arXiv:2304.04805v1 [math.NT] 10 Apr 2023

卡拉楚巴的约数问题及相关问题

MIKHAIL R. GABDULLIN、VITALII V. IUDELEVICH、SERGEI V. KONYAGIN

摘要。我们证明了

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{\tau(p-1)}\asymp\frac{x}{(\log x)^{3/2}}\quad\text{and}\quad\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{\tau(n^2+1)}\asymp\frac{x}{(\log x)^{1/2}},$$

其中，$\tau(n)=\sum_{d|n}1$ 是 n的因数个数，且第一个求和中的求和范围遍历所有素数。

1. 引言

2004年，A. A. Karatsuba在其“解析数论及其应用”研讨会上提出了如下问题：求该和式的渐近公式

$$\Phi(x)=\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{\tau(p-1)}$$

其中 $x\to\infty$，$\tau(n)=\sum_{d|n}1$ 是约数函数，求和遍及不超过 x 的素数。这是解析数论中以下两个经典问题的自然“混合”。

第一个问题（所谓的 Titchmarsh 约数问题）是求和式的渐近行为

$$D(x)=\sum_{p\leqslant x}\tau(p-1).$$

众所周知（见 [13], [1], [6]），

$$D(x)\sim\frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}\,x,\qquad x\to\infty,$$

其中 $\zeta(s)$ 表示黎曼 zeta 函数。另一个问题是求和式的渐近公式

$$T(x)=\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{\tau(n)}.$$

S. Ramanujan [10], 解决了这个问题，并证明

$$T(x)=c_0\frac{x}{\sqrt{\log x}}\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{\log x}}\right)\right),\tag{1.1}$$

其中

$$c_0=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\prod_p\sqrt{p^2-p}\log\frac{p}{p-1}=0.5486\ldots$$

日期：2023 年 4 月 12 日。

和 $\Phi(x)$ 此前已有研究。最近的研究 [4] 表明，

$$\Phi(x) \leqslant 4K\frac{x}{(\log x)^{3/2}} + O\left(\frac{x\log\log x}{(\log x)^{5/2}}\right),$$

其中

$$K = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\prod_p \sqrt{\frac{p}{p-1}}\left(p\log\frac{p}{p-1} - \frac{1}{p-1}\right) = 0.2532\ldots$$

注意，界 $\Phi(x) \ll \frac{x}{(\log x)^{3/2}}$ 可由 [7], 的推论1.2推出，也可以仿照下文定理1.2中上界的证明推导得到。我们提出如下猜想:

$$\Phi(x) \sim K\frac{x}{(\log x)^{3/2}}, \qquad x \to \infty,$$

但这可能很难证明。

在本文中，我们证明上述关于 $\Phi(x)$ 的上界在常数因子意义下是紧的。

定理1.1. 我们有

$$\Phi(x) \gg \frac{x}{(\log x)^{3/2}}.$$

因此，我们得到了总和 $\Phi(x)$ 的正确数量级:

$$\Phi(x) \asymp \frac{x}{(\log x)^{3/2}},$$

这在一阶近似意义下回答了 Karatsuba 提出的问题。

除 $\Phi(x)$ 外，我们还考虑这个和式

$$F(x) = \sum_{n\leqslant x}\frac{1}{\tau(n^2+1)},$$

并证明如下结论。

定理1.2。我们有

$$F(x) \asymp \frac{x}{(\log x)^{1/2}}.$$

现在我们讨论证明的主要思路。在求和 $\Phi(x)$ 中，对于每个素数 $p \leqslant x$，我们将 $p-1$ 写成 ab 的形式，其中 a 由不超过 z 的素因子组成，而 b 的所有素因子都大于 z；这里 $z = x^{\varepsilon}$，其中 $\varepsilon > 0$ 为某个较小的固定值。现在 $\Phi(x)$ 可以改写为

$$\Phi(x) = \sum_{\substack{a\leqslant x\\ p\mid a\Rightarrow p\leqslant z}}\frac{1}{\tau(a)}\sum_{\substack{b\leqslant\frac{x-1}{a}\\ p\mid b\Rightarrow p>z\\ ab+1\text{ prime}}}\frac{1}{\tau(b)}, \tag{1.2}$$

并且，由于 $\tau(b) = O_{\varepsilon}(1)$，我们有

$$\Phi(x) \gg_{\varepsilon} \sum_{a\leqslant x^{\varepsilon}}\frac{1}{\tau(a)}\sum_{\substack{b\leqslant\frac{x-1}{a}\\ p\mid b\Rightarrow p>x^{\varepsilon}\\ ab+1\text{ prime}}} 1.$$

利用布伦–胡利筛法，可以从下方估计内层和，其数量级为

$$\frac{x}{a(\log x)^2} - R(x;a),$$

其中， $R(x;a)$ 对外层求和的贡献将可以忽略不计。结合这些估计，我们看到

$$\Phi(x) \gg_\varepsilon \frac{x}{(\log x)^2} \sum_{a\leqslant x^\varepsilon} \frac{1}{a\tau(a)} \gg_\varepsilon \frac{x}{(\log x)^{3/2}},$$

这就给出了所需的下界。需要指出的是，该论证无法为 $\Phi(x)$ 给出任何上界，因为估计数字 $a > x^{1-\varepsilon}$ 对 (1.2) 的贡献实际上等价于最初的问题。

$F(x)$ 的上界可由 [8]的定理1得出。我们还注意到，也可以利用不等式 $\tau(n) \geqslant 2^{\omega(n)}$ （这里 $\omega(n)$ 表示 n的不同素因子个数）以及对给定$\omega(n^2+1)$值的 $n \leqslant x$ 数量的上界，推出相同的上界。为完整起见，我们给出这一论证。

我们注意到，本文的方法也可以应用于其他类似于$\tau(n)$的函数。例如，设 $\tau_k(n)$ 为广义除数函数，$\tau_k(n) = \sum_{n=d_1d_2\dots d_k} 1$；则可以证明，

$$\sum_{p\leqslant x} \frac{1}{\tau_k(p-1)} \asymp_k x(\log x)^{\frac{1}{k}-2}.$$

致谢。Mikhail Gabdullin 的工作得到俄罗斯科学基金会第 19-11-00001 号项目的支持，https://rscf.ru/en/project/19-11-00001/。Vitalii Iudelevich 的工作得到理论物理与数学促进基金会“BASIS”的支持。

2. 记号

用 $\varphi(n) = \#\{k \leqslant n\colon (k,n) = 1\}$ 表示欧拉函数；用 $P^+(n)$和 $P^-(n)$ 分别表示数 $n > 1$ 的最小和最大素因子；按惯例， $P^+(1) = 0$ 和 $P^-(1) = \infty$。用 $\pi(x)$ 表示不超过 x 的素数个数，并且 $\pi(x;\ q,a)$ 表示不超过 x 且属于模 q)的等差数列a (的素数个数；我们还定义 $R(x;\ q,a) = \pi(x;\ q,a) - \frac{\pi(x)}{\varphi(q)}$。记号 $f(x) \ll g(x)$以及$f(x) = O(g(x))$表示，对于某个绝对常数 $C > 0$及 x的所有可能取值，均有 $|f(x)| \leqslant Cg(x)$。若 $f(x) \ll g(x) \ll f(x)$，我们写作 $f(x) \asymp g(x)$；若要强调隐含常数依赖于 k，则写作 $f(x) \ll_k g(x)$。

现在我们回顾一些筛法中的记号。设 $\mathcal{A}$ 为正整数的有限集， $\mathcal{P}$ 为素数的有限子集。定义 $P = \prod_{p\in\mathcal{P}} p$ 和 $S(\mathcal{A},\ \mathcal{P}) = \#\{a \in \mathcal{A}\colon (a,P) = 1\}$。
另令 $\mathcal{A}_d = \#\{a \in \mathcal{A}\colon\ a \equiv 0 \pmod d\}$。我们假设，对于所有 $d|P$，

$$\mathcal{A}_d = Xg(d) + r_d, \tag{2.1}$$

其中 $g(d)$ 是一个乘性函数，使得 $0 < g(p) < 1$ 对于 $p \in \mathcal{P}$ 以及 $g(p) = 0$ 对于$p \notin \mathcal{P}$。

此外，令集合 $\mathcal{P}$ 被划分为不相交的子集 $\mathcal{P}_1$、$\mathcal{P}_2$、……、$\mathcal{P}_t$，并令 $P_j = \prod_{p\in\mathcal{P}_j} p$。最后，令 $\{k_j\}_{r=1}^t$ 为一列偶数。我们设 $V_j = \prod_{p\in\mathcal{P}_j}(1-g(p))$，$L_j = \log V_j^{-1}$，

$$E = \sum_{j=1}^{t} \frac{e^{L_j}(L_j)^{k_j+1}}{(k_j+1)!},\ R = \sum_{\substack{d_j|P_j\\ \omega(d_j)\leqslant k_j}} |r_{d_1\dots d_t}|,\ \text{and}\ R' = \sum_{l=1}^{t} \sum_{\substack{d_j|P_j\\ \omega(d_j)\leqslant k_j, j\neq l\\ \omega(d_l)=k_l+1}} |r_{d_1\dots d_t}|.$$

3. 辅助结果

我们需要以下由 Ford 和 Halberstam 提出的 Brun-Hooley筛法版本[2]。

定理 3.1. 设满足 **(2.1)**。则

$$S(\mathcal{A},\mathcal{P}) \leqslant X\prod_{p\in\mathcal{P}}(1-g(p))e^E + R$$

and

$$S(\mathcal{A},\mathcal{P}) \geqslant X\prod_{p\in\mathcal{P}}(1-g(p))(1-E) - R - R'.$$

证明。见 [2]。 □

引理 3.2. 设 $a \leqslant x^{1/40}$ 为偶正整数，并且

$$F_a(x) = \#\left\{n \leqslant (x-1)/a : an+1 \textit{ prime and } P^-(n) > x^{1/40}\right\}.$$

那么，对于 $x \geqslant x_0$,

$$F_a(x) \geqslant \frac{c_1\pi(x)}{\varphi(a)\log x} - R_1,$$

其中 $c_1 > 0$ 是一个绝对常数，并且

$$0 \leqslant R_1 \leqslant \sum_{d\leqslant x^{13/40}} |R(x;ad,1)|$$

注记。通过筛选集合 $\{(an+1)(n+P)$，可以得到关于 $F_a(x)$ 的不含误差项 R_1 的类似上界：$n \leqslant (x-1)/a\}$,，其中 $P = \prod_{p\leqslant z} p$。

证明。我们将定理 3.1 应用于集合 $\mathcal{A} = \{n \leqslant (x-1)/a$： $an+1$ 素数$\}$ 和 $\mathcal{P} = \{p \leqslant z\}$，其中 $z = x^{1/40}$ （其他参数将在稍后选取）。于是 $F_a(x) = S(\mathcal{A}、\mathcal{P})$，并且对于任意 $d|P = \prod_{p\leqslant z} p$，有

$$\mathcal{A}_d = \#\{k \leqslant (x-1)/(ad) : adk+1 \text{ prime}\} = \pi(x;ad,1) = \frac{\pi(x)}{\varphi(ad)} + R(x;ad,1).$$

现在我们将数 $d|P$ 写成 $d = d_1d_2$的形式，其中 $(d_1、\ a) = 1$ 和 d_2 仅由整除 a的素数组成。因此，由于 $\varphi(ad_2) = ad_2\prod_{p|a}(1-1/p) = d_2\varphi(a)$,，我们得到

$$\frac{1}{\varphi(ad)} = \frac{1}{\varphi(d_1)\varphi(ad_2)} = \frac{1}{\varphi(d_1)d_2\varphi(a)},$$

因此，等式 (2.1) 在 $X = \frac{\pi(x)}{\varphi(a)}$ 成立，其中乘性函数 g 定义为

$$g(p) = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & \text{for } (p,a) = 1, \\ \frac{1}{p}, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

and

$$r_d = R(x; ad, 1).$$

此外，我们有

$$\prod_{p \in \mathcal{P}} (1 - g(p)) \asymp \frac{1}{\log x},$$

其中隐含常数为绝对常数。

现在我们选择 $\mathcal{P}$ 的划分，并定义数 $\{k_j\}_{j=1}^{t}$。令 $z_j = z^{2^{1-j}}$，并且

$$\mathcal{P}_j = \mathcal{P} \cap (z_{j+1}, z_j],$$

其中 t 是满足 $z_{t+1} < 2 \leqslant z_t$ 的唯一正整数。令 $k_j = b + 2(j-1)$，其中 $b \geqslant 2$ 为偶数，稍后确定。我们还令

$$C = \prod_{p>2} \left(1 + \frac{1}{p^2 - 2p}\right) \leqslant 1.52.$$

根据 [11], 定理 7（见（3.26）、（3.27））, 对于任意 $x > 1$,

$$\frac{e^{-\gamma}}{\log x} \left(1 - \frac{1}{\log^2 x}\right) < \prod_{p \leqslant x} (1 - 1/p) < \frac{e^{-\gamma}}{\log x} \left(1 + \frac{1}{2\log^2 x}\right), \tag{3.1}$$

其中 γ 是欧拉常数。因此，对于任意 $z \geqslant \sqrt{2}$,

$$\prod_{z < p \leqslant z^2} (1 - 1/p)^{-1} \leqslant 3; \tag{3.2}$$

事实上，它由 $z \geqslant 4$ 的 (3.1) 推出，而对 $\sqrt{2} \leqslant z < 4$ 则可直接验证。因此

$$V_j^{-1} = \prod_{z_{j+1} < p \leqslant z_j} (1 - g(p))^{-1} \leqslant C \prod_{z_{j+1} < p \leqslant z_j} (1 - 1/p)^{-1} \leqslant 3C \leqslant 5.$$

因此 $L_j = \log V_j^{-1} \leqslant L = \log 5$ 和

$$E = \sum_{j=1}^{t} \frac{e^{L_j} L_j^{k_j+1}}{(k_j+1)!} \leqslant e^L \sum_{j=1}^{t} \frac{L^{b+2j-1}}{(b+2j-1)!}.$$

现在我们估计 $R + R'$。如果一个数 d 对应于 R 中的一个被加项，我们有 $d = d_1 \dots d_t$，其中 $d_j | P_j$ 且 $\omega(d_j) \leqslant k_j = b + 2(j-1)$。因此，

$$d \leqslant z_1^{k_1} \dots z_t^{k_t} \leqslant z^{b+(b+2)/2+(b+4)/4+\dots} = z^{2b+4}.$$

如果数 d 对应于 R'中的一个加数，我们同样可以得到 $d \leqslant z^{2b+4} z = z^{2b+5}$。由于分别对应于和 R 和 R' 的数 d 各不相同，且均不超过 z^{2b+5}，因此我们看到

$$R + R' \leqslant \sum_{d \leqslant z^{2b+5}} |r_d|.$$

现在取 $b = 4$。那么 $2b + 5 = 13$,

$$E \leqslant 5 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\log 5)^{2j+3}}{(2j+3)!} \leqslant 0.48,$$

and

$$R + R' \leqslant \sum_{d \leqslant x^{13/40}} |R(x; ad, 1)|.$$

该断言得证。 □

定义

$$\mathcal{M} = \left\{ a \geqslant 1 : a \mid n^2 + 1 \text{ for some } n \geqslant 1 \right\}.$$

I众所周知， $a \in \mathcal{M}$ 当且仅当 $4 \nmid a$ 且 $p \nmid a$ 对任意 $p \equiv 3 \,(\text{模}\, 4)$.

引理 3.3。设 $2 \leqslant a$、 $z \leqslant x^{1/30}$, $a \in \mathcal{M}$ 和 $P^+(a) \leqslant z$。令

$$W_a(x, z) = \# \left\{ n \leqslant x : a | (n^2 + 1) \textit{ and } P^- \left(\frac{n^2+1}{a} \right) > z \right\}.$$

Then

$$W_a(x, z) \asymp \frac{2^{\omega(a)}}{\varphi(a)} \frac{x}{\log z}.$$

证明。令 $\mathcal{A} = \{k : \ ak = n^2 + 1$ ，其中 $n \leqslant x\}$ 且

$$\mathcal{P} = \begin{cases} \{p \leqslant z : p \equiv 1 \pmod 4\}, & \text{if } a \text{ is even;} \\ \{2\} \cup \{p \leqslant z : p \equiv 1 \pmod 4\}, & \text{if } a \text{ is odd,} \end{cases}$$

我们有 $W_a(x, z) = S(\mathcal{A}, \mathcal{P})$。与之前一样，我们将每个 $d | P = \prod_{p \in \mathcal{P}} p$ 写成 $d = d_1 d_2$, 其中$(d_1, a) = 1$ ，且 d_2 只由整除 a的素数组成。假设数 d 和a 中有一个是偶数。那么根据中国剩余定理，以及同余式 $x^2 + 1 \equiv 0 (\mathsf{mod}\ p)$ 有两个解 $p \equiv 1 \ (\mathsf{mod}\ 4)$ ，而对 $p = 2$有一个解这一事实，我们得到

$$\mathcal{A}_d = \#\{n \leqslant x : n^2 + 1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ ad)\} = \frac{x 2^{\omega(ad)-1}}{ad} + O(2^{\omega(ad)}) = \frac{x 2^{\omega(a)+\omega(d_1)-1}}{ad_1 d_2} + O(2^{\omega(ad)}).$$

如果 a 和 d 都是奇数，类似的论证可得

$$\mathcal{A}_d = \frac{x 2^{\omega(a)+\omega(d_1)}}{ad_1 d_2} + O(2^{\omega(ad)}).$$

在这两种情况下，我们都有

$$\mathcal{A}_d = \frac{x 2^{\omega(a)+\omega(d_1)-\mathbb{I}(2|ad)}}{ad_1 d_2} + O(2^{\omega(ad)}) = \frac{x 2^{\omega(a)-\mathbb{I}(2|a)}}{a} \frac{2^{\omega(d_1)-\mathbb{I}(2|d_1)}}{d_1 d_2} + O\left(\tau(ad)\right),$$

其中，当 l 为偶数时， $\mathbb{I}(2|l)$ 等于1，否则等于0。因此我们看到，条件(2.1)对于 $X = \frac{x2^{\omega(a)-\mathbb{I}(2|a)}}{a}$ 成立，其中乘法函数 g 定义在来自 $\mathcal{P}$ 的素数上，通过

$$g(p) = \begin{cases} \frac{2}{p}, & p \nmid a, \\ \frac{1}{p}, & p|a, \end{cases}$$

（在奇数 a 的情况下也有 $g(2) = 1/2$ ），且

$$r_d = O(\tau(ad)).$$

众所周知，

$$\prod_{\substack{p\leqslant x \\ p\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \asymp \frac{1}{\sqrt{\log x}}, \tag{3.3}$$

（参见 [14]）。因此，在这两种情况下我们都有

$$\prod_{p\in\mathcal{P}}(1-g(p)) \asymp \prod_{p\in\mathcal{P},\, p>2}(1-2/p) \prod_{p|a,\, p>2} \frac{1-1/p}{1-2/p} \asymp \frac{a}{\varphi(a)\log z}$$

其中隐含常数为绝对常数。

现在我们选择 $\mathcal{P}$ 的划分，并定义数 $\{k_j\}_{j=1}^{t}$。我们再次令 $z_j = z^{2^{1-j}}$】【。

$$\mathcal{P}_j = \mathcal{P} \cap (z_{j+1}, z_j],$$

其中， t 是唯一的正整数，使得 $z_{t+1} < 2 \leqslant z_t$ 和 $k_j = b + 2(j-1)$ ，其中 $b \geqslant 2$ 为某个偶数。现在，(3.2) 意味着

$$\begin{aligned} V_j^{-1} = \prod_{z_{j+1}<p\leqslant z_j} (1-g(p))^{-1} &\leqslant 2 \prod_{z_{j+1}<p\leqslant z_j,\, p\neq 2} (1-2/p)^{-1} \\ &= 2 \prod_{z_{j+1}<p\leqslant z_j,\, p\neq 2} (1-1/p)^{-2} \frac{(1-1/p)^2}{(1-2/p)} \leqslant 18C \leqslant 28. \end{aligned}$$

因此， $L_j = \log V_j^{-1} \leqslant L = \log 28$ 以及

$$E = \sum_{j=1}^{t} \frac{e^{L_j} L_j^{k_j+1}}{(k_j+1)!} \leqslant e^L \sum_{j=1}^{t} \frac{L^{b+2j-1}}{(b+2j-1)!}.$$

现在我们取 $b = 10$；然后是 $E \leqslant 0.43$ 和 $2b + 5 = 25$。与引理 3.2 的证明中一样，我们得到了。 t

$$R + R' \leqslant \sum_{d\leqslant z^{2b+5}} |r_d| \ll \tau(a) \sum_{d\leqslant z^{25}} \tau(d) \ll x^{1/30} z^{25} \ll x^{26/30},$$

且主项至少为

$$X \prod_{p\in\mathcal{P}}(1-g(p)) \asymp \frac{x2^{\omega(a)}}{\varphi(a)\log z} \gg \frac{x^{1-1/30}}{\log x}.$$

应用定理 3.1 即可完成证明。 □

下一个引理是 J. Tenenbaum [12]所得结果的一个特例。为完整起见，我们给出证明。

引理 3.4。设 $R>0$ 固定。存在正常数 $A=A(R)$ 和 $B=B(R)$，使得对于所有 $1\leqslant k\leqslant R\log\log x$,

$$\#\{n\leqslant x:\omega(n^2+1)=k\}\leqslant\frac{Ax(\log\log x+B)^{k-1}}{(k-1)!\log x}.$$

证明。对于 $m\geqslant 2$ 和 $y\geqslant 2$，我们定义 m 的“y-光滑部分”为：

$$d(m,y)=\max\{d|m:P^+(d)\leqslant y\}.$$

对于每个 $n\leqslant x$，数 n^2+1 可以写成乘积 ab，其中

$$a=a(n)=\max\{d(n^2+1,y):d(n^2+1,y)\leqslant x^{1/30}\}$$

以及 $b=b(n)=(n^2+1)/a$；注意 $(a,b)=1$。现在我们设定

$$A_1=\{n\leqslant x:a\leqslant x^{1/60},P^-(b)>x^{1/60}\text{ and }b>1\},$$

$$A_2=\{n\leqslant x:a\leqslant x^{1/60},P^-(b)\leqslant x^{1/60}\text{ and }b>1\},$$

and

$$A_3=\{n\leqslant x:x^{1/60}<a\leqslant x^{1/30}\text{ and }b>1\}.$$

由于满足 $b(n)=1$ 不超过 $x^{1/60}$，的 $n\leqslant x$ 的数量，我们得出结论

$$\#\{n\leqslant x:\omega(n^2+1)=k\}=N_1+N_2+N_3+O(x^{1/60}),\tag{3.4}$$

其中

$$N_i=\#\{n\in A_i:\omega(n^2+1)=k\},\quad i=1,2,3.$$

首先，我们估计 N_1。在此情形下 $1\leqslant\omega(b)\leqslant 120$；由引理 3.3，我们得到

$$N_1\leqslant\sum_{l=k-120}^{k-1}\sum_{\substack{a\leqslant x^{1/60},\,a\in\mathcal{M}\\ \omega(a)=l}}W_a(x,x^{1/60})\ll\sum_{l=k-120}^{k-1}\sum_{\substack{a\leqslant x^{1/60},\,a\in\mathcal{M}\\ \omega(a)=l}}\frac{x2^{\omega(a)}}{\varphi(a)\log x}\tag{3.5}$$

$$\leqslant\frac{x}{\log x}\sum_{l=k-120}^{k-1}2^l\sum_{\substack{a\leqslant x^{1/60},\,a\in\mathcal{M}\\ \omega(a)=l}}\frac{1}{\varphi(a)}.$$

对（3.3）两边取对数，得到

$$\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)}}\frac{1}{p}=\frac{1}{2}\log\log x+O(1).$$

因此，对于每个 $l\geqslant 0$，式 (3.5) 中的内层和至多为

$$\frac{1}{l!}\left(\sum_{p\leqslant x^{1/60},\,p\not\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)}\frac{1}{\varphi(p)}+\frac{1}{\varphi(p^2)}+\ldots\right)^l\leqslant\frac{1}{l!}\left(0.5\log\log x+B_1\right)^l$$

其中 $B_1>0$ 为某个绝对常数。因此

$$N_1\ll\frac{x(\log\log x+B_1)^{k-1}}{(k-1)!\log x}\left(1+R+\ldots+R^{120}\right).\tag{3.6}$$

现在我们来估计 N_2。令 $p = P^-(b)$, 并令 r 为满足 $p^r|b$的最大整数。根据 a的定义，我们有 $ap^r > x^{1/30}$。因此，对于任意 $n \in A_2$，都有 $p^r > x^{1/60}$,；又由于$p \leqslant x^{1/60}$,，可知 $r \geqslant 2$。令 $\nu = \min\{u \geqslant 1 : \ p^u > x^{1/60}\}$。那么 $2 \leqslant \nu \leqslant r$ 且$p^{\nu-1} \leqslant x^{1/60}$。因此，$p^\nu \leqslant x^{1/60}p \leqslant x^{1/30}$。我们得出结论: 对于每个 $n \in A_2$，数n^2+1可被 p^ν整除，其中 p是满足 $x^{1/60} < p^\nu \leqslant x^{1/30}$且 $\nu \geqslant 2$的素数。因此,

$$N_2 \leqslant \sum_{x^{1/60}<p^\nu\leqslant x^{1/30},\,\nu\geqslant 2}\left(\frac{2x}{p^\nu}+O(1)\right) \ll \sum_{p^\nu>x^{1/60},\,\nu\geqslant 2}\frac{x}{p^\nu}.$$

注意，$p^\nu \geqslant \max\{p^2,\ x^{1/60}\}$, 因此，$p^\nu \geqslant px^{1/120}$。由此可得

$$N_2 \ll \sum_{p\leqslant x^{1/30}}\frac{x}{px^{1/120}} \ll x^{1-1/120}\log\log x. \tag{3.7}$$

最后，让我们考虑 N_3。令 $q = P^+(a)$，我们有 $P^-(b) \geqslant q+1$ 以及

$$\omega(b) \leqslant \frac{\log(x^2+1)}{\log(q+1)} \leqslant \frac{2\log x}{\log q} =: \eta. \tag{3.8}$$

引理 3.3 表明

$$N_3 \leqslant \sum_{\substack{q\leqslant x^{1/30}\\ q\not\equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)}}\ \sum_{k-\eta\leqslant l\leqslant k-1}\ \sum_{\substack{x^{1/60}<a\leqslant x^{1/30}\\ P^+(a)=q,\,\omega(a)=l}} W_a(x,q) \tag{3.9}$$

$$\ll x\sum_{\substack{q\leqslant x^{1/30}\\ q\not\equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)}}\frac{1}{\log q}\sum_{k-\eta\leqslant l\leqslant k-1}2^l\sum_{\substack{x^{1/60}<a\leqslant x^{1/30}\\ P^+(a)=q,\,\omega(a)=l}}\frac{1}{\varphi(a)}.$$

Let

$$\delta = \frac{C}{\log q}, \tag{3.10}$$

其中 $C = 120\log(R+2)+60$。我们分别用 $N_3^{(1)}$和 $N_3^{(2)}$ 表示 $q \leqslant e^{2C}$ 和 $q > e^{2C}$对（3.9）中总和的贡献。由于 $\varphi(a) \gg \frac{a}{\log\log a} \gg \frac{x^{1/60}}{\log\log x}$，我们有

$$N_3^{(1)} \ll x^{59/60}\log\log x\sum_{q\leqslant e^{2C}}\ \sum_{1\leqslant l\leqslant\pi(q)}2^l\sum_{\substack{a\leqslant x^{1/30}\\ P^+(a)=q}}1 \ll x^{59/60}(\log x)^{c_R}, \tag{3.11}$$

where $c_R > 0$ 仅取决于 R。现在我们转向 $N_3^{(2)}$。对于固定的 q和 l，我们看到 that

$$S_{q,l} := \sum_{\substack{x^{1/60}<a\leqslant x^{1/30}\\ P^+(a)=q,\,\omega(a)=l}}\frac{1}{\varphi(a)} \leqslant \sum_{\substack{a\leqslant x^{1/30}\\ P^+(a)=q,\,\omega(a)=l}}\left(\frac{a}{x^{1/60}}\right)^\delta\frac{1}{\varphi(a)}$$

$$\leqslant x^{-\delta/60}\frac{1}{(l-1)!}\left(\sum_{\substack{p<q\\ p\not\equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)}}\frac{p^\delta}{\varphi(p)}+\frac{p^{2\delta}}{\varphi(p^2)}+\ldots\right)^{l-1}\left(\frac{q^\delta}{\varphi(q)}+\frac{q^{2\delta}}{\varphi(q^2)}+\ldots\right).$$

注意， $\frac{q^\delta}{\varphi(q)} + \frac{q^{2\delta}}{\varphi(q^2)} + ... \ll_R 1/q$ 对于 $q > e^{2C}$，且对素数求和 p 等于（因为 $e^u \leqslant 1 + O_K(u)$ 对于 $0 \leqslant u \leqslant K$）

$$\sum_{\substack{p<q\\ p\not\equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)}} \frac{p^\delta}{p} + O_R(1) \leqslant \sum_{\substack{p<q\\ p\not\equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)}} \frac{1}{p} + O_R\left(\delta \sum_{\substack{p<q\\ p\not\equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)}} \frac{\log p}{p} + 1\right) \leqslant 0.5 \log\log x + B,$$

其中 $B = B(R) > 0$。因此,

$$S_{q,l} \ll_R \frac{x^{-\delta/60}}{q(l-1)!} (0.5 \log\log x + B)^{l-1}$$

and

$$N_3^{(2)} \ll_R x \sum_{\substack{e^{2C} < q \leqslant x^{1/30}\\ q\not\equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)}} \frac{x^{-\delta/60}}{q \log q} \sum_{k-\eta \leqslant l \leqslant k-1} \frac{2^l (0.5 \log\log x + B)^{l-1}}{(l-1)!} \tag{3.12}$$

$$\ll \frac{x(\log\log x + 2B)^{k-1}}{(k-1)!} \sum_{q \leqslant x^{1/30}} \frac{x^{-\delta/60}}{q \log q} \left(1 + R + ... + R^{[\eta]}\right).$$

利用不等式

$$1 + R + \ldots + R^{[\eta]} \leqslant (R+2)^{\eta+1}$$

以及这一事实，即

$$(R+2)^\eta x^{-\delta/60} = x^{-1/\log q},$$

（这由 η 和 δ 的定义(3.8) 和(3.10)分别可得），我们看到，(3.12) 中对素数 q 的求和至多为

$$(R+2) \sum_{q \leqslant x^{1/30}} \frac{(R+2)^\eta x^{-\delta/60}}{q \log q} \leqslant (R+2) \sum_{q \leqslant x^{1/2}} \frac{x^{-1/\log q}}{q \log q}$$

$$\leqslant \frac{R+2}{\log x} \sum_{j \geqslant 1} \sum_{q \in \left(x^{2^{-(j+1)}}, x^{-2^j}\right]} \frac{1}{q} 2^{j+1} \exp(-2^j) \ll_R \frac{1}{\log x}.$$

将其代入 (3.12)，并考虑到 (3.11)，我们得到的是

$$N_3 \ll_R \frac{x(\log\log x + 2B)^{k-1}}{(k-1)! \log x}. \tag{3.13}$$

结合 (3.4)、(3.6)、(3.7) 和 (3.13)，证明即告完成。 □

4. 定理1.1的证明

将每个 $p \leqslant x$ 写成 $p - 1 = ab$ 的形式，其中 $P^+(a) \leqslant x^{1/40}$ 且 $P^-(b) > x^{1/40}$,，我们可以将和 $\Phi(x)$ 改写为

$$\Phi(x) = \sum_{\substack{a \leqslant x\\ P^+(a) \leqslant x^{1/40}}} \frac{1}{\tau(a)} \sum_{\substack{b \leqslant \frac{x-1}{a}\\ P^-(b) > x^{1/40}\\ ab+1 \text{ prime}}} \frac{1}{\tau(b)}.$$

设 $b = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$是 b 的素因数分解。那么

$$x^{(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_s)/40} < b \leqslant x,$$

因此， $\alpha_1 + \dots + \alpha_s < 40$ 和

$$\tau(b) = (\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_s + 1) \leqslant 2^{\alpha_1+\dots+\alpha_s} < 2^{40}.$$

因此,

$$\Phi(x) \geqslant 2^{-40} \sum_{\substack{a \leqslant x \\ P^+(a) \leqslant x^{1/40}}} \frac{1}{\tau(a)} \sum_{\substack{b \leqslant \frac{x-1}{a} \\ P^-(b) > x^{1/40} \\ ab+1 \text{ prime}}} 1 \geqslant 2^{-40} \sum_{\substack{a \leqslant x^{1/40} \\ a \text{ even}}} \frac{1}{\tau(a)} F_a(x).$$

引理 3.2 意味着

$$\Phi(x) \geqslant \frac{c_2 \pi(x)}{\log x} \sum_{\substack{a \leqslant x^{1/40} \\ a \text{ even}}} \frac{1}{\tau(a)\varphi(a)} - R_2, \tag{4.1}$$

其中 $c_2 > 0$ 和

$$0 \leqslant R_2 \leqslant \sum_{a \leqslant x^{1/40}} \sum_{d \leqslant x^{13/40}} |R(x; ad, 1)| \leqslant \sum_{q \leqslant x^{7/20}} \tau(q) |R(x; q, 1)|.$$

Using 平凡界 $|R(x;\ q, 1)| \ll x/q$ 以及柯西-施瓦茨不等式，我们 g et

$$R_2 \ll x^{1/2} \sum_{q \leqslant x^{0.35}} \frac{\tau(q)}{q^{1/2}} (|R(x; q, 1)|)^{1/2} \leqslant x^{1/2} \left(\sum_{q \leqslant x^{0.35}} \frac{\tau^2(q)}{q} \right)^{1/2} \left(\sum_{q \leqslant x^{0.35}} |R(x; q, 1)| \right)^{1/2}.$$

应用该界

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\tau^2(n)}{n} \asymp (\log x)^4,$$

由部分求和和 Bombieri–Vinogradov 定理可知，这可由 $\sum_{n \leqslant x} \tau^2(n) \asymp x(\log\ x)^3$ （见 [9], 第三章，习题 7 ）推出；因此，对于任意固定的 $A > 0$,

$$R_2 \ll_A x^{1/2} (\log x)^2 \frac{x^{1/2}}{(\log x)^{A/2}} = \frac{x}{(\log x)^{A/2-2}}.$$

取 $A = 24$ （比如说），我们得到

$$R_2 \ll \frac{x}{(\log x)^{10}}. \tag{4.2}$$

现在我们转而讨论这个和

$$T_1 = \sum_{\substack{a \leqslant x^{1/40} \\ a \text{ even}}} \frac{1}{\tau(a)\varphi(a)} = \sum_{l \leqslant 0.5x^{1/40}} \frac{1}{\tau(2l)\varphi(2l)}.$$

由于 $\tau(mn) \leqslant \tau(m)\tau(n)$ 和 $\varphi(n) \leqslant n$，我们可以看出。

$$T_1 \gg \sum_{l \leqslant 0.5x^{1/40}} \frac{1}{\tau(l) l}.$$

由（1.1）和分部求和可得

$$T_1 \gg (\log x)^{1/2}.$$

将此与（4.1）和（4.2）结合，我们得到

$$\Phi(x) \gg \frac{\pi(x)}{(\log x)^{1/2}} - O\left(\frac{x}{(\log x)^{10}}\right) \gg \frac{x}{(\log x)^{3/2}}.$$

现在该结论便得证。

5. Proof of Theorem 1.2

我们首先证明下界。对于任意 $z \geqslant 2$,

$$F(x) = \sum_{n \leqslant x} \frac{1}{\tau(n^2+1)} = \sum_{\substack{ab = n^2+1,\, n \leqslant x \\ P^+(a) \leqslant z,\, P^-(b) > z}} \sum \frac{1}{\tau(ab)}.$$

令 $z = x^{1/30}$, , 我们有 $\tau(b) \leqslant 2^{60}$，现在根据引理 3.3,

$$F(x) \geqslant 2^{-60} \sum_{\substack{a \leqslant x^{1/30} \\ a \in \mathcal{M}}} \frac{1}{\tau(a)} W_a\left(x, x^{1/30}\right) \gg \frac{x}{\log x} \sum_{\substack{a \leqslant x^{1/30} \\ a \in \mathcal{M}}} \frac{2^{\omega(a)}}{\tau(a)\varphi(a)}$$

$$\geqslant \frac{x}{\log x} \sum_{\substack{a \leqslant x^{1/30} \\ a \in \mathcal{M} \\ a \text{ square-free}}} \frac{1}{a} = \frac{x}{\log x} \sum_{\substack{a \leqslant x^{1/30} \\ a \in \mathcal{M}}} \frac{1}{a} \sum_{\delta^2 \mid a} \mu(\delta).$$

交换求和顺序，并利用 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$，我们有 ve

$$F(x) \gg \frac{x}{\log x} \sum_{\substack{\delta \leqslant x^{1/60} \\ \delta \in \mathcal{M}}} \frac{\mu(\delta)}{\delta^2} \sum_{\substack{a \leqslant x^{1/30} \delta^{-2} \\ a \in \mathcal{M}}} \frac{1}{a} \geqslant \left(2 - \frac{\pi^2}{6}\right) \frac{x}{\log x} \sum_{\substack{a \leqslant x^{1/30} \\ a \in \mathcal{M}}} \frac{1}{a}. \tag{5.1}$$

众所周知（见 [5], §183），对于 $y \geqslant 2$，有

$$\#\{a \leqslant y : p \mid a \Rightarrow p \equiv 1 \pmod 4\} \asymp \frac{y}{(\log y)^{1/2}}.$$

通过分部求和,

$$\sum_{\substack{a \leqslant y \\ p \mid a \Rightarrow p \equiv 1 \pmod 4}} \frac{1}{a} \asymp (\log y)^{1/2}.$$

现在结论由 (5.1) 得出。

现在我们证明上界。由引理 3.4,

$$F(x) \leqslant \sum_{n \leqslant x} \frac{1}{2^{\omega(n^2+1)}} = \sum_{k \leqslant 2 \log\log x} \frac{\#\{n \leqslant x : \omega(n^2+1) = k\}}{2^k} + O\left(\sum_{k > 2\log\log x} \frac{x}{2^k}\right)$$

$$\ll \frac{x}{\log x} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(0.5 \log\log x + 0.5B)^{k-1}}{(k-1)!} + O\left(\frac{x}{\log x}\right) \ll \frac{x}{(\log x)^{1/2}}.$$

证明至此完成。

参考文献

[1] E. Bombieri，J. B. Friedlander，H. Iwaniec，《大模数等差数列中的素数》，《数学学报》357 (1985)，第 51–76 页。[2] K. Ford，H. Halberstam，《布伦–胡利筛法》，《数论杂志》(2000) 81，第 335–350 页。[3] H. Halberstam，《蒂奇马什–林尼克除数问题补注》，《美国数学会会刊》18 (1967)，第 187–188 页。[4] V. V. Iudelevich，《关于卡拉楚巴除数问题》，《俄罗斯科学院通报》(2022)，86(5)，第 169–196 页（俄文），arXiv:2304.03049。[5] E. Landau，B. G. Teubner，《素数分布理论手册》，2 卷，莱比锡–柏林，(1909)，x¨ix+961 页。[6] Y. V. Linnik，《二元加法问题中色散方法的新版本与新用途》，载于《科学院院报》，(1961)，第 137 卷，第 6 期，第 1299–1302 页，俄罗斯科学院。[7] P. Pollack，《筛选集上的非负乘法函数及移位素数模 -1 的平方根》，《格拉斯哥数学杂志》(2020) 62，第 187–199 页。[8] M. B. Barban，P. P. Vekhov，《多项式的乘法函数求和》，《数学札记》，(1969)，5(6)，第 400–407 页。[9] K. Prachar，《素数分布》，第 23 卷，柏林，1957。[10] S. Ramanujan，《数的解析理论中的若干公式》，《数学通讯》(1916) 45，第 81–84 页。[11] J. B. Rosser，L. Schoenfeld，《素数函数的近似公式》，《伊利诺伊数学杂志》(1962) 6(1)，第 64–94 页。[12] G. Tenenbaum，《关于素因子个数函数的联合局部定律的注记》，《数论杂志》(2018) 182，第 88–95 页。[13] E. C. Titchmarsh，《一个除数问题》，《巴勒莫科学院报告》(1930) 54，第 414–429 页。[14] S. Uchiyama，《关于若干涉及素数的乘积》，《美国数学会会刊》(1971) 28(2)，第 629–630 页。

斯捷克洛夫数学研究所，俄罗斯莫斯科古布金街8号，邮编119991，电子邮箱：gabdullin.mikhail@yandex.ru 莫斯科国立大学，俄罗斯莫斯科列宁山街1号，邮编119991，电子邮箱：vitaliiyudelevich@mail.ru 斯捷克洛夫数学研究所，俄罗斯莫斯科古布金街8号，邮编119991，电子邮箱：konyagin@mi-ras.ru