arXiv:2304.04823v1 [math.AP] 10 Apr 2023

正则化非线性薛定谔方程中的黑孤子¨动力学

DMITRY E. PELINOVSKY 和 MICHAEL PLUM

Abstract. 我们考虑一族正则化的散焦非线性薛定谔（非线性薛定谔方程）方程，这类方程是在具有有界色散关系的三次非线性薛定谔方程背景下提出的。若黑孤子在索o6列夫空间 $H^s(\mathbb{R})$ 中受到满足 $s > \frac{1}{2}$ 的小扰动，其时间演化适定。我们证明，当正则化参数低于（高于）某个明确给出的阈值时，黑孤子是谱稳定（不稳定）的。我们采用数值有限差分法，展示受扰黑孤子的稳定与不稳定动力学。由于能量守恒与动量守恒所对应的函数空间不匹配，黑孤子的轨道稳定性问题仍未解决。

1. 引言

暗孤子是在连续波背景上稳定传播的凹陷波。这个名称源自非线性光学领域：连续波背景承载着强度恒定的光，而暗孤子在传输过程中会降低光强 [15, 21]。暗孤子家族中最极端的情形是黑孤子，其光强降至零，且波在空间上局域化、速度为零。这类驻波常见于一维、二维和三维空间中的许多非线性光学与玻色–爱因斯坦凝聚模型 [14]。

暗孤子和黑孤子的典型模型是散焦型非线性薛定谔（非线性薛定谔方程）方程

$$i\psi_t + \psi_{xx} - 2|\psi|^2\psi = 0, \tag{1.1}$$

其中 $\psi(t,x) : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{C}$。暗孤子的精确行波解为

$$\psi(t,x) = [\gamma \tanh(\gamma(x-2ct)) + ic]\, e^{-2it}, \quad \gamma := \sqrt{1-c^2}, \tag{1.2}$$

其中 $c \in (-1,1)$ 是半波速度的自由参数。当 $c = 0$ 时，暗孤子$\psi(t,x) = \tanh(x)e^{-2it}$ 称为黑孤子。

与标准非线性薛定谔方程(1.1) 相比，我们研究以下一族正则- 化的散焦非线性薛定谔方程

$$i(1-\mu^2\partial_x^2)\psi_t + \psi_{xx} - 2|\psi|^2\psi = 0, \tag{1.3}$$

其中 $\psi(t,x)$: $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{C}$，而 $\mu > 0$ 是一个小参数。该模型是在非线性光学中针对超短脉冲提出的 [6, 16] （见 [8, 第4.1.4节，公式（72）]），作为具有有界色散关系的非线性薛定谔方程的一个示例。该模型的线性部分具有色散关系

$$\omega(k) = \frac{k^2}{1+\mu^2k^2}, \quad k \in \mathbb{R},$$

对于傅里叶模态 $u(t,x) \sim e^{ikx-i\omega(k)t}$得到。与规范模型（1.1）相比，附加项 $-i\mu^2\psi_{txx}$ 导致(1.3)区间内有界的色散关系

日期：2023年4月12日。

$[0, \mu^{-2}]$ 对于频率 ω。这种色散关系的正则化方式在流体动力学模型中很常见，在这些模型中，经典的科尔特韦格–德弗里斯方程被正则化的本杰明–博纳–马奥尼方程 [3] 所取代。

我们主要关注黑孤子的稳定性，它是具有非零边界条件的散焦非线性薛定谔方程（1.3）的驻波解。如果黑孤子在时间演化中是稳定的，正如标准非线性薛定谔方程（1.1）中已知的那样 [4, 5, 9, 12, 13, 18], ，那么它将在空间调制周期波中作为信息载体发挥重要作用 [17, 20]（参见 [1] 中的综述）。

为了研究模型 (1.3) 的黑孤子，我们不失一般性地将边界条件归一化为 1，并考虑满足以下条件的解。

$$|\psi(t,x)| \to 1 \quad \text{as} \quad |x| \to \infty.$$

通过变换

$$\psi(t,x) = e^{-2it} u(t,\xi), \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{1-2\mu^2}}, \tag{1.4}$$

非线性薛定谔方程 (1.3) 可改写为等价形式：

$$i(1-\epsilon^2\partial_\xi^2)u_t + u_{\xi\xi} + 2(1-|u|^2)u = 0, \tag{1.5}$$

其中

$$\epsilon := \frac{\mu}{\sqrt{1-2\mu^2}}.$$

当 $\mu \in (0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ 时，映射 $\mu \to \epsilon$ 单调递增，且当 $\mu \to \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时趋于 $\epsilon \to \infty$。 —

黑孤子是变换后的非线性薛定谔方程(1.5) 的稳态（与时间无关）解。其显式形式为 $u(t,\xi) = \varphi(\xi) := \tanh(\xi)$，这与散焦非线性薛定谔方程(1.1) 的黑孤子相同，在 $c = 0$ 时由 (1.2) 给出。

正则化模型 (1.5) 的局部适定性可以在具有无穷远处非零边界条件的有界光滑函数空间中研究。一种一般方法是考虑分解 $u(t, \xi) = \varphi(\xi) + v(t, \xi)$，其中扰动 $v(t, \cdot)$ 是关于空间坐标 [10, 11, 22] 的索博列夫空间中 t 的连续函数。这是我们在以下定理中陈述的第一个结果。

定理 *1.* 对于每个 $v_0 \in H^s(\mathbb{R})$ 且满足 $s > \frac{1}{2}$ 的情形，存在最大存在时间 $\tau_0 \in (0, \infty]$ 以及非线性薛定谔方程（*1.5*）具有如下形式 $u = \varphi + v$ 的唯一解，其中 $\varphi(\xi) = \tanh(\xi)$ 且 $v \in C^1([0, \tau_0), H^s(\mathbb{R}))$，使得 $v(0, \cdot) = v_0$。此外，$\tau_0 \in (0, \infty]$ 以及 $v \in C^1([0, \tau_0), H^s(\mathbb{R}))$ 关于 $v_0 \in H^s(\mathbb{R})$ 连续依赖。

将定理 1 中的解 u 替换为 $\varphi + v$，其中 $\varphi(\xi) = \tanh(\xi)$ 是黑孤子，而 $v := U + iV$ 是一个小扰动，这使我们能够在线性化近似的层面上重新表述黑孤子的稳定性。分离实部 U 和虚部 V 可得以下线性化方程：

$$(1-\epsilon^2\partial_\xi^2)U_t = L_- V, \qquad (1-\epsilon^2\partial_\xi^2)V_t = -L_+ U, \tag{1.6}$$

其中，线性算子 $L_\pm$ in $L^2(\mathbb{R})$，其定义域为 $\mathrm{Dom}(L_\pm) \subset L^2(\mathbb{R})$，由以下微分表达式定义。

$$L_+ = -\partial_\xi^2 + 6\varphi^2 - 2,$$
$$L_- = -\partial_\xi^2 + 2\varphi^2 - 2.$$

对系统 (1.6) 进行分离变量，得到如下形式的谱稳定性问题

$$\begin{bmatrix} 0 & L_- \\ -L_+ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \lambda(1-\epsilon^2\partial_\xi^2) \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} L_-V &= \lambda(1-\epsilon^2\partial_\xi^2)U, \\ -L_+U &= \lambda(1-\epsilon^2\partial_\xi^2)V. \end{aligned} \tag{1.7}$$

对于固定的 $\epsilon \neq 0$，在 $H^1_\epsilon(\mathbb{R}) \times H^1_\epsilon(\mathbb{R})$ 中，其中$H^1_\epsilon(\mathbb{R})$ 是配备相应内积的希尔伯特空间

$$(f,g)_\epsilon := \int_{\mathbb{R}} \left[\bar{f}g + \epsilon^2 \bar{f}'g'\right] d\xi. \tag{1.8}$$

以及诱导范数 $\|\cdot\|_\epsilon := \sqrt{(\cdot,\cdot)_\epsilon}$。固定 $\epsilon \neq 0$ 时，希尔伯特空间 $H^1_\epsilon(\mathbb{R})$ 等价于 $H^1(\mathbb{R})$，后者是 L_+ 在 $L^2(\mathbb{R})$中的型定义域，并且是 L_-在 $L^2(\mathbb{R})$中的型定义域的子集。$L^2(\mathbb{R})$中的内积和范数分别对应于 $\epsilon = 0$，因此我们使用记号 $(\cdot,\cdot)$ 和 $\|\cdot\|$，而不使用 $(\cdot,\cdot)_0$ 和 $\|\cdot\|_0$。

谱稳定性问题 (1.7) 的本质谱可以在极限$|\xi| \to \infty$ 中求得，因为 $|\varphi(\xi)| \to 1$ 以指数速度趋于零。通过使用傅里叶变换，我们发现本质谱位于

$$\sigma_c = \left\{ ik\frac{\sqrt{4+k^2}}{1+\epsilon^2k^2}, \quad k \in \mathbb{R} \right\} = i[-\epsilon^{-2}, \epsilon^{-2}]. \tag{1.9}$$

因此，本质谱是中性稳定的，黑孤子的稳定性或不稳定性取决于位于 λ σ_c之外的孤立特征值。

注 1. 如果谱问题 *(1.7)* 存在一个孤立特征值 $\lambda_0 \in \mathbb{C}$，且其对应的特征函数为 (U,V) $\in H^1(\mathbb{R})\times H^1(\mathbb{R})$，满足$\mathrm{Re}(\lambda_0) > 0$，则称黑孤子 φ 谱不稳定。若不存在这样的特征值，则黑孤子谱稳定。

注 2. $i\mathbb{R}\backslash\sigma_c$ 上可能存在孤立特征值，但此类特征值不会导致黑孤子的谱不稳定性。

我们的第二个结果是以下稳定性定理，也是本文的主要结果。

定理 2. 设 $\epsilon_0 = (5/8)^{1/4}$。当 $\epsilon \in (0,\epsilon_0]$ 时，黑孤子谱稳定；当 $\epsilon \in (\epsilon_0,\infty)$ 时，谱不稳定。

注 3. 稳定性阈值 $\epsilon_0 = (5/8)^{1/4}$ 约为 $\epsilon_0 \approx 0.89$。鉴于变换 *(1.4)*，原始非线性薛定谔模型 *(1.3)* 中的稳定性阈值为

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}+2\sqrt{5}}} \approx 0.5534.$$

黑孤子在 $\mu \in (0,\mu_0)$ 下轨道稳定，并在 $\mu \in (\mu_0,\mu_1)$下轨道不稳定，其中 $\mu_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.7071$。

将定理2的谱稳定性推广为黑孤子的轨道稳定性是很有吸引力的，这与标准非线性薛定谔方程(1.1) 中的 [4, 9, 13]类似。黑孤子的轨道稳定性证明也针对其他非线性薛定谔模型进行了发展，例如五次非线性薛定谔方程 [2], 、耦合非线性薛定谔系统 [7], 以及具有强度依赖色散的非线性薛定谔方程 [19]。轨道稳定性通常借助守恒量加以证明。我们的第三项结果明确了正则化非线性薛定谔方程 (1.5) 的守恒量。

定理 3。 设 $u = \varphi + v$ 满足 $v \in C^1([0,\tau_0)\ H^s(\mathbb{R}))$ 是定理 *1* 中满足 $s > \frac{1}{2}$ 的局部解。那么，能量

$$E(u) = \int_{\mathbb{R}} \left[|u_\xi|^2 + (1-|u|^2)^2 \right] d\xi. \tag{1.10}$$

和动量

$$P(u) = i \int_{\mathbb{R}} \left[(\bar{u} u_\xi - \bar{u}_\xi u) + \epsilon^2 (\bar{u}_\xi u_{\xi\xi} - \bar{u}_{\xi\xi} u_\xi) \right] d\xi. \tag{1.11}$$

分别对 $s \geq 1$ 和 $s \geq 2$ 有定义，且其值与 $t \in [0,\tau_0)$ 无关。

注 4. 除能量和动量守恒外，非线性薛定谔方程 *(1.5)* 还满足质量守恒，

$$M(u) = \int_{\mathbb{R}} \left[\epsilon^2 |u_\xi|^2 + |u|^2 - 1 \right] d\xi, \tag{1.12}$$

若解 $u = \varphi + v$ 满足 $v \in C^1([0,\tau_0)\ H^s(\mathbb{R}))$，且 $s \geq 1$ 满足 $v(t,\cdot) \in L^1(\mathbb{R})$，对于 $t \in [0,\tau_0)$。质量守恒在标准非线性薛定谔方程 *(1.1)* [4, 13] 中黑孤子的轨道稳定性证明中不起任何作用。

注 5。 由于能量空间与动量空间之间存在不匹配，正则化非线性薛定谔方程 *(1.5)* 中黑孤子的轨道稳定性证明仍是一个开放问题。能量论证只能在带有指数权 [13], 的加权 $H^1(\mathbb{R})$ 空间中控制扰动；由于与线性化算子 L_- 相关的二次型不具强制性，因此需要使用该权，另见 [2, 7, 19]。然而，动量守恒在加权 $H^1(\mathbb{R})$ 空间中未定义，而且能量论证无法控制加权 $H^2(\mathbb{R})$ 空间中的扰动。

本文其余部分安排如下。第 2 节给出定理 1 和定理 3 的证明。第 3 节专门用于证明定理 2。第 4 节包含扰动黑孤子的稳定动力学和不稳定动力学的数值示例。第 5 节对全文进行总结，并讨论未来的研究方向。

2. Local well-posedness and conserved quantities

令 $u = \varphi + v$，其中 $\varphi(\xi) = \tanh(\xi)$，并将非线性薛定谔方程 (1.5) 化为演化形式：

$$v_t = i(1-\epsilon^2\partial_\xi^2)^{-1} \left[v_{\xi\xi} + 2(1-2\varphi^2)v - 2\varphi^2\bar{v} - 2\varphi(v^2+2|v|^2) - 2|v|^2 v \right], \tag{2.1}$$

其中我们利用了由 $\varphi(\xi) = \tanh(\xi)$ 满足的 $\varphi'' + 2(1-\varphi^2)\varphi = 0$。根据以下论证，定理 1 可由压缩映射原理得出。

定理 *1* 的证明。 我们回顾一下，若 $s > \frac{1}{2}$，则 $H^s(\mathbb{R})$ 关于逐点乘法构成一个巴拿赫代数。因此，

$$F(v) := v_{\xi\xi} + 2(1-2\varphi^2)v - 2\varphi^2\bar{v} - 2\varphi(v^2+2|v|^2) - 2|v|^2 v$$

是从 $H^s(\mathbb{R})$ 到 $H^{s-2}(\mathbb{R})$ 的有界算子，而对于每个 $\epsilon > 0$，$(1-\epsilon^2\partial_\xi^2)^{-1}$ 是从 $H^{s-2}(\mathbb{R})$ 到 $H^s(\mathbb{R})$ 的有界算子。由演化方程 (2.1) 的积分形式和压缩映射原理可知，对于充分小的 $t_0 > 0$，存在一个局部解 $v \in C^0([0,t_0],\ H^s(\mathbb{R}))$。此外，由于算子 $i(1-\epsilon^2\partial_\xi^2)^{-1}F : H^s(\mathbb{R}) \to H^s(\mathbb{R})$ 在 $H^s(\mathbb{R})$ 的有限半径球内有界，因此解 v 属于 $C^1([0,t_0],\ H^s(\mathbb{R}))$。将局部解平滑地延拓至最大存在时间 $\tau_0 > 0$（可能有限，也可能无限），便得到定理 1 中的解 $v \in C^1([0,\tau_0)\ H^s(\mathbb{R}))$。

$v \in C^1([0,t_0], H^s(\mathbb{R}))$ 对 $v_0 \in H^s(\mathbb{R})$ 的连续依赖性由压缩映射原理通过标准的 Gronwall 估计得到。将这些估计迭代至最大存在时间，我们得到 $\tau_0 \in (0,\infty]$ 和 $v \in C^1([0,\tau_0)\ H^s(\mathbb{R}))$ 对 $v_0 \in H^s(\mathbb{R})$ 的连续依赖性。□

利用变换 $u = \varphi + v$，由 (1.10)、(1.11) 和 (1.12) 可得:

$$E(\varphi+v) = E(\varphi) + \hat{E}(v),$$
$$P(\varphi+v) = P(\varphi) + \hat{P}(v),$$
$$M(\varphi+v) = M(\varphi) + \hat{M}(v),$$

with

$$\hat{E}(v) = \int_{\mathbb{R}} [|v_\xi|^2 - 2(1-2\varphi^2)|v|^2 + \varphi^2(v^2+\bar{v}^2) + 2\varphi|v|^2(v+\bar{v}) + |v|^4]d\xi,$$
$$\hat{P}(v) = i\int_{\mathbb{R}} [2\varphi'(\bar{v}-v) + (\bar{v}v_\xi - \bar{v}_\xi v) + 2\epsilon^2\varphi''(\bar{v}_\xi - v_\xi) + \epsilon^2(\bar{v}_\xi v_{\xi\xi} - \bar{v}_{\xi\xi}v_\xi)]d\xi,$$
$$\hat{M}(v) = \int_{\mathbb{R}} [(\varphi - \epsilon^2\varphi'')(v+\bar{v}) + \epsilon^2|v_\xi|^2 + |v|^2]d\xi,$$

其中我们利用了 $\varphi'' + 2(1-\varphi^2)\varphi = 0$。定理 3 的证明通过对非线性薛定谔方程 (2.1) 进行具体计算得到。

ˆ定理 *3*的证明。能量泛函 $E(v): H^s(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ 在 v 和 $\bar{v}$ 上关于 $s \geq 1$是光滑的。演化方程 (2.1) 可以写成哈密顿形式

$$\frac{dv}{dt} = -i(1-\epsilon^2\partial_\xi^2)^{-1}\nabla_{\bar{v}}\hat{E}(v), \tag{2.2}$$

其中 $\nabla_{\bar{v}}E(v) = -F(v)$是 $E(v)$关于 $\bar{v}$的变分导数。由于 $(1-\epsilon^2\partial_\xi^2)^{-1}: L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$是自伴的，因此对于满足 $s \geq 1$ 的解 $v \in C^1([0,\tau_0)\ H^s(\mathbb{R}))$，能量ˆ$E(v)$随时间 $t \in [0,\tau_0)$保持不变；该解由定理 1保证存在。

ˆ 动量泛函 $P(v): H^s(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ 在 v 和 $\bar{v}$ 上光滑，其中 $s \geq 2$。为证明其守恒，我们考虑解 $v \in C^1([0,\tau_0)\ H^s(\mathbb{R}))$，其中 $s \geq 2$，该解由ˆ 定理 1 保证存在。由于 $P(\varphi) = 0$，我们可以等价地处理 $P(u) = P(v)$。对 (1.5) 关于 ξ 求导，乘以 $\bar{u}$，加上其复共轭，并对 ξ 在 $\mathbb{R}$ 上积分，得到:

$$i\int_{\mathbb{R}} \left[\bar{u}(1-\epsilon^2\partial_\xi^2)u_{t\xi} - u(1-\epsilon^2\partial_\xi^2)\bar{u}_{t\xi}\right] d\xi$$
$$+ \int_{\mathbb{R}} \left[\bar{u}u_{\xi\xi\xi} + u\bar{u}_{\xi\xi\xi}\right] d\xi + 2\int_{\mathbb{R}} \left[\bar{u}u_\xi + u\bar{u}_\xi - 3|u|^2(|u|^2)_\xi\right] d\xi = 0.$$

将 (1.5) 乘以 $\bar{u}_\xi$，再加上其复共轭，并对 $\mathbb{R}$ 上的 ξ 积分，得到

$$i\int_{\mathbb{R}} \left[\bar{u}_\xi(1-\epsilon^2\partial_\xi^2)u_t - u_\xi(1-\epsilon^2\partial_\xi^2)\bar{u}_t\right] d\xi$$
$$+ \int_{\mathbb{R}} \left[\bar{u}_\xi u_{\xi\xi} + u_\xi\bar{u}_{\xi\xi}\right] d\xi + 2\int_{\mathbb{R}} \left[\bar{u}_\xi u + u_\xi\bar{u} - |u|^2(|u|^2)_\xi\right] d\xi = 0.$$

ˆ 将两个方程相减并分部积分，可得 $P(u) = P(v)$ 关于时间 $t \in [0,\tau_0)$ 的守恒。□

ˆ注 *6.* 在附加条件 $v \in L^1(\mathbb{R})$ 下，质量泛函 $M(v): H^s(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ 关于 v 和 $\bar{v}$ 光滑，其中 $s \geq 1$，因为当 $\xi \to \pm\infty$ 时，$\varphi(\xi) \to \pm 1$。假设对于 $s \geq 1$，解 $v \in C^1([0,\tau_0)$ $H^s(\mathbb{R}))$ 存在且满足 $v(t,\cdot) \in L^1(\mathbb{R})$，其中 $t \in [0,\tau_0$，则我们可以如下证明 $M(v)$ 的守恒。将 *(1.5)* 乘以 $\bar{u}$，减去其复共轭，并对 ξ 在 $\mathbb{R}$ 上积分，得到

$$i\int_{\mathbb{R}} \left[\bar{u}(1-\epsilon^2\partial_\xi^2)u_t + u(1-\epsilon^2\partial_\xi^2)\bar{u}_t\right] d\xi + \int_{\mathbb{R}} \left[\bar{u}u_{\xi\xi} - u\bar{u}_{\xi\xi}\right] d\xi = 0.$$

分部积分给出了 $M(u)$ 在 *tme* $t \in [0,\tau_0)$中的守恒。

3. Spectral stability and instability of the black soliton

为了证明定理 2，我们首先阐明薛定谔算子 $L_+: \mathrm{Dom}(L_+) \subset L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$的谱性质，其中 $L_+ = -\partial_\xi^2 + 6\varphi^2 - 2 = -\partial_\xi^2 + 4 - 6\,\mathrm{sech}^2(\xi)$。众所周知，任何具有有界势的薛定谔算子都可以延拓到其型定义域，因此我们可以写作 $L_+ : H^1(\mathbb{R}) \to H^{-1}(\mathbb{R})$。类似地，我们可以考虑有界算子$(1-\epsilon^2\partial_\xi^2)^{-1/2}: L^2(\mathbb{R}) \to H^1(\mathbb{R})$ 和$(1-\epsilon^2\partial_\xi^2)^{-1/2}: H^{-1}(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$。通过复合上述三个算子，我们得到一个有界算子

$$\mathcal{L}_+ = (1-\epsilon^2\partial_\xi^2)^{-1/2} L_+ (1-\epsilon^2\partial_\xi^2)^{-1/2} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}).$$

L_+ 的强制性：$H^1(\mathbb{R}) \to H^{-1}(\mathbb{R})$ 和 $\mathcal{L}_+ : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ 由以下引理得出。

引理 3.1. 存在 $C > 0$ 使得

$$\langle L_+U, U\rangle \geq C\|U\|^2, \quad \text{for every } U \in H^1(\mathbb{R}): \ (U,\varphi') = 0 \tag{3.1}$$

and

$$(\mathcal{L}_+W, W) \geq C\|W\|^2, \quad \text{for every } W \in L^2(\mathbb{R}): \ (W, W_0) = 0, \tag{3.2}$$

其中 $\langle L_+U, U\rangle$ 是 *t he* $L_+U \in H^{-1}(\mathbb{R})$在 $U \in H^1(\mathbb{R})$上的对偶作用，以及 $W_0 := (1-\epsilon^2\partial_\xi^2)^{1/2}\varphi'$。

证明。由于平移不变性以及 $\varphi'(\xi) \to 0$ 在 $|\xi| \to \infty$时的指数衰减，我们有 $L_+\varphi' = 0$ 和 $\varphi' \in H^1(\mathbb{R})$。由于对所有 $\xi \in \mathbb{R}$，$\varphi'(\xi) > 0$，因此 L_+ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中的零特征值是最低特征值，并且与 $L^2(\mathbb{R})$ 中其余谱之间存在间隙。谱定理推出强制性界 (3.1)。

通过变换 $U = (1-\epsilon^2\partial_\xi^2)^{-1/2}W$，其中 $W \in L^2(\mathbb{R})$，我们得到 $\mathcal{L}_+W_0 = 0$，其中 $W_0 := (1-\epsilon\partial_\xi^2)^{1/2}\varphi' \in L^2(\mathbb{R})$。$\mathcal{L}_+$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中的零特征值与 $\mathcal{L}_+$ 的连续谱之间由一个间隙隔开：

$$\sigma_c(\mathcal{L}_+) = \left\{ \frac{4+k^2}{1+\epsilon^2k^2}, \ k \in \mathbb{R} \right\} = \begin{cases} [4, \epsilon^{-2}], & \epsilon \in (0, \frac{1}{2}), \\ [\epsilon^{-2}, 4], & \epsilon \in (\frac{1}{2}, \infty) \end{cases}$$

$L^2(\mathbb{R})$ 中的强制性界（3.1）意味着 $H^1(\mathbb{R})$ 中存在强制性界，即：

$$(L_+U, U) \geq C\|U\|_\epsilon^2, \quad \text{for every } U \in H^1(\mathbb{R}): \ (U,\varphi') = 0.$$

由于对于 $U = (1-\epsilon^2\partial_\xi^2)^{-1/2}W$，$(L_+U,\ U) = (\mathcal{L}_+W,\ W)$、$\|U\|_\epsilon^2 = \|W\|^2$，且 $(U,\ \varphi') = (W,\ W_0)$，因此该界等价于（3.2）。□

根据引理 3.1，我们可以定义约束算子

$$\mathcal{T}_+ := \mathcal{L}_+|_{\{W_0\}^\perp} \ : \ L^2(\mathbb{R})|_{\{W_0\}^\perp} \mapsto L^2(\mathbb{R})|_{\{W_0\}^\perp},$$

得益于界（3.2），$\mathcal{T}_+$ 可逆且严格为正，并且其有界且严格为正的逆为 $\mathcal{T}_+^{-1}$。

除了引理 3.1，我们还需要对薛定谔算子 $L_-: \mathrm{Dom}(L_-) \subset L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ 进行一项技术性计算，其中 $L_- = -\partial_\xi^2 + 2\varphi^2 - 2 = -\partial_\xi^2 - 2\,\mathrm{sech}^2(\xi)$。以下引理给出了这项技术性计算。

引理 3.2。 线性非齐次方程

$$L_- V_\varphi = (1 - \epsilon^2 \partial_\xi^2)\varphi' \tag{3.3}$$

存在唯一的偶函数且有界的解 V_φ 满足

$$(\varphi', V_\varphi)_\epsilon = -1 + \frac{8}{5}\epsilon^4.$$

因此 $(\varphi',\ V_\varphi)_\epsilon \le 0$ 如果 $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$ 且 $(\varphi', V_\varphi)_\epsilon > 0$ 如果 $\epsilon \in (\epsilon_0, \infty)$, 其中 $\epsilon_0 := (5/8)^{1/4}$.

证明。 通过代换，可以将线性方程 (3.3) 的一般解 V_φ 写成显式形式:

$$V_\varphi(\xi) = -\frac{1}{2}(1 + 2\epsilon^2) + \frac{3}{2}\epsilon^2 \mathrm{sech}^2(\xi) + c_1 \tanh(\xi) + c_2 \left[\xi \tanh(\xi) - 1\right],$$

其中， c_1 和 c_2 是任意常数。若要求 V_φ 为偶函数且有界，则 $c_1 = 0$ 和 $c_2 = 0$ 分别如此。尽管 $V_\varphi \notin L^2$（$\mathbb{R}$），由于 φ'（ξ）$\to 0$ 随 $|\xi| \to \infty$ 指数衰减，内积（φ'，V_φ）$_\epsilon$ 仍有意义，且可显式计算:

$$\begin{aligned}
(\varphi', V_\varphi)_\epsilon &= \int_{\mathbb{R}} \left[(1 - 4\epsilon^2)\mathrm{sech}^2(\xi) + 6\epsilon^2 \mathrm{sech}^4(\xi)\right] \left[-\frac{1}{2}(1 + 2\epsilon^2) + \frac{3}{2}\epsilon^2 \mathrm{sech}^2(\xi)\right] d\xi \\
&= -(1 + 2\epsilon^2)(1 - 4\epsilon^2) + 2\epsilon^2(1 - 4\epsilon^2) - 4\epsilon^2(1 + 2\epsilon^2) + \frac{48}{5}\epsilon^4 \\
&= -1 + \frac{8}{5}\epsilon^4,
\end{aligned}$$

由此得到结果。 □

现在我们准备证明定理 2。

定理 *2* 的证明。根据 Fredholm 理论，如果谱问题 (1.7) 在 $H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$ 中存在解，其中 $\lambda \neq 0$，那么分量 V 满足正交条件 $(\varphi', V)_\epsilon = 0$。我们将证明，当且仅当 $\epsilon \in (\epsilon_0, \infty)$ 时，存在特征值 $\lambda_0 \in \mathbb{C} \backslash i\mathbb{R}$。由于对每个特征值 λ_0， $-\lambda_0$ 也是特征值，这就证明了该定理。

对于任意特征值 $\lambda_0 \neq 0$，对应的特征向量 $(U, V) \in H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$ 必须满足 $(\varphi', V)_\epsilon = 0$。系统 (1.7) 的第二个方程可写成如下形式

$$\mathcal{L}_+ (1 - \epsilon^2 \partial_\xi^2)^{1/2} U = -\lambda_0 (1 - \epsilon^2 \partial_\xi^2)^{1/2} V, \tag{3.4}$$

其中右端项与 $W_0 = (1 - \epsilon^2 \partial_\xi^2)^{1/2} \varphi'$ 正交，因为

$$((1 - \epsilon^2 \partial_\xi^2)^{1/2} V, W_0) = ((1 - \epsilon^2 \partial_\xi^2)^{1/2} V, (1 - \epsilon^2 \partial_\xi^2)^{1/2} \varphi') = (V, \varphi')_\epsilon = 0.$$

此外，我们有

$$((1 - \epsilon^2 \partial_\xi^2)^{1/2} U, W_0) = ((1 - \epsilon^2 \partial_\xi^2)^{1/2} U, (1 - \epsilon^2 \partial_\xi^2)^{1/2} \varphi') = (U, \varphi')_\epsilon.$$

通过要求 $(U, \varphi')_\epsilon = 0$ 在将 φ' 的一个倍数加到 U之后，可以唯一确定特征函数。按照这一约定，(3.4) 中的 $\mathcal{L}_+$ 可以替换为 $\mathcal{T}_+$ ，从而方程 (3.4) 可以写成以下形式

$$(1 - \epsilon^2 \partial_\xi^2)^{1/2} U = -\lambda_0 \mathcal{T}_+^{-1} (1 - \epsilon^2 \partial_\xi^2)^{1/2} V.$$

将此公式代入系统（1.7）的第一个方程，得到

$$L_- V = -\lambda_0^2 (1-\epsilon^2\partial_\xi^2)^{1/2} \mathcal{T}_+^{-1} (1-\epsilon^2\partial_\xi^2)^{1/2} V.$$

由于该特征值问题是自伴的，且根据引理 3.1，$(1-\epsilon^2\partial_\xi^2)^{1/2}\mathcal{T}_+^{-1}(1-\epsilon^2\partial_\xi^2)^{1/2}$：$H^1(\mathbb{R}) \to H^{-1}(\mathbb{R})$ 是严格正定算子，因此我们得到 $\lambda_0^2 \in \mathbb{R}$，即 $\lambda_0 \in \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$。因此，$\lambda_0$ 是 $\mathbb{C}\backslash i\mathbb{R}$ 中的一个特征值，当且仅当 $-\lambda_0^2 < 0$。由此，这样的特征值存在当且仅当

$$\inf_{\substack{V \in H^1_\epsilon(\mathbb{R})\backslash\{0\} \\ (\varphi', V)_\epsilon = 0}} \frac{\langle L_- V, V\rangle}{\langle (1-\epsilon^2\partial_\xi^2)^{1/2}\mathcal{T}_+^{-1}(1-\epsilon^2\partial_\xi^2)^{1/2} V, V\rangle} < 0. \tag{3.5}$$

由于分母根据引理3.1 严格为正，(3.5) 左端的符号由较简单变分问题中 $-\mu_0^2$ 的符号决定

$$-\mu_0^2 = \inf_{\substack{V \in H^1_\epsilon(\mathbb{R})\backslash\{0\} \\ (\varphi', V)_\epsilon = 0}} \frac{\langle L_- V, V\rangle}{\|V\|^2}. \tag{3.6}$$

如 [18], 所示，(3.6) 中 $-\mu_0^2$ 的符号取决于.....的符号。

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to 0^-} ((L_- - \lambda I)^{-1}(1-\epsilon^2\partial_\xi^2)\varphi', (1-\epsilon^2\partial_\xi^2)\varphi') &= \lim_{\lambda\to 0^-} ((L_- - \lambda I)^{-1} L_- V_\varphi, (1-\epsilon^2\partial_\xi^2)\varphi') \\ &= (V_\varphi, \varphi')_\epsilon,\end{aligned}$$

当 $\epsilon = \epsilon_0$ 时符号会发生改变。存在以下二分情形（见 [18, 定理 1.1]）：

(i) $-\mu_0^2 \geq 0$ if $(\varphi', V_\varphi)_\epsilon \leq 0$,
(ii) $-\mu_0^2 < 0$ if $(\varphi', V_\varphi)_\epsilon > 0$.

在情形 (i) 中，条件 (3.5) 不成立，因此谱问题 (1.7) 不存在满足 $\mathrm{Re}(\lambda_0) > 0$ 的孤立特征值 λ_0。这是谱稳定情形，对应于$\epsilon \in (0, \epsilon_0]$。在情形 (ii) 中，条件 (3.5) 成立，因此存在一个孤立的正特征值 $\lambda_0 \in \mathbb{R}$。这是谱不稳定情形，对应于 $\epsilon \in (\epsilon_0, \infty)$。□

4. Numerical illustrations

我们采用有限差分法对非线性薛定谔方程 (1.5) 的解进行数值近似。对于足够大的 $L > 0$，将直线 $\mathbb{R}$ 截断在对称区间 $[-L, L]$ 上，并施加诺伊曼边界条件 $u_\xi(t, -L) = u_\xi(t, L) = 0$，对每个 $t > 0$ 均如此。也可以使用非齐次狄利克雷条件 $u(t, \pm L) = \pm 1$ 作为另一种截断方式，但我们在数值计算中没有对此进行探讨。

将解 $u(t, \xi)$ 表示为等间距网格上的列向量 $\mathbf{u}(t)$，该网格在区间 $[-L, L]$ 上包含 $2K+1$ 个网格点，从而得到如下形式的演化问题

$$i(1-\epsilon^2 A_N)\frac{d\mathbf{u}}{dt} + A_N \mathbf{u} + 2(1-|\mathbf{u}|^2)\mathbf{u} = 0, \tag{4.1}$$

其中，$\mathbf{u}(t)$：$\mathbb{R} \to \mathbb{C}^{2K+1}$，$A_N \in \mathbb{M}^{(2K+1)\times(2K+1)}$ 是二阶空间导数中心差分的矩阵近似，其中包含了端点处的诺伊曼边界条件，

$$(A_N \mathbf{u})_k = \frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{h^2}, \qquad 2 \leq k \leq 2K,$$

and

$$(A_N\mathbf{u})_1 = \frac{2(u_2-u_1)}{h^2}, \quad (A_N\mathbf{u})_{2K+1} = \frac{2(u_{2K}-u_{2K+1})}{h^2}.$$

众所周知。 其中，中心差分的离散误差阶为 $\mathcal{O}(h^2)$.

使用克兰克–尼科尔森方法，在时间步长为 τ 的等间隔时间网格上进行时间迭代。$\mathbf{u}(t)$ 在时间层级$t_m = m\tau$ 的数值近似记为$\mathbf{u}^{(m)}$。克兰克–尼科尔森方法由以下迭代规则给出：

$$\left(1-\epsilon^2 A_N - \frac{i\tau}{2}A_N - i\tau(1-|\mathbf{u}^{(m+1)}|^2)\right)\mathbf{u}^{(m+1)} = \left(1-\epsilon^2 A_N + \frac{i\tau}{2}A_N + i\tau(1-|\mathbf{u}^{(m)}|^2)\right)\mathbf{u}^{(m)}, \tag{4.2}$$

对于整数 $m \geq 0$。众所周知，克兰克–尼科尔森方法的离散误差具有 $\mathcal{O}(\tau^2)$的全局误差，并且相对于时间步长 τ （相对于 h而言），迭代稳定性是无条件的。

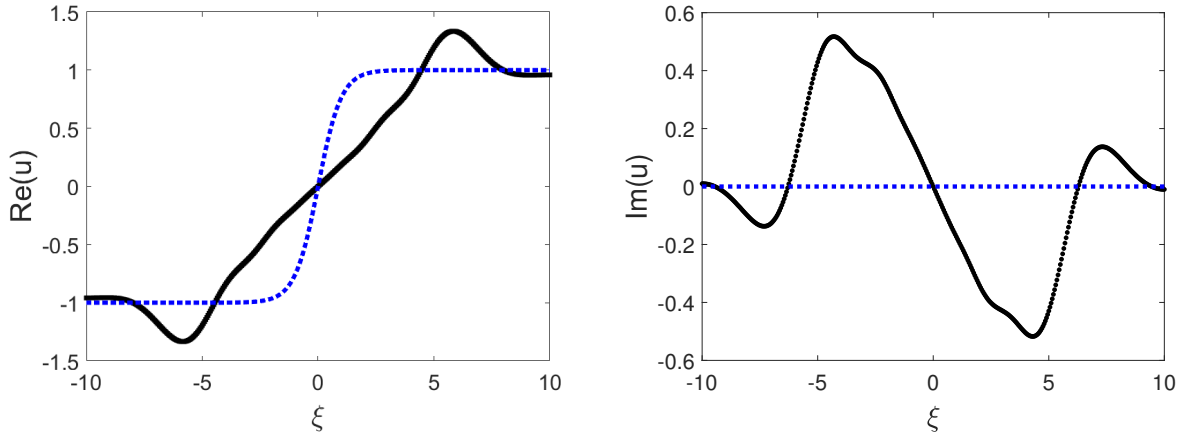


FIGURE 1. 解在时间 $t=0$（蓝色点）和时间 $t=5$ （黑色线）时的实部（左）和虚部（右）。

在报告数值计算结果之前，我们希望通过将计算结果与精确解进行比较，确认数值方法的阶数和无条件稳定性。为此，我们考虑按照线性系统的迭代进行线性薛定谔演化：

$$\left(1-\epsilon^2 A_N - \frac{i\tau}{2}A_N\right)\mathbf{u}^{(m+1)} = \left(1-\epsilon^2 A_N + \frac{i\tau}{2}A_N\right)\mathbf{u}^{(m)}. \tag{4.3}$$

该迭代格式是隐式的，但左侧矩阵的求逆与时间步长 m无关，因此，该迭代格式可按显式步骤实现：

$$\mathbf{u}^{(m+1)} = \left(1-\epsilon^2 A_N - \frac{i\tau}{2}A_N\right)^{-1}\left(1-\epsilon^2 A_N + \frac{i\tau}{2}A_N\right)\mathbf{u}^{(m)}.$$

初始条件为 $\mathbf{u}^{(0)} = \tanh(\xi_k)$，其中 $\xi_k = (k-1-K)h$ ，且 $h = L/K$。我们使用了 $L=10$ 和 $K=200$ 进行计算。数值模拟的结果在图1中显示了 $\epsilon = 0.5$ 。解的数值近似的实部（左）和虚部（右）$\mathbf{u}$ 显示了初始数据 $t=0$ （蓝点）以及

最终时刻 $t = 5$ （黑色线条）。模拟结果显示，由于线性色散，黑孤子在时间演化过程中会发生劣化。

线性系统 (4.3) 的实际动力学对我们的研究并不重要。这里使用它来估算计算误差，因为线性 Schr¨odinger 方程的初边值问题

$$\begin{cases} i(1-\epsilon^2\partial_\xi^2)u_t + u_{\xi\xi} = 0, & x \in (-L, L), \quad t > 0, \\ u_\xi(t,-L) = 0, \quad u_\xi(t,L) = 0, & \qquad\qquad\quad t > 0, \\ u(0,\xi) = \tanh(\xi), & x \in [-L, L], \end{cases} \tag{4.4}$$

可以用分离变量法和傅里叶级数求解。精确解由傅里叶余弦级数给出：

$$u(t,\xi) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\left(-\frac{ik_n^2 t}{1+\epsilon^2 k_n^2}\right)\cos(k_n\xi + k_n L), \tag{4.5}$$

其中 $k_n := \frac{\pi n}{2L}$, $n \in \mathbb{N}$ ，傅里叶系数由初始数据计算得出：

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \tanh(\xi)\cos(k_n\xi + k_n L)d\xi.$$

通过使用基于傅里叶余弦级数（4.5）的、具有 $2K+1$ 个网格点的傅里叶插值，我们获得了解 $u = u(t,\xi)$ 的另一种数值近似，其截断误差相对于网格点之间的间距 h 呈指数级微小。因此，时刻 t 两个数值解之间的最大距离可以视为有限差分近似的误差函数。图2显示了在 $K = 200$ 和 $K = 400$ 下采用两个步长 $h = L/K$ 进行计算时误差函数随时间的变化，其中时间步长调整为 $\tau = h$。两个误差之比始终接近 4.0，这证实了有限差分法具有二阶精度。

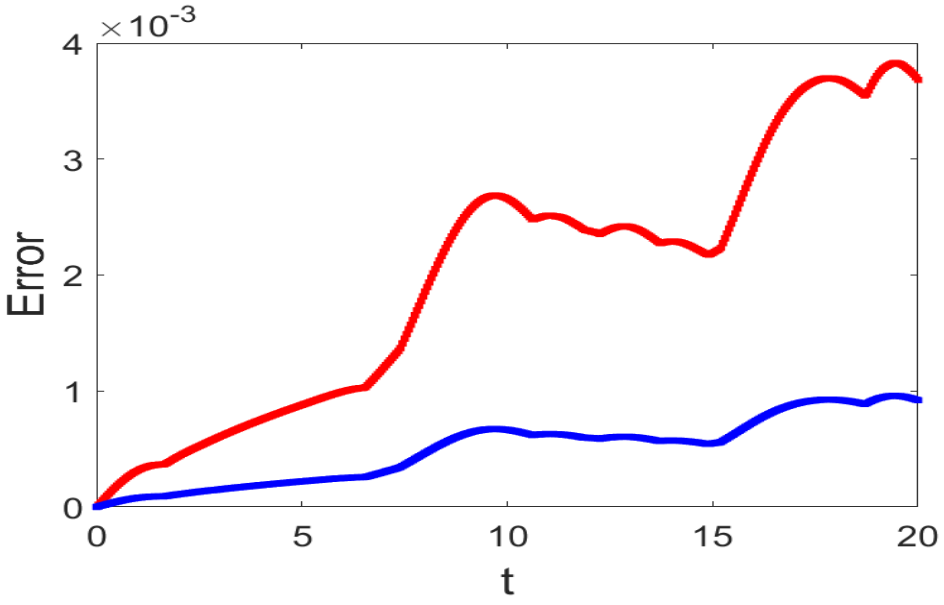


FIGURE 2. 计算 $h = L/K$ 和 $\tau = h$ 时， $K = 200$ （红线）和 $K = 400$ （蓝线）对应的误差函数随时间的变化。

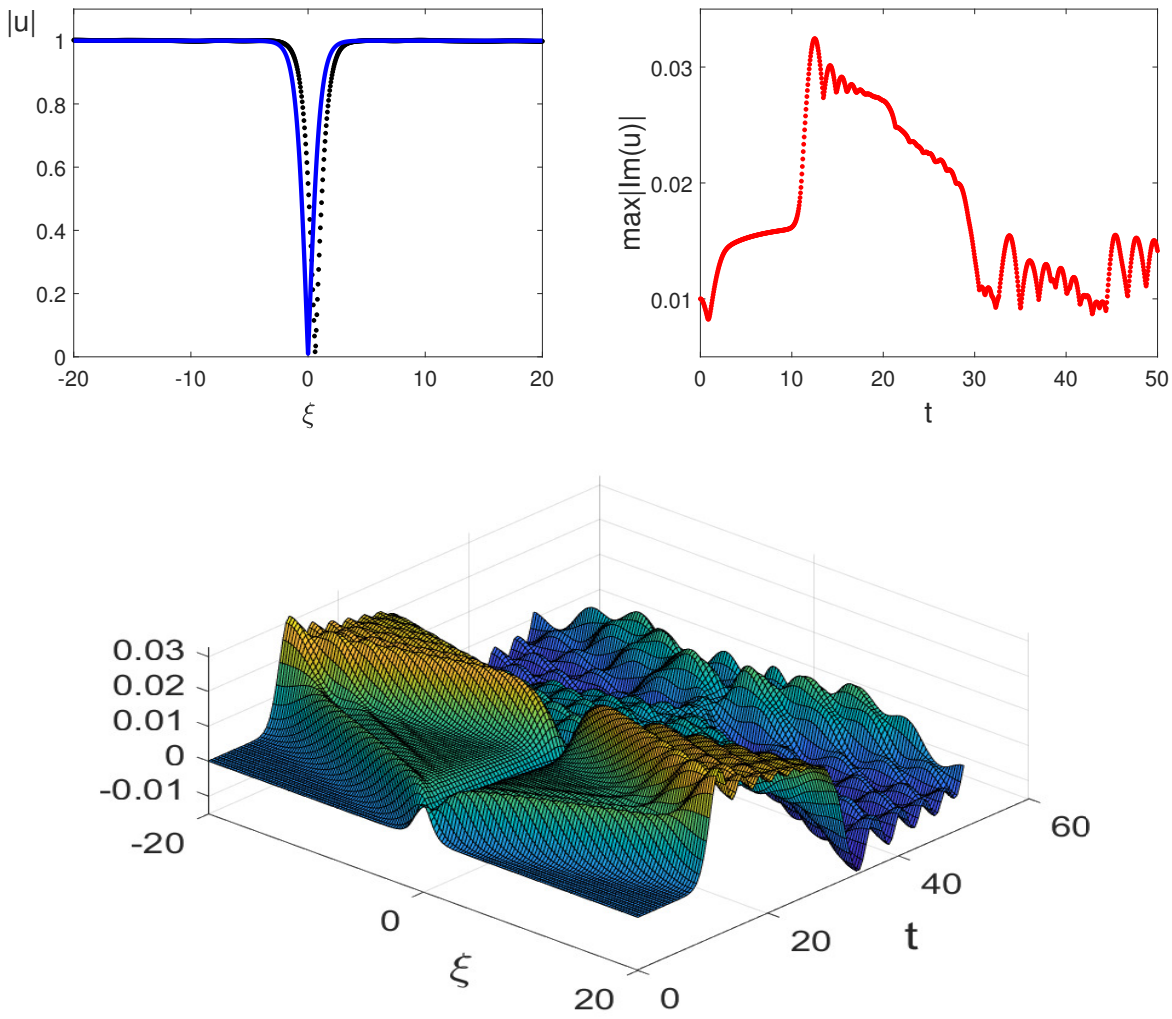


FIGURE 3. $\epsilon = 0.5$ 的受扰黑孤子动力学的数值近似。左上：$t = 0$ 时刻（蓝线）和 $t = 50$ 时刻（黑点）的 $|u|$ 随 ξ 的变化。右上：$|\mathrm{Im}(u)|$ 随 t 的最大值。下方：(t, ξ) 平面上 $\mathrm{Im}(u)$ 的解曲面。

在对线性系统 (4.3) 测试了有限差分法后，我们现在可以对非线性系统 (4.2) 进行迭代。该迭代格式是完全隐式的。为了使其显式化，我们在每次迭代时都对左侧的矩阵求逆 m，并使用 $|\mathbf{u}^{(m)}|^2$ 的前一个值，

$$\tilde{\mathbf{u}}^{(m+1)} = \left(1 - \epsilon^2 A_N - \frac{i\tau}{2} A_N - i\tau(1 - |\mathbf{u}^{(m)}|^2)\right)^{-1} \left(1 - \epsilon^2 A_N + \frac{i\tau}{2} A_N + i\tau(1 - |\mathbf{u}^{(m)}|^2)\right) \mathbf{u}^{(m)},$$

并对$\mathbf{u}^{(m+1)}$ 采用 Heun 预测－校正法，以恢复时间迭代的二阶精度。初始数据选取为

$$\mathbf{u}^{(0)} = \tanh(\xi_k) + ia\mathrm{sech}^2(\xi_k),$$

其中 $a > 0$ 是黑孤子扰动的振幅因子。要在时间演化中观察受扰黑孤子的稳定动力学与不稳定动力学，需要施加扰动。我们选取了 $L = 20$、$K = 400$ 和 $a = 0.01$。

图3展示了 $\epsilon = 0.5$的数值模拟结果。根据定理 2，对于此 ϵ 值，黑孤子是谱稳定的，因为 $\epsilon_0 = (5/8)^{1/4} \approx 0.89$。事实上，我们观察到，初始扰动使黑孤子向右移动了一小段距离（左上图），但在时间演化过程中，解的虚部涨落有界（右上图）。虚部的解曲面（下图）表明，在时间演化过程中，黑孤子的扰动被推向边界，并在边界处因诺伊曼边界条件而反射。在 $\epsilon = 0.5$的情况下，受扰动的黑孤子保持其形状。

与 $\epsilon = 0.5 < \epsilon_0$ 下受扰动黑孤子的稳定动力学相比，图4展示了 $\epsilon = 1 > \epsilon_0$ 下的不稳定动力学。黑孤子在 Im(u) 中受到的扰动从初始值 $a = 0.01$ 增长并趋向单位幅值。因此，黑孤子在时间演化过程中被完全摧毁，而 $t = 10$ 下 $|u|$ 关于 ξ 的最终轮廓（左上图中的黑点）显示出非孤子解。

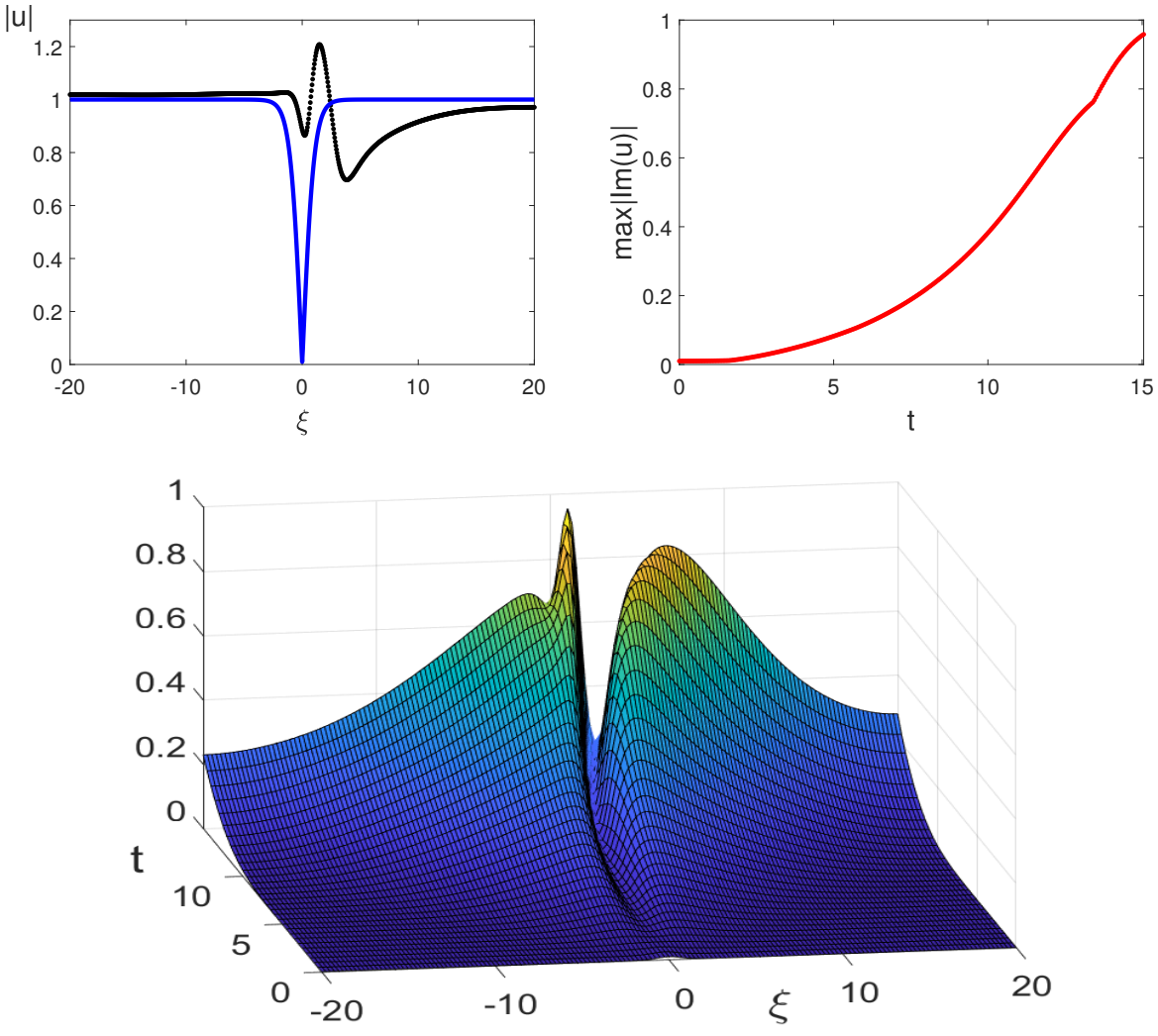


FIGURE 4. 与图3相同，但对应 $\epsilon = 1$。

我们针对更接近 ϵ_0 的 ϵ 进行了计算，观察到与图3和图4类似的受扰动黑孤子的稳定和不稳定动力学。稳定性阈值的实际取值通常取决于截断区间 $[-L, L]$ 的半长度 L 。

最后，我们还可以考察典范散焦型非线性薛定谔方程 (1.1) 中受扰动黑孤子的时间演化；该方程对应于带有 $\epsilon = 0$ 的非线性薛定谔模型 (1.5)。图 5 显示，受扰动黑孤子在时间演化中是稳定的，但由于边界处发生多次反射，扰动在演化过程中很快变得杂乱。这种动力学与非线性薛定谔方程 (1.1) 的性质吻合：扰动的虚部在 $H^1(\mathbb{R})$ 的索об列夫空间中不受控制，因为能量和动量在其中不具强制性。相比之下，正则化非线性薛定谔方程 (1.5) 中带有 $\epsilon > 0$ 的黑孤子扰动，在空间 $H^1(\mathbb{R})$ 中可定义为时间的连续可微函数。因此，与图 5 中的情况相比，图 3 和图 4 中扰动的虚部平滑得多，且沿空间坐标衰减。

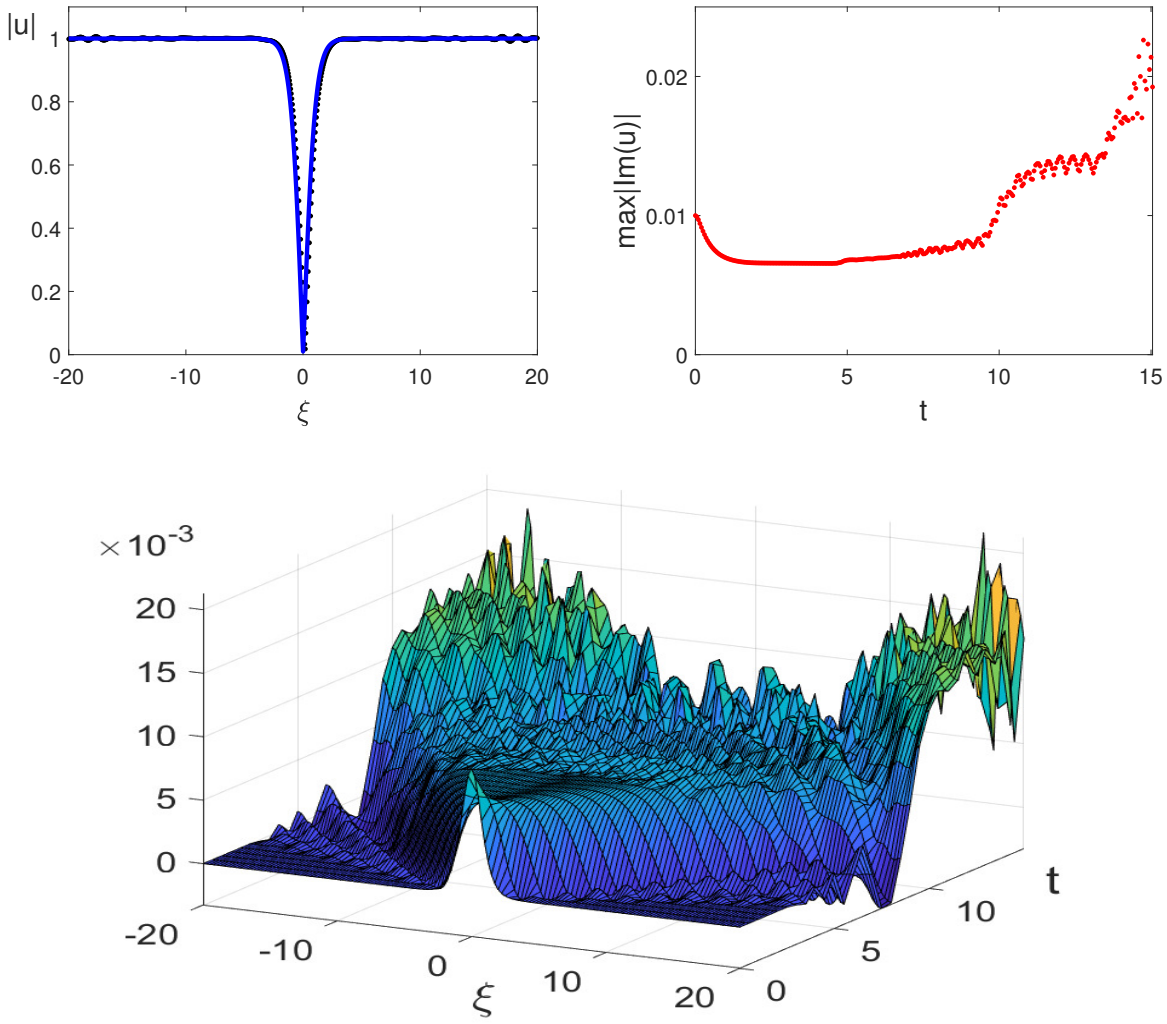


FIGURE 5. 与图3中相同，但针对 $\epsilon = 0$。

5. Discussion

我们通过解析证明和数值示例表明，正则化非线性薛定谔方程 (1.5) 存在黑孤子附近的光滑时间依赖解，其扰动定义为 $C^1([0,\tau_0)\ H^s(\mathbb{R}))$，其中 $s > \frac{1}{2}$。我们证明了黑孤子在 $\epsilon \leq \epsilon_0 := (5/8)^{1/4}$ 下的谱稳定性，以及在 $\epsilon > \epsilon_0$ 下的谱不稳定性。黑孤子的轨道稳定性问题仍未解决，因为能量守恒可用于控制扰动的加权 $H^1(\mathbb{R})$ 范数，而动量守恒仅对属于 $H^s(\mathbb{R})$ 且满足 $s \geq 2$ 的扰动有定义。

研究的其他方向之一，是考虑具有立方非线性的正则化非线性薛定谔方程的进一步推广，其形式为

$$i(1-\epsilon^2\partial_x^2 - \delta^2|u|^2)u_t + u_{xx} + 2(1-|u|^2)u = 0, \tag{5.1}$$

含有两个参数 $\epsilon \geq 0$ 和 $\delta \in [0,1]$。$\epsilon = 0$ 和 $\delta = 1$ 的情形已在 [19] 中作为具有强度依赖色散的非线性薛定谔模型加以研究，

$$i(1-|u|^2)u_t + u_{xx} + 2(1-|u|^2)u = 0. \tag{5.2}$$

我们在 [19] 中证明，黑孤子的扰动在加权$H^1(\mathbb{R})$空间中的行为受到非线性薛定谔模型（5.2）的能量守恒和动量守恒的控制。通过刻画谱稳定性问题的纯离散谱，也证明了黑孤子的谱稳定性。黑孤子扰动的局部适定性问题仍未解决，因为黑孤子满足边界条件$|u(t,\ x)| \to 1$，而演化方程（5.2）是奇异的。

在组合非线性薛定谔模型 (5.1) 中，当 $\epsilon > 0$ 和 $\delta \in$ 足够小时（0,1），可以同时实现黑孤子的局部适定性和谱稳定性。尽管由于能量和动量守恒所对应的函数空间不匹配，轨道稳定性问题对于 $\epsilon > 0$ 可能仍然难以解决，但组合模型(5.1) 可用于研究极限过渡 $\delta \to 1$，从而进一步阐明非线性薛定谔模型 (5.2) 的适定性理论。

致谢。 D. E. Pelinovsky 的工作部分得到 AvHumboldt 基金会洪堡研究奖的资助。M. Plum 的工作得到德国研究联合会（German Research Foundation）资助，项目编号：258734477，SFB 1173。

References

[1] M. J. Ablowitz, J. T. Cole, G. A. El, M. A. Hoefer, and X. Luo, “科尔特韦格–德弗里斯色散流体力学中的孤子—平均场相互作用”，Stud. Appl. Math. (2023) 即将刊出。[2] M. A.Alejo andA. J.Corcho, “五次 Gross–Pitaevskii 方程中黑孤子的轨道稳定性”，arXiv: 2003.09994 (2020)[3] T. B. Benjamin, J. L. Bona, and J. J. Mahony, “非线性色散系统中长波的模型方程”，Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A **272** (1972) 47–78。[4] F. Bethuel, P. Gravejat, J.C. Saut, and D. Smets, “Gross–Pitaevskii 方程中黑孤子的轨道稳定性”，Indiana University Mathematics Journal **57** (2008) 2611–2642。[5] D. Chiron, “一维非线性薛定谔方程亚声速行波的稳定性与不稳定性”，Analysis & PDE **6** (2013) 1327–1420[6] M. Colin and D. Lannes, “色散介质中的短脉冲近似”，SIAM J. Math. Anal.**41** (2009) 708–732[7] A. Contreras, D.E. Pelinovsky, and M. Plum, “耦合 Gross–Pitaevskii 系统中畴壁的轨道稳定性”，SIAM J. Math. Anal.**50** (2018) 810–833。

[8] E. Dumas, D. Lannes, and J. Szeftel, “聚焦型非线性薛定谔方程的变体：推导、论证以及与细丝化相关的开放问题”，激光细丝化 (CRM Ser. Math. Phys., Springer, Cham, 2016), pp. 19–75。[9] T. Gallay and D.E. Pelinovsky, “立方散焦非线性薛定谔方程中的轨道稳定性。II. 黑孤子”，Journal of Differential Equations **258** (2015), 3639–3660。[10] C. Gallo, “无穷远处初始数据不消失的散焦非线性薛定谔方程的柯西问题”，Comm. PDEs**33** (2008) 729–771。[11] P. G´erard, “Gross–Pitaevskii 方程的柯西问题”，Ann. Inst. Henri Poincare, Analyse Non Lineaire**23** (2006) 765–779。[12]P. G´erard and Z. Zhang, “一维 Gross–Pitaevskii 方程行波的轨道稳定性”，J. Math. Pures Appl. **91** (2009) 178–210。[13] P. Gravejat, D. Smets. “Gross–Pitaevskii 方程中黑孤子的渐近稳定性”。Proc. London Math. Soc. **111** (2015), 305–353。[14]P. G. Kevrekidis, D. J. Frantzeskakis, and R. Carretero-Gonz´alez, 散焦非线性薛定谔方 ¨程：从暗孤子到涡旋和涡旋环, (Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 2015)。[15] Y.S. Kivshar and B. L. Davies, “暗光孤子：物理与应用”，Phys. Reports**298** (1998) 81–197[16] D. Lannes, “高频非线性光学：从非线性薛定谔近似到超短脉冲方程”，Proc. R. Soc. Edinburgh Ser A**141** (2011) 253–286[17] M. D. Maiden, D. V. Anderson, A. A. Franco, G. A. El, and M. A. Hoefer, “孤子色散流体力学：理论与观测”，Phys. Rev. Lett. **120** (2018) 144101 (5 pages)。[18] L. Di Menza and C. Gallo, 一维非线性薛定谔方程的黑孤子, Nonlinearity **20**(2007) 461–496。[19]D.E. Pelinovsky and M. Plum, “强度依赖色散光学系统中黑孤子的稳定性”，arXiv: 2205.10177 (2022)[20] P. Sprenger, M. A. Hoefer, and G. A. El, “流体力学光孤子隧穿”，Phys. Rev. E**97** (2018) 032218 (8 pages)。[21] S. Yang, Q. Y. Zhang, Z. W. Zhu, Y. Y. Qi, P. Yin, Y. Q. Ge, L. Li, L. Jin, L. Zhang, and H. Zhang, “光纤激光器中暗孤子的最新进展与挑战”，Optics & Laser Technology **152**(2022) 108116 (13 pages)[22] P.E. Zhidkow, “科尔特韦格–德弗里斯方程与非线性薛定谔方程：定性理论”，Lec- ture Notes in Mathematics, vol. 1756, Springer-Verlag, Berlin, 2001。

(D.E.Pelinovsky) Department of Mathematics and Statistics, McMaster University, Hamil-ton, Ontario, Canada, L8S 4K1电子邮箱地址: dmpeli@math.mcmaster.ca

(M. Plum) Institut für Analysis, Karlsruher Institut für Technologie, Karlsruhe, Ger-many, 76131电子邮件地址: michael.plum@kit.edu