(t)-\gamma(s)|^2}\right| &\lesssim \sum_{m=1}^{l}\sum_{\substack{i_1+\cdots+i_m=l \\ i_1,\ldots,i_m\ge 1}}\prod_{r=1}^{m}\left|\frac{\partial^{i_r}}{\partial s^{i_r}}F(t,s)\right| \\ &\lesssim \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \le l \le k-1, \\ |t-s|^{-1+\alpha} & \text{if } l = k \end{cases}\end{aligned}$$

通过使用 (3.5）。这就是所需的估计。 □

现在我们可以证明引理 3.1。

引理的证明 *3.1.* 只需证明

$$\frac{\partial^l}{\partial s^l}L_1(\gamma(t),\gamma(s)) = O(|t-s|^{-2+k-l+\alpha})$$

由于 $|t-s| \to 0$。由于 $\gamma'(t)\cdot\nu_{\gamma(t)} = 0$，由泰勒展开（3.3）可得

$$\begin{aligned}&L_1(\gamma(t),\gamma(s)) \\ &= -\frac{(t-s)^2}{2\pi|\gamma(t)-\gamma(s)|^2}\left(\sum_{j=0}^{k-2}\frac{\gamma^{(j+2)}(t)\cdot\nu_{\gamma(t)}}{(j+2)!}(s-t)^j + \frac{R_k(t,s)\cdot\nu_{\gamma(t)}}{(t-s)^2}\right).\end{aligned}$$

我们应用莱布尼茨法则，得到

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^l}{\partial s^l}L_1(\gamma(t),\gamma(s)) \\ &= -\frac{1}{2\pi}\sum_{r=0}^{l}\binom{l}{r}\frac{\partial^{l-r}}{\partial s^{l-r}}\frac{(t-s)^2}{|\gamma(t)-\gamma(s)|^2} \\ &\quad\times\frac{\partial^r}{\partial s^r}\left(\sum_{j=0}^{k-2}\frac{\gamma^{(j+2)}(t)\cdot\nu_{\gamma(t)}}{(j+2)!}(s-t)^j + \frac{R_k(t,s)\cdot\nu_{\gamma(t)}}{(t-s)^2}\right).\end{aligned}$$

现在我们运用引理3.2 和引理3.3 ，得到估计

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\partial^l}{\partial s^l} L_1(\gamma(t),\gamma(s))\right| \\
&\lesssim \sum_{r=0}^{l} \left|\frac{\partial^{l-r}}{\partial s^{l-r}} \frac{(t-s)^2}{|\gamma(t)-\gamma(s)|^2}\right| \\
&\quad \times \left|\frac{\partial^r}{\partial s^r}\left(\sum_{j=0}^{k-2} \frac{\gamma^{(j+2)}(t)\cdot \nu_{\gamma(t)}}{(j+2)!}(s-t)^j + \frac{R_k(t,s)\cdot \nu_{\gamma(t)}}{(t-s)^2}\right)\right| \\
&\lesssim \begin{cases} |t-s|^{k-l-2+\alpha} & \text{if } 0 \le l \le k-1, \\ (|t-s|^{-1+\alpha}+1+|t-s|^{-2+\alpha}) \lesssim |t-s|^{-2+\alpha} & \text{if } l=k. \end{cases}
\end{aligned}$$

因此，我们有（3.1）。估计式（3.2）是（3.1）对于$l=k$的直接推论。

□

3.2 二维中的 Sobolev 条件与衰减率

引理 3.4. 若 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中具有 $C^{k,\alpha}$ 边界 $\partial\Omega$ 的有界区域，其中某个正整数 k 满足 $\alpha \in (0,1]$, ，则对于所有 $\nu \in [0, k+\alpha-3/2$, 有 $L_1 \in H^{0,\nu}(\partial\Omega \times \partial\Omega)$。

证明。首先假设 $0<\alpha\le 1/2$。如果 $p\in[1,1/(1-\alpha))$, 那么

$$\sup_{x\in\partial\Omega} \|\partial_{\tau_y}^{k-1} L_1(x,y)\|_{L^p(\partial\Omega)}^p \le C \sup_{x\in\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \frac{\mathrm{d}\sigma(y)}{|x-y|^{p(1-\alpha)}} < \infty.$$

我们还有

$$\sup_{x\in\partial\Omega} \|\partial_{\tau_y}^{k-1} L_1(x,y)\|_{L^p(\partial\Omega)}^p < \infty.$$

因此我们有

$$L_1 \in L_x^\infty(\partial\Omega, W_y^{k-1,p}(\partial\Omega)), \quad \forall p\in[1,1/(1-\alpha)).$$

根据 Sobolev 嵌入定理，对于 $\nu = k-1/2-1/p$，我们有连续嵌入$W^{k-1,p}(\partial\Omega) \hookrightarrow H^\nu(\partial\Omega)$。因此，对于 $\nu = k-1/2-1/p$，我们有 $L_1 \in L_x^\infty(\partial\Omega\ H_y^\nu(\partial\Omega))$。这里我们指出，条件 $\nu \le k-1$ 由假设 $0<\alpha\le 1/2$ 自动满足。由于 $p\in[1,1/(1-\alpha))$ 是任意的，对于所有 $0\le\nu<k+\alpha-3/2$，我们有 $L_1 \in L_x^\infty(\partial\Omega\ H_y^\nu(\partial\Omega))$。根据连续嵌入 $L^\infty(\partial\Omega) \hookrightarrow L^2(\partial\Omega)$，我们得到 $L_1 \in L_x^2(\partial\Omega\ H_y^\nu(\partial\Omega)) = H^{0,\nu}(\partial\Omega\times\partial\Omega)$。

接下来考察 $1/2<\alpha<1$ 的情形。我们证明 $\partial_{\tau_y}^{k-1} L_1(x,y)$ 属于 $H^{0,\nu}(\partial\Omega\times\partial\Omega)$, 对所有 $\nu\in[0,\alpha-1/2)$ 均成立。由于根据（$L_1 \in L_x^\infty(\partial\Omega\ H_y^{k-1}(\partial\Omega))$，由（3.1）可知，只需证明（由（2.7）可得）

$$\sup_{x\in\partial\Omega} \int_{\partial\Omega\times\partial\Omega} \frac{|\partial_{\tau_y}^{k-1} L_1(x,y) - \partial_{\tau_y}^{k-1} L_1(x,y')|^2}{|y-y'|^{2\nu+1}} \,\mathrm{d}\sigma(y)\mathrm{d}\sigma(y') < \infty$$

对所有 $\nu\in[0,\alpha-1/2)$ 。这可以完全同样的方式证明，如（2.10）。 □

定理 1.2 的证明。 由定理 2.6 和引理 3.4 可知 $\mathcal{K}^* \in \mathcal{S}^p$ 对所有 $p > 1/(k+\alpha-1)$均成立。因此，由引理 2.5，可得（1.2）。 □

NP 算子的正则性

本节旨在证明：如果 $\partial\Omega$ 是 $C^{1,\alpha}$，其中 $\alpha > 0$，那么 NP 算子 $\mathcal{K}^*$ 是 $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ 上的紧算子。我们还证明，$\mathcal{K}^*$ 在 $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ 中对应于非零特征值的每个特征函数都属于 $L^2(\partial\Omega)$。

设 $\mathcal{K}$ 是一个积分算子

$$\mathcal{K}[f](x) := -\frac{1}{\omega_{d+1}}\text{p.v.}\int_{\partial\Omega}\frac{(x-y)\cdot\nu_y}{|x-y|^{d+1}}f(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) \quad (x\in\partial\Omega),$$

它也称为 Neumann-Poincar´e 算子，并满足对偶性

$$\langle f, \mathcal{K}^*[g]\rangle_{L^2(\partial\Omega)} = \langle \mathcal{K}[f], g\rangle_{L^2(\partial\Omega)}$$

对所有 $f, g \in L^2(\partial\Omega)$ 均成立。我们先给出以下定理。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^{d+1}$ 是一个有界区域。

定理 A.1. 设 $0 < \alpha < 1$ 和 $\partial\Omega$ 是 $C^{1,\alpha}$。那么，若 $0 < s < (1-\alpha)/2$，则 $\mathcal{K}$ 是从 $H^s(\partial\Omega)$ 到 $H^{s+\alpha}(\partial\Omega)$ 的有界算子；对于任意 $\varepsilon > 0$，它也是从 $L^2(\partial\Omega)$ 到$H^{\alpha-\varepsilon}(\partial\Omega)$ 的有界算子。

证明。令 $f \in H^s(\partial\Omega)$ 对某个 $s \in [0,(1-\alpha)/2)$ 成立。令 ε 为满足 $0 < \varepsilon < \alpha/2$ 的任意数，并将数 t 定义为

$$t = \begin{cases} s & \text{if } s \in (0,(1-\alpha)/2), \\ -\varepsilon & \text{if } s = 0. \end{cases}$$

我们证明

$$\|\mathcal{K}[f]\|_{H^{t+\alpha}(\partial\Omega)} \lesssim \|f\|_{H^s(\partial\Omega)}.$$

由于 $\|\mathcal{K}[f]\|_{L^2(\partial\Omega)} \lesssim \|f\|_{H^s(\partial\Omega)}$，只需证明

$$I := \int_{\partial\Omega\times\partial\Omega}\frac{|\mathcal{K}[f](y)-\mathcal{K}[f](x')|^2}{|x-x'|^{2(t+\alpha)+d}}\,\mathrm{d}\sigma(x)\mathrm{d}\sigma(x') \lesssim \|f\|_{H^s(\partial\Omega)} \tag{A.1}$$

根据（2.7）。

为简化记号，令 $K(x,y)$ 为 $\mathcal{K}$ 的积分核，即

$$K(x,y) = \frac{1}{\omega_{d+1}}\frac{(x-y)\cdot\nu_y}{|x-y|^{d+1}}.$$

由于 $\mathcal{K}[1] = 1/2$，我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{K}[f](x) - \mathcal{K}[f](x') &= \int_{\partial\Omega}\left(K(x,y)-K(x',y)\right)\left(f(y)-f(x)\right)\mathrm{d}\sigma(y) \\ &= \int_{2|x-x'|<|x-y|} + \int_{2|x-x'|\geq|x-y|} =: J_1 + J_2,\end{aligned}$$

因此

$$I \lesssim \sum_{j=1}^{2} \int_{\partial\Omega\times\partial\Omega} \frac{|J_j|^2}{|x-y|^{2(t+\alpha)+d}} \,\mathrm{d}\sigma(x)\mathrm{d}\sigma(y) := I_1 + I_2.$$

沿用引理 2.2的证明思路，可得

$$|K(x,y) - K(x',y)| \lesssim \frac{|x-x'|}{|x-y|^{d+1-\alpha}}$$

对所有 x、x'、$y \in \partial\Omega$，满足 $2|x-x'| < |x-y|$。若设 $A_1 := \{y \mid 2|x-x'| < |x-y|\}$，则有

$$|J_1| \lesssim \int_{A_1} \frac{|x-x'|}{|x-y|^{d+1-\alpha}} |f(y) - f(x)| \,\mathrm{d}\sigma(y).$$

应用柯西-施瓦茨不等式可得

$$\begin{aligned} |J_1|^2 &\lesssim |x-x'|^2 \left(\int_{A_1} \frac{\mathrm{d}\sigma(y)}{|x-y|^{d+1-\alpha}} \right) \left(\int_{A_1} \frac{|f(y)-f(x)|^2 \,\mathrm{d}\sigma(y)}{|x-y|^{d+1-\alpha}} \right) \\ &\lesssim |x-x'|^{1+\alpha} \int_{A_1} \frac{|f(y)-f(x)|^2}{|x-y|^{d+1-\alpha}} \,\mathrm{d}\sigma(y). \end{aligned}$$

由于 $t < (1-\alpha)/2$，可得

$$\begin{aligned} I_1 &\lesssim \int_{\partial\Omega\times\partial\Omega} \mathrm{d}\sigma(x)\mathrm{d}\sigma(y) \, \frac{|f(y)-f(x)|^2}{|x-y|^{d-\alpha}} \int_{2|x-x'|<|x-y|} \frac{\mathrm{d}\sigma(x')}{|x-x'|^{2t+\alpha+d-1}} \\ &\lesssim \int_{\partial\Omega\times\partial\Omega} \frac{|f(y)-f(x)|^2}{|x-y|^{d+2t}} \,\mathrm{d}\sigma(x)\mathrm{d}\sigma(y) \\ &\leq \|f\|^2_{H^s(\partial\Omega)}. \end{aligned}$$

设 $A_2 := \{y \mid 2|x-x'| \geq |x-y|\}$。对于 J_2，有

$$\begin{aligned} |J_2| &\lesssim \int_{A_2} \left(|K(x,y)| + |K(x',y)| \right) |f(y) - f(x)| \,\mathrm{d}\sigma(y) \\ &\lesssim \int_{A_2} \left(\frac{1}{|x-y|^{d-\alpha}} + \frac{1}{|x'-y|^{d-\alpha}} \right) |f(y) - f(x)| \,\mathrm{d}\sigma(y). \end{aligned}$$

然后我们应用柯西-施瓦茨不等式，得到

$$\begin{aligned} |J_2|^2 \lesssim & \left(\int_{A_2} \frac{\mathrm{d}\sigma(y)}{|x-y|^{d-\alpha}} \right) \left(\int_{A_2} \frac{|f(y)-f(x)|^2 \,\mathrm{d}\sigma(y)}{|x-y|^{d-\alpha}} \right) \\ & + \left(\int_{A_2} \frac{\mathrm{d}\sigma(y)}{|x'-y|^{d-\alpha}} \right) \left(\int_{A_{2|}} \frac{|f(y)-f(x')|^2 \,\mathrm{d}\sigma(y)}{|x'-y|^{d-\alpha}} \right) \\ & + \left(\int_{A_2} \frac{\mathrm{d}\sigma(y)}{|x'-y|^{d-\alpha}} \right)^2 |f(x)-f(x')|^2. \end{aligned}$$

如果 $y \in A_2$，那么 $|x'-y| \le |x-x'|+|x-y| \le 3|x-x'|$。因此我们有

$$\begin{aligned}|J_2|^2 \lesssim |x-x'|^\alpha \int_{2|x-x'|\ge|x-y|} \frac{|f(y)-f(x)|^2\,\mathrm{d}\sigma(y)}{|x-y|^{d-\alpha}} \\ + |x-x'|^\alpha \int_{3|x-x'|\ge|x'-y|} \frac{|f(y)-f(x')|^2\,\mathrm{d}\sigma(y)}{|x'-y|^{d-\alpha}} \\ + |x-x'|^{2\alpha}|f(x)-f(x')|^2 =: \sum_{j=1}^3 J_{2,j},\end{aligned}$$

因此

$$I_2 \lesssim \sum_{j=1}^3 I_{2,j},$$

其中，定义 $I_{2,\,j}$ 显然。对于 $I_{2,\,1}$，我们有

$$\begin{aligned}I_{2,1} &\lesssim \int_{\partial\Omega\times\partial\Omega} \mathrm{d}\sigma(x)\mathrm{d}\sigma(y)\,\frac{|f(y)-f(x)|^2}{|x-y|^{d-\alpha}} \int_{2|x-x'|\ge|x-y|} \frac{\mathrm{d}\sigma(x')}{|x-x'|^{2t+\alpha+d}} \\ &\lesssim \int_{\partial\Omega\times\partial\Omega} \frac{|f(y)-f(x)|^2}{|x-y|^{d+2t}}\,\mathrm{d}\sigma(x)\mathrm{d}\sigma(y) \lesssim \|f\|^2_{H^s(\partial\Omega)},\end{aligned}$$

其中，第二个不等式成立是因为 $t \ge -\varepsilon > -\alpha/2$。类似地，可以估计 $I_{2,\,2}$，从而得到

$$I_{2,2} \lesssim \|f\|^2_{H^s(\partial\Omega)}.$$

我们还有

$$I_{2,3} \lesssim \int_{\partial\Omega\times\partial\Omega} \frac{|f(y)-f(x)|^2}{|x-y|^{d+2t}}\,\mathrm{d}\sigma(x)\mathrm{d}\sigma(y) \lesssim \|f\|^2_{H^s(\partial\Omega)}.$$

因此我们有（A.1），证明完成。 □

推论 A.2。如果 $\partial\Omega$是 $C^{1,\,\alpha}$ 对于某个 $\alpha > 0$，那么 NP算子 $\mathcal{K}$ 和$\mathcal{K}^*$ 分别是 $H^{1/2}(\partial\Omega)$ 和 $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ 上的紧算子。

证明。我们取 $s \in (\max\{0, 1/2-\alpha\}, (1-\alpha)/2)$。然后应用定理 A.1，得到 $\mathcal{K}$ 的有界性：$H^s(\partial\Omega) \to H^{s+\alpha}(\partial\Omega)$。由于 $s < (1-\alpha)/2 < 1/2$，嵌入 $H^{1/2}(\partial\Omega) \hookrightarrow H^s(\partial\Omega)$ 根据 Rellich-Kondrachov嵌入定理是紧的。由于 $s+\alpha > 1/2$，我们有连续的（实际上是紧的）嵌入 $H^{s+\alpha}(\partial\Omega) \hookrightarrow H^{1/2}(\partial\Omega)$。因此，复合映射

$$H^{1/2}(\partial\Omega) \hookrightarrow H^s(\partial\Omega) \xrightarrow{\mathcal{K}} H^{s+\alpha}(\partial\Omega) \hookrightarrow H^{1/2}(\partial\Omega)$$

在 $H^{1/2}(\partial\Omega)$ 上给出一个紧算子。

由对偶性，$\mathcal{K}^*$：$H^{-1/2}(\partial\Omega) \to H^{-1/2}(\partial\Omega)$ 是紧的。 □

推论 A.3. 假设 $\partial\Omega$ 是 $C^{1,\,\alpha}$，其中 $\alpha > 0$。

(i) $\mathcal{K}$ 在 $L^2(\partial\Omega)$ 中对应非零特征值的每个特征函数都属于 $H^{1/2}(\partial\Omega)$。
(ii) $\mathcal{K}^*$ 在 $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ 中对应非零特征值的每个特征函数都属于 $L^2(\partial\Omega)$。

证明。 (i) 设 $f \in L^2(\partial\Omega)$ 满足 $\mathcal{K}[f] = \lambda f$，其中 $\lambda \neq 0$。那么，由定理A.1，我们有

$$f = \lambda^{-1}\mathcal{K}[f] \in H^{\alpha/2}(\partial\Omega).$$

我们采用 A.1 再次得到

$$f = \lambda^{-1}\mathcal{K}[f] \in H^{\min\{1/2,3\alpha/2\}}(\partial\Omega).$$

我们迭代这一过程，得到 $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$。

(ii) 定理A.1 根据对偶性可知算子 $\mathcal{K}^*$ 从$H^{-s-\alpha}(\partial\Omega)$ 到 $H^{-s}(\partial\Omega)$有界，若 $0 < s < (1-\alpha)/2$ 并且从 $H^{-\alpha+\varepsilon}(\partial\Omega)$ 到$L^2(\partial\Omega)$ 对任意 $\varepsilon > 0$。因此，与(i) 中相同的论证表明该断言成立。 □

参考文献

[1] K. Ando、H. Kang 和 Y. Miyanishi，《二维解析边界上 Neumann-Poincar´e 算子的特征值指数衰减估计》，J. Integr. Equ. Appl. 30（2018），473–489。

[2] E. Bonnetier 和 H. Zhang，通过 Weyl 序列刻画二维带角区域中 Neumann-Poincar´e 算子的本质谱，Rev. Mat. Iberoam. 35（2019年），925–948。[3] J. Delgado 和 M. Ruzhansky，紧致流形上的 Schatten 类：核条件，J. Funct. Anal. 267(3)（2014年），772–798。[4] D. Gilbarg 和 N. S. Trudinger，《二阶椭圆型偏微分方程》，数学经典。Springer-Verlag，柏林，2001 年。1998 年版本的重印本。[5] I. C. Gohberg 和 M. G. Kre˘ın，《线性非自伴算子理论导论》，数学专著译著丛书，第 18 卷。A. Feinstein 由俄文翻译。美国数学学会，普罗维登斯，罗德岛州，1969 年。[6] J. Helsing 和 K.-M. Perfekt，《立方体的极化率与电容》，Applied and Computational Harmonic Analysis 34（2013 年），445–468。

[7] J. Helsing 和 K.-M. Perfekt，《具有旋转对称锥点的区域上调和层位势算子的谱》，J. Math. Pures Appl. 118 (2018), 235–287。

[8] Y. Jung 和 M. Lim, 《利用 Grunsky 系数估计二维 Neumann-Poincar´e 算子特征值的衰减》, 美国数学会会刊 148 (2020), 591–600。[9] H. Kang、M. Lim 和 S. Yu, 《相交圆盘上 Neumann-Poincar´e 算子的谱分解及等离激元共振分析》, Arch. Ration. Mech. Anal. 226 (2017), no. 1, 83–115。[10] D. Khavinson、M. Putinar 和 H. S. Shapiro, 《位势理论中的 Poincar´e 变分问题》, Arch. Ration. Mech. An. 185 (2007), 143–184。[11] Y. Miyanishi, 《三维 Neumann-Poincar´e 算子特征值的韦尔定律：威尔莫尔能量与曲面几何》, 《数学进展》406 (2022), paper No. 108547。[12] Y. Miyanishi 和 T. Suzuki, 《双层位势的特征值与特征函数》, 《美国数学会汇刊》369(11) (2017), 8037–8059。[13] Y. Miyanishi 和 G. Rozenblum, 《三维 Neumann-Poincar´e 算子的特征值：韦尔定律与几何》, 《代数与分析》31 (2019), no. 2, 248–268；转载于《圣彼得堡数学杂志》31 (2020), no. 2, 371–386。[14] K.-M. Perfekt 和 M. Putinar, 《具有角点的平面区域上 Neumann-Poincar´e 算子的谱界》, 《数学分析杂志》124 (2014), 39–57。[15] K.-M. Perfekt 和 M. Putinar, 《具有角点的区域上 Neumann-Poincare 算子的本质谱》, Arch. Rati. Mech. Anal. 223 (2017), 1019–1033。