arXiv:2304.04837v1 [cs.CC] 10 Apr 2023

# 舍入几何：近最优界与新的邻域斯佩纳引理 *

JasonVander Woude[1],Peter Dixon[2],A.Pavan[3],Jamie Radcliffe[4],和 N. V. Vinodchandran[5]

[1]计算学院和数学系，内布拉斯加大学林肯分校jasonvw@huskers.unl.edu[2]内盖夫本-古里安大学tooplark@gmail.com[3]计算机科学系，爱荷华州立大学 pavan@cs.iastate.edu[4]数学系，内布拉斯加大学林肯分校aradcliffe1@unl.edu[5]计算学院，内布拉斯加大学林肯分校vinod@cse.unl.edu

2023年4月12日

**摘要**

若对于每个 $\vec{p} \in \mathbb{R}^d$，球 $B_\infty(\varepsilon, \vec{p})$ 至多与 $k$ 个 $\mathcal{P}$ 的成员相交，则称 $\mathcal{P}$ of $\mathbb{R}^d$ 为 $(k, \varepsilon)$-隔离划分。设计此类隔离划分的一个目标是尽量减小 $k$，同时使 $\varepsilon$ 尽可能大。这个划分问题与众多主题相关，包括确定性舍入方案、伪确定性、可复现性以及斯佩纳/KKM型结果。

在本工作中，我们建立了 $k$ 与 $\varepsilon$之间近乎最优的关系。我们证明，对于任意有界测度划分以及任意 $d \geq 1$，必有 $k \geq (1+2\varepsilon)^d$。因此，当$k = k(d)$被限制为 poly$(d)$ 时，可推出 $\varepsilon = \varepsilon(d) \in O\left(\frac{\ln d}{d}\right)$。这一界除对数因子外是紧的，因为已知存在满足 $k(d) = d+1$ 且 $\varepsilon(d) = \frac{1}{2d}$ 的隐蔽划分。我们还提供了适用于广泛 $k(d)$ 和 $\varepsilon(d)$ 参数的新构造。具体而言，我们证明，对于任意 $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，存在一个隐蔽划分，使得 $k(d) = (f(d)+1)^{\lceil f(d) \rceil}$ 且 $\varepsilon(d) = \frac{1}{2f(d)}$。对于 $k(d)$ 和 $\varepsilon(d)$ 的各种取值，这些新划分在 $O(\log d)$ 因子范围内是最优的。基于下界结果，我们在超立方体上建立了 Sperner引理的一个新邻域版本，该结果本身也具有独立的研究价值。此外，我们还证明了一个关于伪确定性/可复现算法背景下舍入方案局限性的免费午餐定理。

我们运用测度论和数的几何中的技巧，包括广义 Brunn-Minkowski不等式、等直径不等式和 Blichfeldt 定理，来证明我们的结果。

*研究支持 部分由美国国家科学基金会资助 1934884、2130536、2 130608

# 目录

**1 引言** **1**

1.1 研究动机.11.2 我们的贡献.31.2.1 次数下界.31.2.2 邻域 Sperner/KKM/Lebesgue 定理.41.2.3 新构造.51.2.4 免费午餐定理.51.3 组织结构.6

**2 主要结果证明概要** **6**

2.1 次数下界证明概要.62.2 邻域 Sperner/KKM/Lebesgue 证明概要.92.3 构造结果证明概要.10无免费午餐定理证明概要.10

**3 记号** **12**

**4 度数参数下界** **12**

4.1 预备结果.124.2 定理 1.5、推论 1.6 和定理 1.4 的证明.154.3 特定范数.21

**5 邻域 Sperner/KKM/Lebesgue 定理** **21**

**6 新构造 26**6.1 构造.27

**7 无免费午餐定理29**

**A 测度论 B 闵可夫斯基和** **34** **41**

**C 附加事实 41**

# 1 引言

我们研究以下隔离划分问题。对于一般范数，我们分别用 $B_{\|\cdot\|}(\varepsilon,\vec{p})$ 和$B^{\circ}_{\|\cdot\|}(\varepsilon,\vec{p})$ 表示以 $\vec{p}$ 为中心、半径为 $\varepsilon$ 的闭球或开球；当范数为 $\ell_\infty$ 范数时，则使用 $B_\infty(\varepsilon,\vec{p})$ 和 $B^{\circ}_\infty(\varepsilon,\vec{p})$。

**定义 1.1** ([VWDP+22])。划分 $\mathcal{P}$ 的 $\mathbb{R}^d$ 称为 $(k,\varepsilon)$-隔离划分，当对于每个$\vec{p}\in\mathbb{R}^d$，球 $B_\infty(\varepsilon,\vec{p})$ 至多与 $k$ 个成员相交，其中 $\mathcal{P}$。参数 $k$ 和 $\varepsilon$ 分别称为次数 和 容差。

理想情况下，我们希望构造次数（$k$）尽可能小、容差（$\varepsilon$）尽可能大的划分。然而，这两个参数之间存在一种自然的权衡。很容易看出，对于采用半开单位超立方体的 $\mathbb{R}^d$ 标准网格划分，我们可以有$k=2^d$ 和$\varepsilon=\frac{1}{2}$。有些出人意料的是，牺牲（多项式地）减小 $\varepsilon$，可以使 $k$ 呈指数级减小。具体而言，已知存在一个 $\mathbb{R}^d$ 的单位超立方体划分，使得 $k=d+1$ 和$\varepsilon=\frac{1}{2d}$ [VWDP+22]。此外，[HK18] 中给出的一种特定舍入方案会导出一个（$d+1$, 1 6（$d+1$））-隔离划分（其成员并非超立方体）。已知，对于~~$\varepsilon>0$~~，$\mathbb{R}^d$ 的任何（$k,\varepsilon$）-隔离划分，若其成员的直径至多为单位直径（在 $\ell_\infty$中），则必有 $k\geq d+1$。此外，若 $k=d+1$，则必有 $\varepsilon\leq\frac{2}{\sqrt{d}}$ [VWDP+22]。这些是关于隔离划分的构造与不可能性结果仅有的已知结论。

以下问题自然浮现。(1) 我们能否设计一种隔离划分，其次数为$k=k(d)\in\text{poly}(d)$，容差为 $\varepsilon=\varepsilon(d)\in\omega(\frac{1}{d})$? (2) 允许 $k(d)$为亚指数级的$d$，是否能使 $\varepsilon(d)$为常数? (3) 更一般且更根本地说，隔离划分中的次数参数与容差参数之间存在怎样的权衡? 在本文中，我们确立了这两个参数之间的近乎最优权衡。

## 1.1 研究动机

研究隔离划分的构造及其权衡本身就是一个基础性问题。然而，它在理论计算机科学诸多领域中的适用性，也是开展这项研究的重要动机。

确定性舍入：舍入方案是计算机科学中的基础工具，应用于近似算法、伪随机性、可复现性和差分隐私 [RT87，SZ99，DPV18，ILPS22，Gol19，GL19，KROW12，KORW08]。先前研究已经观察到，在非常一般的意义上，舍入方案与欧几里得空间的划分之间存在自然的等价关系 [KORW08，KROW12，VWDP+22]。特别是，某些确定性舍入方案等价于隔离划分。

定义 *1.2.* 确定性舍入方案是一个函数族 $\mathcal{F}=\{f_d\}_{d\in\mathbb{N}}$，其中$f_d:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$。若满足以下两个性质，则称 $\mathcal{F}$ 为*(k(d) ε(d))*-确定性舍入方案：对每个 $d\in\mathbb{N}$，*(1)* 对所有 $\vec{x}\in\mathbb{R}^d$，$\|f_d(\vec{x})-\vec{x}\|_\infty\leq\frac{1}{2}$[a]；*(2)* 对所有 $\vec{p}\in\mathbb{R}^d$，集合$\{f_d(\vec{x}):\vec{x}\in B_\infty(\varepsilon(d)\ \vec{p})\}$ 的基数至多为 $k(d)$。

[a] 上述定义中的1 2 值是任意的，通过适当缩放其他参数，可以将其替换为另一个常数。

设 $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ 是一个舍入函数。对于任意 $\vec{y}\in\mathbb{R}^d$，令 $X_{\vec{y}}=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^d:\ f(\vec{x})=\vec{y}\}$ 表示舍入到 $\vec{y}$ 的点。令 $\mathcal{P}_f=\{X_{\vec{y}}:\ \vec{y}\in\text{range}(f)\}$，这显然是 $\mathbb{R}^d$ 的一个划分。

反过来，划分 $\mathcal{P}$ 可以 $\mathbb{R}^d$ 导出（许多）确定性舍入函数 $f_{\mathcal{P}}$，方法如下：对于每个成员 $X \in \mathcal{P}$，令 $\vec{p}_X \in \mathbb{R}^d$ （通常是 $\vec{p}_X \in X$）为该成员的某个固定代表元$X$。然后，舍入函数 $f_{\mathcal{P}}$ 将任意点 $\vec{x} \in X$ 映射到 $\vec{p}_X$。由此得到以下观察 [VWDP+22]。

观察 *1.3*（舍入方案与划分的等价性）。一个 *($k(d)$ $\varepsilon(d)$)*-确定性舍入方案会针对每个 $d \in \mathbb{N}$，诱导出 $\mathbb{R}^d$ 的一个 *($k(d)$ $\varepsilon(d)$)*-隔离划分，其中每个成员的直径至多为 *1*。反过来，一个划分序列 $\langle \mathcal{P}_d \rangle_{d=1}^{\infty}$，若其中 $\mathcal{P}_d$ 是 *($k(d)$ $\varepsilon(d)$)*-隔离的，且仅包含直径至多为 *1* 的成员，则会诱导出许多 *($k(d)$ $\varepsilon(d)$)*-确定性舍入方案。

这一观察从几何视角揭示了舍入方案。通过研究隔离划分，本文从几何角度考察舍入这一概念，并探索其可能性与局限性。舍入方案与隔离划分都与伪确定性这一概念相关，我们将在下文讨论这一概念。

伪确定性与可复现性：由于伪确定性与计算复杂性理论 [OS17, DPV18, LOS21, DPVV22], 、差分隐私 [BLM20, ALMM19, GKM21],以及可复现学习 [ILPS22], 之间存在意想不到的联系，伪确定性及其各种形式在理论计算机科学中日益受到关注。若对于每个输入 $x$，都存在一个规范值 $v_x$，使得概率算法 $M$ 在输入$x$时以高概率输出$v_x$，则称该算法具有伪确定性。这个概念可以扩展为 $k$-伪确定性：对于每个$x$，都存在一个大小至多为 $k$ 的规范集合 $S_x$，且 $M(x)$的输出以高概率属于 $S_x$。伪确定性自然地刻画了计算中的可复现性。伪确定性及其扩展已应用于学习与隐私领域，并促成了私有PAC学习与Littlestone维度等价这一开创性发现 [BLM20, ALMM19]。

创建 $k$-伪确定性算法的一种方法是使用舍入 [Gol19, VWDP+22, HK18]。令 $A$ 为一个概率算法，它以 $\nu$ 的加性误差在 $\ell_\infty$ 范数下逼近值域为 $[0,1]^d$ 的函数 $f$。一般而言，这种近似算法可能有大量可能的输出。然而，通过将 $A(x)$ 的每个坐标舍入到 $\nu$的最近倍数，我们可以创建一个误差为 $2\nu$的 $2^d$-伪确定性算法。一般而言，我们可以使用一个 $(k(d)$ $\varepsilon(d))$-确定性舍入方案（等价地，根据观察 1.3，一个单位直径的 $(k(d)$ $\varepsilon(d))$-隔离划分）来获得一个具有 $O(\nu/\varepsilon)$近似误差的 $k(d)$-伪确定性算法。利用已知的 $(d+1, \frac{1}{2d})$-隔离划分，这意味着任何 $\nu$-近似算法都可以转换为一个 $(d+1)$-伪确定性算法，但近似误差会扩大到 $O(\nu d)$。因此，为了达到最终的 $\varepsilon'$近似误差，原始近似算法 $A$ 必须从更小的 $O(\varepsilon'/d)$误差开始。由于近似算法的运行时间通常取决于所需的近似质量，这会导致近似算法的运行时间更长（或在学习场景下导致更高的样本复杂度）。一个关键问题是，这种近似误差的线性扩大是否不可避免。我们能否将 $A$ 转换为一个 poly$(d)$-伪确定性算法，同时仅产生较小的近似误差扩大，例如对于某个 $0 < \gamma < 1$为 $d^\gamma$? 我们在隔离划分的次数与容差之间建立的权衡结果导出了一个免费午餐定理：对于任何产生 $k(d)$-伪确定性算法的一般舍入方案，近似质量必然至少会降低 $\Omega(^d\ln\ k(d))$ 倍。因此，如果 $k(d) \in$poly$(d)$，则近似精度至少必须降低 $\Omega(\ ^d\ln\ d)$ 倍。

与 ***Sperner*引理和 *KKM* 引理的联系**：Sperner引理和 KKM 引理已在理论计算机科学中得到应用 [Pap90、CD09、SZ00、HS99、DGP09、BG93、CLL+95、DPVV22]。令作者颇感意外的是，我们为确立隔离划分的次数参数与容差参数之间的权衡关系而开展的研究，促成了 Sperner/KKM 引理一种全新的“邻域”版本的发现。这一新引理已经被用于建立公平分配问题的新结果（相关工作正在进行中）。我们预计，隔离划分问题以及我们所建立的结果，将会在其他运用 Sperner/KKM 引理的背景下得到进一步应用。

总而言之，探索与隐蔽划分相关的构造及其权衡本身就是一项重要的研究。它对理论计算机科学中众多领域产生影响这一事实，也进一步推动了对其展开研究。

## 1.2 我们的贡献

我们的工作有四项关键贡献。首先，对于任意 $(k,\ \varepsilon)$-隔离划分，我们以容差参数 $\varepsilon$ 为自变量，建立了度参数$k$ 的下界。这一结果是在非常一般的设置下得出的，并且适用于欧几里得空间中的任意范数。其次，利用在度数下界结果的证明中发展出的技术，我们建立了一个新颖的 “ 邻域 ” 版本 Sperner/KKM 引理，该引理本身也具有独立的研究价值。第三，我们给出了 $(k,\ \varepsilon)$-隔离划分的一种新的通用构造。该构造与度数下界结果相结合，证明了对于度参数的各种自然选择，容差参数近乎最优。最后，我们为多伪确定性计算建立了免费午餐定理：对于任何生成 $k(d)$-伪确定性算法的通用舍入方法，若该算法所针对的函数值域为 $\mathbb{R}^d$，则其近似质量必然会出现近乎线性的退化。

### 1.2.1 次数的下界

我们将用有界测度划分来表述这一结果，稍后再讨论为何采用测度而不是直径。现在只需指出，对于 $\ell_\infty$ 范数，单位直径意味着单位外测度（见事实 A.1 及 $D=1$ 和 $M=1$），因此，对于每个成员的外测度至多为 1 的划分所陈述的任何结果，都立即适用于每个成员的 $\ell_\infty$ 直径至多为 1 的划分。

**定理 1.4**。设 $d\in\mathbb{N}$、 $\varepsilon\in[0,\infty)$ 和 $\mathcal{P}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 的一个划分，且每个成员的勒贝格外测度至多为 1。那么存在某个 $\vec{p}\in\mathbb{R}^d$，使得 $B^\circ_\infty(\varepsilon、\ \vec{p})$ 至少与$(1+2\varepsilon)^d$ 个 $\mathcal{P}$ 的成员相交。因此，若 $\mathcal{P}$ 是一个$(k、\ \varepsilon)$隔离划分，则 $k\geq(1+2\varepsilon)^d$。因此，若 $k\leq 2^d$，则必有 $\varepsilon\leq \ln_d^k$ 。

因此，即使 $\varepsilon(d)$ 是任意小的常数，也必须将次数 $k(d)$ 增大到关于 $d$ 指数级。此外，由此可知，要使 $k(d)$ 为 poly$(d)$，必须有 $\varepsilon(d)\in O(\ln {}_d^d)$。这证明了 $(d+1,\frac{1}{2d})$ 划分在对数因子范围内达到了 [VWDP+22] 最优。这也意味着，将 $k(d)=d+1$ 放宽到 $k(d)\in$poly$(d)$，至多只能使 $\varepsilon(d)$ 改善 $O(\ln d)$ 倍。

我们对 定理1.4 的证明不依赖于 $\ell_\infty$ 范数的任何特定性质。特别地，我们建立了以下适用于任何范数 的结果，其中 $\mathbb{R}^d$，且 定理1.4 可作为推论由此得到。

**定理 1.5** ($\varepsilon$-邻域的测度有界划分与任意范数)。 设 $d \in \mathbb{N}, M \in (0,\infty)$，且 $\mathcal{P}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 的一个划分，使得每个成员的勒贝格外测度至多为 $M$。设 $\mathbb{R}^d$ 配备任意范数 $\|\cdot\|$。对于每个 $\varepsilon \in (0,\infty)$，存在 $\vec{p} \in \mathbb{R}^d$，使得 $B^\circ_{\|\cdot\|}(\varepsilon, \vec{p})$ 与该划分中至少 $k = \left\lceil \left(1 + \varepsilon \left(\frac{v_{\|\cdot\|,d}}{M}\right)^{1/d}\right)^d \right\rceil$ 个成员相交，其中 $v_{\|\cdot\|,\,d} \overset{\text{def}}{=} m\left(B^\circ_{\|\cdot\|}(1,\vec{0})\right)$ 是 $\|\cdot\|$ 单位球的测度。

对于 $\ell_\infty$ 范数，$v_{\|\cdot\|,\,d}$ 是 $2^d$。因此，定理 1.4 是上述定理在$\ell_\infty$ 范数和 $M = 1$下的推论。利用等直径不等式，我们得到以下关于直径的推论。

**推论 1.6** ($\varepsilon$适用于直径有界划分的 -邻域)。 设 $d \in \mathbb{N}$, $D \in (0,\infty)$,$\varepsilon \in (0,\infty)$。设 $\mathbb{R}^d$ 配备任意范数 $\|\cdot\|$。设 $\mathcal{P}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 的一个划分，且每个成员的直径至多为 $D$ （相对于 $\|\cdot\|$）。那么存在 $\vec{p} \in \mathbb{R}^d$，使得 $B^\circ_{\|\cdot\|}(\varepsilon, \vec{p})$ 与该划分中至少 $k = \left\lceil \left(1 + \frac{2\varepsilon}{D}\right)^d \right\rceil$ 个成员相交。

上述结果中的表达式$\frac{2\varepsilon}{D}$ 应被视为一个归一化因子，即 $\varepsilon$-球的直径与划分中各成员直径之比。表达式 $\varepsilon \left(\frac{v_d}{M}\right)^{1/d} = \frac{(\varepsilon^d \cdot v_d)}{M^{1/d}}^{1/d}$ 也应被视为一个归一化因子。在测度论语境中，经常会看到 $d$ 维空间中测度的 $d$次方根出现，它们通常充当某种特征长度尺度，有时比实际距离更加稳健。因此，这个表达式应被视为 $\varepsilon$ 球的特征长度尺度（其测度为 $\varepsilon^d \cdot v_d$）与划分中各成员的特征长度尺度（其测度至多为 $M$）之比。

关于测度的备注：尽管舍入方案等价于直径有界的划分直径，我们以上定理是针对外测度有界的划分外测度来陈述的。如前所述，对于 $\ell_\infty$ 范数而言，这是一个严格的推广。此外，测度视角使我们能够运用测度论和数的几何中的强大工具，例如 Blichfeldt 定理和广义布伦-明可夫斯基不等式（定理 4.5），来证明这些结果。这也使我们能够针对任意范数建立下界结果。最后，我们可以利用等直径不等式（定理 4.9），非常精确地将测度结果转化为直径结果。

### 1.2.2 一个邻域 Sperner/KKM/Lebesgue 定理

我们运用证明定理 1.5时所发展的技巧，证明立方体上的一个新版本的 Sperner 引理。我们的结果与 KKM 引理更为相似——人们自然地知道，KKM 引理与 Sperner 引理等价。KKM 引理指出，对于满足某些性质的 $d$-单纯形的覆盖/着色，至少存在一个点，属于至少 $d+1$ 个集合/颜色的闭包。立方体上也有一个版本的 KKM 引理[Kuh60、Kom94、Wol77]，既可以单独证明，也可以作为立方体上 Sperner 引理各版本的推论来证明 [DLPES02]。Lebesgue 覆盖定理虽鲜为人知（参见 [HW48，定理 IV 2]），但它对立方体给出了同样的结论。以下定理总结了这些结果。

**定理 1.7** (Sperner/KKM/Lebesgue)。 给定对 $[0,1]^d$ 的一种有限颜色着色，其中没有任何一种颜色包含来自相对面的点，则存在一个点，属于至少 $d+1$ 种不同颜色的闭包。

在上述引理的某些版本中，恰好有 $2^d$ 种颜色（每个角/顶点对应一种），而在另一些版本中，着色可以为同一个点指定多种颜色，因此它是按颜色进行的覆盖，而不是划分，但这两种差异都无关紧要。要求有限性是为了保证闭包中存在一个点，但即使没有有限性，也存在这样一个点，使得对于任意 $\varepsilon > 0$ 个 $\varepsilon$ 球（在任意范数下），它都至少与 $d+1$ 种颜色相交。本着这一精神，我们这一新的斯佩纳–KKM–勒贝格结果变体考虑的不是一个点，而是范数 $\ell_\infty$ 中的一个小 $\varepsilon$ 球。因此，我们称之为邻域斯佩纳引理。

**定理 1.8 (**邻域斯佩纳引理)。 给定 $[0,1]^d$ 的一种着色，其中没有任何一种颜色包含来自相对面的点，那么对于任意 $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}]$，存在一个点 $\vec{p} \in [0,1]^d$，使得 $B^\circ_\infty(\varepsilon, \vec{p})$包含至少 $\left(1+\frac{2}{3}\varepsilon\right)^d$ 种不同颜色的点。

### 1.2.3 新构造

目前，我们只知道两种类型的隐蔽划分——标准网格划分，它是（$2^d$，$1$ $2$）-隐蔽的；以及两种不同的（$d+1$，$O(\frac{1}{d})$)-隐蔽划分，见 [VWDP+22、HK18]。我们不知道存在具有其他 $k(d)$ 和 $\varepsilon(d)$ 取值的划分。例如，目前尚无已知构造可用于参数 $\varepsilon(d) = {}^{1}\ln d$，也没有可用于参数 $k(d) \in$ poly$(d)$ 或 $k(d)$（相对于 $d$ 为次指数级）的构造。网格划分在容差参数方面是最优的，而（$d+1$，$O(\frac{1}{2d})$）划分在次数参数方面是最优的。以这些划分为构建模块，我们给出适用于一系列次数和容差参数的新型隐蔽划分构造。我们证明以下一般构造结果：

定理 1.9. 设 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 是任意函数。对于每个 $d \in \mathbb{N}$，都存在一个 $\mathbb{R}^d$ 的（$k(d)$ $\varepsilon(d)$)-隐蔽单位立方体划分，其中 $k(d) = (f(d)+1)^{\lceil f^d(d) \rceil}$，且 $\varepsilon(d) = \frac{1}{2f(d)}$

利用该定理，我们可以针对 $k(d)$和 $\varepsilon(d)$ 的各种选择得到隐蔽划分。例如，对于任意 $\varepsilon(d) \in o(1)$，我们可以实现 $k(d) \in 2^{o(d)}$。对于任意 $\varepsilon(d) \in O(\frac{1}{d})$（即使 $\varepsilon(d)$ 大于 [VWDP+22、HK18] 所允许的值），我们仍然可以得到 $k(d) \in$ poly$(d)$。对于$\varepsilon(d) = \ln_d^\ell d$，我们得到 $k(d) = 2^{\log^{\ell+1} d}$。

这些构造是近乎最优的。例如，当 $k(d) \in$ 多项式$(d)$ 时，定理 1.4 意味着 $\varepsilon(d) \in O(\frac{\ln d}{d})$；而当 $k = 2^{\log^{l+1} d}$时，必有 $\varepsilon(d) \in O(\frac{\ln^{l+1} d}{d})$。因此，该构造所达到的 $\varepsilon$值在 $O(\ln d)$ 因子以内是最优的。

### 1.2.4 一个没有免费午餐定理

隔离划分（确定性舍入方案）被用作设计 $k$-伪确定性算法的通用工具。然而，正如引言中所述，这会导致近似误差线性（关于 $d$）膨胀。接下来，我们将证明，对于通用方法而言，这种损失不可避免。

在下面的陈述中，记号 $A \circ B$ 表示算法 $A$ 在算法 $B$之后的复合。对于某种距离概念而言，函数 $f$ 的 $(\varepsilon, \delta)$-近似算法是一种随机（或确定性）算法，它对每个有效输入 $x$ 以至少 $1-\delta$ 的概率返回某个值，该值与 $f(x)$的距离至多为 $\varepsilon$。算法 $A$ 是

$(k,\delta)$-伪确定性：对于每个 $x$，存在一个集合 $S_x$，其大小至多为 $k$，并且 $A(x) \in S(x)$ 的概率至少为 $1-\delta$。

**定理 1.10**。令 $d$、$k \in \mathbb{N}$ 和 $\varepsilon_0 \in (0,\infty)$ 以及 $\delta \in (0, \frac{1}{2}]$ 为固定值，并令 $\|\cdot\|$ 为 $\mathbb{R}^d$ 上的一个范数。假设存在 $\varepsilon \in (0,\infty)$ 以及一个确定性算法 $A$，它将 $\mathbb{R}^d$ 中的输入映射为 $\mathbb{R}^d$ 中的输出，并具有以下通用黑盒性质：

**性质：**对于任意集合 $\Lambda$（表示某个问题定义域）和函数 $f: \Lambda \to \mathbb{R}^d$，以及一个$(\varepsilon_0,\delta)$-近似算法 $B$（针对 $f$，关于 $\|\cdot\|$），均有 $A \circ B$ 是一个$(k,\delta)$-伪确定性$(\varepsilon,\delta)$-近似算法，针对 $f$（同样关于 $\|\cdot\|$）。那么 $\varepsilon \geq \varepsilon_0 \cdot 4^{-d} \ln(2k)$。

该定理表明，当 $k(d) \in \mathrm{poly}(d)$ 时，通用方法所需的开销至少为 $O\left(d \ln(d)\right)$。

### 1.3 组织结构

本文其余部分的组织如下。第 2 节 给出了主要结果的证明概要。第 3 节 介绍必要的记号。其余各节将给出完整证明。第 4 节 证明关于次数（$k$）和容差（$\varepsilon$）的下界结果：定理 1.5、推论 1.6以及 定理 1.4。第 5 节 证明邻域斯佩纳引理（定理 1.8）。第 6 节 给出新的隐蔽划分的构造（定理 1.9 ）。最后，第 7 节 证明无免费午餐结果（定理 1.10 ）。

## 2 主要结果的证明概要

我们使用的主要技术工具来自测度论和数的几何，包括 广义布伦-明可夫斯基不等式（定理 4.5）、等直径不等式（定理 4.9）以及 Blichfeldt 定理证明中的思想（命题 A.9）。广义布伦-明可夫斯基不等式根据集合（$A+B=\left\{\vec{a}+\vec{b}:\ \ \vec{a}\in A、\ \vec{b}\in B\right\}$）的测度，给出了这些集合的闵可夫斯基和的测度下界。等直径不等式以一种非常通用的方式，将集合直径的上界紧密地转换为测度的上界。Blichfeldt 定理证明中的一个常用技巧是使用平均论证来说明：如果集合 $A$ 被一大族其他集合覆盖，那么 $A$ 中的某个点会被覆盖许多次。

### 2.1 下界次数的证明思路

我们将讨论证明定理 1.5所用的主要技巧。由于该定理对任意范数都成立，证明不依赖任何范数的特定性质。不过，为了在此阐述证明的主要思路并避免技术细节，我们将借助图 1 的直观示意，重点讨论 $\ell_\infty$ 范数（其球是高维立方体），并假设测度的界为 $M=1$。由于 $\mathbb{R}^d$ 中关于 $\ell_\infty$ 的单位球体积为 $v_d = 2^d$，定理 1.5 便可化为引言中提到并在下文重述的定理 1.4。

**定理 1.4**。设 $d \in \mathbb{N}$、$\varepsilon \in [0,\infty)$，且 $\mathcal{P}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 的一个划分，使得每个成员的勒贝格外测度至多为 1。那么存在某个 $\vec{p} \in \mathbb{R}^d$，使得 $B_\infty^\circ(\varepsilon、\ \vec{p})$ 至少与$(1+2\varepsilon)^d$个 $\mathcal{P}$的成员相交。因此，如果 $\mathcal{P}$ 是一个$(k、\ \varepsilon)$-隔离划分，那么 $k \geq (1+2\varepsilon)^d$。*consequently*，如果 $k \leq 2^d$，那么必有 $\varepsilon \leq \ln_d^k$。

证明概要。目标是找到某个点 $\vec{p} \in \mathbb{R}^d$，使得 $B_\infty^\circ(\varepsilon, \vec{p})$ 至少与 $(1+2\varepsilon)^d$个划分成员相交。我们不直接尝试建立这一点，而是采取一个关键的视角转变：对于任意 $\vec{p} \in \mathbb{R}^d$ 和 $X \in \mathcal{P}$（或者实际上任意 $X \subseteq \mathbb{R}^d$），都有 $B_\infty^\circ(\varepsilon, \vec{p}) \cap X \neq \emptyset$当且仅当 $\vec{p} \in \bigcup_{\vec{x} \in X} B_\infty^\circ(\varepsilon, \vec{x})$[1]。因此，我们所做的是将划分中的每个成员 $X$“替换”为扩张集 $\bigcup_{\vec{x} \in X} B_\infty^\circ(\varepsilon, \vec{x})$，并尝试找到一个点 $\vec{p}$，使其至少属于这些扩张集中的 $(1+2\varepsilon)^d$ 个。为实现这一点，我们从 Blichfeldt 定理的一个常见证明中获得启发——具体来说，下面的结果表明：如果我们有一族集合$A_1, A_2, A_3, \ldots$，它们都是另一个集合 $S$ 的子集，那么只要这些集合合起来具有足够的体积/测度，就存在一个位于 $S$ 中的点，同时出现在多个$A_i$集合中。事实上，我们可以给出这样一个点所属的集合 $A_i$数量的下界。以下是这一已知结果的正式命题。

**命题A.9** (连续多重鸽巢原理)。设 $d \in \mathbb{N}$ 和 $S \subset \mathbb{R}^d$ 有界且可测。设 $\mathcal{A}$ 是 $S$ 的可测子集族，且 $k = \left\lceil \frac{\sum_{A \in \mathcal{A}} m(A)}{m(S)} \right\rceil$。那么，如果$k < \infty$，则存在 $\vec{p} \in S$，使得 $\vec{p}$ 至少属于 $\mathcal{A}$ 中的 $k$ 个成员。（并且如果 $k = \infty$，那么对于任意 $n \in \mathbb{N}$，都存在 $\vec{p}^{(n)} \in S$，使得 $\vec{p}^{(n)}$ 至少属于 $\mathcal{A}$ 中的 $n$ 个成员。）

为了能够在我们的应用中使用命题A.9，我们需要处理一个直接的问题。我们希望将 $\mathcal{A}$ 取为扩张的划分成员的集合：$\mathcal{A} = \left\{\bigcup_{\vec{x} \in X} B_\infty^\circ(\varepsilon, \vec{x})\right\}_{X \in \mathcal{P}}$，但这样我们所知道的只是这些集合中的每一个都是 $S = \mathbb{R}^d$ 的子集，而 $S = \mathbb{R}^d$并不是有界的。使用测度论中的一个标准技巧即可处理这一简单问题：转而考虑一个由 $S_1, S_2, S_3, \ldots$ 组成的集合序列，其中的集合是有界的，并且不断变大，使得 $\bigcup_{n=1}^\infty S_n = \mathbb{R}^d$；我们分别处理这些集合中的每一个，然后尝试使用极限论证将结果推广回 $S = \mathbb{R}^d$。具体来说，我们将取 $S_n = [-n, n]^d$，如图 1的前两个面板所示。图 1的第三个面板说明，我们具体考虑由 $\mathcal{P}$ 诱导的 $S_n$ 的划分，并将其记为 $\mathcal{S}_n$。也就是说，诱导划分 $\mathcal{S}_n$是集合 $\{X \cap S_n : X \in \mathcal{P} \text{和 } X \cap S_n \neq \emptyset\}$。然后，对于每个 $S_n$，我们考虑诱导划分的扩张成员所组成的集合 $\mathcal{A}_n$：$\mathcal{A}_n = \{A_Y\}_{Y \in \mathcal{S}_n}$，其中 $A_Y \text{def}= \bigcup_{\vec{y} \in Y} B_\infty^\circ(\varepsilon, \vec{y})$。注意，每个 $A_Y$都是 $S_n' \text{def}= [-(n+\varepsilon)\ n+\varepsilon]^d$ 的子集。

然而，要利用命题A.9，还需要处理另一个问题——对于每个 $n$，我们必须对表达式 $\left\lceil \frac{\sum_{A_Y \in \mathcal{A}_n} m(A_Y)}{m(S_n')} \right\rceil$ 给出某个下界。我们知道 $m(S_n') = (2(n+\varepsilon))^d$，并利用 $\mathcal{S}_n$ 是 $S_n = [-n, n]^d$的划分这一事实，可知如果 $\mathcal{S}_n$是可数的[2]（即有限或可数无限的）：

$$\sum_{A_Y \in \mathcal{A}_n} m(A_Y) \geq \sum_{Y \in \mathcal{S}_n} m(Y) = m\left(\bigsqcup_{Y \in \mathcal{S}_n} Y\right) = m(S_n),$$

[1]若 $B_\infty^\circ(\varepsilon, \vec{p})$ 与 $X$ 相交，则这两个集合的交集中存在某个点 $\vec{x}$，这意味着 $\vec{p}$ 与 $\vec{x}$ 的距离至多为 $\varepsilon$，也可以说 $\vec{p} \in B_\infty^\circ(\varepsilon, \vec{x})$。显然，$\vec{p} \in \bigcup_{\vec{x} \in X} B_\infty^\circ(\varepsilon, \vec{x})$。反向证明类似。若 $\vec{p} \in \bigcup_{\vec{x} \in X} B_\infty^\circ(\varepsilon, \vec{x})$，则对于某个固定的 $\vec{x} \in X$，$\vec{p} \in B_\infty^\circ(\varepsilon, \vec{x})$。同样，这意味着 $\vec{p}$ 与 $\vec{x}$ 的距离至多为 $\varepsilon$，因此 $\vec{x} \in B_\infty^\circ(\varepsilon, \vec{p})$。由于 $\vec{x} \in X$ 也成立，我们有 $B_\infty^\circ(\varepsilon, \vec{p})$，且 $X$ 相交。[2]若 $\mathcal{S}_n$ 不可数，则下面的第一个等式会变为不等式，但方向不对：$\sum_{Y \in \mathcal{S}_n} m(Y) \leq m\left(\bigsqcup_{Y \in \mathcal{S}_n} Y\right)$（根据附录 A 中的事实 A.2）。

但这远远不够好，因为它只是给出了

$$\left\lceil \frac{\sum_{A_Y \in \mathcal{A}_n} m(A)}{m(S'_n)} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{m(S_n)}{m(S'_n)} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{(2n)^d}{(2(n+\varepsilon))^d} \right\rceil = \left\lceil \left( \frac{n}{n+\varepsilon} \right)^d \right\rceil = 1$$

而我们希望得到的是 $\geq (1+2\varepsilon)^d$。基本上，这个下界非常糟糕，因为我们没有考虑到 $\mathcal{A}_n$ 中的元素相较于划分中的原始元素已经扩张了 $\mathcal{S}_n$。因此，我们确实希望找到某种方法，对每个 $Y \in \mathcal{S}_n$给出其扩张集 $A_Y$的测度下界。有人可能会注意到，用一个 $\varepsilon$-球进行扩张，看起来有点像按 $1+\varepsilon$ 的因子进行缩放（尽管实际上并不是缩放[3]），而且由于勒贝格测度（即 $\mathbb{R}^d$中通常意义下的体积/测度）具有这样的性质：按（$1+\varepsilon$）进行缩放会使测度增加（$1+\varepsilon$）倍$^d$，因此我们或许可以证明每个成员的扩张版本会增加（$1+\varepsilon$）倍$^d$（这基本上正是我们想要得到的结果）。

这一直觉是成立的，不过其真正原因与缩放无关，而取决于这些成员的测度至多为 1。实际上，我们使用已知的 广义布伦-明可夫斯基不等式（定理 4.5）的一个专门变体来证明

$$m(A_Y) \geq m(Y) \cdot (1+2\varepsilon)^d \tag{1}$$

成立[4]。既然我们已经处理了尝试应用命题 A.9时出现的两个问题，我们可以考虑一个固定的 $n$ 并继续进行。我们分两种情况讨论：(1) 有趣的情况，即 $\mathcal{S}_n$ 只有可数多个成员；以及 (2) 几乎平凡的情况，即划分$\mathcal{S}_n$ 包含不可数多个成员。在情况 (1) 中，我们有

$$\begin{aligned}
\left\lceil \frac{\sum_{A_Y \in \mathcal{A}_n} m(A_Y)}{m(S'_n)} \right\rceil &= \left\lceil \frac{\sum_{Y \in \mathcal{S}_n} m(A_Y)}{m(S'_n)} \right\rceil && \text{(Re-index)} \\
&\geq \left\lceil \frac{\sum_{Y \in \mathcal{S}_n} \left[ m(Y) \cdot (1+2\varepsilon)^d \right]}{m(S'_n)} \right\rceil && \text{(Equation 1)} \\
&= \left\lceil \frac{(1+2\varepsilon)^d \cdot \sum_{Y \in \mathcal{S}_n} m(Y)}{m(S'_n)} \right\rceil && \text{(Linearity of summation)} \\
&= \left\lceil \frac{(1+2\varepsilon)^d \cdot m\left( \bigsqcup_{Y \in \mathcal{S}_n} Y \right)}{m(S'_n)} \right\rceil && \text{(Countable additivity of measures)} \\
&= \left\lceil \frac{(1+2\varepsilon)^d \cdot m(S_n)}{m(S'_n)} \right\rceil && \left(S_n = \bigsqcup_{Y \in \mathcal{S}_n} Y\right) \\
&= \left\lceil (1+2\varepsilon)^d \cdot \left( \frac{n}{n+\varepsilon} \right)^d \right\rceil && \left(\frac{m(S_n)}{m(S'_n)} = \frac{n}{n+\varepsilon} \text{ as above}\right)
\end{aligned}$$

由于$\lim_{n\to\infty} \left( \frac{n}{n+\varepsilon} \right)^d = 1$，因此 $\lim_{n\to\infty} (1+2\varepsilon)^d \cdot \left( \frac{n}{n+\varepsilon} \right)^d = (1+2\varepsilon)^d$，所以由于存在上界

[3]例如，参见图 1最后一个面板中最小的（紫色）成员，它非常接近圆形，但放大后看起来更像正方形。事实上，将单个点放大 $\varepsilon$ 会得到一个直径为 $2\varepsilon$的超立方体。[4]严格来说，集合 $A_Y$ 可能不可测（尽管我们猜它是可测的），所以这个表达式甚至未必是数学上有效的写法；不过我们会在论文后文处理这一技术细节，而且它确实不会影响本证明概要中的任何内容。

涉及其中，我们可以取足够大的 $N \in \mathbb{N}$，使得 $\left\lceil (1+2\varepsilon)^d \cdot \binom{N}{N+\varepsilon}^d \right\rceil = \lceil (1+2\varepsilon)^d \rceil$（见附录 C 中的事实 4.1），因此根据命题 A.9，存在一个点 $\vec{p} \in S'_n$，它至少包含在 $\mathcal{A}_N$ 中的 $(1+2\varepsilon)^d$ 个集合中。根据我们视角的转换，该点 $\vec{p}$ 具有这样的性质：$B^\circ_\infty(\varepsilon, \vec{p})$ 与 $\mathcal{P}$ 中至少 $(1+2\varepsilon)^d$ 个成员相交。

在情况 (2) 中，若某个 $\mathcal{S}_N$ 包含不可数多个成员，那么我们完全忽略方程 1 中 $m(A_Y)$ 的下界，因为可能有很多成员 $Y$（甚至全部成员）的测度为 0，因此该界只能说明 $m(A_Y) \geq 0$。相反，我们注意到 $Y$ 至少非空，因此至少包含一个点 $\vec{y}$，从而 $A_Y \supseteq B^\circ_\infty(\varepsilon, \vec{y}) = \prod_{i=1}^d [y_i - \varepsilon, y_i + \varepsilon]$，所以 $m(A_Y) \geq (2\varepsilon)^d$。因此，$\left\lceil \frac{\sum_{A_Y \in \mathcal{A}_N} m(A_Y)}{m(S'_N)} \right\rceil = \infty$，所以根据命题 A.9，存在一个点 $\vec{p} \in S'_N$，它至少包含在 $\mathcal{A}_N$ 中的 $(1+2\varepsilon)^d$ 个集合内；根据我们视角的转换，这个点 $\vec{p}$ 具有如下性质：$B^\circ_\infty(\varepsilon, \vec{p})$ 与 $\mathcal{P}$ 中至少 $(1+2\varepsilon)^d$ 个成员相交。 □

现在我们概述一下 推论 1.6 如何由该定理推出。正如引言中提到的，对于 $\ell_\infty$ 范数，集合 $X \subseteq \mathbb{R}^d$ 的直径上界为 $D$ 意味着 $X$ 的外测度上界为 $M = D^d$，因为 $\ell_\infty$ 范数有一项特殊性质：$X$ 实际上包含在 $[0, D]^d$ 的某个平移中，而该平移的测度为 $M = D^d$（见 事实 A.1）。因此，直径至多为 1 意味着外测度至多为 1。对于其他范数，这种包含性质一般并不成立。

尽管如此，对于任意范数，直径上界为 $D$ 就意味着存在某个测度上界。具体来说，我们可以在集合中的任意一点处放置一个半径为 $D$ 的球，并且知道它包含在该球内，由此可知外测度至多为 $m(B_{\|\cdot\|}(D, \vec{0}))$。不过，利用已知的等直径不等式（定理 4.9），我们可以得到更好的界；该不等式指出，实际上可以将测度界定为 $m(B_{\|\cdot\|}(D/2, \vec{0}))$。换句话说，虽然 $\ell_\infty$ 范数的包含性质对一般范数并不成立，但至少在某种意义上仍然成立：直径为 $D$ 的集合或许无法包含在任何直径为 $D$ 的球中，但可以通过某种方式将其切分，使其能够放入直径为 $D$（半径为$D/2$）的球中，因此其测度不会更大。有了这一不等式及其给出的具体直径值，推论 1.6 即可由定理 1.5 推出。

## 2.2 邻域 Sperner/KKM/Lebesgue 证明概要

证明定理 1.8的主要思路与上一小节中讨论的相同。对于每种颜色 $C$，令 $X_C$ 为被染成 $C$的点的集合。我们在 $X_C$中的每个点处取一个 $\varepsilon$-球，得到一个扩张版本 $X_C$。现在，与之前一样，根据 连续多重鸽巢原理（命题 A.9），存在一个点属于许多扩张集。

然而，在单位立方体上会出现一些在 $\mathbb{R}^d$ 中不会出现的额外问题。在上面的讨论中，扩张集并未包含在原区域内（上文记为 $S'_n$），因此我们需要考虑一个更大的区域（上文记为 $S_n$）来包含它们。在 $\mathbb{R}^d$ 中，我们可以通过极限论证来处理这一问题，使体积变化之比 $m(S'_n)/m(S_n)$ 趋于 1（也就是说，涉及上取整时，这一变化可以忽略不计）。如果以同样的方式扩张单位立方体 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d$ 中的每种颜色，那么每种颜色的测度都保证会像之前一样增大 $(1+2\varepsilon)^d$ 倍；但包含所有这些和的最小集合是单位立方体$[-\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon]^d$，与原立方体相比，其测度增大了 $(1+2\varepsilon)^d$ 倍，所以毫无所得！显然，这些和之间会有重叠，但广义 Brunn-Minkowski 不等式给出的界并未提供任何额外信息。

我们通过采用一种技巧来解决这个问题：先以一种自然的方式将着色直接扩展到 $[-\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon]^d$，确保每种颜色都与边界保持有界的距离，从而我们能够进行操作。

使用 $\varepsilon$-球的一个正交象限（而不是整个球）进行扩张，并且仍使扩张后的颜色集包含于 $[-\frac{1}{2}-\varepsilon,\frac{1}{2}+\varepsilon]^d$ 中。这意味着我们最终得知，每种颜色的测度至少增加了 $(1+\frac{2}{3}\varepsilon)^d$ 倍，而包含区域的测度完全没有改变。

### 2.3 构造结果的证明提纲

构造新的 $\mathbb{R}^d$ 隔离划分的方法如下：(1) 将坐标拆分，并将 $\mathbb{R}^d$ 视为由若干 $\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2}\times\cdots\times\mathbb{R}^{d_n}$ 组成，其中 $d_1,d_2,\ldots,d_n$ 满足 $d_1+d_2+\cdots+d_n=d$；(2) 独立地将每个 $\mathbb{R}^{d_i}$ 划分为若干 $\mathcal{P}_i$；最后，(3) 以自然的方式将这些划分合并为 $\mathbb{R}^d$ 的一个划分 $\mathcal{P}$，令 $\mathcal{P}$ 为 $\{\prod_{i=1}^n X_i\colon X_i\in\mathcal{P}_i\}$。定义 6.3 对此作了完整描述。该构造可用于任意划分，但很容易证明，若每个 $\mathcal{P}_i$ 都是 $(k_i,\varepsilon_i)$-隔离的，则对于 $k=\prod_{i=1}^n k_i$，$\mathcal{P}$ 是 $(k,\varepsilon)$-隔离的，且 $\varepsilon$ 为 $\min_{i\in[n]}\varepsilon_i$。命题 6.5 给出了这一结论。

随后，我们将问题简化为所有 $d_i$ 均等于某个自然数$d'$对应的 $d'$ 或 $d'-1$ 的情形，并分析如下构造：每个 $\mathcal{P}_i$ 都是一个 $(d_i+1,\frac{1}{2d_i})$-隐蔽单位立方体划分（如 [VWDP+22]），且满足 $d_i=d'$ 或 $d'-1$。由此得到的 $\mathbb{R}^d$ 的划分是 $(k,\varepsilon)$-隐蔽的，其中$k=\prod_{i=1}^n(d_i+1)\le(d'+1)^{\lceil\frac{d}{d'}\rceil}$ 且 $\varepsilon=\min_{i\in[n]}\frac{1}{2d_i}=\frac{1}{2d'}$。我们使用 $f\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，将 $d'$ 规定为 $d$ 的函数，从而得到定理 1.9。

最后需要注意的是，在这一结果中必须保留上取整函数，因为它能确保指数不小于 1。

### 2.4 免费午餐定理的证明概要

我们使用 推论1.6来证明定理 1.10。由于 $A$ 是一个确定性算法，因此可以将其视为一个函数 $A:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$。这样的函数通过将映射到同一值的点视为等价点，诱导出其定义域的一个划分。我们可以证明，由于 $A$ 给出$\varepsilon$-近似（相对于范数 $\|\cdot\|$），划分中的每个成员的直径至多为$2\varepsilon$（相对于 $\|\cdot\|$）。根据 推论 1.6，这意味着定义域$\mathbb{R}^d$中存在某个点 $\vec{p}$，使得 $B^\circ_{\|\cdot\|}(\frac{\varepsilon_0}{2},\vec{p})$ 至少与划分中的 $\left(1+\frac{2}{(\varepsilon_0/2)/2\varepsilon}\right)^d=\left(1+\frac{\varepsilon_0}{2\varepsilon}\right)^d$个成员相交。换言之，存在一个点 $\vec{p}$和 $B^\circ_{\|\cdot\|}(\frac{\varepsilon_0}{2},\vec{p})$中的一个至少包含 $\left(1+\frac{\varepsilon_0}{2\varepsilon}\right)^d$个点的集合，使得 $A$将这些点中的每一个都映射到不同的值。

然后，我们考虑一个具体问题和近似算法，并证明 $A$ 在该问题上的表现不会很好。令 $f:\Lambda\to\mathbb{R}^d$，使得存在 $\lambda\in\Lambda$，满足 $f(\lambda)=\vec{p}$。接着，我们考虑一个针对该函数 $f$ 的（$\varepsilon_0$，$\delta$）近似算法 $B$，它具有如下特定性质：$B(\lambda)$ 的输出分布在上述 $\left(1+\frac{\varepsilon_0}{2\varepsilon}\right)^d$ 个点上均匀分布（这些点都对 $f(\lambda)=\vec{p}$ 进行 $\varepsilon_0$-近似）。我们证明，由于 $B$ 在一个非常大的集合上均匀分布，要使 $A\circ B$ 成为（$k$，$\delta$）-伪确定性的，就需要非常大的 $k$。具体而言，$k\ge(1-\delta)\cdot\left(1+\frac{\varepsilon_0}{2\varepsilon}\right)^d$。最后，我们重新整理该表达式以求出 $\varepsilon$，并利用较小 $x$ 下的近似 $\ln(1+x)\ge\frac{x}{2}$，以及 $(1-\delta)\ge\frac{1}{2}$这一事实，从而得到关于 $\varepsilon$ 的既定下界。

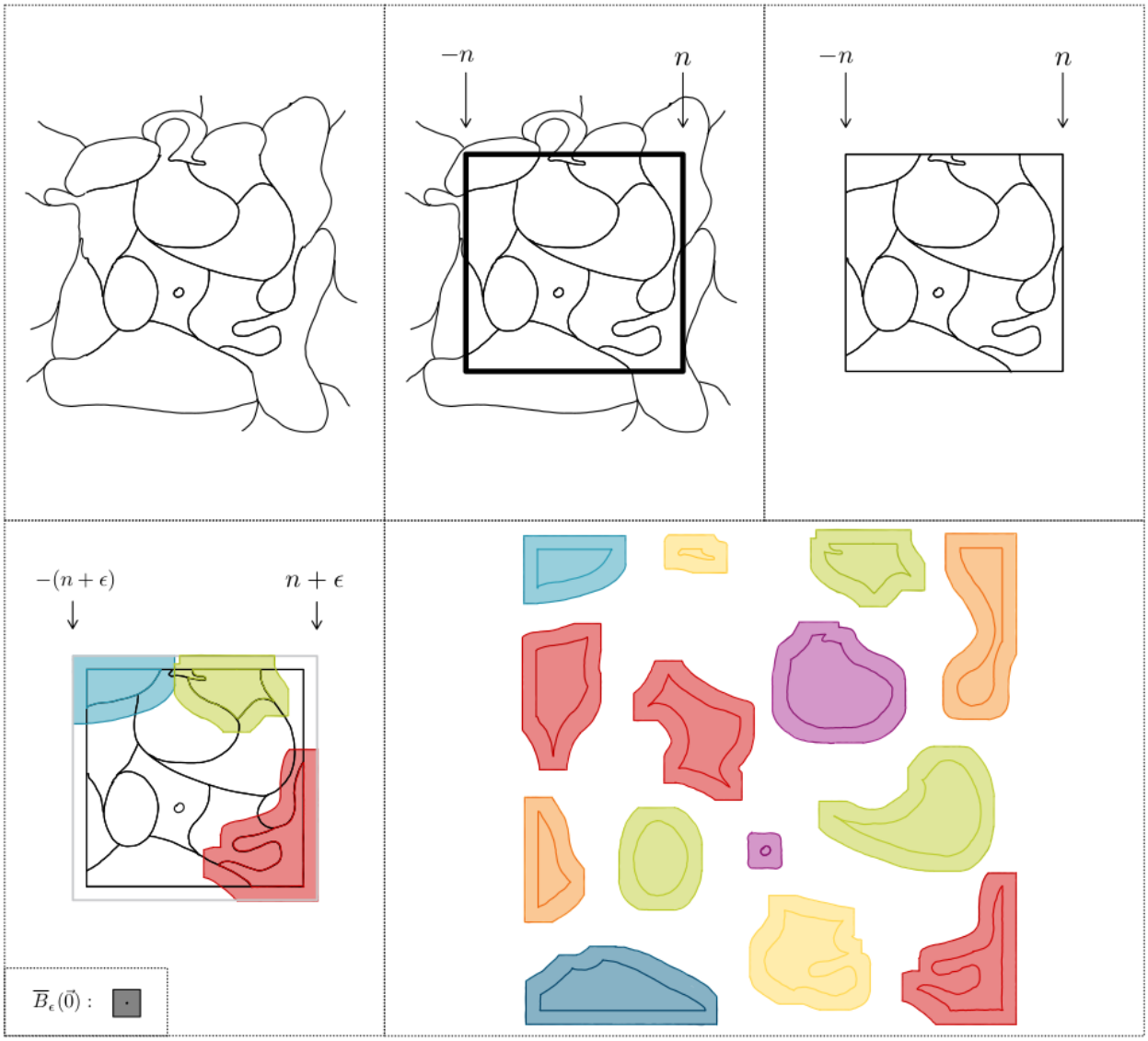



图1：在第一个窗格中，我们有一个对 $\mathbb{R}^2$ 的划分。在第二个窗格中，我们展示只考虑与 $[-n,n]^2$ 相交的划分成员；在第三个窗格中，我们展示 $\mathcal{P}$ 在 $[-n,n]^2$ 上诱导的划分。在第四个窗格中，我们通过在每个成员的每个点处放置一个 $\varepsilon$-球来扩张每个成员，并展示这些扩大的元素仍然包含在 $[-(n+\varepsilon)\ n+\varepsilon]^2$ 内。在第五个窗格中，我们看到所有扩张后的成员，并观察到扩张后成员的面积之和比 $[-n,n]^2$ 的面积“大得多”。

# 3 记号

以下是本文将使用的部分符号列表。

- 我们用 $\mathbb{N}$ 表示从 1 开始的自然数。
- 我们继续像之前一样使用 $B_{\|\cdot\|}(\varepsilon,\vec{p})$、$B^\circ_{\|\cdot\|}(\varepsilon,\vec{p})$、$B_\infty(\varepsilon,\vec{p})$ 和 $B^\circ_\infty(\varepsilon,\vec{p})$。
- 对于两个集合 $A,\ B\subseteq\mathbb{R}^d$ 我们写作 $A+B$ 表示闵可夫斯基和 $A+B$ 定义为 $=\left\{\vec{a}+\vec{b}\colon\ \vec{a}\in A,\quad \vec{b}\in B\right\}$。我们也可以用 $\vec{a}+B$ 表示 $\left\{\vec{a}+\vec{b}\colon\ \vec{b}\in B\right\}$，其中某个固定向量为 $\vec{a}$。
- 我们将使用 $v_{\|\cdot\|,d}$ 来表示 $\mathbb{R}^d$ 中相对于一般范数 $\|\cdot\|$ 的单位半径球的博雷尔/勒贝格测度。这是某些结果中出现的一个归一化因子。

# 4 次数参数的下界

本节将给出定理 1.5的完整证明。我们先在第 4.1 小节中介绍一些预备结果。然后，在定理 1.5 中给出第 4.2 小节的证明。紧接着，我们证明引言中提到的两个推论：推论 1.6和定理 1.4。

## 4.1 预备结果

本节将讨论 $\mathbb{R}^d$ 上的任意范数。我们指出一个众所周知的事实：$\mathbb{R}^d$ 上的所有范数都是等价的，即它们在 $\mathbb{R}^d$ 上生成相同的拓扑。给定 $\mathbb{R}^d$ 上的两个范数 $\|\cdot\|^a$ 和 $\|\cdot\|^b$，存在固定常数 $c_d, C_d\in(0,\infty)$，使得对于所有向量 $\vec{x}\in\mathbb{R}^d$，都有 $c_d\|\vec{x}\|^a\le\|\vec{x}\|^b\le C_d\|\vec{x}\|^a$。因此，无论使用哪种范数，$\mathbb{R}^d$ 中的开集集合都相同。这也意味着，无论使用哪种范数，$\mathbb{R}^d$ 上的博雷尔代数和勒贝格 $\sigma$-代数都相同，因此 $\mathbb{R}^d$ 上关于任意范数的球都是可测的。

我们先介绍四个简单的事实。它们的证明都很直接，我们将在附录 C 和附录 B中给出。第一个事实稍后将使我们能够通过极限传递一个结果，因为答案将是整数。

**事实 4.1。** 对于任意 $\alpha\in\mathbb{R}$，存在 $\gamma\in\mathbb{R}$，使得 $\gamma<\alpha$ 且 $\lceil\gamma\rceil=\lceil\alpha\rceil$。

下一个事实说明，集合 $X$ 与以原点为中心的开球的闵可夫斯基和，可以看作是以 $X$ 中各点为中心的开球的并集。

**事实 4.2。** 对于任意赋范向量空间，给定集合 $X$ 和 $\varepsilon\in[0,\infty)$，则

$$X+B^\circ_{\|\cdot\|}(\varepsilon,\vec{0})=\bigcup_{\vec{x}\in X}B^\circ_{\|\cdot\|}(\varepsilon,\vec{x}).$$

将开球替换为闭球，也有同样的结论。

第三个事实说明，我们可以将一个球分解为两个较小球的闵可夫斯基和。

**事实 4.3。** 对于任意赋范向量空间，以及任意 $\alpha,\beta\in(0,\infty)$，都有 $B^\circ_{\|\cdot\|}(\alpha,\vec{0})+B^\circ_{\|\cdot\|}(\beta,\vec{0})=B^\circ_{\|\cdot\|}(\alpha+\beta,\vec{0})$。

第四个事实虽然也非常简单，却是一个关键的视角转变，使我们得以证明本节的主要结果。它指出，如果我们要检查划分中哪些集合 $X$ 与位于 $\vec{p}$ 处的 $\varepsilon$-球相交（以确定这样的集合有多少个），那么可以改为将划分中的每个成员与以原点为中心的 $\varepsilon$-球取闵可夫斯基和，从而扩大每个成员，然后检查这些扩大的成员中哪些包含点 $\vec{p}$。

**事实4.4**。对于任意赋范向量空间、任意集合 $X$、任意向量 $\vec{p}$ 以及任意 $\varepsilon > 0$，以下各项等价：

1. $B^\circ_{\|\cdot\|}(\varepsilon, \vec{p}) \cap X \neq \emptyset$
2. $\vec{p} \in X + B^\circ_{\|\cdot\|}(\varepsilon, \vec{0})$

将两个开球都替换为闭球，也可以得到同样的结论。

现在我们介绍这一结果，它正是与上述视角的关键转变相联系的结果。该结果指出，应考虑一个有界的（可测）子集 $S \subseteq \mathbb{R}^d$（因此它具有有限测度），以及由 $S$的（可测）子集组成的一个集合 $\mathcal{A}$。如果我们计算该集合 $\mathcal{A}$ 中所有成员的测度之和（即直观地说，它们所占据的总体积），并将其与 $S$的测度/体积进行比较，那么无论这个比值是多少，我们都能在 $S$ 中找到一个点，该点被该集合 $\mathcal{A}$ 中这么多个成员覆盖。例如，在最简单的情形下，如果 $\mathcal{A}$ 中成员的总测度大于 $S$ 的测度，那么 $\mathcal{A}$ 中的所有成员不可能彼此不相交，因此必定存在某个点被两个成员覆盖。这个简单情形可以看作鸽巢原理的连续版本。

在更一般的情况下，通过平均论证可以直观地看出该结果成立：如果 $S$ 中的每个点仅被覆盖 $n$ 次，那么 $\mathcal{A}$ 中各成员的总测度至多为 $n \cdot m(S)$；因此，如果 $\mathcal{A}$ 中的总测度与 $S$ 的测度之比很大，那么 $n$ 也必然很大。这个更一般的版本可视为连续多重鸽巢原理。

**命题A.9 (连续多重鸽巢原理).** 设 $d \in \mathbb{N}$ 和 $S \subset \mathbb{R}^d$ 有界且可测。设 $\mathcal{A}$ 是 $S$ 的可测子集族，并且设 $k = \left\lceil \frac{\sum_{A \in \mathcal{A}} m(A)\,()}{m\,S} \right\rceil$。那么如果$k < \infty$，则存在 $\vec{p} \in S$，使得 $\vec{p}$ 至少属于 $\mathcal{A}$ 中的 $k$ 个成员。（并且如果 $k = \infty$，那么对于任意 $n \in \mathbb{N}$，存在 $\vec{p}^{(n)} \in S$，使得 $\vec{p}^{(n)}$ 至少属于 $\mathcal{A}$ 中的 $n$ 个成员。）

虽然这一结果看起来很直观，但要对其进行形式化证明确实需要一些努力。我们最初是在 Blichfeldt 定理的标准证明中首次遇到这一结果的（该定理正是我们主要技术的动机来源），但我们找到的许多介绍 Blichfeldt 定理证明的资料，除特殊情形外都没有证明上述结果。因此，为了方便和完整起见，我们在附录 A 中分三部分给出证明：引理 A.4、引理 A.5以及推论 A.6。

我们需要的下一个要素，是一种衡量事实 4.4中的闵可夫斯基和大小的方法。为了利用命题 A.9，我们需要测度的下界，而利用下面给出的广义布伦-明可夫斯基不等式，我们可以得到这样的下界。

**定理 4.5 (广义布伦-明可夫斯基不等式)。** 设 $d \in \mathbb{N}$ 和 $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ 均为勒贝格可测，且 $A + B$ 也为勒贝格可测。那么

$$m(A+B) \geq \left[ m(A)^{\frac{1}{d}} + m(B)^{\frac{1}{d}} \right]^d .$$

该陈述版本可由 [Gar02，方程 11]获得；在该综述中，Gardner 陈述此定理时要求这些集合是有界的，但在下一段中指出这并非必要，该要求的提出仅仅是为了便于该综述中的表述。

在该定理中，要求 $A+B$ 是勒贝格可测的并非无关紧要；Gardner 讨论了存在已知的勒贝格可测集合 $A$ 和 $B$，使得闵可夫斯基和$A+B$并非勒贝格可测，如 [Sie20]中所示。下一个结果提供了一种在我们的应用中规避这一问题的方法：即使我们的划分中的成员不可测，也可以令 $B$ 为开集，从而使和 $A+B$ 是开集（因而是可测的），并使用 $A$ 的外测度，这样我们就不需要 $A$ 是可测的这一假设。

**引理4.6.**设 $d \in \mathbb{N}$，并设 $\mathbb{R}^d$ 配备任意范数 $\|\cdot\|$。令 $Y \subseteq \mathbb{R}^d$，且$\varepsilon \in (0, \infty)$。则 $Y + B^\circ_{\|\cdot\|}(\varepsilon, \vec{0})$ 是开集（因而是博雷尔可测的），且 $m(Y + B^\circ(\varepsilon, \vec{0})) \geq \left(m_{out}(Y)^{\frac{1}{d}} + \varepsilon \cdot (v_{\|\cdot\|, d})^{\frac{1}{d}}\right)^d$。

证明。根据事实 4.2，对于任意 $\varepsilon'' \in (0, \infty)$，$Y + B^\circ_{\|\cdot\|}(\varepsilon'', \vec{0}) = \bigcup_{\vec{y} \in Y} B^\circ_{\|\cdot\|}(\varepsilon'', \vec{y})$，它是开集的并集，因此其自身也是开集，从而是博雷尔可测的。现在，对于任意 $\varepsilon' \in (0, \varepsilon)$，注意到根据事实 4.3，$B^\circ_{\|\cdot\|}(\varepsilon, \vec{0}) = B^\circ_{\|\cdot\|}(\varepsilon - \varepsilon', \vec{0}) + B^\circ_{\|\cdot\|}(\varepsilon', \vec{0})$，因此，该和是可测的，因为它是一个开球。利用这一等式以及闵可夫斯基和的结合律，我们有

$$Y + B^\circ_{\|\cdot\|}(\varepsilon, \vec{0}) = Y + \left[B^\circ_{\|\cdot\|}(\varepsilon - \varepsilon', \vec{0}) + B^\circ_{\|\cdot\|}(\varepsilon', \vec{0})\right] = \left[Y + B^\circ_{\|\cdot\|}(\varepsilon - \varepsilon', \vec{0})\right] + B^\circ_{\|\cdot\|}(\varepsilon', \vec{0}).$$

Th因此，我们有如下不等式链（每个不等式的依据将在其陈述后给出）：

$$\begin{aligned} m\left(Y + B^\circ_{\|\cdot\|}(\varepsilon, \vec{0})\right) &= m\left(\left[Y + B^\circ_{\|\cdot\|}(\varepsilon - \varepsilon', \vec{0})\right] + B^\circ_{\|\cdot\|}(\varepsilon', \vec{0})\right) \quad \text{(Open, measurable, equality above)} \\ &\geq \left(m\left(Y + B^\circ_{\|\cdot\|}(\varepsilon - \varepsilon', \vec{0})\right)^{\frac{1}{d}} + m\left(B^\circ_{\|\cdot\|}(\varepsilon', \vec{0})\right)^{\frac{1}{d}}\right)^d \end{aligned}$$

上述内容来自广义布伦-明可夫斯基不等式（定理4.5），注意到如上所示，和式中的各项 $\left[Y + B^\circ_{\|\cdot\|}(\varepsilon - \varepsilon', \vec{0})\right]$ 以及 $B^\circ_{\|\cdot\|}(\varepsilon', \vec{0})$ 是开集，因而是可测的；同样，和式本身 $\left(Y + B^\circ_{\|\cdot\|}(\varepsilon, \vec{0})\right)$ 也是如此。我们继续。

$$\geq \left(m_{out}(Y)^{\frac{1}{d}} + m\left(B^\circ_{\|\cdot\|}(\varepsilon', \vec{0})\right)^{\frac{1}{d}}\right)^d$$

上述不等式源于外测度的定义：$Y$ 是所有包含 $Y$ 的可测超集的测度的下确界。由于 $Y \subseteq Y + B^\circ_{\|\cdot\|}(\varepsilon', \vec{0})$，我们得到上述不等式。继续推导，可得：

$$\begin{aligned} &= \left(m_{out}(Y)^{\frac{1}{d}} + m\left(\varepsilon' \cdot B^\circ_{\|\cdot\|}(1, \vec{0})\right)^{\frac{1}{d}}\right)^d && \text{(Scaling of norm-based balls)} \\ &= \left(m_{out}(Y)^{\frac{1}{d}} + \left[(\varepsilon')^d \cdot m\left(B^\circ_{\|\cdot\|}(1, \vec{0})\right)\right]^{\frac{1}{d}}\right)^d && \text{(Scaling for Lebesgue measure)} \\ &= \left(m_{out}(Y)^{\frac{1}{d}} + \varepsilon' \cdot (v_{\|\cdot\|, d})^{\frac{1}{d}}\right)^d && \text{(Algebra and } v_{\|\cdot\|, d} \stackrel{\text{def}}{=} m\left(B^\circ_{\|\cdot\|}(1, \vec{0})\right)) \end{aligned}$$

由于上述不等式对所有 $\varepsilon' \in (0, \varepsilon)$ 都成立，因此在极限情况下也成立（保持 $d$ 和 $Y$不变）：

$$m\left(Y + B^{\circ}_{\|\cdot\|}(\varepsilon, \vec{0})\right) \geq \lim_{\varepsilon' \to \varepsilon} \left[\left(m_{out}(Y)^{\frac{1}{d}} + \varepsilon' \cdot (v_{\|\cdot\|,d})^{\frac{1}{d}}\right)^d\right] = \left(m_{out}(Y)^{\frac{1}{d}} + \varepsilon \cdot (v_{\|\cdot\|,d})^{\frac{1}{d}}\right)^d$$

由此得证。 □

此时，我们几乎已经可以证明本节的主要结果，但还需要最后一个结果，它给出了一个不等式，我们将把它与广义布伦-明可夫斯基不等式（定理 4.5）复合。下面的结果可以理解为：对于适当的参数，我们基本上可以将（$x$）中的“$x^{1/d} + \alpha$”$^d$ 提取出来，从而得到不比$x(1+\alpha)^d$更大的表达式。

**引理 4.7**。 对于 $d \in [1, \infty)$、 $x \in [0, 1]$ 和 $\alpha \in [0, \infty)$，有 $(x^{1/d} + \alpha)^d \geq x(1+\alpha)^d$。

使用标准微积分技巧证明该不等式的方法见附录 C。

## 4.2 定理1.5、推论1.6和定理 1.4 的证明

现在我们重新陈述并证明主要结果。

**定理 1.5** ($\varepsilon$-邻域的测度有界划分和任意范数。 令 $d \in \mathbb{N}, M \in (0, \infty)$，且 $\mathcal{P}$ 为 $\mathbb{R}^d$ 的一个划分，使得每个成员的勒贝格外测度至多为 $M$。令 $\mathbb{R}^d$ 赋予任意范数 $\|\cdot\|$。对于每个 $\varepsilon \in (0, \infty)$，存在 $\vec{p} \in \mathbb{R}^d$，使得 $B^{\circ}_{\|\cdot\|}(\varepsilon, \vec{p})$与该划分中至少 $k = \left\lfloor \left(1 + \varepsilon \left(\frac{v_{\|\cdot\|,d}}{M}\right)^{1/d}\right)^d \right\rfloor$ 个成员相交，其中 $v_{\|\cdot\|,\ d}$ 定义为$= m\left(B^{\circ}_{\|\cdot\|}(1, \vec{0})\right)$是 $\|\cdot\|$ 单位球的测度。

证明。 在整个证明过程中，所有长度都相对于 $\|\cdot\|$而言，因此为避免繁杂，我们将省略证明中所有位置的 $\|\cdot\|$ 下标。证明过程中，我们也始终只在单一维度 $d$ 中进行，因此也将始终省略 $v$ 中的 $d$ 下标。

对每个 $n \in \mathbb{N}$，考虑如下内容。令 $S_n = B^{\circ}(n, \vec{0})$ 和 $S'_n = B^{\circ}(n+\varepsilon, \vec{0}) = S_n + B^{\circ}(\varepsilon, \vec{0})$ 和 $\mathcal{S}$ 为由 $\mathcal{P}$诱导的 $S_n$ 划分。对每个 $Y \in \mathcal{S}_n$，令 $C_Y = Y + B^{\circ}(\varepsilon, \vec{0})$。根据引理 4.6，$C_Y$是可测的，并且 $m(C_Y) \geq \left(m_{out}(Y)^{\frac{1}{d}} + \varepsilon \cdot v^{\frac{1}{d}}\right)^d$。另外注意到 $C_Y \subseteq S'_n$。现在考虑

[5]也就是说， $\mathcal{S} = \{X \cap S_n : X \in \mathcal{P} \text{ 和 } X \cap S_n \neq \emptyset\}$。换言之， $\mathcal{S}$ 是通过将 $\mathcal{P}$ 的每个成员与新的定义域 $S_n$ 相交，并保留交集非空的成员而得到的 $S_n$ 的划分。

以下不等式：

$$
\begin{aligned}
m(C_Y) &\geq \left(m_{out}(Y)^{\frac{1}{d}} + \varepsilon \cdot v^{\frac{1}{d}}\right)^d && \text{(Above)} \\
&= \left(M^{1/d}\left[\frac{m_{out}(Y)^{\frac{1}{d}}}{M^{1/d}} + \frac{\varepsilon \cdot v^{\frac{1}{d}}}{M^{1/d}}\right]\right)^d && \text{(Algebra)} \\
&= M\left(\left[\frac{m_{out}(Y)}{M}\right]^{\frac{1}{d}} + \frac{\varepsilon \cdot v^{\frac{1}{d}}}{M^{1/d}}\right)^d && \text{(Algebra)} \\
&\geq M \cdot \frac{m_{out}(Y)}{M} \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon \cdot v^{\frac{1}{d}}}{M^{1/d}}\right)^d && \text{(引理 4.7 因为 } \tfrac{m_{out}(Y)}{M} \in [0,1]\text{)} \\
&= m_{out}(Y) \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon \cdot v^{\frac{1}{d}}}{M^{1/d}}\right)^d && \text{(Simplify)}
\end{aligned}
$$

直观地说，上述结果表明，对于每个 $Y \in \mathcal{S}_n$，集合 $Y + B^\circ(\varepsilon, \vec{0})$ 的（外）测度都显著大于 $Y$，具体而言，大约是其 $\left(1 + \frac{\varepsilon \cdot v^{\frac{1}{d}}}{M^{1/d}}\right)^d$ 倍。我们将进一步证明，这意味着 $\left\{Y + B^\circ(\varepsilon, \vec{0})\right\}_{Y \in \mathcal{S}_n}$ 的（外）测度同样大约是 $\mathcal{S}_n$ 的 $\mathcal{S}_n$ 倍。注意，$m$的总（外）测度约为 $S_n(\mathcal{S}_n)$，因为 $S_n$ 是 $\mathcal{S}_n$ 的一个划分（任何差异都源于 $\mathcal{S}_n$ 中存在不可测成员）。

形式化地说，我们断言存在一个有限子族 $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{S}_n$，使得

$$\sum_{Y \in \mathcal{F}_n} m\left(Y + B^\circ(\varepsilon, \vec{0})\right) \geq \left(1 + \frac{\varepsilon \cdot v^{\frac{1}{d}}}{M^{1/d}}\right)^d \cdot m(S_n).$$

为说明这一点，首先考虑 $\mathcal{S}_n$ 具有无限基数的情形。令 $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{S}_n$ 为任意一个有限基数至少为 $\left(1 + \frac{\varepsilon \cdot v^{\frac{1}{d}}}{M^{1/d}}\right)^d \cdot m(S_n) \cdot \frac{1}{\varepsilon^d v}$ 的子族。这给出

$$\sum_{Y \in \mathcal{F}_n} m\left(Y + B^\circ(\varepsilon, \vec{0})\right) \geq \sum_{Y \in \mathcal{F}_n} m\left(B^\circ(\varepsilon, \vec{0})\right)$$

其中，这个不等式是因为 $Y+B^\circ(\varepsilon,\vec{0})$ 是某个 $B^\circ(\varepsilon,\vec{0})$ 的平移的超集，因为 $Y\neq\emptyset$。接下来，我们使用标准事实： $m\left(B^\circ(\varepsilon,\vec{0})\right)=m\left(\varepsilon\cdot B^\circ(1,\vec{0})\right)=\varepsilon^d\cdot m\left(B^\circ(1,\vec{0})\right)=\varepsilon^d v$:

$$
\begin{aligned}
&\geq \sum_{Y\in\mathcal{F}_n}\varepsilon^d v \\
&= \left[\left(1+\frac{\varepsilon\cdot v^{\frac{1}{d}}}{M^{1/d}}\right)^d\cdot m(S_n)\cdot\frac{1}{\varepsilon^d v}\right]\cdot\varepsilon^d v && \text{(Cardinality of } \mathcal{F}_n\text{)} \\
&= \left(1+\frac{\varepsilon\cdot v^{\frac{1}{d}}}{M^{1/d}}\right)^d\cdot m(S_n). && \text{(Simplify)}
\end{aligned}
$$

现在考虑另一种（更有趣的）情况，即 $\mathcal{S}_n$ 具有有限基数[6]。取 $\mathcal{F}_n=\mathcal{S}_n$ 使得

$$
\begin{aligned}
\sum_{Y\in\mathcal{F}_n} m\left(Y+B^\circ(\varepsilon,\vec{0})\right) &= \sum_{Y\in\mathcal{S}_n} m\left(Y+B^\circ(\varepsilon,\vec{0})\right) && (\mathcal{F}_n=\mathcal{S}_n) \\
&\geq \sum_{Y\in\mathcal{S}_n} m_{out}(Y)\cdot\left(1+\frac{\varepsilon\cdot v^{\frac{1}{d}}}{M^{1/d}}\right)^d && \text{(Above)} \\
&= \left(1+\frac{\varepsilon\cdot v^{\frac{1}{d}}}{M^{1/d}}\right)^d\cdot\sum_{Y\in\mathcal{S}_n} m_{out}(Y) && \text{(Linearity of summation)} \\
&\geq \left(1+\frac{\varepsilon\cdot v^{\frac{1}{d}}}{M^{1/d}}\right)^d\cdot m_{out}\left(\bigcup_{Y\in\mathcal{S}_n} Y\right)
\end{aligned}
$$

其中，上述不等式源于外测度的可数次可加性，即集合的外测度之和至少与这些集合的并集的外测度一样大。在最后一步中，我们得到

$$
= \left(1+\frac{\varepsilon\cdot v^{\frac{1}{d}}}{M^{1/d}}\right)^d\cdot m(S_n) \qquad \left(\bigsqcup_{Y\in\mathcal{F}_n} Y=S_n \text{ is measurable}\right)
$$

因此，无论 $\mathcal{S}_n$ 的基数是无限还是有限，都存在一个有限子族$\mathcal{F}_n\subseteq\mathcal{S}_n$，使得

$$
\sum_{Y\in\mathcal{F}_n} m\left(Y+B^\circ(\varepsilon,\vec{0})\right)\geq\left(1+\frac{\varepsilon\cdot v^{\frac{1}{d}}}{M^{1/d}}\right)^d\cdot m(S_n).
$$

固定这样一个子族 $\mathcal{F}_n$，并令 $\mathcal{A}_n=\left\{Y+B^\circ(\varepsilon,\vec{0})\right\}_{Y\in\mathcal{F}_n}$ 是一个由 $\mathcal{F}_n$ 索引的族[7]。注意，对于每个 $A_Y\stackrel{\text{def}}{=}Y+B^\circ(\varepsilon,\vec{0})\in\mathcal{A}_n$，由于 $Y\subseteq S_n=B^\circ(n,\vec{0})$，我们有 $A_Y\subseteq S_n+B^\circ(\varepsilon,\vec{0})=S'_n$。因此，根据推论 A.6[8]，，存在一个点 $\vec{p}^{(n)}\in S'_n$，它属于 $\mathcal{A}_n$ 中至少 $k_n$ 个集合

[6]事实上，即使我们已经处理过这种情况，该情形在 $\mathcal{S}_n$ 为可数时也同样成立。[7]我们要求这是一个指标族，而不仅仅是一个集合，因为可能存在不同的$Y$，$Y'\in\mathcal{S}_n$ 使得 $Y+B^\circ(\varepsilon,\vec{0})=Y'+B^\circ(\varepsilon,\vec{0})$。[8]在本证明中，我们取 $X$ 为推论 A.6 中的 $S'_n$，并取 $\mu$ 为 $m$，并取 $\mathcal{A}$ 为 $\mathcal{A}_n$。我们有

其中

$$k_n \stackrel{\text{def}}{=} \left\lceil \frac{\sum_{Y\in\mathcal{F}_n} m\left(Y + B^\circ(\varepsilon,\vec{0})\right)}{m(S'_n)} \right\rceil \geq \frac{\left(1+\frac{\varepsilon\cdot v^{\frac{1}{d}}}{M^{1/d}}\right)^d \cdot m\left(S_n\right)}{m(S'_n)} \qquad \text{(Above)}$$

$$= \left(1+\frac{\varepsilon\cdot v^{\frac{1}{d}}}{M^{1/d}}\right)^d \cdot \frac{m\left(B^\circ(n,\vec{0})\right)}{m\left(B^\circ(n+\varepsilon,\vec{0})\right)} \qquad \text{(Def'n of } S_n \text{ and } S'_n\text{)}$$

$$= \left(1+\frac{\varepsilon\cdot v^{\frac{1}{d}}}{M^{1/d}}\right)^d \cdot \frac{n^d\cdot v}{(n+\varepsilon)^d\cdot v} \qquad \text{(Standard scaling fact)}$$

$$= \left(1+\frac{\varepsilon\cdot v^{\frac{1}{d}}}{M^{1/d}}\right)^d \cdot \left(\frac{n}{n+\varepsilon}\right)^d. \qquad \text{(Simplify)}$$

由于 $\vec{p}^{(n)}$ 至少属于 $\mathcal{A}_n$ 中的 $k_n$ 个集合，根据定义，这意味着至少存在 $k_n$ 个集合 $Y\in\mathcal{F}_n$，使得 $\vec{p}^{(n)}\in Y+B^\circ(\varepsilon,\vec{0})$，因此根据事实 4.4，我们有 $Y\cap B^\circ(\varepsilon,\vec{p}^{(n)})\neq\emptyset$。对于每个这样的 $Y$（因为 $Y\in\mathcal{F}_n\subseteq\mathcal{S}_n$），都存在一个不同的[9] $X_Y\in\mathcal{P}$，使得 $Y\subseteq X_Y$，因此 $X_Y\cap B^\circ(\varepsilon,\vec{0})\neq\emptyset$，这表明 $\mathcal{P}$ 中至少有 $k_n$ 个集合与 $B^\circ(\varepsilon,\vec{0})$ 相交。

在证明的最后一步，我们对 $n$ 进行极限过程。根据 事实 4.1，取 $\gamma\in\mathbb{R}$ 使得 $\gamma < \left(1+\frac{\varepsilon\cdot v^{\frac{1}{d}}}{M^{1/d}}\right)^d$ 且 $\lceil\gamma\rceil = \left\lceil\left(1+\frac{\varepsilon\cdot v^{\frac{1}{d}}}{M^{1/d}}\right)^d\right\rceil$。那么，因为

$$\lim_{n\to\infty} k_n \geq \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\varepsilon\cdot v^{\frac{1}{d}}}{M^{1/d}}\right)^d\cdot\left(\frac{n}{n+\varepsilon}\right)^d = \left(1+\frac{\varepsilon\cdot v^{\frac{1}{d}}}{M^{1/d}}\right)^d > \gamma,$$

我们可以取足够大的 $N\in\mathbb{N}$，使得

$$k_N \geq \left(1+\frac{\varepsilon\cdot v^{\frac{1}{d}}}{M^{1/d}}\right)^d\cdot\left(\frac{N}{N+\varepsilon}\right)^d > \gamma.$$

然后考虑 t 由于点 $\vec{p}^{(N)}$，根据 $\gamma$ 的选取以及 $k_N$ 是整数这一事实，我们有 tha t

$$k_N = \lceil k_N\rceil \geq \lceil\gamma\rceil = \left\lceil\left(1+\frac{\varepsilon\cdot v^{\frac{1}{d}}}{M^{1/d}}\right)^d\right\rceil$$

证明 $B^\circ(\varepsilon,\ \vec{p}^{(N)})$至少与 $\mathcal{P}$中的 $k_N \geq \left\lceil\left(1+\frac{\varepsilon\cdot v^{\frac{1}{d}}}{M^{1/d}}\right)^d\right\rceil$ 个成员相交，正如所声称的那样，由此完成证明。 □

即$\sum_{A\in\mathcal{A}_n} m(A) < \infty$因为 $|\mathcal{A}_n| = |\mathcal{F}_n|$是有限的，且每个 $A\in\mathcal{A}_n$都是 $S'_n$的子集，因此具有有限测度。[9]也就是说，对于 $Y\neq Y'\in\mathcal{S}_n$，我们有 $X_Y, X_{Y'}\in\mathcal{P}$并且 $X_Y\neq X_{Y'}$，所以这种将 $Y$映射到 $X$的映射是单射，因此具有所需性质的 $X$的基数至少与具有所需性质的 $Y$的基数相同。

注 *4.8*。仔细考察上述证明并稍作修改，就可以证明：如果存在任意一个有界集 $S \subseteq \mathbb{R}^d$，它与 $\mathcal{P}$ 中无穷多个元素相交，那么对每个 $i \in \mathbb{N}_0$，都存在一个点 $\vec{p}^{(i)} \in \mathbb{R}^d$，使得 $B^\circ_{\|\cdot\|}(\varepsilon, \vec{p}^{(i)})$ 至少与 $\mathcal{P}$ 中 $i$ 个成员相交。为此，取足够大的 $n_i \in \mathbb{N}$，使得 $S_{n_i} \supseteq S$，然后注意到 $\mathcal{S}_{n_i}$ 的基数是无限的，因此取 $\mathcal{S}_{n_i}$ 的一个足够大的子族 $\mathcal{F}_{n_i}$，使得 $\lfloor |\mathcal{F}_{n_i}| \cdot (\varepsilon \cdot v_d^{\frac{1}{d}})^d \rfloor$ 超过 $i \cdot m(S'_{n_i})$，从而 $\sum_{Y \in \mathcal{F}_{n_i}} m\left(Y + B^\circ_{\|\cdot\|}(\varepsilon, \vec{0})\right) \geq \lfloor |\mathcal{F}_{n_i}| \cdot (\varepsilon \cdot v_d^{\frac{1}{d}})^d \rfloor$ 超过 $i \cdot m(S'_{n_i})$。因此存在某个点 $\vec{p}^{(i)}$，它属于至少 $i$ 个集合 $Y \in \mathcal{S}_{n_i}$ 的 $Y + B^\circ_{\|\cdot\|}(\varepsilon, \vec{0})$，使得 $B^\circ_{\|\cdot\|}(\varepsilon, \vec{p}^{(i)})$ 至少与 $X_Y \in \mathcal{P}$ 中 $i$ 个集合相交。

然而，还可以做得更好。如果存在某个有界集 $S \subseteq \mathbb{R}^d$，那么 $S$ 也有界，因为其直径不更大。考虑 $\left\{B^\circ_{\|\cdot\|}(\varepsilon, \vec{x})\right\}_{\vec{x} \in S}$ 的标准开集覆盖 $S$。由于 $S$ 是闭且有界的，根据海涅–博雷尔定理，存在 $\mathcal{C} \subseteq \left\{B^\circ_{\|\cdot\|}(\varepsilon, \vec{x})\right\}_{\vec{x} \in S}$ 的有限子覆盖$S$。由于 $S$ 与 $\mathcal{P}$ 中的无穷多个集合相交，而 $\mathcal{C}$ 的基数是有限的，因此 $\mathcal{C}$ 中的某个 $\varepsilon$-球必定与 $\mathcal{P}$ 中的无穷多个成员相交。于是，对于每个 $\varepsilon \in (0, \infty$，实际上都存在某个 $\vec{p} \in \mathbb{R}^d$，使得 $B^\circ_{\|\cdot\|}(\varepsilon, \vec{p})$ 与 $\mathcal{P}$ 中的无穷多个成员相交。

主要结果现已证明，我们再介绍最后一个工具，它将使我们能够把定理 1.5的测度上界假设转化为直径上界假设。等直径不等式（如下所述）指出，任何有界集的测度都不会大于直径相同的球的测度。因此，对各成员（在任意范数下）的直径给出上界，便可立即得到这些成员测度的上界。

**定理 4.9**（等直径不等式）。令 $d \in \mathbb{N}$ 和 $\|\cdot\|$ 为 $\mathbb{R}^d$上的任意范数。设 $A \subseteq \mathbb{R}^d$ 为一个有界集。那么，$A$ 的勒贝格外测度至多等于直径相同的球的勒贝格测度。也就是说，（以下三种形式等价）若 直径$_{\|\cdot\|}(A) = D$，则

$$\begin{aligned} m_{out}(A) &\leq m\left(B^\circ_{\|\cdot\|}(D/2, \vec{0})\right) \\ &= \left(\tfrac{D}{2}\right)^d \cdot m\left(B^\circ_{\|\cdot\|}(1, \vec{0})\right) \\ &= \left(\tfrac{D}{2}\right)^d \cdot v_{\|\cdot\|,d}. \end{aligned}$$

有些资料仅用 $\ell_2$ 范数证明这个不等式，因为利用施泰纳对称化在几何上相当直观；不过，也可以借助广义布伦-明可夫斯基不等式（定理 4.5），给出适用于所有范数的更一般证明。为方便起见，我们在附录 A中采用后一种技巧给出一个标准证明。

**注4.10**。如果使用以下标准观察：对于有界集 $A$，其直径$_{\|\cdot\|}(A) = D$以及任意点 $\vec{a} \in A$，都有 $A \subseteq B^\circ_{\|\cdot\|}(D, a)$，那么立即可得

$$\begin{aligned} m_{out}(A) &\leq m\left(B^\circ_{\|\cdot\|}(D, \vec{a})\right) \\ &= m\left(B^\circ_{\|\cdot\|}(D, \vec{0})\right) \\ &= D^d \cdot m\left(B^\circ_{\|\cdot\|}(1, \vec{0})\right) \\ &= D^d \cdot v_{\|\cdot\|,d} \end{aligned}$$

因此，等直径不等式给出了缩小 2 倍的直径以及缩小 $2^d$ 倍的测度。

**推论 1.6** ($\varepsilon$-邻域与有界直径划分)。 设 $d \in \mathbb{N}$, $D \in (0,\infty)$,$\varepsilon \in (0,\infty)$。设 $\mathbb{R}^d$ 配备任意范数 $\|\cdot\|$。设 $\mathcal{P}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 的一个划分，使得每个成员的直径至多为 $D$ （相对于 $\|\cdot\|$） 。那么存在 $\vec{p} \in \mathbb{R}^d$，使得 $B^\circ_{\|\cdot\|}(\varepsilon, \vec{p})$与该划分中的至少 $k = \left\lceil \left(1 + \frac{2\varepsilon}{D}\right)^d \right\rceil$ 个成员相交。

证明。 令 $M = \left(\frac{D}{2}\right)^d \cdot v_{\|\cdot\|,\, d}$。 对于任意 $X \in \mathcal{P}$，由于 $\operatorname{diam}_{\|\cdot\|}(X) \le D$，则根据等直径不等式（定理 4.9）， $m_{out}(X) \le M$。由于 $\mathcal{P}$ 中的每个成员的勒贝格外测度至多为 $M$，则根据 定理 1.5，存在 $\vec{p} \in \mathbb{R}^d$ 使得 $B^\circ_{\|\cdot\|}(\varepsilon,\ \vec{p})$ 至少相交

$$\left\lceil \left(1 + \varepsilon \left(\frac{v_{\|\cdot\|,d}}{M}\right)^{1/d}\right)^d \right\rceil = \left\lceil \left(1 + \frac{2\varepsilon}{D}\right)^d \right\rceil$$

成员如 $\mathcal{P}$ 所命题。 □

我们还可以得到定理 1.4是定理1.5的一个简单推论。

**定理 1.4**。 设 $d \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in [0,\infty)$，且 $\mathcal{P}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 的一个划分，使得每个成员的勒贝格外测度至多为 1。那么存在某个 $\vec{p} \in \mathbb{R}^d$，使得 $B^\circ_\infty(\varepsilon, \vec{p})$ 至少与 $(1+2\varepsilon)^d$ 个 $\mathcal{P}$ 的成员相交。因此，如果 $\mathcal{P}$ 是一个$(k,\varepsilon)$-隔离划分，那么 $k \ge (1+2\varepsilon)^d$。因此，如果 $k \le 2^d$，则必有 $\varepsilon \le \frac{\ln}{d}^k$ 。

证明。 考虑 $\ell_\infty$ 范数，并注意到对于每个 $d \in \mathbb{N}$， $v_{\|\cdot\|_\infty,\, d} = 2^d$ （即 $\mathbb{R}^d$ 中的 $\ell_\infty$ 单位球的体积为 $2^d$）。

The由 定理 1.5，存在一点 $\vec{p} \in \mathbb{R}^d$ 使得 $B^\circ_\infty(\varepsilon, \vec{p})$ 至少相交于

$$\left(1 + \varepsilon \left(\frac{v_{\|\cdot\|_\infty,d}}{M}\right)^{1/d}\right)^d = \left(1 + \varepsilon \left(\frac{2^d}{1}\right)^{1/d}\right)^d = (1+2\varepsilon)^d$$

$\mathcal{P}$的成员，因此闭球 $B_\infty(\varepsilon, \vec{p})$显然也如此。因此，若 $\mathcal{P}$是$(k,\varepsilon)$-隔离的（按定义，这意味着对于每个 $\vec{p} \in \mathbb{R}^d$，都有 $B_\infty(\varepsilon, \vec{p})$至多与 $\mathcal{P}$的 $k$ 个成员相交），那么必有 $k \ge (1+2\varepsilon)^d$。

对于推论，若 $k \le 2^d$，则这意味着$\varepsilon \le \frac{1}{2}$。接着对不等式两边取对数，并利用对于 $x \in [0,1]$ 有$\ln(1+x) \ge \frac{x}{2}$这一事实，我们得到

$$\ln(k) \ge d \ln(1+2\varepsilon) \ge d\varepsilon$$

这表明 $\varepsilon \le \ln(k)\ d$ □

当 $k(d)$ 是多项式时，我们陈述以下有趣的推论。

**推论 4.11.** 设 $\langle \mathcal{P}_d \rangle_{d=1}^\infty$是 $\mathbb{R}^d$的一个 $k(d)$ $\varepsilon(d)$)-隔离划分序列，使得每个划分中的每个元素的勒贝格外测度至多为 *1*。若 $k(d) \in \text{poly}(d)$，则 $\varepsilon(d) \in O(\frac{\ln d}{d})$（其中隐藏常数可以取为任何大于 $k$的多项式次数的数）。

证明。 由于 $k(d) \in$ 多项式$(d)$，因此存在常数 $C, n$ 使得对于充分大的 $d$，我们有$k(d) \le Cd^n$ 对于充分大的 $d$ 小于 $2^d$ 因此根据 定理 1.4，对于充分大的 $d$我们有

$$\varepsilon(d) \le \frac{\ln(k(d))}{d} \le \frac{n \ln(Cd)}{d} \in O\left(\frac{\ln(d)}{d}\right).$$

更具体地，对于任意 $n' > n$，当 $d$ 足够大时，我们有 $(n'-n)\ln(d) \geq n\ln(C)$，因此当 $d$ 足够大时，我们有

$$\varepsilon(d) \leq \frac{n\ln(Cd)}{d} = \frac{n[\ln(C)+\ln(d)]}{d} \leq \frac{(n'-n)\ln(d)+n\ln(d)}{d} = \frac{n'\ln(d)}{d}$$

表明了 隐藏常数可以取为任意大于 $n$ 的 $n'$，其中 $n$ 是 $k$ 的次数 . □

### 4.3 特定范数

虽然我们不会对任何特定范数进行详尽分析，但至少会提及定理 1.5 在考虑一些最常见的范数时的取值。对于 $\ell_1$、$\ell_2$ 和 $\ell_\infty$ 范数，$v_d$ 的值分别为 $\frac{2^d}{d!}$、$\frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}$ 和 $2^d$。这里，$\Gamma$ 表示伽马函数，它是阶乘的推广（具体而言，对于自然数 $n$，$\Gamma(n+1) = n!$）。$\ell_2$ 球和 $\ell_\infty$ 球的体积是众所周知的，而 $\ell_1$ 球的体积可由 [Wan05],得到；或者也可以注意到，$\ell_1$ 单位球（忽略边界）是不相交的 $2^d$ 个标准单纯形的并集——每个正交象限中各有一个，且每个单纯形的测度为 $\frac{1}{d!}$。

| Norm | Lower Bound |
|---|---|
| $\ell_1$ | $\left(1+\frac{2\varepsilon}{(M\cdot(d!))^{1/d}}\right)^d \approx \left(1+\varepsilon\frac{2e}{M^{1/d}\cdot d}\right)^d$ |
| $\ell_2$ | $\left(1+\frac{\varepsilon\sqrt{\pi}}{\left(M\cdot\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)\right)^{1/d}}\right)^d \approx \left(1+\varepsilon\frac{\sqrt{2\pi e}}{M^{1/d}\cdot\sqrt{d}}\right)^d$ |
| $\ell_\infty$ | $\left(1+\varepsilon\frac{2}{M^{1/d}}\right)^d$ |

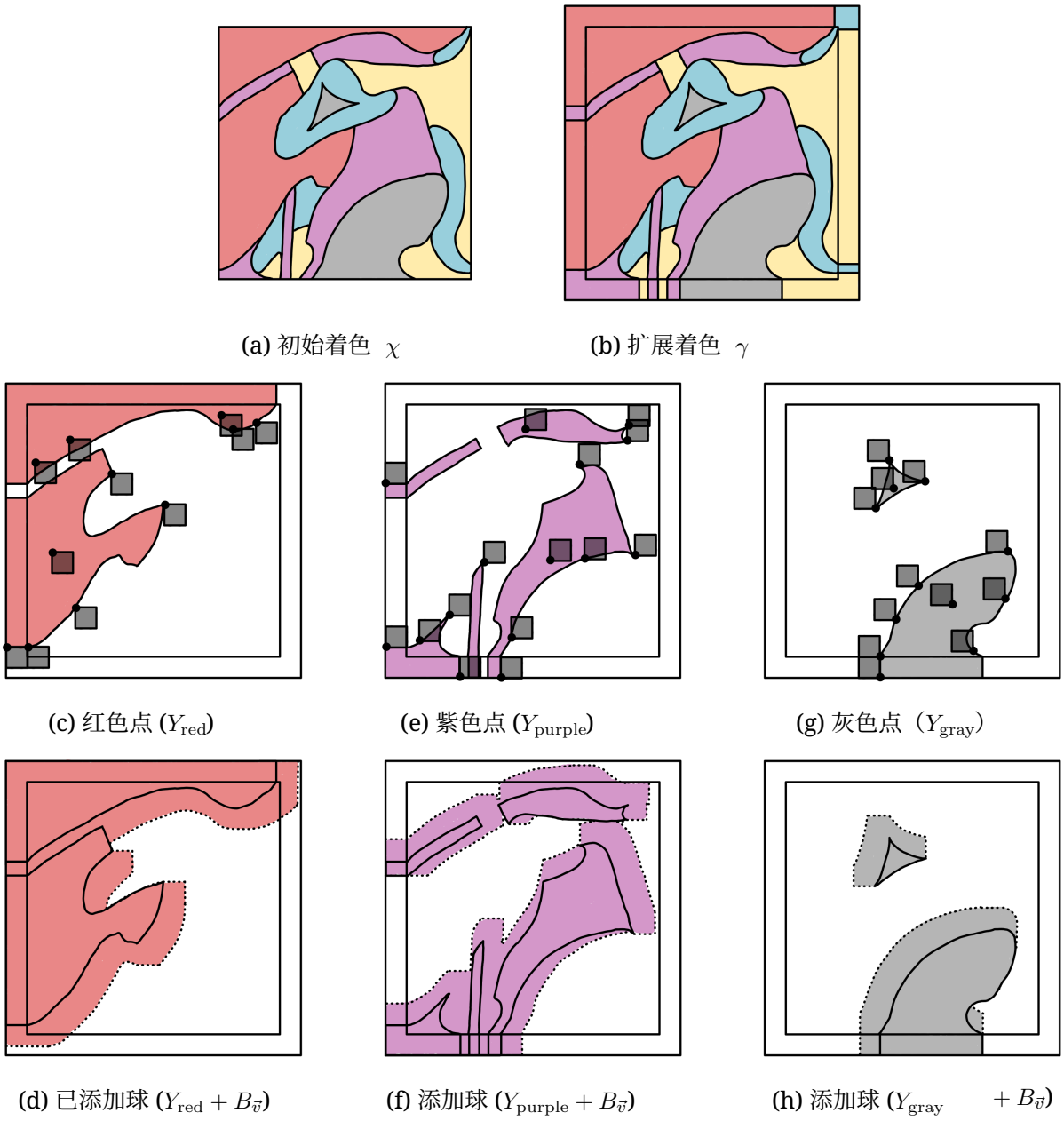
表 1：针对一些常见范数计算得到的下界。对于 $\ell_1$，近似值使用斯特林近似，得出 $(d!)^{1/d} \approx \left(\sqrt{2\pi d}\left(\frac{d}{e}\right)^d\right)^{1/d} \approx \frac{d}{e}$。对于 $\ell_2$，近似值使用斯特林近似和 $\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right) \approx \lceil\frac{d}{2}\rceil!$，得到 $\left(\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)\right)^{1/d} \approx \left(\lceil\frac{d}{2}\rceil!\right)^{1/d} \approx \left(\sqrt{2\pi\lceil\frac{d}{2}\rceil}\left(\frac{\lceil\frac{d}{2}\rceil}{e}\right)^{\lceil\frac{d}{2}\rceil}\right)^{1/d} \approx \left(\left(\frac{\lceil\frac{d}{2}\rceil}{e}\right)^{\lceil\frac{d}{2}\rceil}\right)^{1/d} \approx \sqrt{\frac{d}{2e}}$.

基于 $k(d)$ 的下界，依据 $\varepsilon(d)$，针对这三种特定范数的表述见定理 1.5，并可在表 1中找到。我们要指出的主要观察是，使用 $\ell_\infty$以外的范数时，$\varepsilon$ 这一因子不再是常数，而是维度的递减函数。这并不太令人意外，因为对于 $\ell_p$ 非 $\ell_\infty$范数，单位 $\ell_p$-球是单位 $\ell_\infty$ 球的子集，因此其测度会更小，并且实际上会随着 $d$ 趋于 $\infty$而趋于 0，所以我们应当预期无法与划分中的那么多个成员相交。

## 5 邻域 Sperner/KKM/Lebesgue 定理

本节重述并证明立方体上 Sperner/KKM/Lebesgue 结果的邻域变体。证明见图2。

**定理 1.8** (邻域斯佩纳引理)。给定 $[0,1]^d$ 上的一种着色，其中没有任何一种颜色包含相对面的点，那么对于任意 $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}]$，都存在一个点 $\vec{p} \in [0,1]^d$，使得 $B^\circ_\infty(\varepsilon, \vec{p})$包含至少 $\left(1+\frac{2}{3}\varepsilon\right)^d$ 种不同颜色的点。



(a) 初始着色 $\chi$　　(b) 扩展着色 $\gamma$

(c) 红色点 ($Y_{\mathrm{red}}$)　　(e) 紫色点 ($Y_{\mathrm{purple}}$)　　(g) 灰色点（$Y_{\mathrm{gray}}$）

(d) 已添加球 ($Y_{\mathrm{red}} + B_{\vec{v}}$)　　(f) 添加球 ($Y_{\mathrm{purple}} + B_{\vec{v}}$)　　(h) 添加球 ($Y_{\mathrm{gray}} + B_{\vec{v}}$)

图2：(a) 展示了单位立方体 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^2$的一种（有限）着色 $\chi$，其中没有任何一种颜色包含位于相对边上的点。(b) 展示了该着色向$[-\frac{1}{2}-\varepsilon,\frac{1}{2}+\varepsilon]^2$的自然扩展 $\gamma$。此扩展通过将每个点 $\vec{y}$ 映射到点 $\vec{x}$ 得到，其中每个坐标值 $y_i$都被限制在 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$范围内，然后赋予 $\vec{y}$与 $\vec{x}$相同的颜色。(c)、(e) 和 (g) 展示了五种颜色中的三种，并说明对于 $\varepsilon$球，至少存在一个象限，可以与该颜色作闵可夫斯基和，使所得的和仍是扩展立方体的子集。红色对应右下象限，紫色对应右上象限，灰色则可以对应左上象限（图中所示）或右上象限。(d)、(f) 和 (h) 展示了每种颜色对应的闵可夫斯基和。利用 Brunn-Minkowski不等式，该集合的面积将显著增大——至少增大 $(1+\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon})^2$倍。

证明。为方便起见，我们假设立方体是 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^d$，而不是 $[0,1]^d$。设 $C$ 为一个（颜色）集合，且 $\chi\colon [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^d \to C$ 是单位立方体 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^d$ 上的一种着色。注意，如果 $C$ 的基数是无限的，那么由于我们可以用有限个 $\varepsilon$ 球覆盖立方体，其中一个球必定与无限多个颜色集合相交，因此结论成立。于是我们假设 $C$ 的基数有限。

对于每种颜色 $c \in C$，我们用 $X_c$ 表示被 $\chi$ 赋予颜色 $c$ 的点的集合——也就是说，$X_c = \chi^{-1}(c)$。注意，不包含相对面上的点这一假设，严格来说意味着，对于每种颜色 $c \in C$，集合 $X_c$ 具有这样的性质：对于每个坐标 $i \in [d]$，投影 $\pi_i(X_c) = \{x_i\colon \vec{x} \in X_c\}$ 不同时包含 $-\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{2}$。

证明中的第一步是以自然的方式将着色 $\chi$ 扩展到更大的立方体 $[-\frac{1}{2}-\varepsilon,\frac{1}{2}+\varepsilon]^d$。考虑以下函数 $f$，它将较大区间中的点截断到较小区间内：

$$f\colon [-\tfrac{1}{2}-\varepsilon,\tfrac{1}{2}+\varepsilon] \to [-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}]$$
$$f(y) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} -\frac{1}{2} & y \le -\frac{1}{2} \\ y & y \in (-\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \\ \frac{1}{2} & y \ge \frac{1}{2} \end{cases}$$

令 $\vec{f}\colon [-\frac{1}{2}-\varepsilon,\frac{1}{2}+\varepsilon]^d \to [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^d$ 为在每个坐标上均为 $f$ 的函数：$\vec{f}(\vec{y}) \stackrel{\text{def}}{=} \langle f(y_i)\rangle_{i=1}^d$。现在将着色 $\chi$ 扩展为着色 $\gamma\colon [-\frac{1}{2}-\varepsilon,\frac{1}{2}+\varepsilon]^d \to C$ 定义为

$$\gamma(\vec{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \chi\left(\vec{f}(\vec{x})\right).$$

对于每种颜色 $c \in C$，令 $Y_c = \gamma^{-1}(c)$ 表示由 $\gamma$ 分配为 $c$ 颜色的点，并注意到 $Y_c \subseteq X_c$。按照这一记法，我们通常将单位立方体中的点称为 $\vec{x}$，将扩展立方体中的点称为 $\vec{y}$。

我们提出以下命题，该命题表明，对于每种颜色 $c \in C$，扩展着色中属于该颜色的点的集合 $Y_c$ 包含在扩展立方体 $[-\frac{1}{2}-\varepsilon,\frac{1}{2}+\varepsilon]^d$ 中的一个在每个坐标方向上都远离某一侧的集合内。

**命题A**。对于每种颜色 $c \in C$ 存在一个方向 $\vec{v} \in \{-1,1\}^d$ 使得 $Y_c \subseteq \prod_{i=1}^d v_i \cdot (-\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\varepsilon]$。

命题证明。固定任意一个坐标 $i \in [d]$。注意，对于每个 $\vec{y} \in Y_c$，我们都有 $f(\vec{y} \in X_c$ 这就是说，$\vec{y}$ 在扩展着色中的颜色与 $f(\vec{y})$ 在原始着色中的颜色相同（见论证[10]）。

注意，如果存在某个 $\vec{y} \in Y_c$ 使得 $y_i \le -\frac{1}{2}$，那么 $f(y_i) = -\frac{1}{2}$，因此 $\pi_i(X_c) \ni f(y_i) = -\frac{1}{2}$。类似地，如果存在某个 $\vec{y} \in Y_c$ 使得 $y_i \ge \frac{1}{2}$，那么 $\pi_i(X_c) \ni \frac{1}{2}$。回想一下，根据假设，$\pi_i(X_c)$ 不同时包含 $-\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{2}$，这意味着要么对所有 $\vec{y} \in Y_c$，都有 $y_i \succ -\frac{1}{2}$（因此 $\pi_i(Y_c) \subseteq (-\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\varepsilon]$），要么对所有 $\vec{y} \in Y_c$，都有 $y_i < \frac{1}{2}$（因此 $\pi_i(Y_c) \subseteq [-\frac{1}{2}-\varepsilon,\frac{1}{2})$。）

因此我们可以选择 $v_i \in \{-1,1\}$ 使得 $\pi_i(Y_c) \subseteq v_i \cdot (-\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\varepsilon]$。由于这对每个坐标 $i \in [d]$ 都成立，我们可以选择 $\vec{v} \in \{-1,1\}^d$ 使得

$$Y_c \subseteq \prod_{i=1}^d \pi_i(Y_c) \subseteq \prod_{i=1}^d v_i \cdot (-\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\varepsilon]$$

[10] 对于每个 $\vec{y} \in Y_c$，我们都有（根据 $Y_c$ 的定义）$\gamma(\vec{y}) = c$，并且（根据 $\gamma$ 的定义）$\gamma(\vec{y}) = \chi(f(\vec{y}))$，这表明 $\chi(f(\vec{y})) = c$，因此（根据 $X_c$ 的定义）$f(\vec{y}) \in X_c$。

如命题所述。 ■

对于一个方向 $\vec{v} \in \{-1,1\}^d$，令 $B_{\vec{c}}$表示集合 $B_{\vec{v}} \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^{d} -v_i \cdot (0,\varepsilon)$，应将其理解为以原点为中心的 $\ell_\infty$ $\varepsilon$-球的一个开正交象限——具体来说，是与方向 $\vec{v}$相反的正交象限。基于命题 A，我们得到如下结论：

**命题 B.** 对于每种颜色 $c \in C$，都存在一个方向 $\vec{v} \in \{-1,1\}^d$，使得 $Y_c + B_{\vec{v}} \subseteq [-\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon]^d$。

命题证明. 设 $\vec{v}$ 是命题 A 中针对颜色 $c$给出的方向。我们得到以下包含关系链：

$$
\begin{aligned}
Y_c + B_{\vec{v}} &= Y_c + \left( \prod_{i=1}^{d} -v_i \cdot (0,\varepsilon) \right) && \text{(Def'n of } B_{\vec{v}}\text{)} \\
&\subseteq \left( \prod_{i=1}^{d} v_i \cdot (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2} + \varepsilon] \right) + \left( \prod_{i=1}^{d} -v_i \cdot (0,\varepsilon) \right) && \text{(Claim A)} \\
&= \left( \prod_{i=1}^{d} v_i \cdot (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2} + \varepsilon] \right) + \left( \prod_{i=1}^{d} v_i \cdot (-\varepsilon, 0) \right) && \text{(Factor a negative)} \\
&= \prod_{i=1}^{d} v_i \cdot (-\tfrac{1}{2} - \varepsilon, \tfrac{1}{2} + \varepsilon) && \text{(Minkowski sum of rectangles)} \\
&\subseteq [-\tfrac{1}{2} - \varepsilon, \tfrac{1}{2} + \varepsilon]^d. && (v_i \in \{-1,1\})
\end{aligned}
$$

这就证明了该命题。 ■

我们还声称，$Y_c + B_{\vec{v}}$ 具有相当大的测度。

**命题 C。** 对于每种颜色 $c \in C$ 和任意方向 $\vec{v} \in \{-1,1\}^d$，集合 $Y_c + B_{\vec{v}}$ 是博雷尔可测的，且 $m(Y_c + B_{\vec{v}}) \geq m_{out}(Y_c) \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^d$。 ——

命题证明。令 $M = (1+\varepsilon)^d$这是 $\prod_{i=1}^{d} v_i \cdot (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \varepsilon]$，并且由于根据命题 A，_ $Y_c$ 是此集合的子集，因此我们有 $m_{out}(Y_c) \leq M$。

我们有 马会话语 $Y_c + B_{\vec{v}}$是博雷尔可测的，并且 $m(Y_c + B_{\vec{v}}) \geq \left( m_{out}(Y_c)^{\frac{1}{d}} + \varepsilon \right)^d$ 由

引理 4.6 （详见[11]）。因此，我们得到以下不等式链：

$$
\begin{aligned}
m(Y_c + B_{\vec{v}}) &\geq \left(m_{out}(Y_c)^{1/d} + \varepsilon\right)^d && \text{(Above)} \\
&= M \cdot \left(\frac{m_{out}(Y_c)^{1/d}}{M^{1/d}} + \frac{\varepsilon}{M^{1/d}}\right)^d && \text{(Factor out } M\text{)} \\
&\geq M \cdot \left(\frac{m_{out}(Y_c)}{M}\right) \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon}{M^{1/d}}\right)^d && \text{(Lemma 4.7)} \\
&= m_{out}(Y_c) \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^d && \text{(Simplify and use } M = (1+\varepsilon)^d\text{)}
\end{aligned}
$$

■

现在，考虑指标族 $\mathcal{A} = \left\{Y_c + B_{\vec{v}(c)}\right\}_{c \in C}$（其中 $\vec{v}(c)$ 是 $c$ 的一个方向，如命题 A 和命题 B 中所述），注意到它具有有限基数，因为 $C$ 具有有限基数。考虑 $\mathcal{A}$中集合的测度之和，可得：

$$
\begin{aligned}
\sum_{A \in \mathcal{A}} m(A) &= \sum_{c \in C} m\left(Y_c + B_{\vec{v}(c)}\right) && \text{(Def'n of } \mathcal{A}\text{; measurability was shown above)} \\
&\geq \left(1 + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^d \cdot \sum_{c \in C} m_{out}(Y_c) && \text{(Claim C and linearity of summation)} \\
&\geq \left(1 + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^d \cdot m_{out}\left(\bigcup_{c \in C} Y_c\right) && \text{(Countable/finite subaddativity of outer measures)} \\
&= \left(1 + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^d \cdot m_{out}\left(\left[-\tfrac{1}{2} - \varepsilon, \tfrac{1}{2} + \varepsilon\right]^d\right) && \text{(The } Y_c\text{'s partition } \left[-\tfrac{1}{2} - \varepsilon, \tfrac{1}{2} + \varepsilon\right]^d\text{)} \\
&= \left(1 + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^d \cdot (1 + 2\varepsilon)^d && \text{(Evaluate outer measure)}
\end{aligned}
$$

根据命题 B， $\mathcal{A}$ 中的每个成员都是 $\left[-\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon\right]^d$的子集，因此根据命题 A.9，存在一个点 $\vec{p} \in \left[-\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon\right]^d$ 至少属于

$$
\left\lceil \frac{\left(1 + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^d \cdot (1+2\varepsilon)^d}{(1+2\varepsilon)^d} \right\rceil = \left\lceil \left(1 + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^d \right\rceil
$$

在 $\mathcal{A}$ 中的集合。也就是说，对于至少 $\left\lceil \left(1 + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^d \right\rceil$ 种颜色 $c \in C$， $\vec{p}$属于 $Y_c + B_{\vec{v}(c)}$。对于每种这样的颜色 $c$，可知 $\vec{p} + (-\varepsilon, \varepsilon)^d$ 与 $Y_c$ 相交（见论证[12]）。请注意，关于

[11]注意，对于 $\ell_\infty$ 范数，单位球的测度为$v_{\|\cdot\|_\infty, d} = 2^d$。随后注意到， $B_{\vec{v}}$ 是相对于 $\ell_\infty$的 $\varepsilon$ 球的一个开正交象限，因此实际上其本身是相对于 $\ell_\infty$的 $\frac{\varepsilon}{2}$ 球。这就是为什么我们在引理 4.6中得到“$\varepsilon$”，而不是引理4.6中的“$2\varepsilon$”。我们可以将这个开球平移到原点，并相应地平移集合 $Y_c$，从而得到相同的闵可夫斯基和，同时不改变测度；完成这些操作后，我们可以逐字应用引理 4.6。[12]如果 $\vec{p} \in Y_c + B_{\vec{v}(c)} \subseteq Y_c + (-\varepsilon, \varepsilon)^d$，那么根据闵可夫斯基和的定义，存在 $\vec{y} \in Y_c$和 $\vec{b} \in (-\varepsilon, \varepsilon)^d$，使得 $\vec{p} = \vec{y} + \vec{b}$，因此 $Y_c \ni \vec{y} = \vec{p} - \vec{b} \in \vec{p} + (-\varepsilon, \varepsilon)^d$，这表明这两个集合包含一个公共点。

$\ell_\infty$ 范数，$\vec{p}+(-\varepsilon,\ \varepsilon)^d = B^\circ_\infty(\varepsilon,\ \vec{p})$，这表明 $B^\circ_\infty(\varepsilon,\ \vec{p})$包含至少 $\left\lceil\left(1+\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^d\right\rceil$种颜色的点（根据对 $\gamma$ 的着色，因为我们讨论的是集合 $Y_c$）。

不过，我们真正想要的是单位立方体中的一个具有此性质的点，而不是扩展立方体中的点；并且我们希望它相对于原始着色 $\chi$ 而非扩展着色 $\gamma$。我们将证明点 $\vec{f}(\vec{p})$ 已足够。

**命题 D.** 如果 $c \in C$ 是一种颜色，且 $B^\circ_\infty(\varepsilon,\vec{p}) \cap Y_c \neq \emptyset$，那么 $B^\circ_\infty(\varepsilon,\vec{f}(\vec{p})) \cap X_c \neq \emptyset$ 也成立。

命题证明。设 $\vec{y} \in B^\circ_\infty(\varepsilon,\vec{p}) \cap Y_c$。那么，由于 $\vec{y} \in B^\circ_\infty(\varepsilon,\vec{p})$，我们有 $\|\vec{y}-\vec{p}\|_\infty < \varepsilon$，因此对每个坐标 $i \in [d]$，$|y_i - p_i| < \varepsilon$。容易分析定义 $f$ 时出现的 9 种情形（利用对称性也可简化为 3 种），从而看出这意味着 $|f(y_i) - f(p_i)| < \varepsilon$ 也成立（即 $f$ 将其定义域中的数值对映射为彼此距离不增的数值对），于是 $\|\vec{f}(\vec{y}) - \vec{f}(\vec{p})\|_\infty < \varepsilon$，进而 $\vec{f}(\vec{y}) \in B^\circ_\infty(\varepsilon,\vec{f}(\vec{p}))$。

此外，正如先前脚注[10]，$\vec{y} \in Y_c$ $\vec{f}\,\vec{y} \in X_c$ $\vec{f}\,\vec{y} \in$ 中所论证的，对任意我们都有 ( )，因此 ( ) $B^\circ_\infty(\varepsilon,\ f(\vec{p})) \cap X_c$ 这表明交集非空。■

因此，由于 $B^\circ_\infty(\varepsilon,\ \vec{p})$ 至少与 $Y_c$ 个 $\left\lceil\left(1+\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^d\right\rceil$ 颜色选择 $c \in C$相交，根据命题 D $\vec{f}$ $(\vec{p})$ 是单位立方体中的一个点，它至少与 $X_c$ 个 $\left\lceil\left(1+\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^d\right\rceil$ 不同颜色 $c \in C$相交。也就是说，这个球包含来自至少这么多个原始颜色集合的点。

定理证明的最后一步是用一个不等式整理该表达式。注意，$C$ 至少必须包含 $2^d$ 种颜色，因为单位立方体的 $2^d$ 个角中的每一个都必须被分配一种唯一的颜色，因为任意一对角都属于立方体上的一对相对的面。基于此，对于$\varepsilon > \frac{1}{2}$，显然存在一个点 $\vec{p}$，使得 $B^\circ_\infty(\varepsilon,\vec{p})$至少与$2^d$种颜色相交：只需令 $\vec{p}$为单位立方体的中点即可。因此，唯一有趣的情形是 $\varepsilon \in (0,\frac{1}{2}]$，对于这样的 $\varepsilon$，我们有 $1+\varepsilon \leq \frac{3}{2}$，从而 $\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \geq \frac{2}{3}\varepsilon$，这表明 $\left(1+\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^d \geq (1+\frac{2}{3}\varepsilon)^d$。至此，定理的证明完成。

□

## 6 个新构造

我们在本节构造的划分形式非常自然：通过将 $d$ 空间的坐标拆分成较小的集合，并分别划分每个坐标集合，从而构造高维空间的划分。最终，这些较小的划分将是已知的划分构造 [VWDP+22]。我们将以非常通用的方式定义该构造。我们需要两个基本结果。以下观察指出，如果一个划分是 $(k,\varepsilon)$-隔离的，那么我们可以增大$k$ 到 $k'$，并将 减小 $\varepsilon$ 到 $\varepsilon'$，此时该划分显然是 $(k',\varepsilon')$-隔离的。

**观察 6.1** (在单调性 $k$和 $\varepsilon$)。设 $d \in \mathbb{N}$, $k,k' \in \mathbb{N}$ 满足 $k' \geq k$, $\varepsilon,\varepsilon' \in [0,\infty)$ 满足$\varepsilon' \leq \varepsilon$，且 $\mathcal{P}$ 为一个$(k,\varepsilon)$-隔离划分 *of* $\mathbb{R}^d$。则 $\mathcal{P}$ 也是一个$(k',\varepsilon')$-隔离划分 *of* $\mathbb{R}^d$。

证明。由于 $\mathcal{P}$ 是 $(k,\varepsilon)$-隔离的，根据定义，每个 $\varepsilon$-球与 $\mathcal{P}$ 的至多 $k$ 个成员相交，因此显然，每个（不更大的） $\varepsilon'$-球与 $\mathcal{P}$ 的至多 $k' \geq k$ 个成员相交。 □

我们将经常仅使用短语“根据单调性，$\mathcal{P}$ 是（$k'$，$\varepsilon'$）-隔离的”来指代上述观察

**事实 6.2**（平凡的 $k$ 单位立方体划分）。设 $d \in \mathbb{N}$、$\varepsilon \in [0, \infty)$ 和 $\mathcal{P}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 的单位立方体划分。那么，对于 $k = \lfloor (2+2\varepsilon)^d \rfloor$，$\mathcal{P}$ 是 $(k, \varepsilon)$-隔离的。

证明。任取一点 $\vec{p} \in \mathbb{R}^d$。注意，任意 $X \in \mathcal{P}$, $X$ 都是一个单位立方体，因此 $\operatorname{diam}_\infty(X) = 1$；所以，如果 $X$ 与 $B_\infty(\varepsilon, \vec{p})$ 相交，那么 $X \subseteq B_\infty(1+\varepsilon, \vec{p})$。

由于 (1) 每个 $X \in \mathcal{P}$ 的测度均为 1，(2) 任意两个成员互不相交（因为 $\mathcal{P}$ 是一个划分），且 (3) $B_\infty(1+\varepsilon, \vec{p}) = \vec{p} + [-1-\varepsilon, 1+\varepsilon]^d$ 的测度为 $(2+2\varepsilon)^d$，因此 $\mathcal{P}$ 中至多有 $\lfloor (2+2\varepsilon)^d \rfloor$ 个成员是 $B_\infty(1+\varepsilon, \vec{p})$ 的子集，从而至多有 $\lfloor (2+2\varepsilon)^d \rfloor$ 个 $\mathcal{P}$ 的成员与 $B_\infty(\varepsilon, \vec{p})$ 相交。这表明，正如所述，$\mathcal{P}$ 对于 $k = \lfloor (2+2\varepsilon)^d \rfloor$ 是 $(k, \varepsilon)$-隔离的。 □

## 6.1 构造

**定义 6.3** (划分乘积)。设 $d_1$、...、$d_n \in \mathbb{N}$ 和 $\mathcal{P}_1$、...、$\mathcal{P}_n$ 分别是 $\mathbb{R}^{d_1}$、...、$\mathbb{R}^{d_n}$ 的划分。令 $d = \sum_{i=1}^n d_n$，我们将 $\mathbb{R}^d$ 的乘积分划定义为

$$\prod_{i=1}^n \mathcal{P}_i \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \prod_{i=1}^n X_i \colon X_i \in \mathcal{P}_i \right\}$$

其中 $\prod_{i=1}^n X_i$ 被视为 $\mathbb{R}^d$ 的子集。

我们特意说明 $\prod_{i=1}^n X_i$ 被视为 $\mathbb{R}^d$ 的子集，因为严格来说它是 $\prod_{i=1}^n \mathbb{R}^{d_i}$的子集，但后者自然地同构于 $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{\sum_{i=1}^n d_i}$。例如，严格来说，如果$d_1 = d_2 = d_3 = 2$，那么 $\prod_{i=1}^n \mathbb{R}^{d_i}$ 的元素具有 $\langle \langle x_1, x_2 \rangle, \langle x_3, x_4 \rangle, \langle x_5, x_6 \rangle \rangle$的形式，但只需将该元素视为 $\langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \rangle$，它就显然同构于 $\mathbb{R}^6$。

另请注意（如下所示），如果原始划分是单位立方体划分，那么乘积分划也是单位立方体划分。

**事实6.4** (单位立方体保持性)。如果 $d_1$、..、$d_n \in \mathbb{N}$ 和 $\mathcal{P}_1$、..、$\mathcal{P}_n$ 是 单位立方体 划分 $\mathbb{R}^{d_1}$、..、$\mathbb{R}^{d_n}$ 的，那么 $\prod_{i=1}^n \mathcal{P}_i$ 也是单位立方体划分。

证明。 $\prod_{i=1}^n \mathcal{P}_i$ 中的每个成员都具有 $\prod_{i=1}^n X_i$ 的形式，其中 $X_i \in \mathcal{P}_i$。由于 $\mathcal{P}_i$ 是单位立方体划分，每个 $X_i$ 都是 $[0, 1$的平移的乘积，因此 $\prod_{i=1}^n X_i$ 也是 $[0, 1$的平移的乘积，所以该成员是一个单位立方体。 □

现在我们可以给出本节的主要结果：如果我们取划分的乘积，并且对于每个 $\mathcal{P}_i$，我们都能保证它是 $(k_i, \varepsilon_i)$-隔离的，那么我们就能保证乘积分划是 $(k, \varepsilon)$-隔离的，其中 $k$ 是各个 $k_i$ 的乘积，而 $\varepsilon$ 是各个 $\varepsilon_i$ 的最小值。

**命题 6.5**（乘积划分隔离保证）。设 $n \in \mathbb{N}$。对于每个索引 $i \in [n]$，令 $d_i$、$k_i \in \mathbb{N}$、$\varepsilon_i \in$（0、$\infty$），并令 $\mathcal{P}_i$ 为 $\mathbb{R}^{d_i}$ 的一个（$k_i$、$\varepsilon_i$）-隔离划分。则乘积划分 $\mathcal{P} = \prod_{i=1}^n \mathcal{P}_i$ 是 $\mathbb{R}^d$ 的一个（$k$、$\varepsilon$）-隔离划分，其中 $d = \sum_{i=1}^n d_i$，且 $k = \prod_{i=1}^n k_i$，以及 $\varepsilon$ =最小值$_{i \in [n]} \varepsilon_i$。

证明概要。基本思想是，对于任意一个点 $\vec{p} \in \mathbb{R}^d$，我们考察 $\mathcal{P}$中的多少个成员与 $B_\varepsilon(\vec{p})$相交。概念上，[13]，我们将 $\vec{p}$ 视为一个序列 $\langle \vec{p}^{(i)} \rangle_{i=1}^n$，其中包含 $n$ 个点，其中第 $i$个

[13]换句话说，我们将集合 $\mathbb{R}^d$ 与 $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} \times \cdots \times \mathbb{R}^{d_{n-1}} \times \mathbb{R}^{d_n}$ 视为相同

点 $\vec{p}^{(i)}$ 属于 $\mathbb{R}^{d_i}$。由于我们使用的是 $\ell_\infty$ 范数（即 secluded 的定义所使用的范数），$\varepsilon$ 围绕 $\vec{p}$ 的球是围绕每个 $\vec{p}^{(i)}$ 的 $\varepsilon$ 球的乘积；因为我们选择 $\varepsilon$ 作为最小尺寸，所以它小于围绕每个 $\vec{p}^{(i)}$ 的 $\varepsilon_i$ 球的乘积。因此，如果围绕 $\vec{p}$ 的 $\varepsilon$ 球与划分 $\mathcal{P}$的一个成员 $X$ 相交，那么将 $X$概念性地视为一个序列 $\langle X_i\rangle_{i=1}^n$，其中 $X_i$ 是 $\mathcal{P}_i$的一个成员，则对于每个 $i\in[n]$，围绕 $\vec{p}^{(i)}$ 的 $\varepsilon$ 球必与 $X_i$ 相交（因此围绕 $\varepsilon_i\geq\varepsilon$的 $\varepsilon_i$ 球也是如此）。这意味着（对于每个 $i\in[n]$），$X_i$是 $\mathcal{P}_i$ 中至多 $k_i$ 个成员之一，因为至多有 $k_i$ 个 $\mathcal{P}_i$ 的成员与围绕 $\vec{p}^{(i)}$ 的 $\varepsilon_i$ 球相交（根据 $\mathcal{P}_i$ 为 $(k_i,\varepsilon_i)$-隔离的定义）。因此，$X$ 是 $\mathcal{P}$中至多 $\prod_{i=1}^n k_i = k$ 个成员之一。也就是说，至多有 $k$ 个 $\mathcal{P}$ 的成员与围绕 $\vec{p}$ 的 $\varepsilon$ 球相交，这正是 $\mathcal{P}$ 为 $(k,\varepsilon)$-隔离的定义。

□

利用上述构造，我们现在将对每个 [VWDP+22] 取一个$\mathbb{R}^{d_i}$ 单位立方体划分，并取它们的乘积以得到一个新的划分。由于每个 $d_i$ 的维度都小于维度 $d$，这使我们能够对每个划分获得更大的 $\varepsilon_i$ 值，从而使 $\varepsilon$ 的划分获得更大的 $\mathbb{R}^d$ 值，而非使用原有划分之一所能达到的值。为此付出的代价是 $k$ 的值也会增大。以下结果不过是命题 6.5的一种情形，其中乘积中的每个划分都特指 [VWDP+22]的一个划分。

定理 1.9. 设 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 为任意函数。对于每个 $d\in\mathbb{N}$，存在一个 $k(d)$ $\varepsilon(d)$-隐蔽单位立方体划分 $\mathbb{R}^d$，其中 $k(d)=(f(d)+1)^{\lceil d/f(d)\rceil}$ 且 $\varepsilon(d)=\frac{1}{2f(d)}$

证明。固定 $d\in\mathbb{N}$。令 $d'=f(d)$ 和 $n=\lceil\frac{d}{f(d)}\rceil=\lceil\frac{d}{d'}\rceil$。令 $\mathcal{P}'$为 $d'+1,\frac{1}{2d'}$-隐蔽单位立方体划分，其中 $\mathbb{R}^{d'}$（使用 [VWDP+22]的结果）。

根据命题 6.5 和事实 6.4，$\mathcal{P}=\prod_{i=1}^n\mathcal{P}'$ 是 $\mathbb{R}^{n\cdot d'}$的一个 $(k,\varepsilon)$-隐蔽单位立方体划分，其中 $k=(d'+1)^n$ 且$\varepsilon=\frac{1}{2d'}$。由于 $n\cdot d'=\lceil\frac{d}{d'}\rceil\cdot d'\geq d$，忽略多余的坐标即可直接得到具有相同性质的 $\mathbb{R}^d$ 的划分（或者参见脚注[14]）。回顾 $d'=f(d)$ 和$n=\lceil\frac{d}{f(d)}\rceil$的定义，即可得到所述结果。

□

上述构造非常一般。不过，通过选取不同的参数，我们可以将其具体化，从而得到以下定理。正如引言中所述，对于这些构造，所达到的容差参数 $\varepsilon(d)$ 在 $O(\ln d)$ 因子范围内是最优的。下文中，weaksubexp($d$) 是$2^{o(d)}$。

**定理 6.6。** 令 $\varepsilon:\ \mathbb{N}\to(0,\infty)$。则存在 $k:\ \mathbb{N}\to\mathbb{N}$，使得对于每个 $d\in\mathbb{N}$，都存在一个 $(k(d)\ \varepsilon(d))$-隐蔽单位超立方体划分 $\mathbb{R}^d$，且 $k$ 具有以下性质：
*1.* 如果 $\varepsilon(d)\in O(1)$，则 $k(d)\in\exp(d)$ *2.* 如果 $\varepsilon(d)\in o(1)$，则 $k(d)\in\text{weaksubexp}(d)$ *3.* 如果 $\varepsilon(d)\in O(\frac{1}{d})$，则 $k(d)\in\text{poly}(d)$

如果所有划分 $\mathcal{P}_1,\ldots,\mathcal{P}_n$ 都是“可高效计算”的，即对于任意给定的点 $\vec{x}\in\mathbb{R}^{d_i}$，存在一种高效算法，能够计算出包含 $\vec{x}$ 的 $\mathcal{P}_i$ 中成员的表示，那么乘积分划也同样是“可高效计算”的，因为给定某个点

[14]另一种看法是令 $d_1,\ldots,d_n$ 满足 $\sum_{i=1}^n d_i=d$，并令列表 $d_i=d'$的前一部分以及列表 $d_i=d''\overset{\text{def}}{=}d'-1$的后一部分满足相应条件。接着，像之前一样，令 $\mathcal{P}'$ 为 $\mathbb{R}^{d'}$ 的一个 $(d'+1,\frac{1}{2d'})$-隔离划分，并令 $\mathcal{P}''$ 为 $\mathbb{R}^{d''}$的一个 $(d''+1,\frac{1}{2d''})$-隔离划分。由于 $d''<d'$，$\mathcal{P}''$（根据单调性）是一个 $(d'+1,\frac{1}{2d'})$-隔离划分，接下来令 $\mathcal{P}_i=\mathcal{P}'$在 $d_i=d'$ 时取该值，并令 $\mathcal{P}_i=\mathcal{P}''$在 $d_i=d''$时取该值。同样可得，对于 $k=(d'+1)^n$ 和 $\varepsilon=\frac{1}{2d'}$，$\mathcal{P}$是 $(k,\varepsilon)$-隔离的。

$\vec{y} \in \mathbb{R}^d$，可通过确定 $\mathcal{P}_1$ 点 $\langle y_i \rangle_{i=1}^{d_1}$ 属于 $\mathcal{P}_2$ 点 $\langle y_i \rangle_{i=d_1+1}^{d_1+d_2}$ 所属的哪个部分，并分别确定 $\prod_{i=1}^{d} \mathcal{P}_i$ 包含 $\vec{y}$ 属于哪个部分，来找到它所属的部分，依此类推。包含 的 部分就是各部分的乘积。这是将划分作为舍入方案基础时的一项重要性质，因为算法必须确定一个点属于哪个部分/等价类（即使只是隐式地确定）。由于 VWDP+22] 的划分是"可高效计算"的（见版本 1 中的命题 11.2），因此定理 1.9中这一构造的划分也可高效计算。

# 7 免费午餐定理

**定理 1.10.** 令 $d$、$k \in \mathbb{N}$ 和 $\varepsilon_0 \in (0、\infty)$ 以及 $\delta \in (0, \frac{1}{2}]$ 固定，并令 $\|\cdot\|$ 为 $\mathbb{R}^d$ 上的范数。假设存在 $\varepsilon \in (0、\infty)$ 以及一个确定性算法 $A$，将 $\mathbb{R}^d$ 中的输入映射到 $\mathbb{R}^d$ 中的输出，并具有以下通用黑盒性质：

**性质：** 对于任意集合 $\Lambda$ （表示某个问题定义域）和函数 $f: \Lambda \to \mathbb{R}^d$ 以及（$\varepsilon_0$、$\delta$）-近似算法 $B$ 对于 $f$（关于 $\|\cdot\|$），有 $A \circ B$ 是一个（$k$、$\delta$）-伪确定性（$\varepsilon$、$\delta$）-近似算法，对于 $f$（同样关于 $\|\cdot\|$）。于是 $\varepsilon \geq \varepsilon_0 \cdot 4^{-d^{\ln(2k)}}$。

定理证明 定理 *1.10*。 由于 $A$ 是一个确定性算法，它将 $\mathbb{R}^d$ 中的任意点映射到 $\mathbb{R}^d$，因此我们可以将 $A$ 视为一个数学函数 $A: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$。每个数学函数都会在其定义域上诱导出一种自然划分，该划分由函数的原像/纤维组成；也就是说

$$\mathcal{P}_A \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ A^{-1}(\vec{y}) : \vec{y} \in \text{range}(A) \right\}.$$

换句话说， $\mathcal{P}_A$ 是由定义域 $\mathbb{R}^d$ 上的等价关系所定义的划分，其中 $\vec{x} \sim \vec{x}'$ 当且仅当 $A(\vec{x}) = A(\vec{x}')$。现在我们针对这个划分提出几个命题。

**命题 A**。 对于所有 $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$, $\|A(\vec{x}) - \vec{x}\| \leq \varepsilon$。

命题证明。假设存在某个 $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$，使得 $\|A(\vec{x}) - \vec{x}\| > \varepsilon$，从而导出矛盾。令 $\Lambda$ 为某个集合（即问题定义域），并令 $f: \Lambda \to \mathbb{R}^d$ 为某个函数，其值域为 $\vec{x} \in \text{range}(f)$，再令 $\lambda \in \Lambda$ 为能够证明这一点的某个元素（即 $f(\lambda) = \vec{x}$）。令 $B$ 为针对 $f$ （相对于 $\|\cdot\|$）的一个 $(\varepsilon_0, \delta)$-近似算法，该算法具有如下性质：输入 $\lambda$时， $B$ 总是返回$f(\lambda) = \vec{x}$（即 $B$以概率 1 完美地近似 $f(\lambda)$）。因此，输入 $\lambda$时，算法 $A \circ B$ 总是返回 $A(\vec{x})$。但根据假设， $\|A(\vec{x}) - \vec{x}\| > \varepsilon$，这意味着输入 $\lambda$时，$A \circ B$总是返回一个并非 $\varepsilon$-近似于 $f(\lambda) = \vec{x}$的值，这与 $A \circ B$是针对 $f$的 $(\varepsilon, \delta)$-近似算法相矛盾。
■

如果我们更加仔细一些，实际上可以将上面的界提高到 $\varepsilon - \varepsilon'$，但我们不太在意这一点。这使我们能够给出划分 $\mathcal{P}_A$ 中所有成员的直径界。

**命题 B**。 $\mathcal{P}_A$ 的每个成员的直径（相对于 $\|\cdot\|$）至多为 2 $\varepsilon$.

命题证明。 对于任意成员 $X \in \mathcal{P}_A$ 根据定义，对于所有 $\vec{x}$， $\vec{x}' \in A$ 有 $A(\vec{x}) = A(\vec{x}')$。由三角不等式和 命题 A 可得

$$\|\vec{x} - \vec{x}'\| \leq \|\vec{x} - A(\vec{x})\| + \|A(\vec{x}) - A(\vec{x}')\| + \|A(\vec{x}') - \vec{x}'\| \leq \varepsilon + 0 + \varepsilon$$

这就证明了该命题。 ■

然后，由 推论 1.6 和 命题 B，存在某个点 $\vec{p} \in \mathbb{R}^d$，使得 $B_{\|\cdot\|}(\varepsilon_0/2, \vec{p})$ 至少与 $\left(1 + \frac{2}{(\varepsilon_0/2)\,(2\varepsilon)}\right)^d = \left(1 + \frac{\varepsilon_0}{2\varepsilon}\right)^d$ 个 $\mathcal{P}_A$ 的成员相交。令这个 $\vec{p}$ 在证明余下部分中固定不变。我们利用这一事实给 $k$ 设定一个下界。

**命题 C.** 成立：$k \geq (1-\delta) \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon_0}{2\varepsilon}\right)^d$。 —

命题证明。令 $T \subseteq \mathbb{R}^d$ 为一个集合，对于每个与 $B_{\|\cdot\|}(\varepsilon_0/2, \vec{p})$ 相交的 $X \in \mathcal{P}_A$，在 $X \cap B_{\|\cdot\|}(\varepsilon_0/2, \vec{p})$ 中恰好包含一个点。由于 $\mathcal{P}_A$ 是一个划分，所有与 $B_{\|\cdot\|}(\varepsilon_0/2, \vec{p})$ 相交的不同 $X, Y \in \mathcal{P}_A$，无论如何选择，都会对应不同的点。因此 $|T| \geq \left(1 + \frac{\varepsilon_0}{2\varepsilon}\right)^d$。 —

令 $\Lambda$ 为某个集合（即问题定义域），$f\colon \Lambda \to \mathbb{R}^d$ 为某个函数，其值域为 $f \cap T \neq \emptyset$，再令 $\lambda \in \Lambda$ 为能够证明这一点的某个元素（即 $f(\lambda) \in T$）。令 $B$ 为针对 $f$（关于 $\|\cdot\|$）的一个 $(\varepsilon_0, \delta)$-近似算法，该算法具有如下性质：输入 $\lambda$ 时，$B$ 会从 $T$ 中均匀随机地选取一个点返回[15]。这是一个有效的 $(\varepsilon_0, \delta)$-近似，因为 $f(\lambda) \in T$，且对于所有 $\vec{x} \in T$，$\vec{x} \in B_{\|\cdot\|}(\varepsilon_0/2, \vec{p})$，因此根据三角不等式，$\|\vec{x} - f(\lambda)\| \leq \varepsilon_0$，这意味着输入 $\lambda$ 时，$B$ 总会返回一个 $\varepsilon_0$-估计值。

由于 $A \circ B$ 是一个 $(k, \delta)$-伪确定性算法，因此必定存在某个集合 $S_\lambda \subseteq T$，满足 $|S_\lambda| \leq k$，使得 $\Pr[B(\lambda) \in S_\lambda] \geq 1 - \delta$。由于 $B(\lambda)$ 在 $T$ 上均匀分布，因此我们有

$$1 - \delta \leq \Pr[B(\lambda) \in S_\lambda] = \frac{|S_\lambda|}{|T|} \leq \frac{k}{|T|}$$

表明

$$k \geq (1-\delta) \cdot |T| \geq (1-\delta) \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon_0}{2\varepsilon}\right)^d$$

正如命题中所述[16]。 ■

现在，为了将关于 $k$ 的这个下界转化为关于 $\varepsilon$ 的下界，我们需要利用一个近似[17]，这要求假设 $\varepsilon \geq \varepsilon_0$。因此，我们接下来提出并证明这一命题。如果存在一个确定性算法 $A$，能够将每个 $\varepsilon_0$-近似算法对任意函数的准确度都提高，那么结果将会非常惊人，所以这并不令人意外！

**命题 D.** 我们有 $\varepsilon \geq \varepsilon_0$。

命题证明。令 $\Lambda = \{\lambda_-, \lambda_+\}$，并令 $\vec{v} \in \mathbb{R}^d$ 为 $\|\cdot\|$ 单位向量。令 $f\colon \Lambda \to \mathbb{R}^d$ 由 $f(\lambda_-) = -\varepsilon_0 \vec{v}$ 和 $f(\lambda_+) = \varepsilon_0 \vec{v}$ 定义。令 $B$ 为一个无论输入如何始终输出 $\vec{0}$ 的算法。

那么，$B$ 是一个用于 $f$ 的（$\varepsilon_0$，$\delta$）近似算法，因为 $\vec{0}$ 分别是 $f$（$\lambda_-$）和 $f$（$\lambda_+$）的 $\varepsilon_0$ 近似算法。由于 $A$ 是确定性的[18]，无论

[15] 我们将在后面的脚注中讨论：即使算法无法实现完全均匀的选择，这个证明仍然成立。[16] 如前面的脚注所述，如果算法无法实现完全均匀的选择，我们可以改为考虑一系列 $B_1$，$B_2$，$B_3$，……近似算法 $f$，每个算法的定义方式都与 $B$ 相同，但只要求 $B_i$ 以足够接近均匀的方式分配解，使得返回任意一个 $|T|$ 元素的概率至多为 $\frac{1}{|T|}(1 + \frac{1}{i})$，从而 $1 - \delta \leq \Pr[B_i(\lambda) \in S_\lambda] \leq \frac{|S_\lambda|}{|T|}(1 + \frac{1}{i}) \leq \frac{k}{|T|}(1 + \frac{1}{i})$。由于这对所有 $i \in \mathbb{N}$ 都成立，不等式可传递到极限，因此我们得到相同的结论：$1 - \delta \leq \frac{k}{|T|}$。[17] 具体而言，对于较小的 $x$，$\ln(1+x) \leq \frac{x}{2}$。[18] 即使 $A$ 是随机化的，我们也可以处理这一部分，因为如果 $A \circ B$ 是伪确定性的，那么随机化的 $A$ 也必须是 $(k, \delta)$-伪确定性的，所以此处确定性并非必需。

输入是什么，始终返回相同的值。令 $\vec{a} \in \mathbb{R}^d$ 表示该值。由于 $A \circ B$ 是一个用于 $f$ 的（$\varepsilon$，$\delta$）近似算法，因此必有 $\|f(\lambda_-) - \vec{a}\| \leq \varepsilon$ 以及 $\|f(\lambda_+) - \vec{a}\| \leq \varepsilon$，而且由于我们有

$$2\varepsilon_0 = \|f(\lambda_+) - f(\lambda_-)\| \leq \|f(\lambda_+) - \vec{a}\| + f(\lambda_-) - \vec{a}$$

必定是 $\|f(\lambda_-) - \vec{a}\| \geq \varepsilon_0$ 或 $\|f(\lambda_+) - \vec{a}\| \geq \varepsilon_0$。无论哪种情况，都说明了 $\varepsilon_0 \leq \varepsilon$。 ■

现在，我们准备通过对 命题 C 中不等式两边取自然对数来陈述最终的不等式。接着，根据 命题 D 可知 $\frac{\varepsilon_0}{2\varepsilon} \leq \frac{1}{2}$，并且对于 $x \leq \frac{1}{2}$，$\ln(1+x) \geq \frac{x}{2}$。最后，由于 $\delta \in (0, \frac{1}{2}]$，我们有 $\ln(1-\delta) \geq \ln(\frac{1}{2})$.

$$\begin{aligned}
\ln(k) &\geq \ln(1-\delta) + d\ln\left(1 + \frac{\varepsilon_0}{2\varepsilon}\right) \\
&\geq \ln(1-\delta) + d \cdot \frac{\varepsilon_0}{4\varepsilon} \\
&\geq \ln(\tfrac{1}{2}) + d \cdot \frac{\varepsilon_0}{4\varepsilon}.
\end{aligned}$$

解出 $\varepsilon$ 得到

$$\varepsilon \geq \varepsilon_0 \cdot \frac{d}{4\ln(2k)}$$

如所愿，这就完成了证明。 □

对于 $\ell_\infty$ 范数，定理1.10的界（忽略常数和对数因子）在我们所关注的伪确定性/可复现性值 $k$ 是空间维度的多项式时 $d$几乎可以达到。这由下一个结果表明，该结果说明存在一个确定性函数/算法，可以完成 定理1.10 中描述的所有事情，并且 $\varepsilon = 2d \cdot \varepsilon_0$。这里的常数 2 可以替换为任意常数，只要愿意将 $k$ 从结果下方所述的值$d+1$ 增加到某个更大的多项式即可。

**定理 7.1**。设 $d \in \mathbb{N}$ 和 $\varepsilon_0 \in (0, \infty)$。设 $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot 2d$。存在一个可高效计算的函数/算法 $A_\varepsilon : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$，具有以下两个性质：

*1.* 对任意 $x \in \mathbb{R}^d$ 和任意 $\hat{x} \in \overline{B}_\infty(\varepsilon_0, x)$，都有 $A_\varepsilon(\hat{x}) \in B_\infty(\varepsilon, x)$。*2.* 对任意 $x \in \mathbb{R}^d$，集合 $\{A_\varepsilon(\hat{x}) : \hat{x} \in B_\infty(\varepsilon_0, x)\}$ 的基数至多为 $d+1$。非正式地说，这两个条件是：*(1)* 如果 $\hat{x}$ 是 $\varepsilon_0$-近似的 $x$（相对于 $\ell_\infty$），那么$A_\varepsilon(\hat{x})$ 是 $x$的 $\varepsilon$ 近似；*(2)* $A_\varepsilon$ 将 $x$ 的每个 $\varepsilon_0$ 近似映射到至多 $d+1$ 个可能值之一。

证明概要。这可以通过使用缩放后的（$d+1$、$\frac{1}{2d}$）隔离划分（其成员的直径为单位）作为确定性舍入方案来实现。（多项式（$d$） $O$（$\frac{1}{d}$）隔离划分（其成员的直径为单位），如定理6.6中所述，也可用于在第一个参数（次数）中的多项式因子与第二个参数（容差）中的常数因子之间进行权衡。

□

## References

[ALMM19] Noga Alon、Roi Livni、MaryantheMalliaris 和 ShayMoran。私有PAC学习蕴含有限的Littlestone维度。载于 Moses Charikar 和 Edith Cohen（编辑），第*51*届*ACMSIGACT*计算理论研讨会论文集，*STOC 2019*，美国亚利桑那州菲尼克斯，*2019*年*6*月*23*日至*26*日，第852–860页。ACM，2019年。[BG93] Elizabeth Borowsky和Eli Gafni。t容错异步计算的广义FLP不可能性结果。载于 S. Rao Kosaraju、David S. Johnson 和Alok Aggar- wal（编辑），第二十五届*ACM*计算理论研讨会论文集，*1993*年*5*月*16*日至*18*日，美国加利福尼亚州圣迭戈，第91–100页。ACM，1993年。[BLM20] MarkBun、RoiLivni 和 Shay Moran。私有分类与在线预测之间的等价性。载于Sandy Irani（编辑），第*61*届*IEEE*计算机科学基础年会，*FOCS2020*，美国北卡罗来纳州达勒姆，*2020*年*11*月*16*日至*19*日，第389–402页。IEEE，2020年。[CD09] XiChen和 Xiaotie Deng。关于二维离散不动点问题的复杂性。理论计算机科学，410(44):4448–4456，2009年。[CLL+95] J.Y.Cai、R. Lipton、L. Longpr´e、M.Ogihara、K. Regan和 D. Sivaku mar。小范围上密钥协商的通信复杂度。载于 *STACS*，第38–49页，1995年。[DGP09] Constantinos Daskalakis、Paul W. Goldberg和Christos H. Papadimitriou。计算纳什均衡的复杂度。*SIAM*计算杂志，39(1):195–259，2009年。[DLPES02] Jesus A. De Loera、Elisha Peterson和 Francis Edward Su。Sperner引理的多胞体推广。《组合理论杂志》*A*辑，100(1):1–26，2002年10月。[DPV18] Peter Dixon、A. Pavan 和N. V. Vinodchandran。关于伪确定性近似算法。载于第*43*届国际计算机科学数学基础研讨会，*MFCS 2018*，*2018*年*8*月*27*日至*31*日，英国利物浦，*LIPIcs*第117卷，第61:1–61:11页，2018年。[DPVV22] Peter Dixon、A Pavan、Jason VanderWoude和N.V. Vinodchandran。伪确定性：承诺与下界。载于Stefano Leonardi 和 Anupam Gupta（编辑），*STOC'22*：第*54*届*ACM SIGACT*计算理论研讨会，意大利罗马，*2022*年*6*月*20*日至*24*日，第1552–1565页。ACM，2022年。[Fol99] Gerald B.Folland。实分析：现代技术及其应用。John Wiley&Sons，1999年4月。Google-Books-ID：N8jVDwAAQBAJ。[Gar02] R. J. Gardner。Brunn-Minkowski不等式。美国数学学会通报，39(03):355–406，2002年4月。[GKM21] Badih Ghazi、Ravi Kumar和Pasin Manurangsi。通过相关采样实现用户级差分私有学习。载于 Marc'Aurelio Ranzato、Alina Beygelzimer、Yann N. Dauphin、Percy Liang和 Jennifer Wortman Vaughan（编辑），神经信息处理系统进展*34*：*2021*年神经信息处理系统年会，*NeurIPS2021*，*2021*年*12*月*6*日至*14*日，线上，第20172–20184页，2021年。

[GL19] OferGrossman 和YangP. Liu。《对数空间中的可复现性与伪确定性》。载于《第三十届年度 ACM-SIAM离散算法研讨会论文集》，SODA 2019，美国加利福尼亚州圣迭戈，2019年1月6日至9日，第606–620页。SIAM，2019。[Gol19] Oded Goldreich。《多伪确定性算法》。《计算复杂性电子讨论会》（ECCC），26:12，2019。[Gru07] Peter M. Gruber。《凸几何与离散几何》。SpringerScience& Business Media，2007年5月。Google-Books-ID：bSZKAAAAQBAJ。[HK18] William M.Hoza 和 Adam R.Klivans。《为自适应算法保留随机性》。arXiv:1611.*00783 [*cs*]*,2018年6月。arXiv：1611.00783。[HS99] Maurice Herlihy 和 Nir Shavit。《异步可计算性的拓扑结构》。《J.ACM》，46(6):858–923，1999。[HW48] Witold Hurewicz 和 HenryWallman。《维度理论》。普林斯顿大学出版社，1948年。[ILPS22] Russell Impagliazzo、Rex Lei、ToniannPitassi和 Jessica Sorrell。《学习中的可复现性》。载于《第54届年度 ACM SIGACT计算理论研讨会论文集》，STOC 2022，美国纽约州纽约，2022年，第818–831页。[Kom94] Hidetoshi Komiya。《K-K-M-S 定理的一个简单证明》。《经济理论》，4(3):463–466，1994年5月。[KORW08] Guy Kindler、Ryan O’Donnell、Anup Rao和 Avi Wigderson。《球面立方体与高维舍入》。载于《2008年第49届年度IEEE计算机科学基础研讨会》，美国宾夕法尼亚州费城，第189–198页，2008年10月。IEEE。[KROW12] Guy Kindler、Anup Rao、RyanO’Donnell 和AviWigderson。《球面立方体：由计算困难性放大产生的最优泡沫》。《ACM通讯》，55(10):90–97，2012年10月。[Kuh60] H.W. Kuhn。《拓扑学中的一些组合引理》。《IBM研究与开发杂志》，4(5):518–524，1960年。[LOS21] Zhenjian Lu、IgorC.Oliveira 和 Rahul Santhanam。《伪确定性算法与概率时间的结构》。载于STOC，2021年。即将出版。ECCC技术报告21-039。[noa14] 对“等周不等式、等直径不等式、超平面猜想……已知或猜想有哪些这类不等式？”的回答，2014年4月。《数学Stack Exchange》。[OS17] I.Oliveira和R. Santhanam。《亚指数时间内的伪确定性构造》。载于《第49届年度 ACMSIGACT计算理论研讨会论文集》，STOC 2017，加拿大魁北克省蒙特利尔，2017年6月19日至23日，第665–677页，2017年。

[Pap90] Christos H. Papadimitriou。《图论引理与复杂性类》（扩展摘要）。载于第*31*届计算机科学基础年会，圣路易斯，密苏里州，美国，*1990*年*10*月*22*日至*24*日，第*II*卷，第794–801页。IEEE计算机学会，1990年。[RT87] Prabhakar Raghavan 和 Clark D. Thompson。随机舍入：一种可证明获得优良算法和算法证明的技术。《组合》，7(4):365–374，1987年。[Sie20] Wac-law Sierpi´nski。关于 M. Hamel 基的可测性问题。《基础数学》，1:105–111，1920年。出版方：波兰科学院数学研究所。[SZ99] M. Saks 和 S. Zhou。BPhSpace(S) $\subseteq$ DSPACE(S3/2)。《计算机与系统科学杂志》，58(2):376–403，1999年。[SZ00] Michael E. Saks 和 Fotios Zaharoglou。无等待 k-集合一致性不可能实现：公共知识拓扑。《*SIAM*计算杂志》，29(5):1449–1483，2000年。[VWDP+22] Jason Vander Woude、Peter Dixon、A. Pavan、Jamie Radcliffe 和 N. V. Vinodchan-dran。舍入几何，2022年。10.48550/arXiv.2211.02694。[Wan05] Xianfu Wang。广义单位球体积。《数学杂志》，78(5):390–395，2005年。出版方：美国数学协会。[Wol77] Laurence A Wolsey。作为广义互补枢轴法应用的立方 Sperner 引理。《组合理论杂志》*A*辑，23(1):78–87，1977年7月。

## 测度论

在本节中，“可数”一词均指有限或可数无穷。

**事实 A.1** ($\ell_\infty$ 直径球)。 设 $d \in \mathbb{N}$ 和 $X \subseteq \mathbb{R}^d$ 是一个直径为 $D$ （相对于 $\ell_\infty$）的有界集。那么存在 $\vec{p} \in \mathbb{R}^d$ 使得 $X \subseteq B_{D/2}(\vec{p})$。因此， $m_{out}(X) \leq D^d$其中 $m_{out}$ 表示勒贝格外测度。

证明概要。 对于每个坐标 $i \in [d]$，考虑集合 $X_i = \{\pi_i(\vec{x}): \vec{x} \in X\} \subseteq \mathbb{R}$ 集合 $X$中每个点的第 $i$ 个坐标。下确界和上确界之间的距离至多为 $D$ ，因为否则就会存在点 $\vec{y}$，$\vec{z} \in X$ 使得 $|\pi_i(\vec{z}) - \pi_i(\vec{y})| > D$ 这意味着$\|\vec{z} - \vec{y}\|_\infty > D$ $\vec{p} = \langle \frac{\inf(X_i + X_i}{2} \rangle_{i=1}^d$ $X \subseteq \prod_{i=1}^d [X_i, X_i] \subseteq$。 $\vec{p} + [-\frac{D}{2}, \frac{D}{2}]^d = B\ D/2\ \vec{p}$

因此，取 $\overline{)\sup()}$，我们有 inf( ) sup( ) (，)。 □

**事实 A.2.** 若 $\mu$ 是测度，且 $\mathcal{A}$ 是一个（可能不可数的）两两不交的可测集合族，则

$$\mu(\bigsqcup_{A \in \mathcal{A}} A) \geq \sum_{A \in \mathcal{A}} \mu(A).$$

证明. 根据任意求和的定义（参见 [Fol99，第 11] 页），我们有 e

$$\sum_{A\in\mathcal{A}}\mu(A)\stackrel{\text{def}}{=}\sup\left\{\sum_{A\in\mathcal{F}}\mu(A):\mathcal{F}\subseteq\mathcal{A},\ \mathcal{F}\text{ finite}\right\}$$

且对于任意 $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{A}$，我们有

$$\mu(\bigsqcup_{A\in\mathcal{A}}A)\geq\mu(\bigsqcup_{A\in\mathcal{F}}A)=\sum_{A\in\mathcal{F}}\mu(A).$$

因此 $\mu(\bigsqcup_{A\in\mathcal{A}}A)$ 是集合 $\{\sum_{A\in\mathcal{F}}\mu(A)\colon\ \mathcal{F}\subseteq\mathcal{A},\ \mathcal{F}$ 有限，因而大于或等于上确界。

□

**事实 A.3**（非负项的可数求和交换）。 如果 $I$，$J$ 是可数集合，并且 $a_{i,\ j}\geq 0$ 对于所有 $(i,\ j)\in I\times J$，那么

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}a_{i,j}=\sum_{j\in J}\sum_{i\in I}a_{i,j}$$

证明。如果假设 $I$ 和 $J$ 是 $\mathbb{N}$，并使用将无限和定义为有限和的极限，就可以通过基本的分析方法直接证明这一点。或者，将求和视为在可数测度空间上的积分，则这可以看作 Tonelli 定理的一个推论。

□

**引理 A.4**（重数的精确测度）。 设 $n\in\mathbb{N}$。设 $X$ 是某个测度空间中的可测集合（其测度记为 $\mu$），且 $\mathcal{A}$ 是 $X$ 的一个可数可测子集族，使得对于每个 $x\in X$，$x$ 恰好属于 $\mathcal{A}$ 的 $n$ 个成员。则

$$\sum_{A\in\mathcal{A}}\mu(A)=n\cdot\mu(X).$$

证明。 注意，如果 $n=0$，则该命题显然成立，因为 $\mathcal{A}$ 要么为空，要么只包含空集；无论哪种情况，只要采用空和为 0 的标准约定，$\sum_{A\in\mathcal{A}}\mu(A)=0=0\cdot\mu(X)$。

对于任意 $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{A}$，令 $G_{\mathcal{F}}=\bigcap_{A\in\mathcal{F}}A$。注意，这是可测集合的可数交，因此是可测的（便于记忆的是，$G$ 表示交集，正如它在 $G_\delta$ 集合的记号中的用法一样）。

令 $\binom{\mathcal{A}}{n}$ 表示 $\mathcal{A}$ 中所有大小为 $n$ 的子集；注意，由于 $\mathcal{A}$ 是可数的，$\binom{\mathcal{A}}{n}$也是可数的。观察可知，对于互不相同的 $\mathcal{F}$，$\mathcal{F}'\in\binom{\mathcal{A}}{n}$，集合 $G_{\mathcal{F}}$和 $G_{\mathcal{F}'}$不相交，因为

$$G_{\mathcal{F}}\cap G_{\mathcal{F}'}=\left(\bigcap_{A\in\mathcal{F}}A\right)\cap\left(\bigcap_{A\in\mathcal{F}'}A\right)=\bigcap_{A\in\mathcal{F}\cup\mathcal{F}'}A$$

且由于 $\mathcal{F}$和 $\mathcal{F}'$彼此不同，并且各自包含 $n$个项目，即 $|\mathcal{F}\cup\mathcal{F}'|\geq n+1$，根据假设，$X$ 中的任何点都不属于 $n+1$ 个成员，因此 $\bigcap_{A\in\mathcal{F}\cup\mathcal{F}'}A=\emptyset$。此外，对于每个 $x\in X$，由于 $x$恰好属于 $n$个成员 $A_1,\ldots,A_n$中的成员，取 $\mathcal{F}=\{A_1,\ldots,A_n\}$我们有 $x\in G_{\mathcal{F}}$，这表明 $\left\{G_{\mathcal{F}}\colon\ \mathcal{F}\in\binom{\mathcal{A}}{n}\right\}$ 是将 $X$ 划分为可数个可测集合的划分（允许某些 $G_{\mathcal{F}}$ 为空）。

我们需要的最后一个观察是，对于任意 $\mathcal{F} \in \binom{\mathcal{A}}{n}$ 和任意 $A \in \mathcal{A}$，如果 $A \in \mathcal{F}$，则有 $A \supseteq G_{\mathcal{F}}$；如果 $A \notin \mathcal{F}$，则有 $A \cap G_{\mathcal{F}} = \emptyset$。要看出这一点，注意对于任意 $x \in G_{\mathcal{F}}$，$x$ 属于 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ 的每个 $n$ 个成员；并且由于根据假设，$x$ 恰好属于 $\mathcal{A}$ 的 $n$ 个成员，因此它不属于 $\mathcal{A}$ 的任何其他成员。

现在我们得到以下一系列等式：

$$
\begin{aligned}
\sum_{A \in \mathcal{A}} \mu(A) &= \sum_{A \in \mathcal{A}} \mu(A \cap X) && (A \subseteq X \text{ so } A \cap X = A) \\
&= \sum_{A \in \mathcal{A}} \mu\left(A \cap \left[\bigsqcup_{\mathcal{F} \in \binom{\mathcal{A}}{n}} G_{\mathcal{F}}\right]\right) && (\text{Set equality; the } G_{\mathcal{F}} \text{ partition } X) \\
&= \sum_{A \in \mathcal{A}} \mu\left(\bigsqcup_{\mathcal{F} \in \binom{\mathcal{A}}{n}} [A \cap G_{\mathcal{F}}]\right) && (\text{Set equality}) \\
&= \sum_{A \in \mathcal{A}} \left[\sum_{\mathcal{F} \in \binom{\mathcal{A}}{n}} \mu\left(A \cap G_{\mathcal{F}}\right)\right] && (\text{Countable additivity of measures}) \\
&= \sum_{\mathcal{F} \in \binom{\mathcal{A}}{n}} \left[\sum_{A \in \mathcal{A}} \mu\left(A \cap G_{\mathcal{F}}\right)\right] && (\text{Interchange sums by Fact A.3}) \\
&= \sum_{\mathcal{F} \in \binom{\mathcal{A}}{n}} \left[\sum_{A \in \mathcal{A}} \begin{cases} \mu\left(A \cap G_{\mathcal{F}}\right) = \mu\left(G_{\mathcal{F}}\right) & A \in \mathcal{F} \\ \mu\left(A \cap G_{\mathcal{F}}\right) = \mu(\emptyset) = 0 & A \notin \mathcal{F} \end{cases}\right] && (\text{Previous paragraph}) \\
&= \sum_{\mathcal{F} \in \binom{\mathcal{A}}{n}} \left[\sum_{A \in \mathcal{F}} \mu\left(G_{\mathcal{F}}\right)\right] && (\text{Remove 0 terms from summation}) \\
&= \sum_{\mathcal{F} \in \binom{\mathcal{A}}{n}} \left[n \cdot \mu\left(G_{\mathcal{F}}\right)\right] && (|\mathcal{F}| = n) \\
&= n \sum_{\mathcal{F} \in \binom{\mathcal{A}}{n}} \mu\left(G_{\mathcal{F}}\right) && (\text{Linearity of summation}) \\
&= n \cdot \mu\left(\bigsqcup_{\mathcal{F} \in \binom{\mathcal{A}}{n}} G_{\mathcal{F}}\right) && (\text{Countable additivity of measures}) \\
&= n \cdot \mu\left(X\right) && (\text{Set equality; the } G_{\mathcal{F}} \text{ partition } X)
\end{aligned}
$$

这就证明了该结论。 □

**引理A.5 (**重数的上界测度)。令 $n \in \mathbb{N}$。令 $X$ 为某个测度空间中的可测集合（该测度记为 $\mu$），且 $\mathcal{A}$ 为 $X$ 的一个可数可测子集族，使得对于每个 $x \in X$， $x$ 至多属于 $n$ 个 $\mathcal{A}$的成员。则

$$\sum_{A \in \mathcal{A}} \mu(A) \leq n \cdot \mu(X).$$

证明。如同上一个证明，对于任意 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$，令 $G_{\mathcal{F}} = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A$ 注意到这是可数个可测集合的交，因此它是可测的（便于记忆， $G$ 表示交集，正如 $G_\delta$ 集合的记号中那样）。并且对于任意 $k \in [n] \cup \{0\}$，令 $\binom{\mathcal{A}}{k}$ 表示 $\mathcal{A}$的所有大小为 $k$ 的子集，注意到由于 $\mathcal{A}$ 是可数的，因此 $\binom{\mathcal{A}}{k}$也是可数的。

对于每个 $k \in [n] \cup \{0\}$，令

$$S_k = \{x \in X : x \text{ belongs to } \textit{exactly } k \text{ members of } \mathcal{A}\}$$
$$S'_k = \{x \in X : x \text{ belongs to } \textit{at least } k \text{ members of } \mathcal{A}\}$$

我们将证明 $S_k$ 和 $S'_k$ 是可测的。

为证明 $S'_k$ 可测，注意到对任意 $k \in [n] \cup \{0\}$， $S'_k$ 可表示为 $S'_k = \bigcup_{\mathcal{F} \in \binom{\mathcal{A}}{k}} G_{\mathcal{F}}$。这是因为对任意 $x \in X$，若 $x$ 属于 $\mathcal{A}$ 中至少 $k$ 个成员，则存在一个子集 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$，满足 $|\mathcal{F}| = k$，使得 $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A = G_{\mathcal{F}}$。反过来，若 $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A = G_{\mathcal{F}}$，则存在某个 $\mathcal{F} \in \binom{\mathcal{A}}{k}$（即某个满足 $|\mathcal{F}| = k$ 的 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$），使得 $x \in G_{\mathcal{F}} = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A$，因此 $x$ 属于 $\mathcal{A}$ 中至少 $k$ 个成员。因此，由于 $\mathcal{A}$ 是可数的， $\binom{\mathcal{A}}{k}$ 也是可数的（对每个 $k$ 而言），这意味着每个 $S'_k$ 都是可测集合的可数并，因而自身也是可测的。

要证明每个 $S_k$ 的可测性，首先考虑 $k = n$。注意到 $S_n = S'_n$，因为根据假设，每个 $x \in X$ 至多属于 $n$ 个 $\mathcal{A}$ 的成员，所以当且仅当它至少属于 $n$ 个成员时，它恰好属于 $n$ 个成员。因此， $S_n$ 也是可测的。

现在，对于 $k \in [n-1] \cup \{0\}$，注意到 $S_k = S'_k \setminus S'_{k+1}$，因为某个 $x \in X$ 恰好属于 $\mathcal{A}$ 中的 $k$ 个成员，当且仅当它至少属于 $\mathcal{A}$ 中的 $k$ 个成员，并且不属于 $\mathcal{A}$ 中的至少 $k+1$个成员。因此，对于 $k \in [n-1] \cup \{0\}$， $S_k$ 是两个可测集合的集合差，所以其自身也是可测的。

最后，注意到 $\{S_k\colon\ k \in [n] \cup \{0\}\}$ 是 $X$ 的划分（允许某些 $S_k$为空），因为 $x$ 中的每个点都属于 $\mathcal{A}$中的若干个成员，而该数量（按假设）介于0和 $n$ （含）之间。

现在我们有如下不等式链:

$$
\begin{aligned}
\sum_{A\in\mathcal{A}}\mu(A) &= \sum_{A\in\mathcal{A}}\mu(A\cap X) && (A\subseteq X \text{ so } A\cap X = A)\\
&= \sum_{A\in\mathcal{A}}\mu\left(A\cap\left[\bigsqcup_{k\in[n]\cup\{0\}} S_k\right]\right) && (\text{Set equality; the } S_k \text{ partition } X)\\
&= \sum_{A\in\mathcal{A}}\mu\left(\bigsqcup_{k\in[n]\cup\{0\}}[A\cap S_k]\right) && (\text{Set equality})\\
&= \sum_{A\in\mathcal{A}}\left[\sum_{k\in[n]\cup\{0\}}\mu\left(A\cap S_k\right)\right] && (\text{测度的可数可加性})\\
&= \sum_{k\in[n]\cup\{0\}}\left[\sum_{A\in\mathcal{A}}\mu\left(A\cap S_k\right)\right] && (\text{Interchange sums by Fact A.3})\\
&= \sum_{k\in[n]\cup\{0\}}\left[k\cdot\mu\left(S_k\right)\right] && (\text{由引理 A.4；详见下文})\\
&= \sum_{k\in[n]}\left[k\cdot\mu\left(S_k\right)\right] && (k=0 \text{ term is } 0)\\
&\le \sum_{k\in[n]}\left[n\cdot\mu\left(S_k\right)\right] && (k\le n)\\
&= n\sum_{k\in[n]}\left[\mu\left(S_k\right)\right] && (\text{Linearity of summation})\\
&= n\cdot\mu\left(\bigsqcup_{k\in[n]} S_k\right) && (\text{Countable additivity of measures})\\
&\le n\cdot\mu\left(X\right) && (\text{Set inequality; the } S_k \text{ 划分 } X,\ \text{但并集缺少 } S_0)
\end{aligned}
$$

在证明可以使用引理 A.4之后，这就完成了证明。对于每个 $k\in[n]\cup\{0\}$，令$X_k = S_k$ 和 $\mathcal{A}_k = \{A\cap S_k: A\in\mathcal{A}\}$。然后注意，对于每个 $x\in X_k = S_k$，根据$S_k$的定义， $x$ 恰好属于 $k$ 中的成员，而因此（由于它也属于 $S_k$）恰好属于$k$ 中的成员。对每个 $k$ 应用一次引理 A.4，其中 $X = X_k$ 且 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_k$，可得

$$\sum_{A\in\mathcal{A}}\mu(A\cap S_k) = \sum_{A'\in\mathcal{A}_k}\mu(A') = k\cdot\mu(X_k) = k\cdot\mu(S_k)$$

(中间的等式正是在此处应用了引理 A.4 )。这正是我们在上面的等式长链中所提出的命题，并完成了证明。

□

**推论 A.6**（覆盖数下界）。设 $X$ 是某个测度空间中的可测集合（测度记为 $\mu$），满足 $0<\mu(X)<\infty$。设 $\mathcal{A}$ 是 $X$ 的可测子集组成的可数族，满足 $\sum_{A\in\mathcal{A}}\mu(A)<\infty$。则存在 $x\in X$，使得 $x$ 至少属于 $\left\lceil\frac{\sum_{A\in\mathcal{A}}\mu(A)}{\mu(X)}\right\rceil$ 个 $\mathcal{A}$ 中的成员。

证明。首先注意到，根据假设，$\lceil \sum_{A\in\mathcal{A}} \mu(A)\,\mu(X) \rceil$ 是有限的。反设每个 $x \in X$ 属于 $\mathcal{A}$ 中严格少于 $\lceil \sum_{A\in\mathcal{A}} \mu(A)\,\mu(X) \rceil$ 个成员。令 $n = \lceil \sum_{A\in\mathcal{A}} \mu(A)\,\mu(X) \rceil - 1$（注意 $n < \sum_{A\in\mathcal{A}} \mu(A)\,\mu(X)$）。于是每个 $x \in X$ 至多属于 $A$ 中的 $n$ 个成员，因此有

$$\begin{aligned}
\sum_{A\in\mathcal{A}} \mu(A) &\le n \cdot \mu(X) && \text{(Lemma A.5)}\\
&< \frac{\sum_{A\in\mathcal{A}} \mu(A)}{\mu(X)} \mu(X) && (0 < \mu(X) < \infty \text{ and } n < \tfrac{\sum_{A\in\mathcal{A}} \mu(A)}{\mu(X)})\\
&= \sum_{A\in\mathcal{A}} \mu(A)
\end{aligned}$$

这就产生了矛盾。 □

**注 A.7.** 在上面的推论 *A.6* 中，要求 $\sum_{A\in\mathcal{A}} \mu(A)$ 为有限集这一点很重要。如果允许它是无限集，那么命题就会变成：存在某个 $x \in X$ 属于 $\mathcal{A}$中的无穷多个成员，但这通常并不成立（见下面的例 *A.8*）。尽管如此，以下结论仍然成立（且是上述结论的一个直接推论）：若 $\sum_{A\in\mathcal{A}} \mu(A) = \infty$，那么对于任意$n \in \mathbb{N}_0$，都存在一个点 $x_n \in X$，它至少属于 $n$个 $\mathcal{A}$中的集合。区别在于，这个点可能取决于 $n$的选择。

**例 A.8** (开单位区间的调和覆盖)。设 $X = (0,1)$ 赋予博雷尔测度或勒贝格测度 $\mu$。设 $\mathcal{A} = \{(0, \frac{1}{i}) : i \in \mathbb{N}\}$。那么 $\sum_{A\in\mathcal{A}} \mu(A) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{i} = \infty$。对于任意 $n \in \mathbb{N}$，我们可以考虑点 $x_n = \frac{1}{n+1}$，它属于$(0, \frac{1}{i})$（当 $i \in [n]$ 时），而不属于任何其他 $i$，因此它恰好属于 $n$ 个 $\mathcal{A}$中的集合。

然而，$X$ 中没有任何点属于 $\mathcal{A}$中的无限多个集合。为此，任取一点 $x \in X = (0, 1)$。那么，当 $i \in \mathbb{N}$充分大时，$x \notin (0, \frac{1}{i})$，因此 $x$ 只属于 $\mathcal{A}$中的有限多个集合。

前面三个结果采用了典型的测度论记法，但在论文正文中，我们将推论 A.6 针对 $\mathbb{R}^d$ 具体表述如下，并采用与论文其他部分一致的记法。

**命题 A.9** (连续多重鸽巢原理)。设 $d \in \mathbb{N}$ 和 $S \subset \mathbb{R}^d$ 有界且可测。设 $\mathcal{A}$ 是 $S$的可测子集构成的一个族，并设 $k = \left\lceil \frac{\sum_{A\in\mathcal{A}} m(A)}{m(S)} \right\rceil$。那么，如果$k < \infty$，则存在 $\vec{p} \in S$，使得 $\vec{p}$ 至少属于 $\mathcal{A}$中的 $k$ 个集合。（并且，如果 $k = \infty$，那么对任意 $n \in \mathbb{N}$，都存在 $\vec{p}^{(n)} \in S$，使得 $\vec{p}^{(n)}$ 至少属于 $\mathcal{A}$中的 $n$ 个集合。）

证明。 这直接由 推论 A.6 和注 A.7得出。 □

**定理 4.9**（等直径不等式）。设 $d \in \mathbb{N}$ 和 $\|\cdot\|$ 为 $\mathbb{R}^d$上的任意范数。设 $A \subseteq \mathbb{R}^d$ 为一个有界集。那么，$A$ 的勒贝格外测度至多等于具有相同直径的球的勒贝格测度。也就是说（以下三种形式彼此等价），如果 $\operatorname{diam}_{\|\cdot\|}(A) = D$，那么

$$\begin{aligned} m_{out}(A) &\leq m\left(B^{\circ}_{\|\cdot\|}(D/2, \vec{0})\right) \\ &= \left(\tfrac{D}{2}\right)^d \cdot m\left(B^{\circ}_{\|\cdot\|}(1, \vec{0})\right) \\ &= \left(\tfrac{D}{2}\right)^d \cdot v_{\|\cdot\|,d}. \end{aligned}$$

下面的证明纲要由作者发现于 [noa14]，其引用了 [Gru07]。

证明。由于 $D = \text{直径}_{\|\cdot\|}(A)$，$\|\cdot\|$的直径$A = D$也同样成立。考虑集合 $A-A \overset{\text{定义}}{=} \{\vec{a}' - \vec{a}'' : \vec{a}', \vec{a}'' \in A\}$注意到 $A-A$是闭集（因而是博雷尔可测的）、中心对称的[19]，且其直径[20]至多为 $2D$。这意味着[21] $A - A \subseteq B_{\|\cdot\|}(D, \vec{0})$。因此，$m(A-A) \leq m(B(D, \vec{0}))$。

此外，令 $-A \overset{\text{定义}}{=} \{-\vec{a} : \vec{a} \in A\}$ 我们有，$A-A$是闵可夫斯基和 $A - A = A + (-A)$。这使我们可以使用广义布伦-明可夫斯基不等式（定理 4.5）得到

$$\begin{aligned} m(\overline{A} - \overline{A}) &= m(\overline{A} + (-\overline{A})) \\ &\geq \left[m(\overline{A})^{\frac{1}{d}} + m(-\overline{A})^{\frac{1}{d}}\right]^d && \text{(Brunn-Minkowski)} \\ &= \left[2 \cdot m(\overline{A})^{\frac{1}{d}}\right]^d \\ &= 2^d \cdot m(\overline{A}) \end{aligned}$$

将此与上一段末尾的不等式结合，得到 $m(A) \leq \frac{1}{2^d} \cdot m(B(D, \vec{0}))$。我们补充几个简单的不等式来完成证明。首先，由于 $A \subseteq \overline{A}$，我们有 $m_{out}(A) \leq m(\overline{A})$。其次，根据勒贝格测度的缩放性质，$m(B(D, \vec{0})) = m(D \cdot B(1, \vec{0})) = D^d \cdot m(B(1, \vec{0}))$。第三，$m(B^{\circ}(1, \vec{0})) = m(B(1, \vec{0}))$，因为对于任意 $\varepsilon \in (0, \infty)$，我们有

$$m(B^{\circ}(1, \vec{0})) \leq m(\overline{B}(1, \vec{0})) \leq m(B^{\circ}(1+\varepsilon, \vec{0})) = (1+\varepsilon)^d \cdot m(B^{\circ}(1, \vec{0})).$$

综合以上各点即可得到该结果：

$$m_{out}(A) \leq m(\overline{A}) \leq \left(\frac{D}{2}\right)^d \cdot m(\overline{B}(1, \vec{0})) = \left(\frac{D}{2}\right)^d \cdot m(B^{\circ}(1, \vec{0})).$$

□

[19]也就是说，对于任意 $\vec{a} \in A - A$，也有 $-\vec{a} \in A - A$，因为 $\vec{a} = \vec{a}' - \vec{a}''$ 对于某个 $\vec{a}', \vec{a}'' \in A$成立，因此 $A - A \ni \vec{a}'' - \vec{a}' = -\vec{a}$也成立。[20]给定任意两个向量 $\vec{a}, \vec{b} \in A - A$，我们有 $\vec{a} = \vec{a}' - \vec{a}''$，并且对于某些 $\vec{a}', \vec{a}'', \vec{b}', \vec{b} \in A$，有 $\vec{b} = \vec{b}' - \vec{b}''$。因此 $\|\vec{a} - \vec{b}\| = \|(\vec{a}' - \vec{a}'') - (\vec{b}' - \vec{b}'')\| = \|(\vec{a}' - \vec{b}') + (\vec{b}'' - \vec{a}'')\| \leq \|(\vec{a}' - \vec{b}')\| + \|(\vec{b}'' - \vec{a}'')\| \leq 2D$，所以 $A - A$ 的直径至多为 $2D$。[21]如果存在某个 $\vec{a} \in A - A$ $\|\vec{a}\| > D$ $-\vec{a} \in A - A$ $2D = \|\vec{a} - -\vec{a}\| = 2\|\vec{a}\| > 2D$ $A - A \geq$ 满足，那么由中心对称性，也有，于是 diam ( )，这将导致矛盾。

## B 闵可夫斯基和

**事实 4.2**。 对于任意赋范向量空间，给定一个集合 $X$ 和 $\varepsilon \in [0,\infty)$，那么

$$X + B^\circ_{\|\cdot\|}(\varepsilon, \vec{0}) = \bigcup_{\vec{x}\in X} B^\circ_{\|\cdot\|}(\varepsilon, \vec{x}).$$

将开球替换为闭球，也可以得出同样的结论。

证明。我们仅针对开球进行证明。将证明中的所有开球替换为闭球，即可得到闭球的证明。

($\subseteq$) $X + B^\circ(\varepsilon,\vec{0})$的一个一般元素是 $\vec{x}+\vec{b}$对于某个 $\vec{x}\in X$ 和 $\vec{b}\in B^\circ(\varepsilon,\vec{0})$，这意味着 $\vec{x}+\vec{b}\in \vec{x}+B^\circ(\varepsilon,\vec{0}) = B^\circ(\varepsilon,\vec{x}) \subseteq \bigcup_{\vec{x}\in X} B^\circ(\varepsilon,\vec{x})$。

($\supseteq$) 给定 $\vec{y}\in\bigcup_{\vec{x}\in X} B^\circ(\varepsilon,\vec{x})$，存在某个特定的 $\vec{x}\in X$，使得 $y\in B^\circ(\varepsilon,\vec{x}) = \vec{x}+B^\circ(\varepsilon,\vec{0})$，这意味着 $\vec{y}=\vec{x}+\vec{b}$对某个 $\vec{b}\in B^\circ(\varepsilon,\vec{0})$ 成立；又由于 $\vec{x}\in X$，我们有 $\vec{y}\in X+B^\circ(\varepsilon,\vec{0})$。 □

**事实 4.3.** 对于任意赋范向量空间，以及任意 $\alpha,\beta\in(0,\infty)$，均有 $B^\circ_{\|\cdot\|}(\alpha,\vec{0})+B^\circ_{\|\cdot\|}(\beta,\vec{0}) = B^\circ_{\|\cdot\|}(\alpha+\beta,\vec{0})$。

证明。($\subseteq$) $B^\circ(\alpha,\vec{0}) + B^\circ(\beta,\vec{0})$ 的一个一般元素为 $\vec{a}+\vec{b}$，其中 $\vec{a}\in B^\circ(\alpha,\vec{0})$ 且 $\vec{b}\in B^\circ(\beta,\vec{0})$。于是 $\|\vec{a}\|<\alpha$且 $\|\vec{b}\|<\beta$，因此 $\|\vec{a}+\vec{b}\|<\alpha+\beta$，从而得到 $\vec{a}+\vec{b}\in B^\circ(\alpha+\beta,\vec{0})$。

($\supseteq$) 令 $\vec{x}\in B^\circ(\alpha+\beta,\vec{0})$，这意味着 $\|\vec{x}\|<\alpha+\beta$。如果 $\|\vec{x}\|<\alpha$，那么 $\vec{x}\in B^\circ(\alpha,\vec{0})$ 且 $\vec{0}\in B^\circ(\beta,\vec{0})$，因此 $\vec{x}=\vec{x}+\vec{0}\in B^\circ(\alpha,\vec{0})+B^\circ(\beta,\vec{0})$。类似地，如果 $\|\vec{x}\|<\beta$，那么 $\vec{x}=\vec{0}+\vec{x}\in B^\circ(\alpha,\vec{0}) + B^\circ(\beta,\vec{0})$。无论哪种情况我们都已经完成了证明，因此现在可以假设 $\|\vec{x}\|\geq\alpha,\beta$。令 $\varepsilon=\alpha+\beta-\|\vec{x}\|\in(0,\infty)$。由于 $\|\vec{x}\|\geq\alpha$，我们有 $\varepsilon\leq\beta$，并且因为 $\|\vec{x}\|\geq\beta$，我们有 $\varepsilon\leq\alpha$。这表明 $\frac{\varepsilon}{2}<\alpha,\beta$。令 $\vec{a}=(\alpha-\frac{\varepsilon}{2})\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$且 $\vec{b}=(\beta-\frac{\varepsilon}{2})\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$，注意到 $\|\vec{a}\|=\alpha-\frac{\varepsilon}{2}\in(0,\alpha)$以及 $\|\vec{b}\|=\beta-\frac{\varepsilon}{2}\in(0,\beta)$。此外，注意 $\vec{a}+\vec{b}=(\alpha-\frac{\varepsilon}{2}+\beta-\frac{\varepsilon}{2})\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}=\|\vec{x}\|\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}=\vec{x}$，这表明$\vec{x}\in B^\circ(\alpha,\vec{0})+B^\circ(\beta,\vec{0})$。 □

**事实 4.4.** 对于任意赋范向量空间、任意集合 $X$、任意向量 $\vec{p}$ 和任意 $\varepsilon>0$，以下条件等价：
*1.* $B^\circ_{\|\cdot\|}(\varepsilon,\vec{p})\cap X\neq\emptyset$ *2.* $\vec{p}\in X+B^\circ_{\|\cdot\|}(\varepsilon,\vec{0})$将两个开球都替换为闭球，结论也同样成立。

证明。 我们这里只证明闭球的情形。在证明中将所有闭球替换为开球，即可得到开球情形的证明。

($\Longrightarrow$) 如果$\overline{B}(\varepsilon,\vec{p})\cap X\neq\emptyset$，那么存在 $\vec{y}\in B(\varepsilon,\vec{p})\cap\overline{X}$，并且由于 $\vec{y}\in B(\varepsilon,\vec{p})$，我们有$\|\vec{y}-\vec{p}\|\leq\varepsilon$因此 $\vec{p}\in\overline{B}(\varepsilon,\vec{y}) = \vec{y}+\overline{B}(\varepsilon,\vec{0})$，并且由于 $\vec{y}\in X$，$\vec{y}+B(\varepsilon,\vec{0})\subseteq X+\overline{B}(\varepsilon,\vec{0})$，这表明$\vec{p}\in X+B(\varepsilon,\vec{0})$。

($\Longleftarrow$) 若 $\vec{p}\in X+\overline{B}(\varepsilon,\vec{0})$，则存在 $\vec{x}\in X$ 和 $\vec{b}\in B(\varepsilon,\vec{0})$，使得 $\vec{p}=\vec{x}+\vec{b}$。因此$\vec{p}-\vec{x}=b$，所以 $\|\vec{p}-\vec{x}\|=\|b\|\leq\varepsilon$，进而$\vec{x}\in\overline{B}(\varepsilon,\vec{p})$。由于 $\vec{x}$ 同时属于 $X$ 和 $B(\varepsilon,\vec{p})$，它们的交集非空。 □

## C 补充事实

**事实 4.1**。 对于任意 $\alpha\in\mathbb{R}$，存在 $\gamma\in\mathbb{R}$ 使得 $\gamma<\alpha$ 且 $\lceil\gamma\rceil=\lceil\alpha\rceil$。

证明。令 $n = \lceil \alpha \rceil$。这意味着 $\alpha > n-1$（否则 $\alpha \le n-1$，所以 $\lceil \alpha \rceil \le n-1$）。因此（$n-1$, $\alpha$）非空，我们可以取任意 $\gamma \in$（$n-1$, $\alpha$）。然后 $n-1 < \lceil \gamma \rceil \le \lceil \alpha \rceil = n$ 也表明$\lceil \gamma \rceil = n$。

□

**引理 4.7。** 对于 $d \in [1,\infty)$、$x \in [0,1]$ 和 $\alpha \in [0,\infty)$，有 $(x^{1/d}+\alpha)^d \ge x(1+\alpha)^d$。

证明。我们将证明，对于这些参数，$(x^{1/d}+\alpha)^d - x(1+\alpha) \ge 0$。设对于上述的 $d$、$\alpha$，令 $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ 由 $f(x) = (x^{1/d}+\alpha)^d - x(1+\alpha)$ 定义。注意到 $f(0) = \alpha^2 \ge 0$，且 $f(1) = (1+\alpha)^d - (1+\alpha)^d = 0$。现在我们将证明 $f$ 在定义域[22] $[0,1]$ 上是凸的。这足以证明该命题，因为 $f$ 在 0 和 1 处也都是非负的。

我们通过考察 $f$ 在 (0,1 上的二阶导数，证明其在 $[0,1]$ 上是凸的 ].

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}f(x) &= \frac{d}{dx}\left[(x^{1/d}+\alpha)^d - x(1+\alpha)^d\right] \\ &= d(x^{1/d}+\alpha)^{d-1}\cdot\frac{1}{d}x^{1/d-1} - (1+\alpha)^d \\ &= (x^{1/d}+\alpha)^{d-1}x^{1/d-1} - (1+\alpha)^d\end{aligned}$$

其中我们约定 $0^0 = 1$。于是

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}f(x) &= \frac{d}{dx}\left[(x^{1/d}+\alpha)^{d-1}x^{1/d-1} - (1+\alpha)^d\right] \\ &= (x^{1/d}+\alpha)^{d-1}\cdot\left(\frac{1}{d}-1\right)x^{1/d-2} + x^{1/d-1}\cdot(d-1)(x^{1/d}+\alpha)^{d-2}\frac{1}{d}x^{1/d-1} \\ &= (x^{1/d}+\alpha)(x^{1/d}+\alpha)^{d-2}\left(-\frac{d-1}{d}\right)\left(x^{1/d-2}\right) + (x)\left(x^{1/d-2}\right)\left(\frac{d-1}{d}\right)\left(x^{1/d}+\alpha\right)^{d-2}\left(x^{1/d-1}\right) \\ &= \frac{(x^{1/d}+\alpha)^{d-2}(d-1)\left(x^{1/d-2}\right)}{d}\left[-(x^{1/d}+\alpha) + (x)\left(x^{1/d-1}\right)\right] \\ &= \frac{(x^{1/d}+\alpha)^{d-2}(d-1)\left(x^{1/d-2}\right)}{d}\left[-(x^{1/d}+\alpha) + \left(x^{1/d}\right)\right] \\ &= \frac{-\alpha(x^{1/d}+\alpha)^{d-2}(d-1)\left(x^{1/d-2}\right)}{d} \\ &= \frac{-\alpha(x^{1/d}+\alpha)^{d}(d-1)\left(x^{1/d}\right)}{d(x^{1/d}+\alpha)^2x^2}.\end{aligned}$$

注意，对于$x \in (0,1]$，$\frac{d^2}{dx^2}f(x) \le 0$，因为 $\alpha \ge 0$。这表明 $f$在（$0,1$] 上是凸的，并且根据连续性，在 $[0,1]$ 上也是凸的，从而证明完毕。

□

[22]实际上，我们可以将 $f$的定义域定义为 $[0,\infty)$，并证明 $f$在该定义域上是凸的。不过，我们只需要区间 $[0,1]$。