arXiv:2304.04844v1 [math.RT] 10 Apr 2023

Auslander-Reiten 箭图的$m-$周期复形范畴

´ClaudiaChaio、阿尔弗雷多·冈萨雷斯·柴奥、伊莎贝尔·普拉蒂，´ ´和玛丽亚·何塞·索托·萨洛里奥

谨以此文献给 Raymundo Bautista 八十寿辰

Abstract. 令 $\mathcal{A}$ 为一个加性 $k-$范畴，且$\mathbf{C}_{\equiv m}(\mathcal{A})$为 $m-$周期对象的范畴。对于任意整数 $m>1$，我们研究压缩函子$\mathcal{F}_m$: $\mathbf{C}^b(\mathcal{A}) \to \mathbf{C}_{\equiv m}(\mathcal{A})$ 保持或反映不可约态射的条件。此外，我们找到了函子 $\mathcal{F}_m$ 成为 G-Galois覆盖的充分条件，其意义见 [3]。如果进一步 $\mathcal{A}$ 是一个对偶化范畴，并且 $\operatorname{mod}\mathcal{A}$ 具有有限整体维数，那么$\mathbf{C}_{\equiv m}(\mathcal{A})$具有几乎分裂序列。特别地，对于具有有限强全局维数的有限维代数 A，我们确定了如何构造范畴$\mathbf{C}_{\equiv m}(\operatorname{proj} A)$的Auslander-Reiten箭图。此外，只要 A 是域 k上的任意有限维 $k-$代数，我们就研究$\mathbf{C}_{\equiv m}(\operatorname{proj} A)$中截面路径的行为。

Introduction

$m-$周期复形的范畴本身就具有独立的研究价值，但它也与有界导出范畴的轨道范畴相关。代数的导出范畴的轨道范畴与 $m-$周期复形之间的联系是通过压缩函子建立的。对于 $m \geq 2$,

在 [20], L. Peng 和 J. Xiao 展示了这两个范畴之间的关系。特别是，这些作者研究了 $2-$有限维遗传代数 H 上的周期链复形，并证明了由 D. Happel 在 [16], 研究的根范畴 $\mathbf{D}^b(\operatorname{mod} H)/[2]$ 从 $\mathbf{D}^b(\operatorname{mod} H)$. 继承了三角结构。

三角范畴的轨道范畴本身不一定是三角范畴。然而，2005年，B.Keller 为导出范畴的某些轨道范畴构造了三角包络。对于任意 A有限整体维数的有限维代数，作者定义了一个从导出范畴到三角包络的三角函子，使得轨道范畴$\mathbf{D}^b(\operatorname{mod} A)/[m]$ 嵌入其三角包络中。在轨道范畴具有典范三角结构的情况下，该嵌入是一个等价，参见 [18]。

多位作者研究了上述问题，并发现 $m-$周期复形范畴是处理该问题的良好框架。尤其是，从有界复形范畴到 $m-$周期范畴的自然函子（称为压缩函子）发挥着重要作用，因为压缩函子稠密时，恰好就是轨道范畴从导出范畴 $\mathbf{D}^b(\operatorname{mod} A)$。继承三角结构的情形

对于一个加性范畴 $\mathcal{A}$， $m-$周期复形的范畴 $\mathbf{C}_{\equiv m}(\mathcal{A})$，以及相对同伦范畴 $\mathbf{K}_{\equiv m}(\mathcal{A})$ 和其导出范畴 $\mathbf{D}_{\equiv m}(\mathcal{A})$，在 $\mathcal{A}$ 是的情况下

Date: 2023年4月12日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 16G70，16G20，16E10。*Key words and phrases.* 复形；不可约；周期范畴；Galois 覆盖。

阿贝尔范畴本身以及与压缩函子相关的研究越来越受到关注，另请参见 [12], [23], [25], [26] 和 [27]。

已知，如果 $\mathcal{A}$ 是遗传加性范畴，那么压缩函子是稠密的。此外，在代数 A 与遗传范畴导出等价的情况下，该结果同样成立，参见 [18], [23], [26]。我们注意到，如果情况确实如此，那么压缩函子的本质像与 $m-$周期复形的范畴等价。

当 H 是遗传代数时，文献 [6], [10], [11] 和 [21]研究了关于 $m-$周期复形范畴的 Auslander–Reiten 理论的一些性质。当 H 是遗传代数时，文献[11] 研究了$\mathbf{C}_{\equiv m}(\text{proj}\, H)$的几乎分裂序列，方法是考察遗传代数上的复形范畴中的几乎分裂序列，并利用压缩函子在这种情况下是稠密的这一事实。最近，作者在文献 [10], 中采用另一种方法得到了$\mathbf{C}_{\equiv m}(\text{proj}\, H)$的 Auslander-Reiten 箭图。

在线性 $k-$范畴的一般背景下，Galois $G-$覆盖的概念在 [3]中被定义，并要求满足稠密性条件。作者证明，Krull-Schmidt 加性范畴之间的 Galois G-覆盖保持几乎分裂序列。受此结果启发，一个自然的问题是：在加性范畴 $\mathcal{A}$ 上，满足哪些条件才能保证压缩函子 $\mathcal{F}_m : \mathbf{C}^b(\mathcal{A}) \to \mathbf{C}_{\equiv m}(\mathcal{A})$是一个 Galois $G-$覆盖?

范畴的 Auslander-Reiten 箭图通过只考察能够构造出其他所有态射和顶点的那些态射与顶点，提供了关于该范畴的重要信息。构造这一箭图往往很困难，因此我们需要处理范畴中的不可约态射和不可分解对象。存在可用于构造箭图的 Auslander-Reiten 序列，是需要考虑的前置步骤。

对于 A 一个有限整体维数的有限维 k-代数，已在 [12],定理 2.10 中证明，轨道范畴的三角包络 $\mathbf{D}^b(\text{mod}\, A)/[m]$ 存在 Auslander-Reiten 三角。

另一方面，三角包络 R 与 $\mathbf{K}_{\equiv m}(\text{proj}\, A)$ 三角等价，也与 $\mathbf{D}_{\equiv m}(\text{mod}\, A)$ 三角等价（见 [27] 中的定理 2.10）。因此，$\mathbf{K}_{\equiv m}(\text{proj}\ A)$ 存在 Auslander-Reiten 三角。我们指出，这一事实等价于范畴 $\mathbf{C}_{\equiv m}(\text{proj}\, A)$ 中几乎分裂序列的存在性，因为相对同伦范畴是 $\mathbf{C}_{\equiv m}(\text{proj}\, A)$ 的稳定范畴，见 [22]。

有限维 $k-$代数的一个推广是对偶化 $k-$范畴的概念，该概念由 M. Auslander 和 I. Reiten 在 [2], 中提出，他们证明了范畴 proj A是对偶化范畴的一个例子。由 [5] 可知，如果 $\mathcal{A}$是对偶化范畴，那么范畴 $\mathbf{C}^{[1,n]}(\mathcal{A})$ 存在几乎分裂序列。此外，如果 mod $\mathcal{A}$ 具有有限整体维数，那么$\mathbf{C}^b(\mathcal{A})$ 存在几乎分裂序列（参见 [15]）。因此，如果我们知道压缩函子 $\mathcal{F}_m$ 是一个伽罗瓦 $G-$ 覆盖，那么$\mathbf{C}^b(\mathcal{A})$ 中几乎分裂序列的存在性保证$\mathbf{C}_{\equiv m}(\mathcal{A})$ 中几乎分裂序列的存在性。

本文致力于构造有限强全局维数有限维代数上 $m-$ 周期复形范畴的所谓 Auslander-Reiten 箭图。定长复形范畴在我们的论证中起着重要作用，因此我们特别关注压缩函子在该范畴上的限制。在 A 为迭代倾斜代数这一特殊情形下，我们推得压缩函子是 [3] 意义下的 Galois $G-$ 覆盖。随后，我们利用这一事实求得范畴 $\mathbf{C}_{\equiv m}(\text{proj}\, A)$ 的 Auslander-Reiten 箭图。

本文的组织结构如下。第一节回顾加性范畴 $\mathcal{A}$ 上$m-$周期复形的基本结果，以及压缩函子 $\mathcal{F}_m : \mathbf{C}^b(\mathcal{A}) \to \mathbf{C}_{\equiv m}(\mathcal{A})$ 的一些性质，其中 m 为任意正整数。此外，我们还汇集了

以下是关于伽罗瓦覆盖的一些 [3] 结果，这些结果有助于证明下一节中的一些结论。特别地，当 A 是有限整体维数的有限维代数时，我们研究压缩函子 $\mathcal{F}_m\colon \mathbf{C}^b(\operatorname{proj} A) \to \mathbf{C}_{\equiv m}(\operatorname{proj} A)$ 的性质。在第 2 节中，只要 $\mathcal{A}$ 是加性范畴，我们便证明压缩函子关于不可分解对象、不可约态射和稠密性的若干事实。第 3 节旨在展示关于 $\mathcal{A}$ 的条件，这些条件使我们能够确保压缩函子是 $G-$ 覆盖，意义如 [3] 所述。本节最后，我们研究对偶化情形，并证明在附加假设下，$m-$ 周期复形范畴存在几乎分裂序列，而且可以由$\mathbf{C}^b(\mathcal{A})$ 的几乎分裂序列得到这些序列。更确切地说，我们可以由$\mathbf{C}^{[1,n]}(\mathcal{A})$ 的几乎分裂序列得到它们。特别地，当 A 是迭代倾斜代数时，我们得到关于 $\mathcal{A} = \operatorname{proj} A$ 的结果。在第 4 节中，我们展示如何构造$\mathbf{C}_{\equiv m}(\operatorname{proj} A)$ 的 Auslander-Reiten 箭图，其中 A 是具有有限强全局维数的有限维代数。最后，在最后一节中，我们研究$\mathbf{C}_{\equiv m}(\operatorname{proj} A)$ 中截面路径的性质，其中 A 是任意有限维代数。

前三位署名作者谨此感谢马德普拉塔国立大学（阿根廷）提供的 EXA/1057/22 项目部分资助。第四位作者感谢西班牙科学与创新部项目（MICINN）PID2020-113230RB-C21 的资助。第一位作者是 CONICET 的研究人员。

1. Preliminaries

设 $\mathcal{A}$ 是交换环 k 上的加性 $k-$范畴，$\mathcal{P}$ 是由 $\mathcal{A}$中所有投射对象构成的满子范畴。用 Mod-$\mathcal{A}$ 表示由从 $\mathcal{A}^{op}$ 到阿贝尔群范畴的所有加性函子构成的范畴。Yoneda 函子使我们可以将 $\mathcal{A}$ 视为完备阿贝尔范畴 Mod-$\mathcal{A}$.的满子范畴

我们将$\mathbf{C}(\mathcal{A})$记为由无界链复形组成的加性 $k-$范畴，并将$\mathbf{C}^b(\mathcal{A})$记为$\mathbf{C}(\mathcal{A})$的满子范畴，该满子范畴由有界复形组成。

设 A 为有限维代数，$\operatorname{mod} A$ 为有限生成 A-模的范畴。我们用 $\operatorname{proj} A$ 表示 $\operatorname{mod} A$ 的满子范畴，其对象为投射A-模。

对于有限整体维数有限维代数上的有限生成模范畴 $\operatorname{mod} A$，我们考虑 Frobenius 范畴 $\mathbf{C}^b(\operatorname{proj} A)$，以及同稳定范畴三角等价的同伦范畴 $\mathbf{K}^b(\operatorname{proj} A)$。

滥用记号，并根据 [16]，给出的三角等价，我们将以下三角范畴视为相同

$$\underline{\mathbf{C}^b(\operatorname{proj} A)} \simeq \mathbf{K}^b(\operatorname{proj} A) \simeq \mathbf{D}^b(\operatorname{mod} A).$$

1.1. $m-$周期复形。 设 m 为正整数。

根据定义，$m-$周期复形上的 $\mathcal{A}$是一个复形 $X = (X^i, d^i_X)$，满足 $X^i = X^j$以及 $d^i_X = d^j_X$ 对所有 $i, j \in \mathbb{Z}$ 均成立，其中 $i \equiv_m j$，这意味着整数 i 和 j 模 m. 同余。对象 X^i 属于 $\mathcal{A}$ ，而微分 $d^i_X\colon X^i \to X^{i+1}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的态射，并满足 $d^{i+1}_X d^i_X = 0$。

若 $X = (X^i, d^i_X)$ 和 $Y = (Y^i, d^i_Y)$ 是两个 $m-$周期复形，则态射 $f\colon X \to Y$ 是一列态射 $f^i\colon X^i \to Y^i$，其中 $\mathcal{A}$ 满足：对于所有 $i, j \in \mathbb{Z}$，若 $i \equiv_m j$，则 $f^i = f^j$；并且对于所有 $i \in \mathbb{Z}$，$d_i f^{i+1} = f^i d_{i+1}$。态射的复合按从右到左的顺序进行。

我们用 $\mathbf{C}_{\equiv m}(\mathcal{A})$ 表示 $\mathcal{A}$. 上 m-周期复形的范畴。范畴 $\mathbf{C}_{\equiv m}(\mathcal{A})$ 是一个 Frobenius 范畴，稳定范畴 $\mathbf{C}_{\equiv m}(\mathcal{A})$ 与$\mathbf{K}_{\equiv m}(\mathcal{A})$ 相同，即 $m-$ 周期复形的相对同伦范畴。若将其限制到 $\mathcal{A}$ 的满子范畴 $\mathcal{P}$，则得到范畴 $\mathbf{C}_{\equiv m}(\mathcal{P})$，以及范畴 $\mathbf{K}_{\equiv m}(\mathcal{P})$（见 [20]）。

对每个整数 s，都有一个规范的平移函子 $[s]$，作用于$\mathbf{C}_{\equiv m}(\mathcal{A})$，它将一个$m-$周期复形 (X, d_X) 映射为 $(X[s], \delta)$，其中 $\delta^i = (-1)^s d_X^{s+i}$.

在特殊情形下，$\mathcal{A}$ 是有限整体维数有限维代数上的有限生成模范畴 $\operatorname{mod} A$，我们可以考虑 $m-$周期的 A导出范畴$\mathbf{D}_{\equiv m}(\operatorname{mod} A)$, ，即相对于拟同构进行局部化所得的相对同伦范畴。此外，范畴$\mathbf{K}_{\equiv m}(\operatorname{proj} A)$ 和$\mathbf{D}_{\equiv m}(\operatorname{mod} A)$三角等价，并且 $m-$周期导出范畴在导出等价下保持不变（见 [27] 和 [26]）。

略去记号上的区别，本文中，对于全局维数有限的有限维代数 A，我们将以下三角范畴视为相同:

$$\underline{\mathbf{C}_{\equiv m}(\operatorname{proj} A)} \simeq \mathbf{K}_{\equiv m}(\operatorname{proj} A) \simeq \mathbf{D}_{\equiv m}(\operatorname{mod} A).$$

1.2.压缩函子。根据 [20], 我们知道存在一个正合函子，称为压缩函子，$\mathcal{F}_m : \mathbf{C}^b(\mathcal{A}) \to \mathbf{C}_{\equiv m}(\mathcal{A})$，它在同伦范畴$\mathbf{K}^b(\mathcal{A})$ 和$\mathbf{K}_{\equiv m}(\mathcal{A})$ 之间诱导出一个正合函子。此外，它还从同伦范畴$\mathbf{K}^b(\mathcal{P})$ 和相对同伦范畴$\mathbf{K}_{\equiv m}(\mathcal{P})$。

略微滥用记号，我们也用 $\mathcal{F}_m$ 表示同伦范畴之间的压缩函子。

我们回顾文献 [20] 中给出的压缩函子 $\mathcal{F}_m : \mathbf{C}^{\mathbf{b}}(\mathcal{A}) \to \mathbf{C}_{\equiv m}(\mathcal{A})$。

定义 *1.3.* 对于 $X = (X^i, d_X^i)$ 这个 $\mathcal{C}^{\mathbf{b}}(\mathcal{A})$ 中的复形，令 $\mathcal{F}_m(X) = (\mathcal{F}_m(X)^i, d^i_{\mathcal{F}_m(X)})$，其中 $\mathcal{F}_m(X)^i = \oplus_{t\in\mathbb{Z}} X^{i+tm}$ 且 $d^i_{\mathcal{F}_m(X)} = (d^i_{st})_{s,t\in\mathbb{Z}}$，使得 $d^i_{st} : X^{i+sm} \to X^{(i+1)+tm}$ *with* $d^i_{st} = 0$ *for* $s \neq t$ *and* $d^i_{ss} = d_X^{i+ms}$ *for all* $s \in \mathbb{Z}$。

对于一个态射 $f = (f^i) : X \to Y$ 在 $\mathbf{C}^{\mathbf{b}}(\mathcal{A})$ 中，我们令 $\mathcal{F}_m(f) = (g^i) : \mathcal{F}_m(X) \to \mathcal{F}_m(Y)$，其中 $g^i = (g^i_{st})$ 使得 $g^i_{st} : X^{i+sm} \to Y^{i+tm}$ 且 $g^i_{st} = 0$ 对于 $s \neq t$ 和 $g^i_{ss} = f^{i+ms}$ 对所有 $s \in \mathbb{Z}$。

在更一般的语境中，如果 $\mathcal{A}$ 具有余积，那么我们可以考虑压缩函子 $\Delta : \mathbf{C}(\mathcal{A}) \to \mathbf{C}_{\equiv m}(\mathcal{A})$，它由 $\Delta(X) = \oplus_{j\in\mathbb{Z}} X[mj]$ 对一个复形$(X, d_X) \in \mathbf{C}(\mathcal{A})$。给出。当我们限制到有界复形时，可得 $\mathcal{F}_m : \mathbf{C}^b(\mathcal{A}) \to \mathbf{C}(\mathcal{A}) \to \mathbf{C}_{\equiv m}(\mathcal{A})$是包含函子$\mathbf{C}^b(\mathcal{A}) \to \mathbf{C}(\mathcal{A})$ 与 Δ 的复合。

我们注意到，包含函子 $\bigtriangledown : \mathbf{C}_{\equiv m}(\mathcal{A}) \to \mathbf{C}(\mathcal{A})$ 是 Δ. 的右伴随。这意味着，

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{C}_{\equiv m}(\mathcal{A})}(\Delta(X), \Delta(Y)) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{A})}(X, \bigtriangledown\Delta(Y)).$$

现在，我们关注这样的情形：对于一个有限整体维数的有限维代数，$\mathcal{A} = \operatorname{proj} A$ 为 A 。

以下结果展示了压缩函子与轨道范畴之间的联系，见 [18]。

定理 1.4。设 A 是一个具有有限整体维数的有限维代数，并且 $m \geq 1$。压缩函子 $\mathcal{F}_m : \mathbf{K}^b(\operatorname{proj} A) \to \mathbf{K}_{\equiv m}(\operatorname{proj} A)$ 给出了从其本质像 $\mathbf{K}^b(\operatorname{proj} A)/[m]$ 到其三角包络 $\mathbf{K}_{\equiv m}(\operatorname{proj} A)$的嵌入。

此外，以下陈述彼此等价。

(a) 范畴 $\mathbf{K}^b(\operatorname{proj} A)/[m]$ 具有典范三角结构。(b) 嵌入 $i:\mathbf{K}^b(\operatorname{proj} A)/[m]\longrightarrow\mathbf{K}$ $\equiv m(\operatorname{proj} A)$ 是一个等价。(c) 压缩函子 $\mathcal{F}_m:\mathbf{K}^b(\operatorname{proj} A)\to\mathbf{K}\equiv m(\operatorname{proj} A)$ 是稠密的。

此外，若上述陈述对 m 的某一种选择成立，则对所有正整数 $m.$ 都成立

证明。 根据 [26, 定理 4.3] 以及 [27], ，我们知道压缩函子给出了一个嵌入 i，将其本质像 $\mathbf{K}^b(\operatorname{proj} A)/[m]$ 映入其三角包络 $\mathbf{K}\equiv m(\operatorname{proj} A)$。此外，根据 [27], ，我们知道 $\mathbf{K}^b(\operatorname{proj} A)/[m]$ 的三角包络与范畴 $\mathbf{K}\equiv m(\operatorname{proj} A)$ 等价。 于是得到陈述 (a) 等价于陈述 (b)。

另一方面，我们有嵌入 $i:\ \mathbf{K}^b(\operatorname{proj} A)/[m]\longrightarrow\mathbf{K}\equiv m(\operatorname{proj} A)$ 是等价，当且仅当 i 是稠密的。此外， i 是稠密的，当且仅当压缩函子 $\mathcal{F}_m$ 是稠密的。因此，陈述 (b) 等价于陈述 (c)。

根据 [25, 定理 1], ，我们知道，如果轨道范畴 $\mathbf{K}^b(\operatorname{proj} A)/[m]$ 对于某一个 m 是三角范畴，那么它对于每一个 m都是三角范畴，从而证明了该结果。□

1.5. 伽罗瓦 G覆盖。 我们回顾 [3]中陈述的若干概念和结果，它们是证明接下来各截面中一些结果的基础。这里，线性范畴指加性骨架线性范畴。

我们回顾一下 [3], 中给出的 G-预覆盖的定义（另见 [1, 1.6]）。

定义1.6。 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 为线性范畴，且有一个群 G 作用在 $\mathcal{A}$上。函子$F:\ \mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 称为 G-预覆盖，如果 F 具有一个 G-稳定子 δ，使得对于任意X、$Y\in\mathcal{A}_0$，以下两个映射都是同构:

$$F_{X,Y}:\oplus\mathcal{A}(X,g.Y)\to\mathcal{B}(F(X),F(Y)):(u_g)_{g\in G}\to\Sigma_{g\in G}F(u_g)\delta_{(g,Y)}.$$

$$F^{X,Y}:\oplus\mathcal{A}(g.X,Y)\to\mathcal{B}(F(X),F(Y)):(v_g)_{g\in G}\to\Sigma_{g\in G}\delta^{-1}_{(g,X)}F(v_g).$$

在上述定义中，正如 H. Asashiba 在 [1, 1中所观察到的，$F_{X,\ Y}$或所有 $F^{X,\ Y}$为同构就足够了。

N接下来，我们给出加性范畴中不可约态射的定义。

定义 1.7。 设 $\mathcal{A}$ 为一个加性范畴，且 $f:\ \ X\to Y$ 为 $\mathcal{A}$中的一个态射。当且仅当存在一个态射$h:\ \ Y\to X$ 使得 $hf=1_X$ （分别为 $fh=1_Y$）时，称态射 f 为截面（分别为收缩）。当这些条件之一成立时，称 f 为分裂态射。

如果态射 f 不是分裂态射，并且对于任意分解 $f=hg,\ \ g$ 是截面或 h 是收缩，则称态射 f 为不可约。

下一个结果对于证明压缩函子 $\mathcal{F}_m$ 反映不可约态射是基础性的。尽管我们用于证明该结果的同构是众所周知的，而且我们还可以在预印本 [23], 的命题 3.9（2）中找到证明，但为方便读者，下面我们陈述并证明函子 $\mathcal{F}_m$ 是一个以 $[m]$生成的循环群 G 的$G-$预覆盖。

首先观察 可见，由 $[m]$生成的循环群，容许地作用在$\mathbf{C}^b(\mathcal{A})$。事实上，

(1)作用是自由的，因为 $X\neq X[mj]$ 对于 $\mathbf{C}^b(\mathcal{A})$ 中的任意不可分解复形，以及

(2) 它是局部有界的，因为对于除有限多个整数 j 之外的所有整数 j，以及 $\mathbf{C}^b(\mathcal{A})$. 中的任意不可分解复形 X 和 Y，$\mathrm{Hom}(X, Y[mj]) = 0$

命题 1.8. 设 $\mathcal{A}$ 是一个加性 $k-$范畴。函子 $\mathcal{F}_m$： $\mathbf{C}^b(\mathcal{A}) \to \mathbf{C}_{\equiv m}(\mathcal{A})$ 是一个 $G-$预覆盖，其 G 群由 $[m]$ 生成，并且有一个 $G-$稳定子。

证明。 考虑 $\mathbf{C}^b(\mathcal{A})$ 中的 和 。由于这些复形有界，因此存在一个有限集合，使得对所有整数，$Hom_{(\mathcal{A})}(X, Y[mj]) = 0$。

利用这一事实，我们得到以下同构:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}_{\equiv m}(\mathcal{A})}(\mathcal{F}_m(X), \mathcal{F}_m(Y)) &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{A})}(X, \mathcal{F}_m(Y)) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{A})}(X, \oplus_{j\in\mathbb{Z}} Y[mj]) \\ &= \oplus_{j\in I}\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}^b(\mathcal{A})}(X, Y[mj]) \\ &= \oplus_{j\in\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}^b(\mathcal{A})}(X, Y[mj])\end{aligned}$$

证明函子 $\mathcal{F}_m$ 是一个 $G-$预覆盖（见定义 1.6）。 □

作为命题 1.8 的推论，我们得到以下推论，它是证明不同范畴中态射不可约性的基础。

我们首先注意到，在 [3, 引理 2.7] 中，复形 X, Y 和 Z 在 $\mathbf{C}^b(\mathcal{A})$ 中不一定是不可分解对象。

推论 1.9。 ([3], 引理2.7) 设 $\mathcal{A}$ 是一个加性范畴，且 $f: X \to Y$ 属于 $\mathbf{C}^b(\mathcal{A})$ 是一个态射。以下条件成立。

(1) 若 $g: X \to Z$ 或 $g: Z \to Y$ 是 $\mathbf{C}^b(\mathcal{A})$ 中的态射，则 g 可经由 f 分解，当且仅当 $\mathcal{F}_m(g)$ 可经由 $\mathcal{F}_m(f)$分解。(2) 态射 f 是截面、余截面或同构，当且仅当 $\mathcal{F}_m(f)$ 分别是截面、余截面或同构。

线性范畴之间的函子 $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 称为几乎稠密的，如果 $\mathcal{B}$ 中的每个不可分解对象都同构于一个属于 F的像的对象。

最后，我们回顾 [3, 定义 2.8]中给出的 Galois G-覆盖的定义。

定义 1.10。 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 为线性范畴，且 G 群在$\mathcal{A}$上容许地作用。按照 [3, 定义 2.8]，若一个 G-预覆盖 $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 满足以下条件，则称其为 *Galois*G-覆盖。

(a) 函子 F 几乎稠密。(b) 若 $X \in \mathcal{A}$ 是不可分解对象，则 $F(X)$ 也是不可分解对象。(c) 若 $X, Y \in \mathcal{A}$ 是不可分解对象，且 $F(X) = F(Y)$，则存在某个 $g \in G$使得 $Y = g.X$。

1.11. 定长复形范畴。 设 $\mathcal{A}$为加性范畴。固定大小为 n 且满足 $n \geq 2$的复形范畴，是$\mathbf{C}^b(\mathcal{A})$的满子范畴，其对象是细胞在自然区间 $[1, n]$.之外均为零的复形。我们用$\mathbf{C}^{[1,n]}(\mathcal{A})$表示此范畴。

如果 $0 < n \leq s$ 我们可以考虑全忠实函子 $\phi_{n,\ s}: \mathbf{C}^{[1,n]}(\mathcal{A}) \to \mathbf{C}^{[1,s]}(\mathcal{A})$，将每个 $X \in \mathbf{C}^{[1,n]}(\mathcal{A})$ 发送到

$$X^1 \to X^2 \to \ldots \to X^n \to 0 \overset{s-n}{\cdots} \to 0$$

在 $\mathbf{C}^{[1,s]}(\mathcal{A})$中。因此，我们可以将 $\mathbf{C}^{[1,n]}(\mathcal{A})$ 视为 $\mathbf{C}^{[1,s]}(\mathcal{A})$ 的满子范畴。

不失一般性，若 $n \leq s$ 我们将复形 $X \in \mathbf{C}^{[1,n]}(\mathcal{A})$ 与$\phi_{n,s}(X) \in \mathbf{C}^{[1,s]}(\mathcal{A})$.视为相同。

2. The compression functor of bounded complexes

在本节中，我们始终考虑 $\mathcal{A}$ 一个加性范畴。

2.1. 压缩函子与不可分解复形。本节首先说明，在 $0 < n \leq s$ 的情形下，压缩函子给出了范畴 $\mathbf{C}^{[1,n]}(\mathcal{A})$ 与 $\mathbf{C}^{\equiv s}(\mathcal{A})$ 的一个满子范畴之间的等价，。

首先，我们固定一些有用的记号。

记号 2.1. 我们用 $\mathcal{X}'_s$ 表示 $\mathbf{C}^{\equiv s}(\mathcal{A})$ 的满子范畴，其中由如下$s-$周期复形 Z' 组成。

$$Z' : \cdots \to Z^{s-1} \to Z^s \xrightarrow{0} Z^1 \to Z^2 \to \ldots \to Z^s \xrightarrow{0} Z^1 \to Z^2 \to \ldots \to Z^s \xrightarrow{0} Z^1 \to \ldots$$

微分为 $d^{sj} = 0$ ，对任意 $j \in \mathbb{Z}$。

在方便时，我们用$\mathcal{X}'_{n,\ s}$表示由满足以下条件的复形 $Z' \in \mathcal{X}'_s$构成的 $\mathcal{X}'_s$的满子范畴：对于任意 $t \in \{n+1, \ldots, s\}$ 和 $j \in \mathbb{Z}$.。注意，$\mathcal{X}'_{s,\ s} = \mathcal{X}'_s$.

我们用 $(-)' \colon \mathbf{C}^{[1,s]}(\mathcal{A}) \to \mathcal{X}'_s$表示将 $Z \in \mathbf{C}^{[1,s]}(\mathcal{A})$映到 $Z' \in \mathcal{X}'_s$.的函子

注 2.2. 函子 $(-)' : \mathbf{C}^{[1,s]}(\mathcal{A}) \to \mathcal{X}'_s$ 是一个等价，因为它本质满且也是一个全忠实函子。事实上，考虑$\mathbf{C}^{[1,s]}(\mathcal{A})$中的复形 X 和 Y 。注意， $f \colon X \to Y$是复形之间的态射，当且仅当 $f' \colon X' \to Y'$是$\mathbf{C}^{\equiv s}(\mathcal{A})$中的态射。这意味着 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}^{\equiv s}(\mathcal{A})}(X', Y') = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}^{[1,n]}(\mathcal{A})}(X, Y)$，因此函子 $(-)'$ 是全忠实的。

由注记 2.2 可得以下结果。

命题 2.3。考虑 $s \geq n$. 压缩函子 $\mathcal{F}_s$ ： $\mathbf{C}^{[1,n]}(\mathcal{A}) \to \mathbf{C}^{\equiv s}(\mathcal{A})$ 是一个全忠实函子，其本质像是 $\mathbf{C}^{\equiv s}(\mathcal{A})$ 的满子范畴 $\mathcal{X}'_{n,\ s}$ 。于是得到分解 $\mathcal{F}_s$ ： $\mathbf{C}^{[1,n]}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{X}'_{n,\ s} \xrightarrow{i} \mathbf{C}^{\equiv s}(\mathcal{A})$。此外，$\mathcal{F}_s$ 保持并反映不可分解复形。

Proof. 考虑 $Z \in \mathbf{C}^{[1,n]}(\mathcal{A})$ 和$Z' \in \mathcal{X}'_{n,\ s}$ 在 2.1 中定义的 $s-$周期复形 .

我们断言 $\mathcal{F}_s(Z) = Z'$. 事实上，对于每个 $t \in \mathbb{Z}$ 我们可以考虑 $j_0 \in \mathbb{Z}$ 满足 $t \in [sj_0 + 1, sj_0 + s]$. 的唯一整数。于是我们有 $\mathcal{F}_s(Z)^t = \oplus_{j \in \mathbb{Z}} Z^{t-sj} = Z^{t-sj_0} = (Z')^t$. 我们推知， $\mathcal{F}_s$ 的本质像是满子范畴 $\mathcal{X}'_{n,s}$ 到$\mathbf{C}^{\equiv s}(\mathcal{A})$.

根据注记 2.2，我们得到 $(-)' \circ \phi_{n,\ s} \colon \mathbf{C}^{[1,n]}(\mathcal{A}) \to \mathcal{X}'_{n,\ s}$ 是范畴等价。于是，函子 $\mathcal{F}_s$ 是复合 $\mathbf{C}^{[1,n]}(\mathcal{A}) \xrightarrow{(-)' \circ \phi_{n,\ s}}{}^{s} \mathcal{X}'_{n,\ s} \xrightarrow{i} \mathbf{C}^{\equiv s}(\mathcal{A})$，其中 i 是包含态射。

最后，考虑 X 一个 $\mathbf{C}^{[1,n]}(\mathcal{A})$ 中的复形。注意， W 是 $\mathcal{F}_s(X) = X'$ 在 $\mathbf{C}^{\equiv s}(\mathcal{A})$ 中的直和项，当且仅当 $W \in \mathcal{X}'_n$. 。事实上，若 $s > n$ ，则利用以下事实可得结论：对每个 $j \in \{n+1, \ldots, s\}.$，都有 $(X')^j = 0$。若 $s = n$，由于存在一个截面 $u \colon W \to X'$，则$d^n_W = 0$ ，因为 $u^1 d^n_W = d^n_{X'} u^n = 0$ ，且 u^1 是单态射。因此， $W \in \mathcal{X}'_n$ 且$W = Y' = \mathcal{F}_s(Y)$，其中某个 Y 属于 $\mathbf{C}^{[1,n]}(\mathcal{A})$。由此并利用压缩函子是可加的这一事实，我们得到以下等价陈述： $\mathcal{F}_s(X) = \mathcal{F}_s(Y) \oplus \mathcal{F}_s(L)$ 在 $\mathbf{C}^{\equiv s}(\mathcal{A})$ 中，当且仅当 $\mathcal{F}_s(X) = \mathcal{F}_s(Y) \oplus \mathcal{F}_s(L)$ 在 $\mathcal{X}'_n$ 中；并且 $\mathcal{F}_s(X) = \mathcal{F}_s(Y) \oplus \mathcal{F}_s(L)$ 在 $\mathcal{X}'_n$ 中，当且仅当 $X = Y \oplus L$ 在 $\mathbf{C}^{[1,n]}(\mathcal{A})$. □

我们注意到，忽略移位后，$\mathbf{C}\mathbf{C}^b(\mathcal{A})$ 中的一个复形属于某个范畴 $\mathbf{C}^{[1,n]}(\mathcal{A})$，其中 n。

注 2.4. 将 $l(X)$ 视为复形 $X \in \mathbf{C}^b(\mathcal{A})$ 的大小。则满足以下条件：

(1) 对于每个复形 $X \in \mathbf{C}^b(\mathcal{A})$，存在一个整数 t，使得 $X[t] \in \mathbf{C}^{[1,n]}(\mathcal{A})$，其中$n = l(X)$。此外，对于每个 $m \geq n = l(X)$，都有 $\mathcal{F}_m(X[t]) \in \mathcal{X}'_n$，参见命题 2.3。(2) 对于 $\mathbf{C}^b(\mathcal{A})$ 中任意的 X 和 Y，存在一个整数 t 和 $n > 1$，使得 $X[t]$ 和 $Y[t]$ 属于 $\mathbf{C}^{[1,n]}(\mathcal{A})$。此外，以下同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}^{\equiv m}(\mathcal{A})}(\mathcal{F}_m(X[t]), \mathcal{F}_m(Y[t])) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}^{[1,n]}(\mathcal{A})}(X[t], Y[t]) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}^b(\mathcal{A})}(X, Y)$$

由命题 2.3 中给出的等价以及平移函子 $[-]: \mathbf{C}^b(\mathcal{A}) \to \mathbf{C}^b(\mathcal{A})$ 是范畴等价这一事实可得。

一般来说，对于有界复形，我们将证明压缩函子保持不可分解复形。

首先，我们引入以下记号。

记号 2.5. 我们固定一个 $m > 0$ 和一个 $n > 1$。我们用 w 表示满足 $w = \min\{s \geq 1, \text{ 的正整数，使得 } ms \geq n\}$。我们注意到存在一个整数 $l \geq 0$，使得 $mw = n + l$。

现在，我们汇总一些关于压缩函子的事实。

引理 2.6。对于 $m \geq 1$ 和 $X \in \mathbf{C}^{[1,n]}(\mathcal{A})$，以下条件成立。

(1) $\mathcal{F}_{mw}(X) = \oplus_{j\equiv_w 0} X[mj] = X' \in \mathcal{X}'_{n,mw}$.(2) $m-$周期性复形 $\mathcal{F}_m(X)$ 分解为有限个 $mw-$周期性复形，如下

$$\mathcal{F}_m(X) = \oplus_{j\in[0,w-1]} \mathcal{F}_{mw}(X)[mj].$$

证明。若 $s \geq n$，则根据命题2.3，我们知道 $\mathcal{F}_s(X) = \oplus_{j\in\mathbb{Z}} X[sj] = X' \in \mathcal{X}'_s$。特别地，$mw \geq n$ 并且我们有

$$\mathcal{F}_{mw}(X) = \oplus_{j\in\mathbb{Z}} X[mwj] = \oplus_{j\equiv_w 0} X[mj] = X' \in \mathcal{X}'_{n,mw}.$$

对于 $m \geq 1$，我们可以表示为

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_m(X) &= \oplus_{j\in\mathbb{Z}} X[mj] \\ &= \oplus_{j\equiv_w 0} X[mj] \oplus \oplus_{j\equiv_w 1} X[mj] \oplus \cdots \oplus_{j\equiv_w (w-1)} X[mj] \\ &= \oplus_{j\equiv_w 0} X[mj] \oplus \oplus_{j\equiv_w 0} X[mj+1] \oplus \cdots \oplus_{j\equiv_w 0} X[mj+(w-1)]. \end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\mathcal{F}_m(X) = \oplus_{j\in[0,w-1]} X'[mj] = \oplus_{j\in[0,w-1]} \mathcal{F}_{mw}(X)[mj],$$

证明该结果。 □

现在，我们证明函子 $\mathcal{F}_m : \mathbf{C}^b(\mathcal{A}) \to \mathbf{C}^{\equiv m}(\mathcal{A})$ 保持不可分解对象复形。

命题 2.7. 设 $\mathcal{A}$ 是一个 *Krull-Schmidt*范畴。对于任意 $m > 1$，压缩函子 $\mathcal{F}_m$： $\mathbf{C}^b(\mathcal{A}) \to \mathbf{C}^{\equiv m}(\mathcal{A})$ 保持并反映不可分解复形。

证明。若 Z 是 $\mathbf{C}^b(\mathcal{A})$ 中 X 的一个直和项，也就是说，对于某个 L，有 $X = Z \oplus L$ 属于 $\mathbf{C}^b(\mathcal{A})$，则在 $\mathbf{C}_{\equiv m}(\mathcal{A})$ 中，$\mathcal{F}_m(X) = \mathcal{F}_m(Z) \oplus \mathcal{F}_m(L)$，因为压缩函子是可加的。

考虑一个不可分解复形 $X \in \mathbf{C}^b(\mathcal{A})$。不妨设 $X \in \mathbf{C}^{[1,n]}(\mathcal{A})$，其中 $X^1 \neq 0$ 且 $X^n \neq 0$. 。由于 X 在$\mathbf{C}^b(\mathcal{A})$中是不可分解对象，因此在$\mathbf{C}^{[1,n]}(\mathcal{A})$中也是不可分解对象。若 $m \geq n$， 则由命题2.3可得结论。

现在，我们分析 $m < n$. 的情形。根据引理 2.6，该复形

$$\mathcal{F}_m(X) = \oplus_{j\in[0,w-1]}\mathcal{F}_{mw}(X)[mj]$$

是由 mw−周期复形组成的有限和，满足 $mw = n + l$ 其中 $0 \leq l \leq m-1$. 事实上，由于 $w = \min\{s \geq 1, \text{使得} ms \geq n\}$ 则 $mw \geq n$ 并且根据 w 的极小性，我们有 $n > m(w-1)$。因此， $n + l \geq n$ 推出 $l \geq 0$。此外， $n + l - m < n$则 $l < m$ 从而 $l \leq m-1$。我们注意到在这种情况下 $w \geq 2$.

由命题2.3 可知， $\mathcal{F}_{mw}(X)$是 $\mathbf{C}_{\equiv mw}(\mathcal{A})$ 中的不可分解对象，因为 X在 $\mathbf{C}^{[1,n]}(\mathcal{A})$. 因此，对于任意 $j \in [0, w-1]$.，复形 $\mathcal{F}_{mw}(X)[mj]$ 在$\mathbf{C}_{\equiv mw}(\mathcal{A})$ 中也是不可分解对象

我们证明， $\mathcal{F}_m(X)$ 在$\mathbf{C}_{\equiv m}(\mathcal{A})$. 中只有平凡的直和项。事实上，若 Z 是$\mathbf{C}_{\equiv m}(\mathcal{A})$ 中 $\mathcal{F}_m(X)$ 的一个非零直和项，则存在一个截面 $u\colon Z \to \mathcal{F}_m(X)$，它属于 $\mathbf{C}_{\equiv m}(\mathcal{A})$。此外， u 也是 $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ 中的一个截面，同时还是$\mathbf{C}_{\equiv mw}(\mathcal{A})$. 中的一个截面。于是我们推知存在 $J \subseteq [0, w-1]$，使得 $Z = \oplus_{j\in J}\mathcal{F}_{mw}(X)[mj]$ 作为 $mw-$ 周期复形成立。由于 $Z \neq 0$，所以 $J \neq \emptyset$。考虑 $j_0 \in J$.

由于 Z是一个 m−周期复形，我们有 $Z = Z[m(t-j_0)]$, 对每个 $t \in [0, w-1]$.都成立。接着

$$\begin{aligned} Z &= \oplus_{j\in J}\mathcal{F}_{mw}(X)[m(j+t-j_0)] \\ &= \mathcal{F}_{mw}(X)[mt] \oplus \oplus_{j\neq j_0}\mathcal{F}_{mw}(X)[m(j+t-j_0)], \end{aligned}$$

并且 $\mathcal{F}_{mw}(X)[mj]$ 是 Z的一个直和项，对每个 $t \in [0, w-1]$都成立。因此 $Z = \mathcal{F}_m(X)$，这证明了 $\mathcal{F}_m(X)$ 是一个不可分解的 m−周期复形。□

2.2. 压缩函子下的不可约态射。本节余下部分，我们将重点关注不可约态射在压缩函子 $\mathcal{F}_m : \mathbf{C}^b(\mathcal{A}) \to \mathbf{C}_{\equiv m}(\mathcal{A})$ 下的行为。

首先，我们证明压缩函子保持不可约态射。

引理 2.8。设 $f\colon X \to Y$ 是 $\mathbf{C}^b(\mathcal{A})$ 中的一个态射。若 $\mathcal{F}_m(f)\colon \mathcal{F}_m(X) \to \mathcal{F}_m(Y)$ 是 $\mathbf{C}_{\equiv m}(\mathcal{A})$ 中的不可约态射，则 f 是 $\mathbf{C}^b(\mathcal{A})$ 中的不可约态射。

证明。态射 f 既不是截面也不是余截面；否则，根据推论 1.9 (2)，$\mathcal{F}_m(f)$ 是截面或余截面，这与 $\mathcal{F}_m(f)$ 不可约这一事实矛盾。

另一方面，如果 $f = gh$ 属于 $\mathbf{C}^b(\mathcal{A})$，那么 $\mathcal{F}_m(h)$ 是截面，或者 $\mathcal{F}_m(g)$ 是余截面。同样根据推论 1.9 (2)， h 是截面，或者 g 是余截面，由此得证。□

现在，我们确定压缩函子 $\mathcal{F}_m : \mathbf{C}^b(\mathcal{A}) \to \mathbf{C}_{\equiv m}(\mathcal{A})$ 保持不可约态射的条件。

定理 2.9。设 $f\colon X \to Y$ 是 $\mathbf{C}^b(\mathcal{A})$ 中的一个态射。设 $\ell(X \oplus Y)$ 为复形 X 和 Y 的直和项数。对于 $m \geq \ell(X \oplus Y)$，(f) 在$\mathbf{C}_{\equiv m}(\mathcal{A})$ 中不可约，当且仅当 f 在 $\mathbf{C}^b(\mathcal{A})$ 中不可约。

证明。考虑 $m \geq \ell(X \oplus Y)$。根据引理 2.8，若 $\mathcal{F}_m(f)$ 在 $\mathbf{C}_{\equiv m}(\mathcal{A})$ 中不可约，则f 在$\mathbf{C}^b(\mathcal{A})$ 中不可约。

考虑 $f: X \to Y$ 是$\mathbf{C}^b(\mathcal{A})$中的不可约态射。首先，我们证明 $f: X \to Y$ 是$\mathbf{C}^{[1,m]}(\mathcal{A})$中的态射且 $m = \ell(X \oplus Y)$。

如果 $f: X \to Y$ 在 $\mathbf{C}^b(\mathcal{A})$ 中不可约，那么它既不是截面，也不是收缩。由推论 1.9 (2)，可知 $\mathcal{F}_m(f): \mathcal{F}_m(X) \to \mathcal{F}_m(Y)$ 也既不是截面，也不是收缩。

注意到，$\ell(X) \leq \ell(X \oplus Y) \leq m$ 以及 $\ell(Y) \leq \ell(X \oplus Y) \leq m.$。由命题 2.3 可得 $\mathcal{F}_m(X) = X' \in \mathcal{X}'_m$ 和 $\mathcal{F}_m(Y) = Y' \in \mathcal{X}'_m$。

假设 $\mathcal{F}_m(f)$ 经过一个复形 Z 中 $\mathbf{C}_{\equiv m}(\mathcal{A})$。那么我们有以下交换图

$$\begin{array}{ccccccccccc}
X' & & X^1 & \xrightarrow{d^1_X} & X^2 & \xrightarrow{d^2_X} & \cdots & \longrightarrow & X^m & \xrightarrow{0} & X^1 \\
\downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle g^1} & & \downarrow{\scriptstyle g^2} & & & & \downarrow{\scriptstyle g^m} & & \downarrow{\scriptstyle g^1} \\
Z & & Z^1 & \xrightarrow{d^1_Z} & Z^2 & \xrightarrow{d^2_Z} & \cdots & \longrightarrow & Z^m & \xrightarrow{d^m_Z} & Z^1 \\
\downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle h^1} & & \downarrow{\scriptstyle h^2} & & & & \downarrow{\scriptstyle h^m} & & \downarrow{\scriptstyle h^1} \\
Y' & & Y^1 & \xrightarrow{d^1_Y} & Y^2 & \xrightarrow{d^2_Y} & \cdots & \longrightarrow & Y^m & \longrightarrow & Y^1
\end{array}$$

从而在 $\mathbf{C}^b(\mathcal{A})$ 中诱导出如下交换图。

$$\begin{array}{ccccccccccc}
X & & 0 & \longrightarrow & X^1 & \xrightarrow{d^1_X} & X^2 & \xrightarrow{d^2_X} & \cdots & \longrightarrow & X^m & \xrightarrow{0} & 0 \\
\downarrow{\scriptstyle \widetilde{g}} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g^1} & & \downarrow{\scriptstyle g^2} & & & & \downarrow{\scriptstyle g^m} & & \downarrow \\
Z & & Z^m & \xrightarrow{d^m_Z} & Z^1 & \xrightarrow{d^1_Z} & Z^2 & \xrightarrow{d^2_Z} & \cdots & \longrightarrow & Z^m & \xrightarrow{d^m_Z} & Z^1 \\
\downarrow{\scriptstyle \widetilde{h}} & & \downarrow{\scriptstyle 0} & & \downarrow{\scriptstyle h^1} & & \downarrow{\scriptstyle h^2} & & & & \downarrow{\scriptstyle h^m} & & \downarrow{\scriptstyle h^1} \\
Y & & 0 & \longrightarrow & Y^1 & \xrightarrow{d^1_Y} & Y^2 & \xrightarrow{d^2_Y} & \cdots & \longrightarrow & Y^m & \xrightarrow{0} & 0
\end{array}$$

根据假设，f 在$\mathbf{C}^b(\mathcal{A})$中是不可约的。因此，$\widetilde{g}$ 是一个截面，或 $\widetilde{h}$ 是一个余截面。若$\widetilde{}$中 $\widetilde{g}$ 是一个截面，则由推论 1.9 (2) 可得，g 是一个截面。类似地，若 h 是一个余截面，则同样由推论 1.9 (2) 可得，h 也是如此。因此，$\mathcal{F}_m(f)$是不可约的，正如我们所要证明的。

现在，我们分析 $f: X \to Y$ 是 $\mathbf{C}^{[1,m]}(\mathcal{A})$ 中的一个态射且 $m > \ell(X \oplus Y)$。假设 $\ell(X \oplus Y) = r.$

已知 $\mathbf{C}^{[1,r]}(\mathcal{A})$ 是 $\mathbf{C}^{[1,m]}(\mathcal{A})$ 的满子范畴 $\subset \mathbf{C}^b(\mathcal{A})$，那么 $\mathbf{C}^{[1,r]}(\mathcal{A})$ 中的每个态射$f: X \to Y$ 都可以视为 $\mathbf{C}^{[1,m]}(\mathcal{A})$ 中的一个态射。因此，根据上述论证，$\mathcal{F}_m(f): \mathcal{F}_m(X) \to \mathcal{F}_m(Y)$ 在 $\mathbf{C}_{\equiv m}(\mathcal{A})$ 中不可约，当且仅当$f: X \to Y$在$\mathbf{C}^b(\mathcal{A})$ 中不可约。

最后，我们分析一般情形，即当 $f: X \to Y$ 是 $\mathbf{C}^b(\mathcal{A})$.中的一个不可约态射时。

我们知道存在一个区间 $[a, b]$ 使得 $X \oplus Y \in \mathbf{C}^{[a,b]}(\mathcal{A})$. 那么 $(X \oplus Y)[a] \in \mathbf{C}^{[1,n]}(\mathcal{A})$，且 $f[a]$ 是$\mathbf{C}^{[1,n]}(\mathcal{A})$中的一个态射，满足 $n = b - a = \ell(X \oplus Y)$.

我们注意到，f 是 $\mathbf{C}^b(\mathcal{A})$ 中的不可约态射，当且仅当 $f[a]$ 也是如此。此外，由于 $\mathbf{C}_{\equiv m}(\mathcal{A})$ 对移位封闭，因此 $\mathcal{F}_m(f[a])$ 在 $\mathbf{C}_{\equiv m}(\mathcal{A})$ 中是不可约的，当且仅当 $\mathcal{F}_m(f)$ 也是不可约的。因此，若 $m \geq \ell(X \oplus Y)$，则我们可以沿用前面几种情形中的论证得出结论。□

注记 2.10。 设 $f: X \to Y$ 为 $\mathbf{C}^{[1,n]}(\mathcal{A})$ 中的一个态射。 我们注意到， f 在$\mathbf{C}^b(\mathcal{A})$ 中不可约，当且仅当 f 在$\mathbf{C}^{[0,n+1]}(\mathcal{A})$ 中不可约。 事实上，如果 f 在$\mathbf{C}^b(\mathcal{A})$ 中不可约，那么它在任意区间内都是不可约的。

现在，若要证明 f 在 $\mathbf{C}^{[0,n+1]}(\mathcal{A})$中是不可约的，只需关注区间 $[0, n+1]$，正如我们从下图中所看到的那样

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
X & & 0 & \longrightarrow & X^1 & \xrightarrow{d^1_X} & X^2 & \xrightarrow{d^2_X} & \cdots & \longrightarrow & X^n & \xrightarrow{0} & 0 \\
\downarrow{\scriptstyle \widetilde{g}} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g^1} & & \downarrow{\scriptstyle g^2} & & & & \downarrow{\scriptstyle g^n} & & \downarrow \\
Z & & Z^0 & \xrightarrow{d^0_Z} & Z^1 & \xrightarrow{d^1_Z} & Z^2 & \xrightarrow{d^2_Z} & \cdots & \longrightarrow & Z^n & \xrightarrow{d^n_Z} & Z^{n+1} \\
\downarrow{\scriptstyle \widetilde{h}} & & \downarrow{\scriptstyle 0} & & \downarrow{\scriptstyle h^1} & & \downarrow{\scriptstyle h^2} & & & & \downarrow{\scriptstyle h^n} & & \downarrow{\scriptstyle h^1} \\
Y & & 0 & \longrightarrow & Y^1 & \xrightarrow{d^1_Y} & Y^2 & \xrightarrow{d^2_Y} & \cdots & \longrightarrow & Y^n & \xrightarrow{0} & 0.
\end{array}$$

下面，我们将 [7]中关于一个复形何时可以向左或向右延拓的定义推广到任意加性范畴 $\mathcal{A}$。

定义 2.11. 设 $X = (X^i, d^i)$ 是 $\mathbf{C}^{[1,n]}(\mathcal{A})$中的一个复形。若 d^1 不是单态射，则称 X 可向左延拓；若存在一个对象 $X'^{n+1} \in \mathcal{A}$ 和一个非零态射 $d'^n: X^n \to X'^{n+1}$，使得 $d'^n d^{n-1} = 0$，则称 X 可向右延拓。

现在，我们给出这个有用的结果。

定理 2.12。 设 $f:\ X \to Y$ 是 $\mathbf{C}^{[1,n]}(\mathcal{A})$ 中的一个态射，其中 X 不能向左延拓，且 Y 不能向右延拓。若 $m \geq n$，则以下条件等价。

(1) f 在$\mathbf{C}^b(\mathcal{A})$中是不可约的。(2) f 在$\mathbf{C}^{[0,n+1]}(\mathcal{A})$中是不可约的。(3) $\mathcal{F}_m(f)$在$\mathbf{C}^{\equiv m}(\mathcal{A})$中是不可约的。(4) f 在$\mathbf{C}^{[1,n]}(\mathcal{A})$中是不可约的。

证明。 由定理 2.9 和注 2.10 可得前两个陈述之间的等价。此外，若 f 在 $\mathbf{C}^b(\mathcal{A})$ 中不可约，则 (4) 成立。我们注意到，要证明陈述 (1) 与陈述 (4) 等价，并不需要 $m \geq n$ 的假设。

现在，如果 f 在 $\mathbf{C}^{[1,n]}(\mathcal{A})$ 中不可约，并且通过一个复形 $Z \in \mathbf{C}^{[0,n+1]}(\mathcal{A})$ 分解，那么我们有如下情形:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
X & & 0 & \longrightarrow & X^1 & \xrightarrow{d^1_X} & X^2 & \xrightarrow{d^2_X} & \cdots & \longrightarrow & X^n & \xrightarrow{0} & 0 \\
\downarrow{\scriptstyle \widetilde{g}} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g^1} & & \downarrow{\scriptstyle g^2} & & & & \downarrow{\scriptstyle g^n} & & \downarrow \\
Z & & Z^0 & \xrightarrow{d^0_Z} & Z^1 & \xrightarrow{d^1_Z} & Z^2 & \xrightarrow{d^2_Z} & \cdots & \longrightarrow & Z^n & \xrightarrow{d^n_Z} & Z^{n+1} \\
\downarrow{\scriptstyle \widetilde{h}} & & \downarrow{\scriptstyle 0} & & \downarrow{\scriptstyle h^1} & & \downarrow{\scriptstyle h^2} & & & & \downarrow{\scriptstyle h^n} & & \downarrow{\scriptstyle h^1} \\
Y & & 0 & \longrightarrow & Y^1 & \xrightarrow{d^1_Y} & Y^2 & \xrightarrow{d^2_Y} & \cdots & \longrightarrow & Y^n & \xrightarrow{0} & 0
\end{array}$$

其中 $\{g^1, g^2, \ldots, g^n\}$ 是一个截面，或者 $\{h^1, h^2, \ldots, h^n\}$ 是$\mathbf{C}^{[1,n]}(\mathcal{A})$中的一个缩回。 .

在前一种情况下，由于 d^1_X 是一个单态射，因此我们得到 $\widetilde{g}$ 是$\mathbf{C}^{[0,n+1]}(\mathcal{A})$。在后一种情况下，我们考虑 $h^n:\ Y^n \to Z^n$ 使得 $h^n h^n = \overline{id}$.的态射。于是我们有 $d^n_Z h^n = 0$。事实上，否则 $d^n_Z h^n d^{n-1}_Y = 0$，因此 $\overline{Y}$可以

˜向右延拓会与假设矛盾。因此，我们得出结论： h是 $\mathbf{C}^{[0,n+1]}(\mathcal{A})$
. □中的一个收缩。

2.3.压缩函子的稠密性。在本节中，我们证明稠密性是稳定范畴下的不变量。如果 $\mathcal{A}$ 是一个加性范畴，根据 [23, 推论 3.4] ，我们知道 $\mathbf{C}^{\equiv m}(\mathcal{A})$ 是一个 Frobenius 范畴。

现在，我们给出 $m-$周期对象中的投射-内射对象，这些对象最早由 [6] 和 [27] 针对特殊情形进行了研究。该结果的证明源自 [23], 中的引理 3.6，其证明与 D. Happel 在 [16]中所作的证明类似。

命题 2.13. 设 $\mathcal{A}$ 是一个加性范畴，且 $m \geq 2$。在带有分次分裂正合结构的 *Frobenius* 范畴 $\mathbf{C}^{\equiv m}(\mathcal{A})$ 中，投射-内射对象在移位意义下恰为$m-$周期对象 K_M：
$\cdots \to M \overset{id_M}{\to} M \overset{0}{\to} 0 \overset{m-2}{\to} 0 \to M \overset{id_M}{\to} M \to \ldots$ 由每个对象$M \in \mathcal{A}$.给出

因此我们得到以下结果。

定理 2.14. 设 $\mathcal{A}$ 是一个加性范畴，且 $m \geq 2$.
压缩函子 $\mathcal{F}_m$： $\mathbf{C}^b(\mathcal{A}) \to \mathbf{C}^{\equiv m}(\mathcal{A})$ 稠密，当且仅当压缩函子 $\mathcal{F}_m$： $\mathbf{C}^b(\mathcal{A}) \to \mathbf{C}^{\equiv m}(\mathcal{A})$ 也稠密。

证明。 由命题 2.13 和命题 2.3 可知，若 $M \in \mathcal{A}$ 和 $X : M \overset{id_M}{\to} M \in \mathbf{C}^{[1,2]}(\mathcal{A})$，则 $\mathcal{F}_m(X) = K_M$， 并且 $\mathcal{F}_m(X[i]) = K_M[i]$ 对于 $i = 0, \ldots, m-1$成立。于是，带有分次分裂正合结构的 Frobenius 范畴$\mathbf{C}^{\equiv m}(\mathcal{A})$中的投射-内射对象，与带有分次分裂正合结构的 Frobenius 范畴 $\mathbf{C}^b(\mathcal{A})$中的投射-内射对象相对应。由此得出结论。 □

3. The Galois $G-$covering $\mathcal{F}_m$

设 $\mathcal{A}$ 是一个加性 Hom 有限 Krull-Schmidt范畴。在本截面中， $\mathcal{A}$ 始终满足以下条件：

存在一个正整数 $n \geq 2$ 使得 $\mathbf{C}^b(\mathcal{A})$ 中的每个不可分解对象都是 $\mathbf{C}^{[1,n]}(\mathcal{A})$ 中某个不可分解对象的移位。

考虑压缩函子 $\mathcal{F}_m$： $\mathbf{C}^b(\mathcal{A}) \to \mathbf{C}^{\equiv m}(\mathcal{A})$。

ˆ定理 3.1。 对于每个不可分解对象 $Z \in \mathbf{C}^{\equiv m}(\mathcal{A})$ 存在一个不可分解对象 $Z \in \widehat{\mathbf{C}}^{[1,n]}(\mathcal{A})$ 以及一个整数 $t \in \{0, \ldots, m-1\}$ 使得 $Z = \mathcal{F}_m(Z[t])$。
特别地，我们有 $\mathcal{F}_m$ 是稠密的。

证明。首先，考虑 $m \geq n$ 和 Z 中的一个不可分解复形$\mathbf{C}^{\equiv m}(\mathcal{A})$。如果对于某个整数 $i \in \{1, \ldots, m\}$，我们有 $d^i_Z = 0$，那么我们将 i视为满足 $Z^i \neq 0$ 且 $d^i_Z = 0$.的最大整数

现在，考虑这个复形。

$$\widehat{Z} : Z^{i+1} \to \cdots \to Z^m \to Z^1 \to \cdots \to Z^i \in \mathbf{C}_{[1,m]}(\mathcal{A})$$

ˆ因此，根据命题2.3， $Z = \mathcal{F}_m(Z[t])$，其中 $t = m - i \in \{0, \ldots, m-1\}$. 由 Z 是不可分解对象这一事实可知， $\widehat{Z}$ 在 $\mathbf{C}^b(\mathcal{A})$ 中是不可分解对象。然后根据$\mathbf{C}^b(\mathcal{A})$中对象的性质，我们有 $\widehat{Z} \in \mathbf{C}^{[1,n]}(\mathcal{A})$, 在移位意义下。

现在我们将看到，不可能存在一个不可分解复形 $Z \in \mathbf{C}^{\equiv m}(\mathcal{A})$，使得所有微分 d^i_Z 都非零。

假设存在如下的 m–周期复形 Z：

$$Z : \cdots \longrightarrow Z^1 \xrightarrow{d_Z^1} Z^2 \xrightarrow{d_Z^2} \cdots \longrightarrow Z^m \xrightarrow{d_Z^m} Z^1 \xrightarrow{d_Z^1} \cdots$$

其中所有微分都非零。

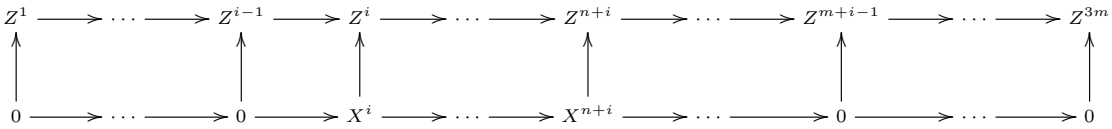
考虑如下的 $\widehat{Z} \in \mathbf{C}^b(\mathcal{A})$ 中的复形：

$\widehat{Z}$:

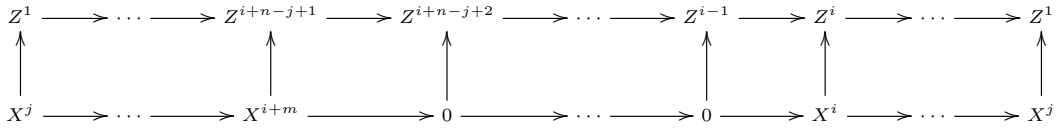
$0 \to Z^1 \xrightarrow{d_Z^1} Z^2 \xrightarrow{d_Z^2} \cdots \longrightarrow Z^m \xrightarrow{d_Z^m} Z^{m+1} \xrightarrow{d_Z^1} \cdots \longrightarrow Z^{2m} \longrightarrow Z^1 \xrightarrow{d_Z^{2m+1}} \cdots \longrightarrow Z^{3m} \to 0$其中 $Z^{2m+i} = Z^{m+i} = Z^i$对于 $i = 1, 2, \cdots, m$。由于 $\widehat{Z}$具有 $3m$非零项，且 $3m \geq 3n \geq 2n+2 > n$因此 $\widehat{Z}$不是$\mathbf{C}^b(\mathcal{A})$中的不可分解复形。此外，我们$\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$必定有一个不可分解直和项 X，它属于 Z，其第一项为零，且 $3m$–项也为零，如下所示：

$$\widehat{X} : 0 \to 0 \to \cdots X^i \xrightarrow{d_X^i} X^{i+1} \xrightarrow{d_X^{i+1}} \cdots \longrightarrow X^{i+n} \xrightarrow{d_X^{i+n}} 0 \cdots$$

其中有 $1 < i < n+2 \leq 2n \leq 2m < 3m - n$ 和 $X^i \neq 0$。那么存在一个截面。



在 $\mathbf{C}^b(\mathcal{A})$中，正如下面所示，我们得到 $\mathcal{F}_m(\widehat{X})$ 是 Z 在 $\mathbf{C}_{\equiv m}(\mathcal{A})$ 中的一个直和项。



这与 Z 是不可分解对象这一事实矛盾。因此，我们证明存在某个 $i \in \{1, \ldots, m\}$，使得 $d_Z^i = 0$。因此，只要 $m \geq n$，我们就得到函子 $\mathcal{F}_m$ 是稠密的。

现在，假设 $m < n$ 并考虑 w 满足 $w = \min\{s \geq 1, \text{的正整数 } ms \geq n\}$.

根据上述论证并利用 $mw \geq n$, 我们有 $\mathcal{F}_{mw} : \mathbf{C}^b(\mathcal{A}) \to \mathbf{C}_{\equiv mw}(\mathcal{A})$ 是稠密的。考虑 $Y \in \mathbf{C}_{\equiv m}(\mathcal{A})$，一个不可分解对象 m–复形。注意到每个 m–周期复形实际上都是一个 mw–周期复形。因此，存在 $Z \in \mathbf{C}^b(\mathcal{A})$，使得 $Y = \mathcal{F}_{mw}(Z)$. 由引理 2.6，我们有 $\mathcal{F}_m(Z) = \oplus_{j \in [0, w-1]} \mathcal{F}_{mw}(Z)[mj]$。于是$Y$ 是$\mathbf{C}^b(\mathcal{A})$ 中 $\mathcal{F}_m(Z)$ 的直和项.

考虑 $Z = \oplus_{j \in L} Z_j$ Z 在 $\mathbf{C}^b(\mathcal{A})$. 中的不可分解分解。利用 $\mathcal{F}_m$ 是可加的，可得 $\mathcal{F}_m(Z) = \oplus_{j \in L} \mathcal{F}_m(Z_j)$. 此外，对于每个 $j \in L$，我们知道 $\mathcal{F}_m(Z_j)$ 是 $\mathbf{C}_{\equiv m}(\mathcal{A})$ 中的不可分解对象，这是由命题 2.7 得出的。于是，由于 $\mathcal{A}$ 是 Krull-Schmidt范畴，存在某个 $j \in L$，使得 $Y = \mathcal{F}_m(Z_j)$。利用 Y 是 m–周期的，以及 $\mathbf{C}^b(\mathcal{A})$ 中不可分解复形的性质，我们推知存在一个 $\widehat{Z_j} \in \mathbf{C}^{[1,n]}(\mathcal{A})$，使得 $\frown Z_j = Z_j[t]$，其中 $t \in \{0, \ldots, m-1\}$. 是某个对象。因此得证。□

现在，我们可以证明， $\mathcal{F}_m$ 是一个伽罗瓦 G–覆盖，对于每个 m.

定理 3.2。压缩函子 $\mathcal{F}_m$ ： $\mathbf{C}^b$（$\mathcal{A}$） $\to \mathbf{C}_{\equiv m}$（$\mathcal{A}$） 是一个伽罗瓦 $G-$覆盖，按照 [3]，的意义，对每个 m.

证明。 函子 $\mathcal{F}_m$ ： $\mathbf{C}^b(\mathcal{A}) \to \mathbf{C}_{\equiv m}(\mathcal{A})$ 几乎稠密，因为根据定理 3.1，我们有函子 $\mathcal{F}_m$ 是稠密的。

另一方面，若 $X \in \mathbf{C}^b(\mathcal{A})$ 是不可分解对象，那么根据命题 2.7，我们知道 $\mathcal{F}_m(X)$ 在 $\mathbf{C}_{\equiv m}(\mathcal{A})$ 中是不可分解对象。

考虑 X，$Y \in \mathcal{A}$ 在 $\mathbf{C}^b(\mathcal{A})$ 中满足 $\mathcal{F}_m(X) = \mathcal{F}_m(Y)$ 的不可分解复形。如果 X 是 $\mathbf{C}^b(\mathcal{A})$ 中的一个不可分解复形，那么 $X[mj]$ 也同样是。由于 $\mathcal{F}_m(X) = \mathcal{F}_m(Y)$，因此我们有

$$\mathcal{F}_m(X) = \oplus_{j\in\mathbb{Z}} X[mj] = \oplus_{j\in\mathbb{Z}} Y[mj] = \mathcal{F}_m(Y).$$

于是存在整数 j_0和 j_1，使得 $X[mj_0] = Y[mj_1]$。因此， $X = Y[m(j_0 - j_1]$，从而证明了 $\mathcal{F}_m$ 是一个伽罗瓦 G-覆盖。□

作为定理 3.2 的直接推论，我们得到以下推论。

推论 3.3。 函子 $\mathcal{F}_m$ 在集合 $\mathrm{Ind}(\mathbf{C}_{\equiv m}(\mathcal{A}))$ 与$\cup_{k=0}^{m-1} \mathrm{Ind}(\mathbf{C}^{[1,n]}(\mathcal{A})[k])$之间给出了一个双射。

证明。 该双射源于以下事实：当我们取区间
$[0, m-1]$. □内的一个移位时，只有一个不可分解对象

我们回顾对于域上的有限维代数， [24], 中给出的强全局维数定义。

定义 3.4. 设 A 是域上的有限维代数。 A 的强全局维数记为 $s.gl.$维数 A，定义为 上确界$\{\ell(X) \mid X \in K^b$(投射 A) 是不可分解对象$\}$.

根据前面的结果，我们可以陈述下一个关于有限维 k-代数A 的结果，其中该代数具有有限强全局维数，因为 $\mathcal{A} = \mathsf{proj}\, A$ 满足第 3 节开头所述的性质。

一般而言，对于具有 $s.gl.\dim A = \infty$ 压缩函子$\mathcal{F}_m$： $\mathbf{C}^b$（$\mathsf{proj}\ A$） $\to \mathbf{C}_{\equiv m}$（$\mathsf{proj}\, A$）的有限维 k-代数，该压缩函子并非稠密，正如我们在 [26, 命题 5.4 和定理 5.5] 中所见。

定理 3.5. 若 A 是域 k 上的有限维 k-代数，且 $s.gl.$维数 $A = \nu$，则以下陈述成立。

(1) 压缩函子 $\mathcal{F}_m : \mathbf{C}^b(\mathrm{proj}\, A) \to \mathbf{C}_{\equiv m}(\mathrm{proj}\, A)$ 是意义下的 *Galois* G-覆盖。 [3](2) 集合 $\mathrm{Ind}(\mathbf{C}_{\equiv m}(\mathrm{proj}\, A))$ 与 $\bigcup_{k=0}^{m-1} \mathrm{Ind}(\mathbf{C}^{[1,\nu+1]}(\mathrm{proj}\, A)[k])$ 之间存在一一对应。

3.1. **对偶化** $k-$**范畴**。 对偶化 $k-$范畴由 M. Auslander 和 I. Reiten 于 [2] 提出，是 artin k-代数的一种推广。

设 $\mathcal{A}$ 是一个 Hom-有限的 Krull-Schmidt k-范畴。我们用 $\mathsf{Mod}\,\mathcal{A}$ 表示反变函子 F: $\mathcal{A} \to \mathsf{Mod}\ k$所构成的范畴，用 $\mathsf{mod}\ \mathcal{A}$表示 $\mathsf{Mod}\,\mathcal{A}$的满子范畴，其对象为有限表示函子。

若有限表示对象与 $\mathsf{Mod}\,\mathcal{A}$ 中有限余表示对象相同，则称范畴 $\mathcal{A}$ 为对偶化范畴，参见 [2] 和 [13]。若 $\mathcal{A}$ 是对偶化范畴，则 $\mathsf{mod}\ \mathcal{A}$ 是一个具有足够投射对象的阿贝尔范畴。因此，范畴 $\mathbf{C}^b(\mathsf{mod}\,\mathcal{A})$ 也是阿贝尔范畴。

由 [5] 可知，若 $\mathcal{A}$ 是对偶化范畴，则范畴 $\mathbf{C}^b(\operatorname{mod}\mathcal{A})$ 也具有性质，而 $\mathbf{C}^b(\operatorname{mod}\mathcal{A})$ 上通常的正合结构 $\mathcal{F}$ 存在几乎分裂序列。此外，$\mathbf{C}^{[1,n]}(\mathcal{A})$ 存在几乎分裂序列。若 $\operatorname{mod}\mathcal{A}$ 具有有限整体维数，则 $\mathbf{C}^b(\mathcal{A})$ 存在几乎分裂序列，参见例如 [15]。

在以下内容中，$\mathcal{A}$ 将始终表示一个 Hom-有限的 Krull–Schmidt k–范畴，并满足存在一个正整数 $n \geq 2$，使得 $\mathbf{C}^b(\mathcal{A})$ 中的每个不可分解复形都是 $\mathbf{C}^{[1,n]}(\mathcal{A})$ 中某个不可分解复形的移位。

定理 3.6. 设 $\mathcal{A}$ 是一个对偶化范畴，且 $\operatorname{mod}\mathcal{A}$ 具有有限整体维数。则 $\mathbf{C}_{\equiv m}(\mathcal{A})$具有几乎分裂序列。

证明。由定理 3.2 可知，$\mathcal{F}_m$ 是一个伽罗瓦 G-覆盖。此外，根据 [15, 推论2]，若 $\operatorname{mod}\mathcal{A}$ 具有有限整体维数，则 $\mathbf{C}^b(\mathcal{A})$ 具有几乎分裂序列。

根据 [3, 定理 3.7]，我们知道，$\mathbf{C}^b(\mathcal{A})$ 中的短正合列 η 是几乎分裂序列，当且仅当 $\mathcal{F}_m(\eta)$ 是$\mathbf{C}_{\equiv m}(\mathcal{A})$ 中的几乎分裂序列。□

注 3.7。在 [15, 推论 5], 中，作者证明了，如果 $\mathcal{A}$ 是对偶化的，且模$\mathcal{A}$具有有限整体维数，那么$\mathbf{C}^b_{\equiv m}(\mathcal{A})$ 具有几乎分裂序列。这里$\mathbf{C}^b_{\equiv m}(\mathcal{A})$ 表示$\mathbf{C}_{\equiv m}(\mathcal{A})$ 的最小满子范畴，其中包含所有茎 m–周期复形，并且在有限扩张下闭合。

上述作者证明了，当 $\operatorname{mod}\mathcal{A}$ 的全局维数小于或等于 1 时，范畴 $\mathbf{C}_{\equiv m}(\mathcal{A})$ 和 $\mathbf{C}^b_{\equiv m}(\mathcal{A})$ 相同。

由 [5], 可知，只要 $\mathcal{A}$ 是对偶的，$\mathbf{C}^{[1,n]}(\mathcal{A})$, 中就存在几乎分裂列。下一个结果表明，这些列给出了 $\mathbf{C}_{\equiv m}(\mathcal{A})$. 中的几乎分裂列。

定理 3.8。设 $\mathcal{A}$ 为一个对偶 k–范畴，使得 $mod\,\mathcal{A}$ 具有有限整体维数。那么，$\mathbf{C}_{\equiv m}$（$\mathcal{A}$）中的每个几乎分裂序列，都是$\mathbf{C}^{[1,n]}$（$\mathcal{A}$）中一个几乎分裂序列的移位在 $\mathcal{F}_m$ 下的像。

证明。设 $\alpha: A' \xrightarrow{f} B' \xrightarrow{g} C'$ 是 $\mathbf{C}_{\equiv m}(\mathcal{A})$ 中的一个几乎分裂序列。由定理 3.1，存在一个复形 $X \in \mathbf{C}^{[1,n]}(\mathcal{A})$，使得 $\mathcal{F}_m(X[t]) = A'$，其中 $t.$为某个整数

根据命题 2.13，由于 A' 不是投射-内射的，因此 X 也不是。由定理 3.2，我们知道函子 $\mathcal{F}_m$:$\mathbf{C}^b(\mathcal{A}) \to \mathbf{C}_{\equiv m}(\mathcal{A})$ 是一个伽罗瓦 G-覆盖，因此我们可以考虑 $\eta: X \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{l} Z$，这是$\mathbf{C}^b(\mathcal{A})$ 中以 X 开始的一个几乎分裂序列，使得$\mathcal{F}_m(\eta[t]) = \alpha$。注意，我们可以考虑移位，使得 $X^1 \neq 0.$。于是 $X^{n+1} = 0$，因为 X 是不可分解对象。因此 $X \in \mathbf{C}^{[1,n]}(\mathcal{A})$。

现在，我们证明 η 实际上是$\mathbf{C}^{[1,n]}(\mathcal{A})$中的一个几乎分裂序列。

首先，我们断言 $Y^{n+1} = 0.$。事实上，考虑 f： $X \to Y = \oplus_{i=1}^{r} Y_i$。我们注意到，若 $Y^{n+1} \neq 0$，则 Y有一个不可分解直和项，即 Y_t，使得$Y_t^{n+1} \neq 0$，且 f_t： $X \to Y_t$ 是不可分解复形之间的一个不可约态射。我们指出，Y_t 不是投射-内射对象，否则 $Y_t = J_n(P)$，进而 $f = 0$，因为$id_P f^n = 0.$。于是，映射锥 C_{f_t}是一个不可分解复形。因此，这就产生了矛盾，因为 $C^1_{f_t} = X[1]^1 \oplus Y_t^1 = X^2 \neq 0$ 且 $C^{n+1}_{f_t} = X[1]^{n+1} \oplus Y_t^{n+1} \neq 0.$。由此我们得出结论: $Y^{n+1} = 0.$

由 $Y^{n+1} = X^{n+1} \oplus Z^{n+1} = Z^{n+1}$ 可得 $Z^{n+1} = 0$。

因此，我们只需证明 Y 的长度至多为 n，从而可以得出X，Y，$Z \in \mathbf{C}^{[1,n]}(\mathcal{A})$。假设 $Y^0 \neq 0$, 则存在 Y的一个不可分解直和项 Y_r，满足 $Y_r^0 \neq 0$，并且还存在一个不可约态射 f_r: $X \to Y_r$。再次，由于

一个不可分解复形至多有 n 个非零项，并且 $Y_r^0 \neq 0$ 我们有 $Y_r^n = 0$。现在，由于 f_r 是一个不可约态射且 $X^0 = 0$，根据 [14, 推论 2，命题3] ，不可约态射 f_r 是一个分裂单态射，因此 $X^n = 0$。

现在，若情况如此，则有 $Y^0 = Z^0 \neq 0$ ，这意味着 $Z^n = 0$ ，因此 $Y^n = 0$ ，因为Z是一个不可分解对象。因此，若 $Y^{-1} = 0$ ，我们可以通过将复形向左移一项来选择另一个区间 $[1, n]$ ，于是结论成立。若 $Y^{-1} \neq 0$，则重复上述论证，得到 X^{n-1}，Y^{n-1} 和 Z^{n-1} 均为零，然后继续分析 $Y^{-2} = 0$ 是否成立。重复这一论证，直到存在 $i < n$ 使得 $Y^{-i} = 0$。注意，由于$X^1 \neq 0$ ，这一过程会停止。选取恰当的区间，我们得到 X，Y，$Z \in \mathbf{C}^{[1,n]}(\mathcal{A})$。□

4. The Auslander-Reiten quiver of $\mathbf{C}_{\equiv m}(\operatorname{proj} A)$ where the strong global dimension of A is finite.

在整个本截面中，我们考虑 A 一个有限维 k-代数，其定义在域 k 上，并且具有 $s.gl.$维数 $A = \nu < \infty$。

由 [2, 命题 2.5], 可知，proj A 是对偶化的。

本节旨在展示如何构建 $\mathbf{C}_{\equiv m}$(projA)的 Auslander-Reiten箭图。根据 [8, 定理4.1], 中的结果，我们将给出构造该箭图的两种方法。首先应用压缩函子 $\mathcal{F}_m$ ，其次应用用于获得 $\mathbf{C}^{[1,n]}$(projA) 的 Auslander-Reiten 箭图的相同编织技术。

根据定理 3.5，我们知道，如果 A 是一个有限维的 k-代数，使得 $s.gl.\dim A < \infty$ ，那么 $\mathcal{F}_m : \mathbf{C}^b(\operatorname{proj} A) \to \mathbf{C}_{\equiv m}(\operatorname{proj} A)$，其中 $m \geq 2$是一个伽罗瓦 G-覆盖，其中 G是由 $[m]$生成的循环群。

根据 [3, 命题 3.3], ，如果 $u : X \to Y$ 是 $\mathbf{C}^b(\operatorname{proj} A)$ 中的一个态射，且 X 或 Y 不可分解，那么当且仅当 $\mathcal{F}_m(u)$ 是 $\mathbf{C}_{\equiv m}(\operatorname{proj} A)$ 中的不可约态射时， u 是 $\mathbf{C}^b(\operatorname{proj} A)$ 中的不可约态射。

此外，根据 [3, 命题 3.4] ，如果 $u : X \to Y$ 是 $\mathbf{C}^b(\operatorname{proj} A)$ 中的一个态射，那么当且仅当 $\mathcal{F}_m(u)$ 分别是 $\mathbf{C}_{\equiv m}(\operatorname{proj} A)$ 中的极小左几乎分裂态射或极小右几乎分裂态射时， u 是一个极小左几乎分裂态射或一个极小右几乎分裂态射。

作为 [3, 定理 3.7], 的推论，我们得到关于 $\mathcal{A} = \operatorname{proj} A$ 和 $m \geq 2$ 的以下结果。

定理 4.1。设 A 是一个有限维 k-代数，满足 $s.gl.\dim A = \nu$。序列 η 在 $\mathbf{C}^b(\operatorname{proj} A)$ 中是几乎分裂序列，当且仅当对于任意 $m \geq 2$， $\mathcal{F}_m(\eta)$ 是 $\mathbf{C}_{\equiv m}(\operatorname{proj} A)$ 中的几乎分裂序列。

此外，加性函数可用于构造$\mathbf{C}_{\equiv m}(\operatorname{proj} \mathrm{A})$的 *Auslander-Reiten* 箭图。

证明。 根据 [3, 定理 3.7] ，我们有： η 在$\mathbf{C}^b$(proj A)中是几乎分裂序列，当且仅当对于任意 $m \geq 2$, $\mathcal{F}_m(\eta)$ 在$\mathbf{C}_{\equiv m}$(proj A)中是几乎分裂序列。

另一方面， $\mathcal{F}_m : \mathbf{C}^b(\operatorname{proj} A) \to \mathbf{C}_{\equiv m}(\operatorname{proj} A)$ 是一个 Galois G-覆盖，其中 G 是由 $[m]$ 生成的循环群。

在复形范畴$\mathbf{C}^b$(proj A)中，正合序列具有如下形式$\eta : X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ ，其中对每个 $i \in \mathbb{Z}$ ，序列 $X^i \xrightarrow{f^i} Y^i \xrightarrow{g^i} Z^i$ 都是正合且分裂的。于是，对每个 $i \in \mathbb{Z}$， $Y^i = X^i \oplus Z^i$。

考虑$\mathbf{C}_{\equiv m}$(proj A)中的几乎分裂序列 $\mathcal{F}_m(\eta) : \mathcal{F}_m(X) \to \mathcal{F}_m(Y) \to \mathcal{F}_m(Z)$。我们需要证明，对于每个 i， $\mathcal{F}_m(Y)^i = \mathcal{F}_m(X)^i \oplus \mathcal{F}_m(Z)^i$。

因此

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_m(X)^i \oplus \mathcal{F}_m(Z)^i &= (\oplus_{t\in\mathbb{Z}} X^{i+tm}) \oplus (\oplus_{t\in\mathbb{Z}} Z^{i+tm}) \\ &= \oplus_{t\in\mathbb{Z}}(X^{i+tm} \oplus Z^{i+tm}) \\ &= \oplus_{t\in\mathbb{Z}} Y^{i+tm} \\ &= \mathcal{F}_m(Y)^i\end{aligned}$$

证明该结果。 □

设 $\mathcal{A} = \text{proj } A$ with A a finite dimensional k-algebra with $s.gl.\dim A = \nu$. Then$\mathcal{A}$ 是一个 Hom-有限的 Krull–Schmidt k–范畴，并且满足：$\mathbf{C}^b(\text{proj } A)$ 中的每个不可分解复形都是 $\mathbf{C}^{[1,\nu+1]}(\text{proj } A)$ 中某个不可分解复形的移位。

由定理 3.8 可得以下结果，它对于构造 $m \geq 2$ 的 $\mathbf{C}_{\equiv m}$(projA) 的 Auslander–Reiten 箭图至关重要。

定理 4.2。 设 A 是一个有限维 k-代数，满足 $s.gl.$维数 $A = \nu$。设 $m \geq 2$。考虑 $\mathcal{F}_m : \mathbf{C}^b(\text{proj } A) \to \mathbf{C}_{\equiv m}(\text{proj } A)$ 这个压缩函子。则每个几乎分裂序列都是 $\mathbf{C}_{\equiv m}(\text{proj } A)$ 中某个几乎分裂序列移位后在 $\mathcal{F}_m$ 下的像，而该几乎分裂序列位于 $\mathbf{C}^{[1,\nu+1]}(\text{proj } A)$中。

现在，我们说明如何构造 $\mathbf{C}_{\equiv m}(\text{proj } A)$ 的 Auslander-Reiten 箭图，前提是我们知道如何构造 $\mathbf{C}^{[1,\nu+1]}(\text{proj } A)$ 的 Auslander-Reiten 箭图。关于如何构造 $\mathbf{C}^{[1,n]}(\text{proj } A)$ 的 Auslander-Reiten 箭图，更多详情请参阅 [9,第 5]节。我们注意到，如果 $\mathbf{C}^{[1,n]}(\text{proj } A)$ 是有限型，那么 [9,第 5] 节给出的技巧使我们能够构造整个箭图。

我们有两种构造$\mathbf{C}_{\equiv m}(\text{proj } A)$的 Auslander-Reiten 箭图的方法。

根据 [7, 定理 4.1] 由于 A 是有限维分段遗传代数，我们知道 $\mathbf{C}^b(\text{proj } A)$中的所有几乎分裂序列，都是包含在子箭图$\Gamma(\Sigma)$ 中、位于截面 Σ 和 $\Sigma[1]$ 之间且包含这两个截面的那些序列。根据 $\Sigma[1]$，我们指的是 Σ的一个移位。更准确地说，我们可以在范畴 $\mathbf{C}^{[1,n]}(\text{proj } A)$ 的箭图中找到这种情形。特别地，在一个范畴 $\mathbf{C}^{[1,\nu+1]}(\text{proj } A)$ 中，其中 $s.gl.\dim A = \nu$。

构造 $\mathbf{C}_{\equiv m}(\text{proj } A)$ 的 Auslander-Reiten 箭图的第一种方法，可以按以下步骤进行。

(1) 构造 $\mathbf{C}^{[1,\nu+1]}(\text{proj } A)$ 的 Auslander-Reiten 箭图。(2) 考虑 $\mathbf{C}^{[1,\nu+1]}(\text{proj } A)$ 中的截面 Σ 和子箭图 $\Gamma(\Sigma)$。(3) 由于 $\mathcal{F}_m(X) = \mathcal{F}_m(X[m])$，因此只需考虑 $\mathbf{C}^{[1,\nu+1]}(\text{proj } A)$ 中 $\Gamma(\Sigma)$ 的几乎分裂序列，以及这些几乎分裂序列在 $\Gamma(\Sigma)[i]$ for$i = 1, \ldots, m-1$ 中的移位，其中 $m-1$ 位于 $\mathbf{C}^b(\text{proj } A)$ 中。(4) 将函子 $\mathcal{F}_m$ 应用于步骤 (3) 中给出的几乎分裂序列，即可得到 $\mathbf{C}_{\equiv m}(\text{proj } A)$ 的 Auslander-Reiten 箭图。

构造 $\mathbf{C}_{\equiv m}(\text{proj } A)$ 的 Auslander-Reiten 箭图的第二种方法如下：

由于定理 4.1，我们可以应用编织技术。这项技术曾用于构造模范畴的 Auslander-Reiten 箭图，也用于固定大小范畴 $\mathbf{C}^{[1,n]}(\text{proj } A)$，参见 [7, 第 5] 节。

首先，我们以与上述相同的步骤（1）和（2）开始这一过程，然后继续进行步骤（3）至（5），具体如下。

(3) 我们可以将函子 $\mathcal{F}_m$ 应用于 $\Gamma(\Sigma)$ 中的几乎分裂序列。(4) 我们计算 $\mathbf{C}_{\equiv m}(\text{proj } A)$ 中投射-内射复形的根。我们知道，如果 X 是 $\Gamma(\Sigma)$ 中一个几乎分裂序列的起点，且具有一个直接

直和项投射-内射 Y 在其中项中，那么 $\mathcal{F}_m(X)$是$\mathbf{C}_{\equiv m}(\text{proj}\, A)$中几乎分裂序列的起始项，该序列的其中项包含一个投射-内射复形$\mathcal{F}_m(Y)$。我们将 $\mathcal{F}_m(X)$称为 $\mathcal{F}_m(Y)$的根，并记作 rad $\mathcal{F}_m(Y)$。此外，对于 $i = 1, \ldots, m-1$， $\mathcal{F}_m(X[i])$是$\mathbf{C}_{\equiv m}(\text{proj}\, A)$中几乎分裂序列的起始项，该序列的其中项包含投射-内射复形 $\mathcal{F}_m(Y[i])$。换言之，根 $\mathcal{F}_m(Y[i])$ $= \mathcal{F}_m(X[i])$。(5) 我们继续应用编织技术构造箭图。

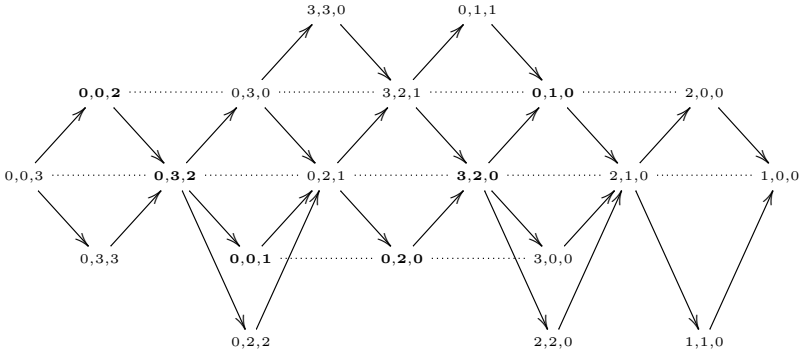
下面我们给出一个例子，展示如何应用构造 Auslander-Reiten 箭图的两种方法。

例 4.3. 考虑由箭图 Q_A给出的路径代数

$$1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$$

满足关系 $\beta\alpha = 0$。我们观察到 $s.gl.\dim A = 2$。

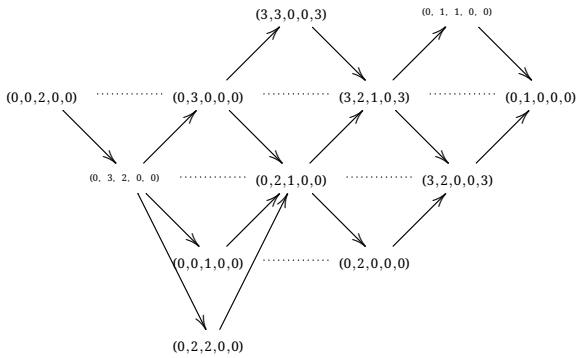
$\mathbf{C}^{[1,3]}(\text{proj}\, A)$ 的 Auslander-Reiten 箭图如下：



whe其中，我们用逗号表示复形中的箭头，并将投射对象 P_i 记为 i.

By $\mathcal{F}_4$ 定理 4.2 Σ 和 $\Sigma[1]$ 我们知道，那些 $\mathbf{C}$。此外，我们可以表示，复形 $0 \to (0 \to P_2)$ ^{b}(投射 P_4)，$0 \to P_3 \to P_2$ 和 $0 \to 0 \to P_1$ 确定了截面 Σ。

将 $\mathcal{F}_4$ 应用于上述 $\mathbf{C}^b(\text{proj}\, A)$ 中的几乎分裂序列，我们得到 $\mathbf{C}_{\equiv 4}(\text{proj}\, A)$ 的 Auslander-Reiten 箭图的一个子箭图，如下：

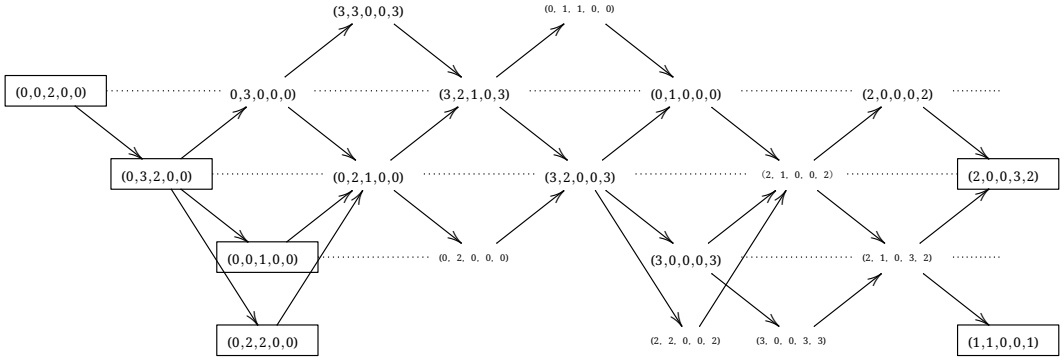


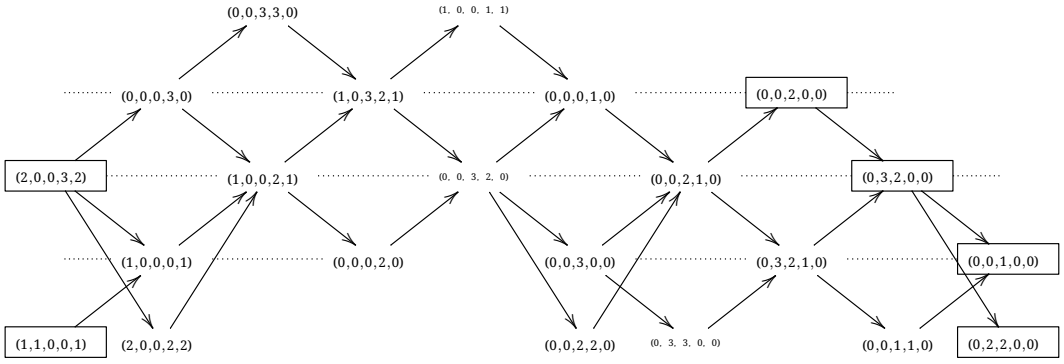
其中，我们用括号表示每个 4–周期复形，用逗号代替箭头，并用 i 代替投射 P_i。

考虑 $\mathbf{C}^b$(proj A) 中 $i = 0, \ldots, 3$ 的几乎分裂序列 $\Gamma(\Sigma)[i]$。将函子 $\mathcal{F}_4$ 应用于这些序列，我们得到 $\mathbf{C}_{\equiv 4}$(proj A) 的 Auslander-Reiten 箭图。

构造$\mathbf{C}_{\equiv 4}$(proj A)的 Auslander-Reiten 箭图的另一种方法是应用编织技术。我们从构造$\mathbf{C}_{\equiv 4}$(proj A)的 Auslander-Reiten 箭图开始。对于这一过程，我们需要知道$\mathbf{C}_{\equiv 4}$(proj A)中投射-内射复形的根，它们是上方箭图中所述的投射-内射复形的移位。

现在，我们应用编织技术来构建Auslander-Reiten 箭图。通过识别出现在矩形中的复形，我们得到整个箭图。





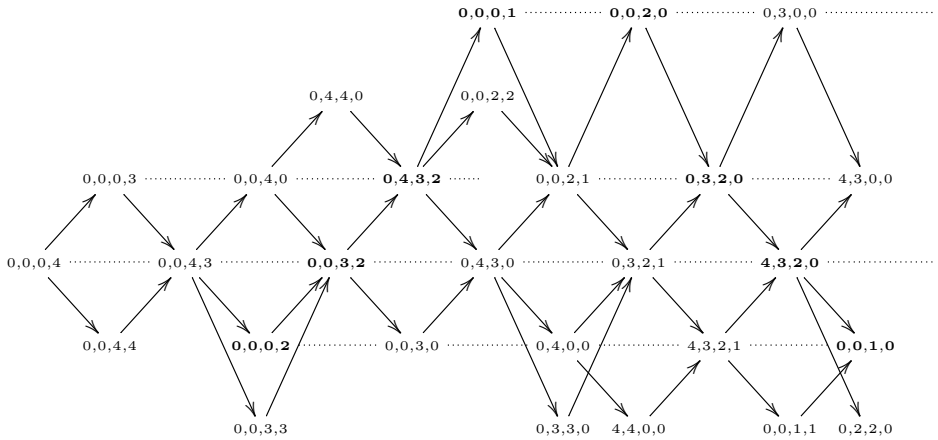
在下一个例子中，我们展示当复形属于 $\mathbf{C}_{\equiv 2}$(proj A)时，如何构造 $\mathbf{C}^{[1,4]}$(proj A) 的 Auslander-Reiten 箭图。

例 4.4. 考虑由箭图 Q_A给出的路径代数

$$1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3 \xrightarrow{\gamma} 4$$

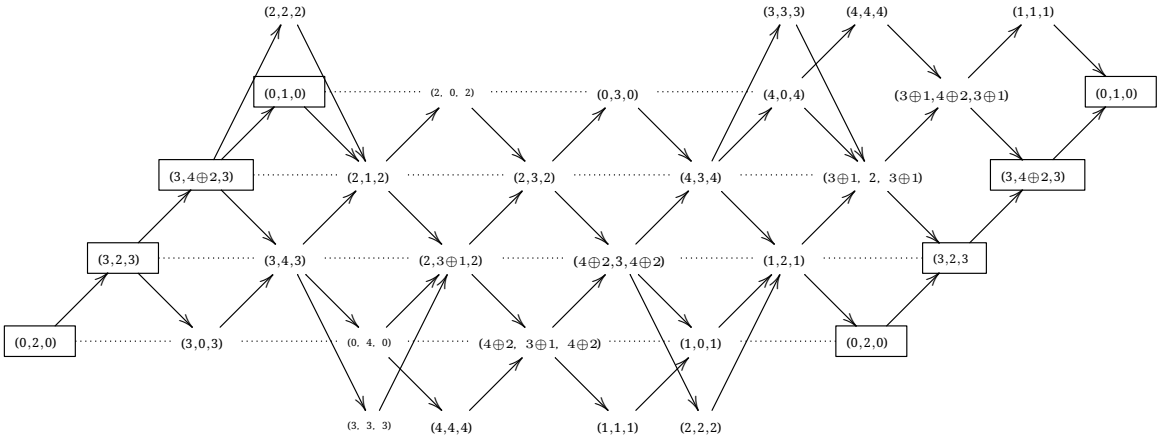
带有关系 $\beta\alpha = \gamma\beta = 0$。我们注意到 $s.gl.$维数 $A = 3$。

我们构造 $\mathbf{C}^{[1,4]}$(proj A) 的 Auslander-Reiten 箭图，直到找到一个截面及其移位，如下所示:



复形 $0 \to 0 \to 0 \to P_2$、$0 \to 0 \to P_3 \to P_2$、$0 \to P_4 \to P_3 \to P_2$ 和$0 \to 0 \to 0 \to P_1$ 确定了我们构造 $\mathbf{C}_{\equiv 2}$(proj A) 箭图所需的截面 Σ。

将函子 $\mathcal{F}_2$ 应用于我们在 $\mathbf{C}^{[1,4]}$(proj A) 的 Auslander-Reiten 箭图中于 Σ 和 $\Sigma[1]$ 之间获得的 $\mathbf{C}^b$(proj A) 中的几乎分裂序列，再应用编织技术，我们得到 $\mathbf{C}_{\equiv 2}$(proj A) 的 Auslander-Reiten 箭图，如下所示：



我们用（i, i, i）表示两个不同的 2–周期复形。一个是复形 $P_i \xrightarrow{0} P_i \xrightarrow{id} P_i$，另一个是复形 $P_i \xrightarrow{id} P_i \xrightarrow{0} P_i$，对于 $i = 1,2,3,4$。确切地说，箭图中出现的第一个2-周期复形包含投射对象 P_2，并且是复形 $P_2 \xrightarrow{id} P_2 \xrightarrow{0} P_2$。

5. On sectional paths in $\mathbf{C}_{\equiv m}$(proj A)

Thr在本节中，我们考虑域 k 上的有限维 k-代数 A .

在任意 Artin 代数 A 中，mod A 中截面路径上的不可约态射的复合非零。该结果最早由 R. Bautista 和 S. Smalø 于 1983 年证明，见 [4]。此外，在 [17] 中，H. Igusa 和 G. Todorov 也研究了 mod A 中的截面路径，并证明截面路径上的 m 个不可约态射的复合不属于范畴 mod A 的根的 $m+1$ 次幂，因此不会为零。

另一方面，在 [9], 中，作者针对固定大小复形的复形范畴分析了这一问题。他们证明，$\mathbf{C}^{[1,n]}$(proj A) 中截面路径上的不可约态射的复合可能为零，并研究了此类复合不为零的条件。具体而言，作者证明：如果 H 是有限维遗传代数，且 $X_0 \to X_1 \to \cdots \to X_m$ 是 $\mathbf{C}^{[1,n]}$(proj H) 中的一条截面路径，那么该截面路径上不可约态射的复合不会为零。

本节中，我们将证明，对于有限维 k-代数A ，在$\mathbf{C}_{\equiv m}$(proj A)中的截面路径上不可约态射的复合，也有与上述类似的结果。

我们回顾截面路径的概念。

定义5.1。 不可分解复形之间的一条 $X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_m$ 不可约态射路径，在 $\mathbf{C}_{\equiv m}(\mathrm{proj}\ A)$ 中称为截面的，如果 $\tau^{-1}{}_{\mathbf{C}_{\equiv m}} X_i \not\simeq X_{i+2}$ 对每个 $i = 0, \ldots, m-2$均成立。

S. Liu 研究了左或右 Auslander-Reiten 范畴中截面路径的性质， $\mathcal{A}$。具体而言，该作者证明，这些范畴中的任意截面路径 $X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_m} X_m$ 都满足 $f_m \cdots f_1 \notin \Re_{\mathcal{A}}^{m+1}(X_0, X_m)$，见 [19, 引理 2.7]。

在 [9], 中，作者证明了，$\mathbf{C}^{[1,n]}$(proj H) 是左 Auslander-Reiten 范畴，当且仅当 H 是遗传代数。因此，他们立即得出结论：$\mathbf{C}^{[1,n]}$(proj H) 中截面路径上的不可约态射的复合始终非零。

接下来，我们将看到，当 H 是有限维遗传代数时，$\mathbf{C}_{\equiv m}$(proj H) 是左 Auslander-Reiten 范畴。

我们回顾一下 [19] 中的以下定义。

定义 5.2。 *Krull-Schmidt*范畴 $\mathcal{A}$ 中的对象 X 称为拟投射的，如果存在一个右极小几乎分裂（汇）单态射 $M \to X$；对偶地，如果存在一个左极小几乎分裂（源）满态射$X \to N$，则称其为拟内射。

定义 5.3. 称 *Krull-Schmidt*范畴 $\mathcal{A}$ 为左 *Auslander-Reiten* 范畴，若其中每个不可分解对象 $\mathcal{A}$要么是拟投射的，要么是某个几乎分裂序列的末项。若其中每个不可分解对象 $\mathcal{A}$要么是拟内射的，要么是某个几乎分裂序列的始项，则称 $\mathcal{A}$ 为右 *Auslander-Reiten* 范畴。若 $\mathcal{A}$ 既是左 *Auslander-Reiten* 范畴又是右 *Auslander-Reiten* 范畴，则称其为 *Auslander-Reiten* 范畴。

命题 5.4. 若 H 是域 k上的有限维遗传代数，则 $\mathbf{C}_{\equiv m}(\mathrm{proj}\, H)$是左 *Auslander-Reiten* 范畴。

反过来，若 $\mathbf{C}_{\equiv m}(\mathrm{proj}\, H)$ 是 $m > 2$的左 *Auslander-Reiten* 范畴，则 H 是遗传代数。

证明。 设 H 是遗传代数。则 s.gl.dim $H < \infty$。考虑 $\mathbf{C}_{\equiv m}$(proj H)中的不可分解复形 X 。

如果 X 不是投射的，那么根据 [11, 命题 2.6] X ，它是 $\mathbf{C}_{\equiv m}$(proj H) 中一个几乎分裂序列的末项。否则，如果 X 是投射的，由于压缩函子 $\mathcal{F}_m : \mathbf{C}^b(\mathrm{proj}\ H) \to \mathbf{C}_{\equiv m}(\mathrm{proj}\, H)$ 因定理 3.1 而稠密，则存在一个复形 $Z \in \mathbf{C}^b(\mathrm{proj}\, H)$，使得 $\mathcal{F}_m(Z) = X$。此外， Z 是投射的，因为根据 [20] ，函子$\mathcal{F}_m$ 将 $\mathbf{C}^b$(proj H) 中的投射复形映到 $\mathbf{C}_{\equiv m}$(proj H) 中的投射复形。由于 $\rho : \mathrm{rad}(Z) \to Z$ 是一个以 Z 为终点的左几乎分裂（汇）态射，因此 $\mathcal{F}_m(\rho)$:

$\mathcal{F}_m(\mathrm{rad}(Z)) \to \mathcal{F}_m(Z)$是终止于 X的左几乎分裂（汇）态射。由于 H 是遗传的，因此上述汇态射是单态射，因为对于每个 $P \in \mathrm{proj}\, H$，我们都有 $P/\mathrm{rad}\, P$ 的投射维数小于或等于一。

反之。假设 $\mathbf{C}_{\equiv m}(\mathrm{proj}\, H)$ 是一个左 Auslander-Reiten 范畴，且 H 不是遗传的。那么，存在一个不可分解对象投射 H-模 P，使得 $P/\mathrm{rad}P$ 的投射维数大于一。于是我们可以假设，

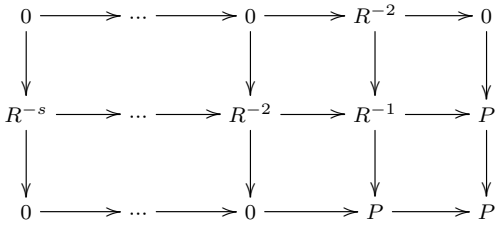
$$R^{-s} \to \cdots \to R^{-2} \to R^{-1} \to P/\mathrm{rad}P$$

是 $P/\mathrm{rad}P$ 的一个极小投射分解，其中 $R^{-1} \neq 0$ 和 $R^{-2} \neq 0$。

考虑态射

$$\rho' : (R^{-s} \to \cdots \to R^{-2} \to R^{-1} \to P) \longrightarrow (0 \to \cdots \to 0 \to P \to P)$$

在 $\mathbf{C}^b(\mathrm{proj}\ H)$ 中。于是我们有 $\mathcal{F}_m(\rho') = \rho : \mathrm{rad}(Z) \to Z$ 当且仅当 $Z = 0 \to \cdots \to 0 \to P \to P$。另一方面，存在一个非零态射 $\alpha : (0 \to \cdots \to 0 \to R^{-2} \to 0) \longrightarrow (R^{-s} \to \cdots \to R^{-2} \to R^{-1} \to P)$，它属于 $\mathbf{C}^b(\mathrm{proj}\ H)$，且满足 $\rho'\alpha = 0$。我们用下图说明这一情况：



于是 $\mathcal{F}_m(\rho')\mathcal{F}_m(\alpha) = 0$，其中 $\mathcal{F}_m(\alpha)$ 非零。因此，$\rho = \mathcal{F}_m(\rho')$ 不是汇单态射。

此外，Z 不是某个几乎分裂序列的终点，这与假设 $\mathbf{C}_{\equiv m}(\mathrm{proj}\, H)$ 是左 Auslander-Reiten 范畴矛盾。因此，H 是遗传的。□

推论 5.5. 设 H 是一个有限维遗传代数，$X_0 \to X_1 \to \cdots \to X_r$ 是 $\mathbf{C}_{\equiv m}(\mathrm{proj}\ H)$ 中的一条截面路径。若 $f_i : X_{i-1} \to X_i$ 对于 $i = 1$、$\cdots$、r 是不可约态射，则 $f_r \cdots f_1 \notin \Re^{r+1}\mathbf{C}_{\equiv m}(\mathrm{proj}\, H)(X_0, X_r)$。特别地，复合 $f_r \cdots f_1$ 不为零。

现在，我们给出一个例子，说明 $\mathbf{C}_{\equiv m}(\mathrm{proj}\, A)$ 中存在这样的截面路径，其中路径上的不可约态射的复合为零。

例 5.6. 考虑例 4.3。路径

$$(3,0,0,3,3) \xrightarrow{f} (2,1,0,3,2) \xrightarrow{g} (1,1,0,0,1)$$

显然是一条截面路径，因为其端点是投射-内射复形，且不可约态射 f 和 g 的复合为零。

下一个引理有助于确定$\mathbf{C}_{\equiv m}(\mathrm{proj}\, A)$中非零截面路径的形状，其中 $\mathrm{s.gl.dim}\, A < \infty$。

引理 5.7。 设 A 是一个有限维 k-代数，且其 *s.gl.*维数 $A < \infty$。如果 $X_0 \to X_1 \to \cdots \to X_r$ 是一条截面路径，位于$\mathbf{C}_{\equiv m}$（proj A）中，其中 X_i 是某个 $i \in \{0, \cdots, r\}$ 的不可分解投射-内射复形，于是 $i = 0$ 或 $i = r$。

证明。考虑 $\mathbf{C}_{\equiv m}(\mathrm{proj}\ A)$ 中的一条截面路径 $X_0 \to X_1 \to \cdots \to X_r$，其中 X_i 是某个 $i \in \{0, \cdots, r\}$ 的不可分解投射-内射复形。令 $X_j = J_{i_0}(P)$ 为该投射-内射复形，其中 P 是一个不可分解投射 A-模。由于

s.gl.dim $A < \infty$，压缩函子 $\mathcal{F}_m$: $\mathbf{C}^b$(proj A) $\to \mathbf{C}_{\equiv m}$(proj A) 是稠密的。此外，$\mathcal{F}_m$ 保持不可分解复形、投射复形和不可约态射。于是我们得到，$Z_0 \to Z_1 \to \cdots \to Z_r$ 是 $\mathbf{C}^b$(proj A) 中的一条路径，其中$\mathcal{F}_m(Z_i) = X_i$，对 $i = 0, \ldots, r$ 均成立。此外，Z_j 是 $\mathbf{C}^b$(proj A) 中的一个投射-内射复形。由定理 3.8，上述路径是 $\mathbf{C}^b$(proj A) 中的截面路径。

现在，由 [5, 命题 8.7], ，我们知道 rad(Z_j) $= R_{i_0}(P)$ 是 $\mathbf{C}^{[1,n]}$(proj A) 中的不可分解复形，其中 n 可任意大。也就是说，我们考虑满足以下条件的 n： 不可约态射 rad(Z_j) $\to Z_j \to \tau_b^{-1}\mathbf{C}$(proj A)$^{Z_{j-1}}$ 的路径属于 $\mathbf{C}^{[1,n]}$(proj A)，其中 Z_j 是投射-内射复形，且 Z_{j-1} =rad(Z_j)。因此，rad(Z_j) 在 $\mathbf{C}^b$((proj A)) 中也是不可分解的；由命题 2.7，$\mathcal{F}_m$ (rad(Z_j)) 是 $\mathbf{C}_{\equiv m}$(proj A) 中的不可分解复形。

另一方面，rad(Z_j) $\to Z_j$ 在 $\mathbf{C}^b$(proj A) 中是不可约的。因此，应用压缩函子可得，$\mathcal{F}_m$(rad(Z_j)) $\to \mathcal{F}_m(Z_j)$ 在 $\mathbf{C}_{\equiv m}$(proj A) 中是不可约的。

此外，根据 [9, Proposition 4.7], ，$\mathbf{C}^{[1,n]}$(proj A) 中不可约态射 rad(Z_j) $\to Z_j$ 的维数为一。对偶地，我们可以看出 $Z_j \to \tau^{-1}\mathbf{C}^b{}^{Z_{j-1}}$ 在 Z_{j-1} =rad(Z_j) 的 $\mathbf{C}^{[1,n]}$(proj A) 中的维数为一。因此，态射 rad(Z_j) $\to Z_j$ 在 $\mathbf{C}^b$(proj A) 中具有相同性质。应用压缩函子可得，(rad(Z_j)) $\to \mathcal{F}_m(Z_j)$ 在 $\mathbf{C}_{\equiv m}$(proj A) 中的维数为一。对偶地，我们可以看出 $\mathcal{F}_m(Z_j)$ $\to \mathcal{F}_m(\tau^{-1}\mathbf{C}^b{}^{Z_{j-1}})$ 在$\mathbf{C}_{\equiv m}$(proj A) 中的维数为一。

现在，假设 $j \neq r$。如果 X_{r-1} 是投射-内射的，那么路径 $X_{r-2} \to X_{r-1} \to X_r$ 不是截面的，因为 X_{r-2} =rad(X_{r-1})，且 $X_r = \tau^{-1}\mathbf{C}_{\equiv m}{}^{X_{r-2}}$，这显然荒谬。因此，$i \neq r-1$。

对任意 $i \in \{1, \ldots, r-2\}$，都可以给出类似的证明。由假设，存在一个 X_i投射-内射，因此我们有 $i = 0$，从而证明了结论。□

命题 5.8. 设 A 是一个有限维 k-代数，且 *s.gl.*维数 $A < \infty$。设 $X_0 \to X_1 \to \cdots \to X_r$ 是 $\mathbf{C}_{\equiv m}(\mathrm{proj}\ A)$ 中的一条非零截面路径，且 $m > 1$。那么，以下陈述之一成立。

(a) 复形 $X_1, X_2, \cdots, X_r$ 不是投射-内射的。(b) 复形 $X_0, X_1, \cdots, X_{r-1}$ 不是投射-内射的。
(c) X_0 和 X_r 是投射-内射复形，而 $X_1, \cdots, X_{r-1}$ 不是投射-内射的。

证明。设 $X_0 \to X_1 \to \cdots \to X_r$ 是 $\mathbf{C}_{\equiv m}$(proj A) 中一条非零截面路径，且满足 $m > 1$。若该路径中不存在投射-内射复形，则条件 (a) 和 (b) 成立。

假设存在一个 $i \in \{0, \ldots, r\}$，使得 X_i 是投射-内射的。此外，令 $i \in \{0, \ldots, m\}$ 为使 X_i 是投射-内射的最小整数。由引理 5.7 可知，$i = 0$ 或 $i = r$。

若 $i = 0$，则 X_0 是投射-内射的。对于 $j > 0$，由引理 5.7 可知有以下两种情况：路径形如 $X_0 \to \cdots \to X_r$，其中 X_j 对于 $j = 1, \ldots, r-1$ 都不是投射-内射的，而 X_r 是投射-内射的；或者形如 $X_0 \to \cdots \to X_r$，其中 $X_1, \ldots, X_r$ 不是投射-内射的。于是，条件 (c) 和 (a) 分别成立。若 $i = r$，则 $X_0, \cdots, X_{r-1}$ 都不是投射-内射的，且 (b) 成立。□

References

[1] H. Asashiba。 *A generalization of Gabriel's Galois covering functors and derived equivalences*, 《代数学杂志》334, (2011), 109-149。[2] M. Auslander, I. Reiten。 *Stable equivalence of dualizing R-varieties*。《数学进展》12, (1974), 306-366。

[3] R. Bautista, S.Liu. *Covering theory for linear categories with application to derived categories*, 《代数学杂志》406, （2014）, 173-225。[4] R. Bautista,S. O.Smalø. *Non-existent cycles*。《代数通讯》11, （1983）, 1755-1767。[5] R. Bautista, M.J. SoutoSalorio,R. Zuazua. *Almost split sequences for complexes of fixed size*。《代数学杂志》287, （2005）, 140-168。[6] T. Bridgeland. *Quantum groups via Hall algebras of complexes*。《数学年刊》（2）177, （2013）, 1-21。[7] C. Chaio, A. Gonz
´ *On non-homogeneous tubes and components of type* $\mathbb{Z}A_\infty$ *in the bounded derived category* 24, 2 2021 327 356
alezChaio,I.Pratti。。《代数与表示论》（）, （）, -。[8] C. Chaio, A. Gonz
´ *Sections in the bounded derived category of piecewise hereditary* alez *algebras* 2024
Chaio,I. Pratti。。《代数及其应用杂志》（）。[9] C. Chaio, I. Pratti, M.J. Souto Salorio. *On sectional paths in a category of complexes of fixed size*。《代数与表示论》20, （2017）, 289-311。[10] *Almost split sequences of* $m-$*cyclic complexes* 119, 2022 569 581 H.Fu。《数学档案》[11] *Cyclic complexes Hall polynomials and simple Lie algebras*（）, - Q. Chen,B. Deng., 《代数学杂志》440, （2015）, 1-32。[12] H.Fu. *On root categories of finite-dimensional algebras*。《代数学杂志》370, （2012）, 233-265。[13] P. Gabriel,A.V. Roiter. *Representations of finite dimensional algebras*。《数学百科全书》73, A.I. Kostrikin 和 I. V. Shafarevich（编）, 《代数 VIII》, Springer（1992）。[14] H.Girardo, H. Merklen. *Irreducible morphism of the category of complexes*。《代数学杂志》321, （2009）, 2716-2736。[15] Y. Han, N. Zhang. *Construction of dualizing categories by tensor products of categories*。《中国科学：数学》48, （11）, （2018）, 1699-1716。[16] D. Happel. *Triangulated categories in the representation theory of finite dimensional algebras*。伦敦数学会讲义丛书119, 剑桥, （1988）。[17] K.Igusa, G. Todorov. *A characterization of finite Auslander-Reiten quivers*。《代数学杂志》89, （1984）, 148-177。[18] B. Keller. *On triangulated orbit categories*。《数学文献》10, （2005）, 551–581。[19] S. Liu. *Auslander-Reiten theory in a Krull-Schmidt category*。《圣保罗数学科学杂志》4, （2010）, 425-472。[20] L. Peng, J. Xiao. *Root Categories and Simple Lie Algebras*。《代数学杂志》198, （1997）, 19–56。[21] C.M. Ringel,P. Zhang. *Representations of quivers over the algebra of dual numbers*。《代数学杂志》475, （2017）, 327–360。[22] K. W. Roggenkamp. *Auslander-Reiten triangles in derived categories*。《数学论坛》8（5）, （1996）, 509-533。[23] S. Saito. *Tilting objects in periodic triangulated categories*。arXiv:2011.14096, （2021）。[24] A. Skowro´nski。 *On algebras with finite strong global dimension*。《波兰科学院通报》35, （1987）, 539–547。[25] T. Stai. *Differential Modules over Quadratic Monomial Algebras*。《代数与表示论》20, （2017）, 1239-1247。[26] T.Stai. *The triangulated hull of periodic complexes.* 。《数学研究快报》25, （1）, （2018）, 199-236。[27] X. Zhao. *A note on the equivalence of m-periodic derived categories*。《中国科学：数学》57, （11）, （2014）, 2329-2334。

（Claudia Chaio） Centro Marplatense de Investigaciones Matemáticas, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Funes 3350, Universidad Nacional de Mar del Plata and CONICET, Mardel Plata, 7600, Argentina
Email address: claudia.chaio@gmail.com

（阿尔弗雷多·冈萨´雷斯·恰约） Centro Marplatense de Investigaciones Matemáticas, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Funes 3350, Universidad Nacional de Mar del Plata, Mar delPlata, 7600, Argentina
Email address: agonzalezchaio@gmail.com

(Isabel Pratti) Centro Marplatense de Investigaciones Matemáticas, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Funes 3350, Universidad Nacional de Mar del Plata, Mar del Plata, 7600, Argentina

Email address: nilpratti@gmail.com

(Mar´ıa Jos´e Souto Salorio) Campus Industrial de Ferrol, Facultade de Informática, Universidadeda Coruña, CP 15071, A Coruña, Spain*Email address*: maria.souto.salorio@udc.es