arXiv:2304.04845v1 [physics.plasm-ph] 10 Apr 2023



Università degli Studi Roma Tre

Dipartimento di Matematica e Fisica
Doctoral Program in Physics — XXXV Cycle

A thesis presented for the degree of
Doctor of Philosophy in Physics

LINEAR AND NONLINEAR KINETIC ALFVÉN WAVE PHYSICS IN CYLINDRICAL PLASMAS

Author:
Livio De Fabrizio

Supervisor:
Prof. **Fulvio Zonca**

Roma Tre Supervisor and
PhD Program Coordinator:
Prof. **Giuseppe Degrassi**

Academic Year 2021/2022

圆柱形等离子体中的线性和非线性动理学阿尔芬波物理

利维奥·德·法布里齐奥

献给我的父亲

目录

引言 **1**

1 等离子体物理学概论 **5**

1.1 等离子体状态.6 1.1.1 准中性： $L \gg \lambda_D$ .7 1.1.2 集体运动： $N_D \gg 1$ 和 $\omega_p \tau \gg 1$. 9 1.2 等离子体动力学.9 1.2.1 回旋动理学模型.12 1.3 等离子体中的波与振荡.14 1.3.1 电子等离子体波.14 1.3.2 离子声波.16

2 阿尔芬波 17

2.1 磁流体波。剪切阿尔芬波（SAW）.18 2.1.1 均匀等离子体平板.18 2.1.2 非均匀等离子体平板.20 2.2 动理学阿尔芬波（KAW）.25 2.2.1 动理学阿尔芬波的观测.28

3 s在圆柱形等离子体中听到阿尔芬波 **32**

3.1 模型.32 3.1.1 场与势的关系.35 3.2 场方程与天线条件.36 3.2.1 天线方程.36 3.2.2 SAW方程.37 3.2.3 匹配条件.39 3.3 坡印廷通量分析.40 3.4 平衡构型与数值结果.43 3.4.1 平衡剖面.44 3.4.2 参数.46 3.4.3 数值解.46

4 动理学阿尔芬波在圆柱形等离子体中：
线性描述 **48**
4.1 模型和动理学阿尔芬波方程.49 4.1.1 线性回旋动理学方程与漂移项的排序 . . . . . .
49 4.1.2 涡量方程 .51 4.1.3 约化方程 .52 4.1.4 强阻尼极限 .56 4.1.5 无阻尼极限 .57
4.1.6 弱阻尼：波包分析.58 4.1.7 弱阻尼：薛定谔包络方程的解.63 4.2 数值解.64
4.2.1 强阻尼.65 4.2.2 弱阻尼.67 4.3 总结.71

5 圆柱形等离子体中的动理学阿尔芬波：非线性描述 75

5.1 参量衰变不稳定性.76 5.2 对流胞.79 5.2.1 调制不稳定性.80 5.3 非线性陀螺动理学
方程.81 5.3.1 θ箍缩构型中的非均匀等离子体.84 5.4 调制不稳定性的求解.86 5.5 平衡
构型与数值解.93 5.6 总结.100

6 结论和展望 **107**

参考文献 **111**

引言

等离子体研究适用于众多领域，从等离子体天体物理学到磁层物理学，也包括受控热核聚变、等离子体加速和工业等离子体等实际应用。由轻元素原子核（如氘核）和电子构成的等离子体，是产生放热聚变反应的自然选择 [73] ；这类反应类似于为太阳及其他恒星提供维持生命能量的反应，因此被视为宇宙最根本的能源。受控核聚变将为人类提供清洁且近乎取之不尽的能源，有望解决世界能源问题 [10]。示范电站（DEMO[1]）是 EUROfusion 磁约束聚变研究计划的最终目标，旨在于 2050 年前实现 300–500 MWe 的发电能力。全球各地也在开展目标大体一致的类似研究[2], ，与此同时，国际合作正在推进国际热核聚变实验堆（ITER[3]）的最终建造阶段。

具有磁化且无碰撞的空间和聚变等离子体需要非线性动理学理论。特别是，“全动理学”（FK）模拟方案通过弗拉索夫方程描述离子和电子，该方程通常采用粒子网格（PIC）技术求解[4, 24], ，并考虑单个粒子的动力学及其特征频率，最高可达电子回旋频率 Ω_e，该频率通常低于或接近电子等离子体频率。然而，从计算角度来看，这些方案代价高昂，且涉及极其多样的时空尺度，这也解释了为何人们引入了约化模型：回旋动理学（GK）模型 [35, 51, 52] 采用对回旋运动进行轨道平均的描述，能够通过大于离子回旋周期的离散时间间隔来解析物理过程。此外，当频率 ω 低于或接近离子回旋频率 Ω_i，即$\omega \ll \Omega_i \ll \Omega_e$时，可以对离子采用回旋动理学方法，并简单地忽略电子。

[1] https://www.euro-fusion.org/programme/demo/[2]
https://www.iaea.org/bulletin/demonstration-fusion-plants[3]
https://www.iter.org

回旋运动（漂移动理学电子），前提是所关注的空间尺度大于电子拉莫尔半径。

为了描述各种现象，近期进一步开发了一种混合模型，该模型基于针对电子的陀螺动理学描述 [35, 38, 5] 以及针对离子的漂移动理学描述，称为 GeFi [54]。因此，该模型适用于频率至多处于离子与电子回旋频率之间、垂直于磁场的波长相对于平行波长较小的情况 $|k_\perp/k_\parallel| \gg 1$，以及 $|k_\perp \rho_e| \approx 1$电子拉莫尔半径 ρ_e 远小于系统尺度的情况 $\rho_e \ll L$。

GeFi模型目前仅在简单磁场几何中得到验证 [17]。与此同时，陀螺动理学代码已成为先进模拟研究的主要数值工具，用于研究强磁化聚变等离子体所具有的复杂磁场几何 [36, 49]。本博士论文研究的主要目标，是通过逐步扩展该代码通常所研究的简单磁场几何和非均匀等离子体平衡，为衔接陀螺动理学代码与 GeFi 提出的创新方法奠定基础。为此，我们将圆柱形等离子体中的阿尔芬振荡的线性与非线性行为确定为理想的测试平台。事实上，横向剪切阿尔芬波是磁化等离子体中的基本电磁振荡 [1, 23], ，能够对带电粒子的加热和输运过程产生重要贡献。本论文工作的重点，是建立一个测试案例，将 TRIMEG [56, 57] 回旋动理学代码和 STRUPHY [43]混合磁流体-动理学代码的模拟结果，与通过解析方法和数值方法获得的、关于圆柱形磁化等离子体中对流胞生成的线性和非线性理论预测进行比较。具体而言，本博士论文研究将证明，该问题以高度浓缩的形式包含了重要的基础物理过程，而这些过程与空间等离子体和实验室等离子体均密切相关。因此，本文所प्रस्तुत的新颖结果为构建一个清晰且易于理解的测试案例迈出了第一步，在该案例中，可以将 GeFi 的首个圆柱形版本与 TRIMEG 和 STRUPHY 代码进行对比测试。本工作的未来扩展有望实现 GeFi 在真实环形聚变等离子体平衡中的应用，并验证陀螺动理学约化描述的适用范围；该描述是 TRIMEG 及其他陀螺动理学代码的基础。

在Fulvio Zonca教授的指导下，这项研究工作在罗马第三大学和位于弗拉斯卡蒂（RM）的ENEA中心完成，得到了CNPS[4],框架内国际合作的支持，并与DTT[5]相关。

本文的结构安排如下：

- 第1 章介绍等离子体状态、回旋动理学模型以及等离子体中的波与振荡。

- 第2章重点介绍阿尔芬波，这是本论文工作的基础主题。为了逐步引入其背后的物理概念，流体动力学波

[4]非线性等离子体科学中心，https://www.afs.enea.it/zonca/CNPS/ [5]偏滤器托卡马克测试设施，https://www.dtt-project.it

首先介绍均匀等离子体中的相关内容，随后讨论等离子体非均匀性的影响。特别是，我们引入空间相位混合和共振吸收的概念；在非均匀等离子体中，剪切阿尔芬波具有连续谱，其径向波长随时间减小，如下所示 t^{-1}。越来越短波的自发产生促使我们引入并讨论回旋动理学描述，这是分析动理学阿尔芬波所必需的。

• 第3章介绍了将在本研究其余部分中使用的圆柱形非均匀磁化等离子体平衡。特别是，我们参考已有的知名文献，对所考虑模型等离子体平衡中剪切阿尔芬波的行为进行背景说明。本文介绍了由外部天线激发的剪切阿尔芬波的性质，并详细讨论了激发波通过共振吸收向热等离子体传递功率的过程。

• 第4章使用回旋动理学理论重新审视第3章中的理想磁流体动力学（磁流体力学）分析。这揭示了以下微观尺度现象：在所考虑的非均匀圆柱等离子体平衡中，当外部天线施加的天线频率与剪切阿尔芬波连续变化的频率谱相匹配的径向位置处，由外部天线激发的剪切阿尔芬波发生共振吸收。与早期分析一致， [40, 41], 共振吸收表现为向短波长动理学阿尔芬波的模转换；该波通常在距共振层很短的距离内，并在模转换波经历数个空间振荡周期内被吸收。这种强吸收情形由于与等离子体加热 [40, 41, 44, 45] 直接相关，迄今一直是现有研究的重点。在本研究中，我们还考虑了相反的弱吸收情形：即使天线激发的剪切阿尔芬波振幅适中，共振（模转换）层内部仍可能激发出大振幅动理学阿尔芬波，并产生一系列有趣的非线性行为。作为本研究的新颖结果，我们证明了模转换层内部的等离子体区域表现得像一个“共振腔”；也就是说，当天线频率与某个给定的离散谱相匹配时，等离子体响应会更强，呈现出共振驱动且弱阻尼振荡器的明显特征。对于我们的研究目标而言，这种行为尤其重要，因为我们旨在研究由大振幅动理学阿尔芬波引起的非线性行为，而大振幅动理学阿尔芬波的相位和振幅可以通过外部天线进行精细调节。

• 第 5 章包含了所研究模型等离子体平衡中动理学阿尔芬波非线性行为的理论分析及相应的数值解。重点在于研究大振幅动理学阿尔芬波自发产生对流胞元的过程。然而，由于其 underlying physics 与所谓的参量衰变不稳定性有关，因此首先介绍这一过程，并依据近期的一篇综述工作 [17] 对其基本要素进行定性描述。其重要

性随后得到阐述，同时系统推导控制对流胞元与动理学阿尔芬波非线性相互作用的方程。非线性耦合的最大化表明，在圆柱形等离子体中，最有利于产生对流胞元的条件是“theta pinch”（或“θ-pinch”）平衡，此时非均匀磁场仅沿对称轴方向。这使得具有较短方位波长的对流胞元最容易被激发。同时，由于这种构型具有内在稳定性，电子等离子体动能密度与磁能密度之比可以达到相对较高的数值（约 10% 或更高），从而也能够最大限度地减小电子朗道阻尼。在适当的极限情形下，可以恢复均匀等离子体中动理学阿尔芬波激发对流胞元的早期结果 [85] 。研究表明，等离子体非均匀性通过抗磁响应，对对流胞稳定性产生了重要影响，且这种影响在定性和定量上均有所体现 [13, 47]。作为本论文工作的一项新颖成果，研究显示，在接近临界激发阈值时，对流胞元沿电子抗磁方向旋转。同时，对流胞元的增长明显 stronger（通常可达到均匀等离子体中的约一个数量级），且不稳定参数区域显著更宽。此外，非线性与等离子体非均匀性之间微妙的相互作用表明，通过精细调节天线驱动模转换动理学阿尔芬波的振幅，可以控制等离子体自组织。生成的感应平行电场的对流胞元（通常为混合）极化和径向结构也得到了自洽计算。

- 最后，第6章将给出总结性评述，并讨论本博士论文工作的可能应用和展望。

致谢

我谨向导师 Fulvio Zonca教授致以谢意，感谢他在人格和专业方面为我树立了榜样。他的学识、支持与耐心是本论文工作的基本要素，也将永远成为我人生中的楷模。我还要感谢罗马第三大学的导师 Giuseppe Degrassi教授和同事 Matteo Valerio Falessi博士，感谢他们给予我的重要支持和分享的经验，并感谢 CNPS 的所有成员。此外，也谨此感谢 Zhixin Lu博士和 Xin Wang博士与我进行的有益讨论。

接下来，我要由衷感谢我的父母，是他们成就了今天的我。若没有他们的养育、教育、鼓励和资助，我不可能完成全部的学业。

谨以此论文纪念我的父亲（1943-2016）。

章节 1

等离子体物理学概论

自古以来，人类一直在探索表象纷繁的事物背后统一的本质；尤其是对自然的观察，让人们认识到，周遭各种各样的物质和现象，都可以视为少数基本实体或元素的多种表现形式及其组合。按照希腊文化传统，基本元素有四种：土、水、气和火。实际上，由于既没有发展出先进的化学，也没有建立物质的微观理论，希腊人无法像我们今天所说的那样识别基本物质，也就是化学元素，甚至更进一步说，基本粒子。他们能够识别的倒是物质的基本状态：固态、液态、气态和等离子体（后来，亚里士多德出于天文学方面的原因，引入了第五种元素，即以太或精质；它可以被视为“绝对空间的状态”，也就是空间的结构，或者可能是宇宙真空）。我们可能遇到的任何宏观物体，都由处于这四种状态中一种或多种状态的部分构成，因此希腊人的这种还原是宏观层面的，指向的是组成相，而非组成粒子。

火焰和闪电都是等离子体，换言之，它们是物质处于等离子体状态时的壮观表现。然而，等离子体在地球上并不常见；恰恰相反，当我们用肉眼或望远镜仰望天空时，几乎所见的一切都是等离子体。事实上，恒星本质上都是等离子体天体，而等离子体也是星际介质的主要组成部分。因此，等离子体物理学直到二十世纪才开始发展并非偶然，尽管如上所述，等离子体相的存在早在此之前就已在某种程度上得到论述。

1.1 等离子体状态

等离子体状态之所以被视为物质的第四态，原因如下。固体加热至熔点时会转变为液态；如果温度继续升高至沸点，则会通过蒸发形成气体。但故事并未就此结束。当持续加热使温度达到极高水平时，气体分子（不一定是全部）会发生电离：由此形成的系统整体上以及所有足够大的局部区域内都近似呈电中性，但其组成粒子是带电粒子。带电粒子之间的碰撞，即类似气体的短程相互作用，虽然仍或多或少会发生，但其重要性不及中程或长程电磁相互作用（本质上是库仑相互作用）；同时，粒子的平均动能大于平均相互作用能。简言之，结果是一个具有集体行为的准中性类气体系统，也就是等离子体。接下来的小节将更详细地讨论这一界定；正如我们将看到的，表征等离子体的基本量是粒子密度、n和温度， T （通常指电子温度， T_e）。图1.1列举了等离子体的重要实例。

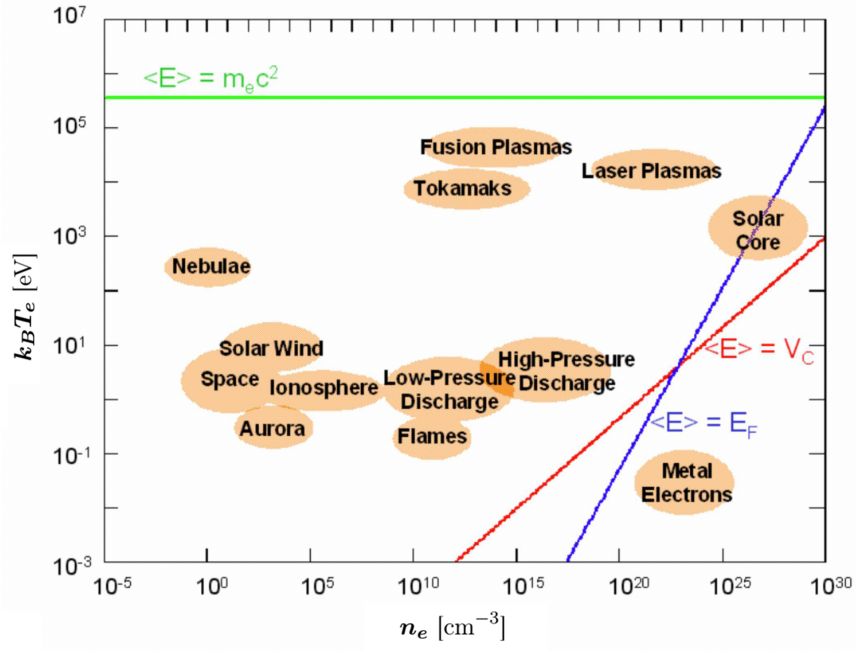


图1.1等离子体相位图，显示为（电子）密度 n_e 和（电子）温度 k_BT_e的函数。红线右侧的是强相互作用等离子体，其平均动能低于或至多与相互作用能相当；蓝线右侧，电子占据“费米海”中的能级（金属电子、白矮星）。

（来源：F. Zonca 的 UniTus 大师讲座[1]）

[1]https://www.afs.enea.it/zonca/Teaching/UniTus/lecture1.pdf

1.1.1 准中性： $L \gg \lambda_D$

我们已经指出，等离子体不仅作为一个整体几乎是电中性的（正如我们所预期的电离气体那样），其微小的组成部分也同样如此。事实上，尽管一般的单个粒子带有电荷，但在足够大的等离子体体积内，我们预期能够找到足够多的正、负带电粒子，使所得的净电荷Q几乎为零。也就是说，如果存在两种粒子，一种带有电荷 q_+，其密度（粒子密度或概率密度）函数为 f_+；另一种带有电荷 q_-，密度为 f_-，那么，对于一个足够大的体积 V——它远小于系统的总体积——

$$Q = \int_V \left(f_+ q_+ + f_- q_-\right) \mathrm{d}V \approx 0, \tag{1.1}$$

这通常表述了准中性的条件。该体积中的粒子数量极多，因此每个粒子的电荷在各个方向上都能被周围携带相反电荷的粒子充分屏蔽。能够描述这种情况，并从定量角度研究准中性和集体运动（下一小节的主题）的参数是德拜长度，它是任何处于热平衡的电离系统共有的特征。记住高斯–麦克斯韦方程 $\nabla \cdot E = 4\pi\sigma$，其中 σ 为电荷密度，位于$\mathbf{x}_0$ 处的电荷 q_0 所产生的电势 ϕ 满足泊松方程

$$\nabla^2 \phi = -4\pi q_0\, \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \tag{1.2}$$

其解为 $\phi = q_0/r$，其中 $r := |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$。当该电势作用于等离子体时，粒子以其正、负电荷密度对方程右端作出贡献，因此（1.2）可扩展为

$$\nabla^2 \phi = -4\pi q_0\, \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) - 4\pi \left(q_+ n_+ - q_- n_-\right), \tag{1.3}$$

或者，今后简单地考虑由电荷为$q_i = Ze$的离子 $Z \in \mathbb{N}$和电子（电荷为 $q_e = -e$）组成的等离子体，

$$\nabla^2 \phi = -4\pi q_0\, \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) - 4\pi e \left(Z n_i - n_e\right), \tag{1.4}$$

其中 n_i 和 n_e 是离子和电子密度，通过对其麦克斯韦-玻尔兹曼分布函数在速度$\mathbf{v}$ 上的积分计算得到，

$$n_{i,e} = \int A_{i,e} e^{-\frac{1}{k_B T_{i,e}}\left(\frac{1}{2} m_{i,e} v^2 + q_{i,e}\phi\right)} \mathrm{d}\mathbf{v} = n_{i,e}^{\infty} e^{-\frac{q_{i,e}\phi}{k_B T_{i,e}}}, \tag{1.5}$$

其中，$n_{i,e}^{\infty} = n_{i,e}(r \to \infty) = n_{i,e}(\phi \to 0)$ 是远离源的密度，即等离子体粒子自由运动时的密度。注意到粒子的平均动能大于粒子之间的平均相互作用能，因此有 $|q_{i,e}\phi| \ll k_B T_{i,e}$，前一个表达式可以近似为

$$n_{i,e} \approx n_{i,e}^{\infty} \left(1 - \frac{q_{i,e}\phi}{k_B T_{i,e}}\right) \tag{1.6}$$

以及，引入德拜长度

$$\lambda_D := \sqrt{\frac{k_B}{4\pi e^2 \left(\frac{Zn_i^\infty}{T_i} + \frac{n_e^\infty}{T_e}\right)}}, \tag{1.7}$$

方程（1.4）变为

$$\nabla^2\phi = -4\pi q_0 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{4\pi e^2}{k_B}\left(\frac{Zn_i^\infty}{T_i} + \frac{n_e^\infty}{T_e}\right)\phi = -4\pi q_0 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{\phi}{\lambda_D^2}, \tag{1.8}$$

即

$$\left(\frac{1}{\lambda_D^2} - \nabla^2\right)\phi = 4\pi q_0 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \tag{1.9}$$

其解为

$$\phi = \frac{q_0}{r} e^{-\frac{r}{\lambda_D}}. \tag{1.10}$$

因此，裸势本身会随距离的倒数衰减，而其他电荷的存在会进一步屏蔽它，使其以由德拜长度决定的速率衰减。德拜长度表示势能可被视为基本上已被屏蔽的距离范围：这一特性称为德拜屏蔽。具体而言，在德拜长度及其以外的距离处，$|q_{i,\ e}\phi| \ll k_B T_{i,\ e}$ 成立：事实上，这正是推导（1.6）进而得到（1.10）时所采用的基本假设。在较短的距离 r^* 处，满足

$$e\phi(r^*) \approx k_B T_e, \tag{1.11}$$

源电荷周围的电子不足以实现完全有效的屏蔽，而它们的动能小于或相当于粒子相互作用能。因此，德拜长度随温度升高而增大，随密度增大而减小，这不足为奇。当等离子体在任意方向上的长度 L 远大于德拜长度 $L \gg \lambda_D$ [11]，因而系统体积远大于德拜体积 $V_D \sim \lambda_D^3$ 时，在研究发生于更长长度尺度上的物理过程时，可以将德拜尺度视为无穷小并忽略不计。因此，可认为电荷密度在任意位置都能得到有效屏蔽，从而允许采用近似 $n_i \approx n_e = n$；对于单电荷离子的简单情形， n 是一个常用的密度值，称为等离子体密度。重新考察以一般形式由（1.1）表示的准中性条件，此时 V_D 趋近于零， V 可取为任意小但有限的体积，准中性条件由此成为描述 $k^2\lambda_D^2 \ll 1$ 处等离子体响应的基本控制方程之一，其中 k 为相关的特征波数。

由于 $m_i \gg m_e$，与电子的运动相比，离子的运动往往可以忽略，因此可将离子视为静止的中和背景：根据（1.5）， n_i可以忽略，而（1.4）中唯一涉及的密度是 n_e；不过，（1.10）仍然成立，但此时德拜长度为

$$\lambda_D := \sqrt{\frac{k_B T_e}{4\pi e^2 n_e^\infty}}. \tag{1.12}$$

1.1.2 集体运动： $N_D \gg 1$ 和 $\omega_p\tau \gg 1$

作为一种动理学统计性质，只要 [11] 德拜球内包含$N_D \gg 1$ 大量粒子，屏蔽效应就会成立。换言之，只要$n\lambda_D^3 \gg 1$：平均粒间体积（等于 n^{-1}）远小于德拜球的体积即可。这大量的 N_D 粒子会自然地组织起来，使等离子体近似中性；残余的微小电荷则如上一小节所述，会产生至多为 k_BT_e 量级的势，从而引发长距离相互作用。因此，施加于等离子体的任何电磁场都会几乎同时扰动所有粒子（由于它们带电），而一个粒子的重新排列会影响其他粒子的再分布，使系统产生集体响应。一个基本例子是电子等离子体波（见 1.3.1 小节），即电子在其平衡位置附近发生的小幅振荡。事实上，等离子体由带电粒子（离子和电子）组成，而且这些粒子能够较自由地运动，因此大多数粒子集体地经历电磁长程相互作用，而非碰撞：具体而言，弛豫时间 τ 与粒子发生库仑（二体）碰撞所需的时间相比很长；后者的量级为所谓的等离子体频率 ω_p 的倒数（见 1.3.1 小节），也就是粒子绕平衡位置振荡的频率。总之， $\omega_p\tau \gg 1$。归根结底，等离子体具有集体行为：这一特征使其区别于普通气体，也区别于虽已电离但耦合很强的系统。事实上，气体分子整体呈中性，至多具有极性，因此产生的相互作用较弱，且通常是二体相互作用：只有当两个分子足够接近时，它们才会真正感受到分子间作用力，例如范德华力或氢键，最终还会受到各自凝聚力所导致的排斥作用，从而避免彼此穿透。因此，气体主要受短程相互作用支配，即碰撞；这类相互作用本质上是二体的、随机的，且彼此独立。而在等离子体中占主导地位的强库仑相互作用和电磁相互作用，只存在于分子内部，尤其存在于原子核与电子之间。

1.2 等离子体动力学

与气态系统一样，等离子体也可以从宏观角度，即通过流体力学和经典热力学，以及从微观角度，即通过动理学理论，进行热力学描述。在微观描述中，现代超级计算机可以通过所谓的粒子-网格(PIC)方法 [4]，数值模拟等离子体的行为，跟踪多达 10^{10} 个粒子的轨迹。与此同时，等离子体粒子携带电荷，即使在不存在外部相互作用的情况下，也可能产生受扰动的内部电磁场。研究等离子体物理学的第一种方法，是为理想系统建立描述，即对理想气体使用玻尔兹曼方程，或使用理想流体的宏观方程，并结合真空中的麦克斯韦方程。

离子和电子的两个玻尔兹曼方程，通过积分碰撞项 $\mathscr{C}(f_{i,e})$ 表示分布函数 $f_{i,e}$ 随时间的变化（由碰撞引起）。该碰撞项计算从初始态到末态的跃迁率，其表达式取决于所研究的系统和所采用的数学模型，

$$\frac{\partial f_{i,e}}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} f_{i,e} \cdot \mathbf{v} + \nabla_{\mathbf{v}} f_{i,e} \cdot \frac{\mathbf{F}}{m} = \mathscr{C}\left(f_{i,e}\right), \tag{1.13}$$

其中，$\mathbf{F}$ 是作用于粒子（$\mathbf{x}$,$\mathbf{v}$）上的一般力。至于左侧，我们可以将$\mathbf{F}$ 限定为仅考虑洛伦兹力，用以描述前述调控等离子体动力学的长程电磁相互作用。因此，为简便起见，考虑由离子和电子组成的氢等离子体，其电荷分别为 e 和 $-e$，则动力学描述为

$$\frac{\partial f_{i,e}}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} f_{i,e} \cdot \mathbf{v}_{i,e} \pm \frac{e}{m_{i,e}} \nabla_{\mathbf{v}} f_{i,e} \cdot \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}_{i,e}}{c} \times \mathbf{B}\right) = \mathscr{C}(f_{i,e}). \tag{1.14}$$

这一描述的宏观对应形式可通过对动力学方程 [34], 取适当的矩推导得到，并由质量密度的连续性方程$\varrho_{i,e}$ 以及基本动力学方程表示；二者共同定义了一个双流体模型：

$$\frac{\partial \varrho_{i,e}}{\partial t} + \nabla \cdot \varrho_{i,e} \mathbf{v}_{i,e} = 0, \tag{1.15}$$

$$\varrho_{i,e} \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_{i,e}}{\mathrm{d}t} = \sigma_{i,e} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}_{i,e}}{c} \times \mathbf{B}\right) - \nabla p_{i,e}, \tag{1.16}$$

其中$\varrho_{i,e} = n_{i,e} m_{i,e}$ 以及$\sigma_{i,e} = \pm n_{i,e} e$。然而，由于准中性，离子和电子的密度相同（等离子体密度 n）：这进一步意味着离子和电子的电荷密度大小相等、符号相反，即 $\sigma_i = ne = -\sigma_e$，因此，总洛伦兹力密度中的电场部分$\mathbf{F}_E = (\sigma_i + \sigma_e)\mathbf{E}$为零；此外，考虑到 $m_i \gg m_e$，质量密度实质上就是离子质量密度 $\varrho = \varrho_i$，因此，尽管电子速度$\mathbf{v}_e$ 高于$\mathbf{v}_i$，电子所受的惯性力密度相较于离子所受的力密度可以忽略不计，即 $\varrho \mathrm{d}\mathbf{v}_i/\mathrm{d}t$。此外，假设碰撞频率足以使所有粒子的个体运动随机化，从而使带正电和带负电的粒子具有相同且均匀的温度，并因此产生相同且均匀的压强，我们还可以引入状态方程。最终，我们得到单流体模型，它仅由一组方程描述，

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot \varrho \mathbf{v}_i = 0, \tag{1.17}$$

$$\varrho \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{c} - \nabla p, \tag{1.18}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{p}{\varrho^\gamma}\right) = 0, \tag{1.19}$$

其中，$\mathbf{J} = ne(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e)$ 是电流密度，$p = p_i + p_e$ 并且通常情况下，$\gamma = 5/3$ 是比热之比。将 (1.19) 中的导数显式写出，然后使用 (1.17)，我们还得到了。

获得有用的恒等式

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \gamma \frac{p}{\varrho}\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}t} = -\gamma p \nabla \cdot \mathbf{v}_i. \tag{1.20}$$

这种针对（理想）等离子体的单流体方法也称为（理想）磁流体力学（MHD），这是MagnetoHydroDynamics（磁流体动力学）的缩写。

动理学模型和理想磁流体力学单流体模型，都由麦克斯韦方程闭合，以描述等离子体电磁场的自洽演化，

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{1.21}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}. \tag{1.22}$$

请注意，如上所述，泊松定律被准中性条件取代。同时，在（1.22）中忽略了位移电流，这适用于低频涨落，即 $|\partial_t|^2 \ll |c\nabla|^2$。

在第1.1.2节中，我们讨论了等离子体碰撞率低这一特性。在大多数情况下，碰撞率极低，电阻率 η 可忽略不计，或者说电导率几乎为无穷大：根据欧姆公式，

$$\eta = \frac{|\mathbf{E} + (\mathbf{v}/c) \times \mathbf{B}|}{|\mathbf{J}|} \approx 0 \tag{1.23}$$

这意味着，由于电流密度有限，可以将等离子体运动参考系中的有效电场视为零，

$$\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}; \tag{1.24}$$

参见 [34] 以了解更详细的分析。在无碰撞极限下，动理学方程中的碰撞积分本身可以忽略：此时，(1.14) 化简为

$$\frac{\partial f_{i,e}}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} f_{i,e} \cdot \mathbf{v}_{i,e} \pm \frac{e}{m_{i,e}} \nabla_{\mathbf{v}} f_{i,e} \cdot \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}_{i,e}}{c} \times \mathbf{B}\right) = 0; \tag{1.25}$$

该方程，即右端为零且仅以洛伦兹力作为力的玻尔兹曼方程，并且其中通常通过（1.21）和（1.22）以自洽方式定义$\mathbf{E}$ 和$\mathbf{B}$（电荷准中性以及电流密度$\mathbf{J}$ 通过分布函数$f_{i,e}$定义），被称为弗拉索夫方程。事实上，人们可能会疑惑，如前所述，麦克斯韦-玻尔兹曼分布和磁流体力学描述的使用，如何能够适用于等离子体这类低碰撞系统：一个部分答案[11] 是，当强平衡磁场存在时，它会使等离子体响应在正交平面内迅速各向同性化，并在某种程度上模拟碰撞的效应。例如，金属中电子漂移速度的比例关系$\mathbf{v} = \mu\mathbf{E}$ 可以被视为强磁化等离子体中漂移速度$\mathbf{v}_E = c\mathbf{E} \times \mathbf{B}/B^2$ 的对应关系。此外，实验表明，等离子体中的电子会分布于

一种在良好近似下本质上为麦克斯韦分布的方式（这种情况称为朗缪尔悖论 [48]），然而，流体理论通常对偏离麦克斯韦-玻尔兹曼分布的情况并不十分敏感。当情况并非如此时，例如研究沿磁力线的运动，或小尺度起重要作用时，流体理论可能会失效，但动理学理论仍可适用，例如基于（1.25）的方法。关于等离子体平衡偏离局域热力学平衡的更深入讨论，可参见近期工作 [31]。

1.2.1 回旋动理学模型

诸如弗拉索夫方程（1.25）这样的动理学方程考虑了粒子在长程平均电磁场中的运动，因此原则上也涵盖了粒子绕磁力线的螺旋运动。这意味着我们不得不处理相当复杂的动力学，并同时考虑不同尺度：粒子沿平衡磁力线运动并缓慢横向漂移的时空尺度、离子回旋运动的时空尺度（离子回旋频率 Ω_i 和离子拉莫尔半径 ρ_i），以及电子回旋运动的时空尺度（电子回旋频率 $\Omega_e \gg \Omega_i$ 和电子拉莫尔半径 $\rho_e \ll \rho_i$）。然而，在强磁化等离子体中，引起涨落诱导输运的主要扰动，其频率远低于 Ω_i。因此，回旋动理学模型常被采用：带电粒子在磁场中的轨迹是一条绕磁力线缠绕的螺旋线，可将其分解为沿磁力线的快速平行运动、导引中心相对缓慢的垂直漂移运动，以及快速圆周运动，即回旋运动；对于大多数等离子体行为，回旋运动可以取平均。对回旋运动取平均（即忽略对回旋相位角的依赖），便可从原有的六维相空间（3 个空间坐标和 3 个速度坐标）中消去一个速度坐标，从而形式上描述带电环的动力学；这些带电环的位置由导引中心确定，而非描述旋转带电粒子的动力学。要使该模型成立，必须满足 $\rho_i \ll L$ （强磁化），其中 L 是系统的特征长度尺度；同时，假定所涉及的频率远低于粒子的回旋频率（$\omega \ll \Omega_i$），而等离子体在垂直方向空间尺度上的行为则被认为与离子回旋半径相当（$k_\perp \rho_i \sim 1$）。随后，可将回旋动理学理论及相应的控制方程视为等离子体响应的渐近描述，其渐近展开参数为 $\varepsilon = \rho_i/L \sim |\omega/\Omega_i|$：在典型的磁化聚变等离子体中，$\varepsilon \sim \mathcal{O}(10^{-2})$。为考虑朗道共振，$\omega \sim k_\parallel v_\parallel$，回旋动理学理论假定 $k_\parallel \rho_i \sim \varepsilon$，以及 $k_\parallel/k_\perp \sim \varepsilon$；最后，假定扰动的振幅较小，即 $e\delta\phi \ll k_B T_e$。实验已证明，回旋动理学特别适用于例如等离子体湍流的建模。

在回旋动理学框架中，假设涨落的电磁场很小。 l,

$$\left|\frac{\delta B}{B_0}\right| \sim \varepsilon, \qquad \left|\frac{\delta E}{B_0}\right| \sim \varepsilon \frac{\rho_i \Omega_i}{c}, \tag{1.26}$$

其中， B_0 平衡磁场的模值$\mathbf{B}_0$。因此，分-布函数 $f_{i,e} = F_M + \delta f + o(\delta f)$ 也表示为麦克斯韦-玻尔兹曼平衡分布 F_M 的扰动，其中 $\delta f/F_M \sim \mathcal{O}(\varepsilon)$。当空间变量从粒子位置 $\mathbf{x}$ 变为导引中心位置 $\mathbf{X} = \mathbf{X}_\perp + X_\parallel \mathbf{B}_0/B_0$时，与回旋相位无关的粒子响应最便于表示为，

$$\mathbf{X}_\perp = \mathbf{x}_\perp + \boldsymbol{\rho}, \qquad \boldsymbol{\rho} := \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0}{\Omega_{i,e} B_0}, \tag{1.27}$$

且速度的三个分量表示为

$$\mathscr{E} := \frac{v^2}{2}, \qquad \mu := \frac{v_\perp^2}{2B_0}, \qquad \sigma := \operatorname{sgn}\left(v_\parallel\right). \tag{1.28}$$

这里，$v_\parallel := \mathbf{v} \cdot \mathbf{B}_0/B_0$ 是平行于磁场的速度，而 μ 是磁矩绝热不变量。麦克斯韦-玻尔兹曼分布为

$$F_M = \frac{n_0}{\pi^{3/2} v_T^3} e^{-v^2/v_T^2}, \tag{1.29}$$

其中， n_0 是平衡粒子密度， v_T 是均方根意义下的热速度。回旋动理学方程 [7, 3, 35] 由弗拉索夫方程推导而来，用于描述扰动分布函数随时间的变化

$$\delta g = e^{\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla_{\mathbf{X}}} \left(\frac{e\delta\phi}{T} F_M + \delta f \right), \tag{1.30}$$

其中， $\delta\phi$ 是扰动标量势；为符合磁化聚变等离子体文献中采用的标准记号，从现在起， T以能量为单位表示（因此，特别是从现在起，玻尔兹曼常数 k_B 将不再出现）。引入矢量势扰动 $\delta\mathbf{A}$，从而定义

$$\delta L_g := e^{\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla_{\mathbf{X}}} \delta L := e^{\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla_{\mathbf{X}}} \left(\delta\phi - \frac{v_\parallel}{c} \delta A_\parallel \right), \qquad \delta A_\parallel := \delta\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}_0/B_0, \tag{1.31}$$

将 $\langle ... \rangle_\alpha$ 记为在导引中心位置固定时对回旋相位角 α 的平均，则该方程可用相当一般的形式表示为 [17]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta g}{\partial t} + \left(v_\parallel \frac{\mathbf{B}_0}{B_0} + \mathbf{V}_d + \frac{c}{B_0^2} \mathbf{B}_0 \times \nabla \langle \delta L_g \rangle \right) \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \delta g = \langle \mathscr{C}(\delta g) \rangle_\alpha + \frac{eF_M}{T} \frac{\partial \langle \delta L_g \rangle_\alpha}{\partial t} \\ - \frac{c}{B_0^2} \mathbf{B}_0 \times \nabla \langle \delta L_g \rangle \cdot \nabla F_M. \end{aligned} \tag{1.32}$$

这里，我们采用了库仑规范（$\nabla \cdot \delta\mathbf{A} = 0$），这与通常的回旋动理学方法一致，并忽略了压缩磁场分量 $\delta B_\parallel$。事实上， [16, 17],引入阿尔芬速度 $v_A := B_0/(4\pi\varrho)^{1/2}$ （见第2.1.1小节），我们可以估算

$$\frac{\omega}{k_\perp v_A} \sim \frac{\omega}{\Omega_i} \frac{v_{Ti}}{k_\perp \rho_i v_A} < \mathcal{O}(\varepsilon) \tag{1.33}$$

而压缩阿尔芬波（见第2.1.1小节）会导致虽小但有限的$\delta B_{\parallel}$ 涨落，因此可以忽略：这一重要问题将在第2章进一步讨论。式（1.32）的左侧是非绝热粒子响应 δg的全时间导数：具体而言，第一、第二和第三个梯度项分别表示沿磁力线的粒子流动、跨磁场粒子漂移的影响（包括曲率漂移和梯度$\mathbf{B}$ 漂移），这些影响由漂移速度$\mathbf{V}_d$描述；以及由扰动$\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ 漂移和垂直磁场涨落 $\delta\mathbf{B}_{\perp}$引起的非线性粒子漂移效应。右侧的第一项是描述粒子碰撞的算符，第二项表示导引中心运动参考系中对扰动标量势的麦克斯韦–玻尔兹曼响应，最后一项则描述导引中心运动参考系中的$\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ 响应。特别是，最后一项包含背景分布函数的温度梯度和密度梯度所产生的影响，这些梯度可能驱动扰动。这些梯度仅在跨越磁通面的方向上显著，该方向由磁通函数标记。因此，一旦求解回旋动理学方程得到 δg ，并通过对式（1.30）求逆确定相应的粒子响应，就可以一致地计算扰动等离子体密度和电流，而电磁涨落则由式（1.21）和（1.22）给出。

1.3 等离子体中的波与振荡

1.3.1 电子等离子体波

与其他物理系统一样，等离子体中也会发生振荡和波传播 [74,11]。首先，扰动会引起电子构型的变化，电子会对此作出响应，以特定频率进行小幅振荡，这一频率称为等离子体频率，已在第1.1.2节中介绍。利用一个简单但意义重大的模型，可以相当容易地计算出该频率 [11]。我们考虑一个不存在平衡电场或磁场（$\mathbf{E}_0 =\mathbf{B}_0 = \mathbf{0}$）的无限等离子体，其中忽略热运动（$T \approx 0$），电子处于静止状态（$\mathbf{v}_0 = 0$），离子固定在空间中，而电子只能沿 x 方向自由运动。由于受到扰动，所关注的物理量是

$$n = n_0 + \delta n, \qquad v = \delta v, \qquad E = \delta E. \tag{1.34}$$

对等离子体响应进行线性化，并假设等离子体是均匀的（$\nabla n_0 = \mathbf{0}$），电子的扰动密度连续性方程由式（1.15）推导得出，

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial (nv)}{\partial x} \approx \frac{\partial\, \delta n}{\partial t} + n_0 \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \tag{1.35}$$

而电子的力平衡方程为 (1.16),

$$m_e \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + eE + \frac{\partial p}{\partial x} = m_e \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) + eE + \frac{\partial p}{\partial x} \approx m_e \frac{\partial\, \delta v}{\partial t} + e\, \delta E = 0, \tag{1.36}$$

其中我们使用了 $p = 3nT \approx 0$，因为 $T \approx 0$。最后，考虑到离子是固定的，因此其密度不会发生扰动，泊松方程为

$$\frac{\partial E}{\partial x} - 4\pi\sigma \approx \frac{\partial\, \delta E}{\partial x} + 4\pi e\, \delta n = 0. \tag{1.37}$$

在这种情况下，扰动电场的散度不为零，因为电子密度发生了变化，而离子保持不动，因此准中性不再成立。将扰动量写成平面波的形式

$$\delta n = \delta n\, e^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}, \qquad \delta v = \delta v\, e^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}, \qquad \delta E = \delta E\, e^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}, \tag{1.38}$$

因此，特别是，$\partial/\partial t = -\mathrm{i}\omega$ 和 $\partial/\partial x = \mathrm{i}k$，上述方程变为

$$-\mathrm{i}\omega\delta n + \mathrm{i}kn_0\delta v = 0, \tag{1.39}$$

$$-\mathrm{i}m_e\omega\delta v + e\delta E = 0, \tag{1.40}$$

$$\mathrm{i}k\delta E + 4\pi e\delta n = 0. \tag{1.41}$$

由此可直接得到如下形式的等离子体频率

$$\omega = \omega_p = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_0}{m_e}}. \tag{1.42}$$

由于 ω_p 不依赖于 k，群速度 $v_g := \mathrm{d}\omega_p/\mathrm{d}k$ 为零。事实上，这是因为我们忽略了电子热运动：如果我们回到 (1.36)，但采用

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 3T\frac{\partial\, \delta n}{\partial x}, \tag{1.43}$$

我们很容易得到色散关系

$$\omega_p^2(k) = \omega_p^2 + \frac{3T}{m_e}k^2, \tag{1.44}$$

因此，群速度

$$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega_p(k)}{\mathrm{d}k} = \frac{3Tk}{m_e\omega_p(k)}. \tag{1.45}$$

最后，当等离子体被磁化时，围绕磁场方向的螺旋运动会叠加，我们很容易证明频率变为

$$\omega_h = \sqrt{\omega_p^2(k) + \Omega_e^2}, \tag{1.46}$$

为

$$\Omega_e = \frac{eB_0}{m_e c} \tag{1.47}$$

电子回旋频率。这里，ω_h isknown asthe 上混合频率 and thecorre-spondingwave上混合振荡。

1.3.2 离子声波

在普通气体中，由于压强（归根结底是由于温度），会产生声波的传播，其描述可以从流体运动方程（理想流体基本方程或纳维–斯托克斯方程）推导出来。等离子体中也存在类似现象，但有一些差异，主要与电磁场的存在有关：不仅动能，正电荷之间的排斥作用也会使离子群膨胀，随后又靠近其他离子群；而其他离子群则因压强和电排斥作用而移开，从而形成一系列压缩与膨胀，这就是等离子体中的离子声波。对离子流体方程（1.16）进行线性化，并暂时令$\mathbf{B}=\mathbf{0}$，再结合连续性方程（1.17），经过与电子振荡情形类似的计算，可得到离子声波的色散关系，

$$v_s=\frac{\Omega_s}{k}=\sqrt{\frac{(\gamma_i T_i+\gamma_e T_e)}{m_i}}=\sqrt{\frac{\gamma_i p_i}{\varrho_i}+\frac{\gamma_e p_e}{\varrho}}=\sqrt{v_{si}^2+v_{se}^2}, \tag{1.48}$$

其中我们使用了 $p_{i,\ e}=nT_{i,\ e}$，从而可以识别出声速的熟悉表达式；在这里，它们应被视为离子和电子的绝热声速（一般而言，$\gamma_e=1$）。

电子等离子体振荡的色散关系中包含热修正，但在零温度下仍然存在（尽管在这种情况下它们无法传播）；而离子波则只有在存在热运动时才会存在，就像普通声波一样。然而，离子波并不需要离子热运动，具体而言，当（1.48）中的主导项为 $\sim T_e$ 时：我们可以说，离子波本质上取决于电子热运动和离子质量。与等离子体振荡的情形一样，可以考虑离子声波关系在磁化等离子体中的推广，从而得到静电离子回旋波的频率，

$$\Omega_C=\sqrt{k^2v_s^2+\Omega_i^2}, \tag{1.49}$$

为

$$\Omega_i=\frac{eB_0}{m_i c} \tag{1.50}$$

离子回旋频率。

第2章

阿尔芬波

磁流体波是在导电流体（例如等离子体）和磁场中传播的波；在这些波中，我们重点关注非均匀等离子体中的（剪切）阿尔芬波。非均匀性是一个关键特征，因为它会导致非均匀性方向上的波长随时间减小，如 $1/t$ [39] ，并使磁流体动力学波方程表现出奇异行为：能够研究更短尺度的动力学描述表明，阿尔芬波实际上会通过演化为另一种类型的波而改变其性质（动理学阿尔芬波 [40, 41]）。这一事实代表了一个被称为波模转换 [74]的过程示例。

阿尔芬波的一般理论始于 20 世纪 40 年代。当时，Hannes Alfvén 将 [1, 2] 流体力学与电磁波结合起来，试图解决“日冕加热问题”，也就是弄清楚为何太阳日冕尽管远离核心，温度却比光球层高：一种磁流体波或许能够将能量从光球层输送至日冕和太阳风。Enrico Fermi 随即将这一论点纳入了自己的宇宙射线理论 [33]。尽管目前尚不清楚阿尔芬波，尤其是模式转换产生的短尺度动理学阿尔芬波，是否足以解释观测到的温度梯度，但我们现在确实知道，它们是由光球层下方对流区中的电磁涨落和压力梯度变化产生的。

关于等离子体中动理学阿尔芬波的最初描述，可追溯至 1975 年；这些波由相位混合（见第 2.1.2 节）和模转换产生。曾有一段时间，人们研究了这些波的强（线性）吸收，将其视为磁约束聚变装置中进行等离子体加热的一种可能且便捷的方法 [44, 45], ，这种方法需要相当简单的天线设计和低频无线电波，而非更高频率的波；最终，这些尝试

因有证据表明，动理学阿尔芬波的功率耦合和效率并不理想而被放弃。在本研究中，我们主要关注与相反情形相关的非线性物理，即弱吸收 [85, 17], ，因为未被等离子体吸收的能量可能导致诸如对流胞等非线性结构的形成，并产生有趣的新颖基础物理和应用。

2.1 磁流体波。剪切阿尔芬波（SAW）

在第一章末尾，我们介绍了等离子体中产生的波的一些基本例子。本章将把注意力转向一个相当普遍的情形：静止的（$\mathbf{B}_0 = B_0\hat{\mathbf{z}} \neq \mathbf{0}$）理想无限磁化等离子体板中的电磁波（$\mathbf{v}_0 = \mathbf{J}_0 = \mathbf{0}$）；我们首先考察均匀系统，随后研究非均匀性的一些重要影响。

2.1.1 均匀等离子体板

对于均匀（$\nabla p = \nabla \varrho = 0$）等离子体， [34], 连续性方程经线性化后为

$$\omega\delta\varrho = \varrho_0\mathbf{k}\cdot\delta\mathbf{v}, \tag{2.1}$$

而（1.20）为

$$\omega\delta p = \gamma p_0\mathbf{k}\cdot\delta\mathbf{v}. \tag{2.2}$$

与此同时，利用式 (1.24 形式的欧姆定律，楞次定律可写为),

$$\omega\delta\mathbf{B} = -\mathbf{k}\times\left(\delta\mathbf{v}\times\mathbf{B}_0\right), \tag{2.3}$$

而安培定律（在低频极限下，正如通常所示$\mathrm{d}\mathbf{E}/\mathrm{d}t = \mathbf{0}$）为，考虑到（2.3），

$$\frac{4\pi}{c}\omega\delta\mathbf{J} = -\mathrm{i}\mathbf{k}\times\left(\mathbf{k}\times\left(\delta\mathbf{v}\times\mathbf{B}_0\right)\right). \tag{2.4}$$

麦克斯韦方程中关于场散度的方程是冗余的：特别地，(1.22) 中的第一个方程，即 $\mathbf{k}\cdot\delta\mathbf{B} = 0$，是 (2.3)的推论。为方便起见，我们旋转 (x, y) 平面，使得 $k_x = 0$，然后设 $k_\perp := k_y$ 和 $k_\parallel := k_z$。线性化的基数方程 (1.18) 为

$$-\mathrm{i}\omega\varrho_0\delta\mathbf{v} = \frac{\delta\mathbf{J}}{c}\times\mathbf{B}_0 - \mathrm{i}\delta p\mathbf{k}, \tag{2.5}$$

将（2.4）代入后，按分量写成

$$\omega\varrho_0\delta v_x = \frac{B_0^2k_\parallel^2}{4\pi\omega}\delta v_x, \tag{2.6}$$

$$\omega\varrho_0\delta v_y = \frac{B_0^2k^2}{4\pi\omega}\delta v_y + \delta p k_\perp, \tag{2.7}$$

$$\omega\varrho_0\delta v_z = \delta p k_\parallel. \tag{2.8}$$

进一步将（2.2）代入上述方程，得到

$$\left(\omega^2 - k_\parallel^2 v_A^2\right) \delta v_x = 0, \tag{2.9}$$

$$\left(\omega^2 - k_\perp^2 v_s^2 - k^2 v_A^2\right) \delta v_y - k_\perp k_\parallel v_s^2 \, \delta v_z = 0, \tag{2.10}$$

$$k_\perp k_\parallel v_s^2 \, \delta v_y - \left(\omega^2 - k_\parallel^2 v_s^2\right) \delta v_z = 0, \tag{2.11}$$

其中

$$v_A = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi \varrho_0}} \tag{2.12}$$

是阿尔芬速度，而$v_s = v_{si} = \sqrt{\gamma p_0/\varrho_0}$是离子绝热声速，已在（1.48）中引入。为了求解上述线性系统，我们首先令其系数矩阵的行列式为零，从而得到具有三个分支，即三个解的色散关系，

$$\omega_A^2 = k_\parallel^2 v_A^2 \qquad \text{(shear Alfvén wave)}, \tag{2.13}$$

$$\omega_{FM}^2 = \frac{k^2 \left(v_A^2 + v_s^2\right) \left(1 + \sqrt{1 - \alpha^2}\right)}{2} \qquad \text{(fast magnetosonic wave)}, \tag{2.14}$$

$$\omega_{SM}^2 = \frac{k^2 \left(v_A^2 + v_s^2\right) \left(1 - \sqrt{1 - \alpha^2}\right)}{2} \qquad \text{(slow magnetosonic wave)}, \tag{2.15}$$

with

$$\alpha^2 := \frac{4 k_\parallel^2 v_s^2 v_A^2}{k^2 \left(v_s^2 + v_A^2\right)^2}; \tag{2.16}$$

然后，将这些解代入系统，得到每种情况下相应的特征向量，即扰动速度的各个分量。特别地，对于剪切阿尔芬波（SAW），速度被限制在 x 方向，$\delta\mathbf{v} = (\delta v_x, 0, 0)$，剪切波之名也由此而来。它们只取决于 $k_\parallel$，而不取决于 $k_\perp$，并且由于$\mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{v}_x = 0$，我们根据（2.1）和（2.2），以及根据 $\nabla \cdot \delta\mathbf{v} \propto \mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{v}$，可知密度和压强中不会产生扰动：也就是说，它们是不可压缩的。根据（2.3）和（2.13），并在最后一步根据（1.24），磁场的扰动为

$$\delta\mathbf{B} = \delta B_x = -\frac{k_\parallel B_0 \delta v_x}{\omega_A} = \mp \frac{B_0 \delta v_x}{v_A} = \mp \frac{c\delta E}{v_A}, \tag{2.17}$$

其中，$\delta E = \delta E_y$ 和 $\mp$ 符号表示剪切阿尔芬色散关系$\omega_A = \pm k_\parallel v_A$的 $\pm$ 根。方程（2.17）称为Walén关系 [76]。仍由（2.13）可见，$v_A \hat{\mathbf{z}} = (\partial\omega_A/\partial k_\parallel) \hat{\mathbf{z}}$ 是群速度，其方向沿背景磁场。

对于磁声波，速度涨落位于 (y, z) 平面内：满足

$$\omega_{SM} \le \omega_A \le \omega_{FM}. \tag{2.18}$$

在强磁化等离子体中，离子拉莫尔半径远小于系统尺度，并且通常热等离子体压强 $p \propto nT_i$ 远小于磁压强 $p_m = B^2/8\pi$，则有

$$\beta := \frac{4\pi n_0 T}{B_0^2} = \frac{v_{si}^2}{\gamma_i v_A^2} \ll 1, \tag{2.19}$$

因此， $v_s \ll v_A$。观察（2.15）和（2.16）可知，在这种情况下，慢磁声波简化为离子声波，$\omega_{SM}^2 = k_\parallel^2 v_s^2$；而快波的色散关系则简化为$\omega_{FM}^2 = k^2 v_A^2$，并成为所谓的压缩阿尔芬波。

2.1.2 非均匀等离子体

在非均匀等离子体中，其密度和压强沿某一给定方向变化，例如沿与磁场$\mathbf{B}_0(x) = B_0(x)\hat{\mathbf{z}}$正交的$x$ 方向变化，某个一般物理量 $\mathcal{F}$ 的扰动可表示为

$$\delta\mathcal{F}(x,y,z,t) = \delta\mathcal{F}(x)e^{\mathrm{i}\left(k_y y + k_\parallel z - \omega t\right)}. \tag{2.20}$$

因此，连续性方程为

$$\mathrm{i}\omega\delta\varrho = \frac{\mathrm{d}\varrho_0}{\mathrm{d}x}\delta v_x + \varrho_0\left(\frac{\mathrm{d}\delta v_x}{\mathrm{d}x} + \mathrm{i}k_y\delta v_y + \mathrm{i}k_z\delta v_z\right), \tag{2.21}$$

而（1.20）为

$$\mathrm{i}\omega\delta p = \gamma p_0\left(\frac{\mathrm{d}\delta v_x}{\mathrm{d}x} + \mathrm{i}k_y\delta v_y + \mathrm{i}k_z\delta v_z\right). \tag{2.22}$$

安培定律（1.22），考虑欧姆定律（1.24) 后，一般写作

$$\mathrm{i}\omega\delta\mathbf{B} = -\nabla\times\left(\delta\mathbf{v}\times\mathbf{B}_0\right), \tag{2.23}$$

or,

$$\delta\mathbf{B} = \nabla\times\left(\delta\boldsymbol{\xi}\times\mathbf{B}_0\right), \tag{2.24}$$

即为 $\delta\boldsymbol{\xi}$ 等离子体位移。同时，动量方程变为

$$\varrho_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta\boldsymbol{\xi} = -\nabla\delta\tilde{p} + \frac{1}{4\pi}\left(\mathbf{B}_0\cdot\nabla\right)^2\delta\boldsymbol{\xi} - \frac{1}{4\pi}\mathbf{B}_0\left(\mathbf{B}_0\cdot\nabla\right)\left(\nabla\cdot\delta\boldsymbol{\xi}\right), \tag{2.25}$$

其中， $\tilde{p}$ 表示压强扰动总量，包括动理学压强扰动和磁压强扰动,

$$\delta\tilde{p} = \delta p + \frac{B_0\delta B_\parallel}{4\pi}. \tag{2.26}$$

特别地，对于 (2.25) 的平行 z 分量，我们有

$$\left(\varrho_0\omega^2 - \frac{B_0^2}{4\pi}k_\parallel^2\right)\delta\xi_\parallel = \mathrm{i}k_\parallel\delta\tilde{p} + \frac{B_0^2}{4\pi}\mathrm{i}k_\parallel\left(\mathrm{i}k_\parallel\delta\xi_\parallel + \mathrm{i}k_y\delta\xi_y + \frac{\mathrm{d}\delta\xi_x}{\mathrm{d}x}\right), \tag{2.27}$$

或者，乘以 $4\pi/B_0^2$,

$$D_A\delta\xi_\parallel = \frac{4\pi}{B_0^2}\mathrm{i}k_\parallel\delta\tilde{p} + \mathrm{i}k_\parallel\left(\mathrm{i}k_\parallel\delta\xi_\parallel + \mathrm{i}k_y\delta\xi_y + \frac{\mathrm{d}\delta\xi_x}{\mathrm{d}x}\right), \tag{2.28}$$

其中 $D_A(x) := \frac{\omega^2}{v_A^2(x)} - k_\parallel^2$。同样地，我们得到

$$D_A\delta\xi_x = \frac{4\pi}{B_0^2}\frac{\mathrm{d}\delta\tilde{p}}{\mathrm{d}x}, \tag{2.29}$$

$$D_A\delta\xi_y = \frac{4\pi}{B_0^2}\mathrm{i}k_y\delta\tilde{p}. \tag{2.30}$$

因此，在全部三个分量中，当剪切阿尔芬波色散关系在局部得到满足时，左端为零。以下第一步使用（1.20），第二步使用（2.25），（2.26）明确写为

$$\begin{aligned}\delta\tilde{p} &= -\delta\xi_x\frac{\mathrm{d}p_0}{\mathrm{d}x} - \gamma p_0\left(\nabla\cdot\delta\boldsymbol{\xi}\right) + \frac{B_0\delta B_\parallel}{4\pi} = \\ &= -\mathrm{i}k_\parallel\gamma p_0\delta\xi_\parallel - \left(\gamma p_0 + \frac{B_0^2}{4\pi}\right)\left(\mathrm{i}k_y\delta\xi_y + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta\xi_x\right).\end{aligned} \tag{2.31}$$

将（2.28）代入此方程，并考虑到（2.30），我们得到

$$\delta\xi_\parallel = -\mathrm{i}\frac{\gamma\beta k_\parallel v_A^2}{2\omega^2 - \gamma\beta k_\parallel^2 v_A^2}\nabla\cdot\delta\boldsymbol{\xi}_\perp; \tag{2.32}$$

借助同样的三个方程，我们还可以得到

$$\delta\xi_y = \frac{\mathrm{i}\overline{\alpha}k_y}{\overline{\alpha}k_y^2 - D_A}\frac{\mathrm{d}\delta\xi_x}{\mathrm{d}x}, \tag{2.33}$$

with

$$\overline{\alpha} := 1 + \frac{\gamma\beta\omega^2}{2\omega^2 - \gamma\beta k_\parallel^2 v_A^2}. \tag{2.34}$$

将 (2.33) 与 (2.29) 和 (2.30) 结合，我们最终得到方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{B_0^2 D_A\overline{\alpha}}{\overline{\alpha}k_y^2 - D_A}\frac{\mathrm{d}\delta\xi_x}{\mathrm{d}x}\right) - B_0^2 D_A\delta\xi_x = 0. \tag{2.35}$$

该方程及其解在 $D_A\alpha = 0$时是奇异的，即当 $\alpha = 0$ 中任一条件成立时，这对应于离子声波的色散关系，

$$\omega^2 = \omega_s^2(x) := \frac{k_\parallel^2 v_s^2(x)}{1 + \frac{v_s^2(x)}{v_A^2(x)}}, \tag{2.36}$$

或 $D_A = 0$，对应于

$$\omega^2 = \omega_A^2(x) := k_\parallel^2 v_A^2(x), \tag{2.37}$$

即非均匀等离子体的剪切阿尔芬波色散关系：在这两种情况下，谱自然都是非均匀且连续的。在冷等离子体中，$\gamma\beta \ll 1$，因此 $\alpha \approx 1$ 和离子声波受到抑制，这正如我们所预期的；此外，

$$\delta\xi_{\parallel} = 0, \tag{2.38}$$

因此，只有垂直力平衡相关；根据（2.25）和（2.26），它可写为

$$D_A \delta\boldsymbol{\xi}_{\perp} = \nabla_{\perp}\left(\frac{\delta B_{\parallel}}{B_0}\right). \tag{2.39}$$

注意，$k_y^2 \sim a^{-2}$，其中 a 是垂直于背景磁场的宏观尺度长度，而 D_A 可取为 $k_{\parallel}^2$的量级，并随纵向长度按 L^{-2}变化：由于通常有 $a < L$ （下一章研究的柱形等离子体模型肯定符合这一情况），因此 $|D_A| \ll k_y^2$，且（2.35）可简化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{B_0^2 D_A}{k_y^2}\frac{\mathrm{d}\delta\xi_x}{\mathrm{d}x}\right) - B_0^2 D_A \delta\xi_x = 0, \tag{2.40}$$

也就是说，

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\omega^2 - \omega_A^2\right)\frac{\partial}{\partial x} - k_y^2\left(\omega^2 - \omega_A^2\right)\right)\delta\xi_x = 0. \tag{2.41}$$

令 ω^2 等于 $-\partial_t^2$，并忽略相对于 ∂_x 而言的 k_y （这一假设将在事后得到论证），该方程可化为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_A^2\right)\frac{\partial}{\partial x}\delta\xi_x = 0. \tag{2.42}$$

对 t 积分可得

$$\frac{\partial}{\partial x}\delta\xi_x(x,t) = C(x)e^{\pm \mathrm{i}\omega_A(x)t} \tag{2.43}$$

并且很容易验证，对于 $t \to \infty$，右侧是.....的导数

$$\delta\xi_x(x,t) \approx \pm\frac{C(x)}{\mathrm{i}\omega_A'(x)t}e^{\pm \mathrm{i}\omega_A(x)t}, \tag{2.44}$$

即 $\delta\xi_x$ 随时间按 $1/t$ 衰减。该结果意味着，在渐近情况下，

$$\frac{\partial}{\partial x} \approx k_x = \pm \mathrm{i}\omega_A'(x)t, \tag{2.45}$$

也就是说，波数的模值 $|k_x|$ 随时间增大，即波长减小：任何最初处于长尺度的扰动都会演变为短尺度扰动。方程 (2.45) 说明，可以渐近地忽略 $|k_y|$ ，相对于 $|k_x|$ 时间

在共振点 x_0附近，满足共振条件 $\omega_A^2(x_0) = \omega^2$ 时，我们可以将阿尔芬频率写为

$$\omega_A^2(x) \approx \omega^2 + \left(\omega_A^2\right)'(x_0)\,(x - x_0) \tag{2.46}$$

于是，(2.42) 可写为

$$(x - x_0)\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\delta\xi_x + \frac{\partial}{\partial x}\delta\xi_x = 0, \tag{2.47}$$

对于 $x \neq x_0$，其解为

$$\delta\xi_x = C\ln(x - x_0) + D, \tag{2.48}$$

其中，C 和 D 为常数，这显然在 x_0 处具有奇点。换言之，该奇点是对数型的，并且与 (2.45) 一致，这表明在时间渐近极限下会产生任意短的尺度。在极限 $|D_A| \ll k_y^2$ 下仍使用 (2.33)，(2.42) 和 (2.43) 得到

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_A^2\right)\delta\xi_y = 0 \tag{2.49}$$

因此，

$$\delta\xi_y(x,t) = \frac{\mathrm{i}}{k_y}C(x)e^{\pm\mathrm{i}\omega_A(x)t} = \delta\xi_y(x,0)e^{\pm\mathrm{i}\omega_A(x)t}: \tag{2.50}$$

位移的 y 分量在 SAW 连续谱频率处表现出无阻尼振荡。(2.50) 式还允许我们将 (2.44) 改写为

$$\delta\xi_x(x,t) \approx \mp\frac{k_y}{\omega_A'(x)t}\delta\xi_y(x,0)e^{\pm\mathrm{i}\omega_A(x)t}. \tag{2.51}$$

最后，由（2.24）可知，磁场和位移扰动成正比（并且“处于求积关系”），

$$\delta B_{x,y} = \mathrm{i}B_0 k_\parallel \delta\xi_{x,y}, \tag{2.52}$$

因此，对于 δB_x，剪切阿尔芬波方程也是

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_A^2\right)\frac{\partial}{\partial x}\delta B_x = 0, \tag{2.53}$$

具有随时间衰减的解

$$\delta B_x(x,t) \approx \mp\frac{k_y}{\omega_A'(x)t}\delta B_y(x,0)e^{\pm\mathrm{i}\omega_A(x)t}, \tag{2.54}$$

并且，在共振附近，

$$\delta B_x \approx C'\ln(x - x_0) + D'. \tag{2.55}$$

x 中的每一点都以不同的频率 $\omega_A(x)$ 振荡，这是相位混合 [39, 37] 以及（2.45）的体现。空间相位混合是指在剪切阿尔芬波共振附近 x 方向上的相位 $\mathrm{i}(k_y y + k_\parallel z - \omega t)$快速发生空间变化，也就是说， x 方向上相邻的点在相位上失去相关性，对应于 $k_x \sim \omega_A' t$以及随时间衰减的奇异结构（如 $1/t$）。正如我们将看到的，这也对应于向动理学阿尔芬波的模转换。与此同时，至于另一个垂直磁场涨落分量，

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_A^2\right) \delta B_y = 0, \tag{2.56}$$

也就是说，

$$\delta B_y(x,t) = \delta B_y(x,0) e^{\pm \mathrm{i}\omega_A(x)t}, \tag{2.57}$$

随着时间推移，在渐近意义下， $\partial_x \ln \delta B_y = k_x$，如式（2.45）所示：另见图2.1 [65, 66]。事实上， y 、 $\delta\boldsymbol{\xi}$ 和 $\delta\mathbf{B}$ 的分量方程也可以通过从式（2.41）中忽略相对于 ∂_x^2的 k_y^2，对 x 积分，然后类比 $\nabla \cdot \delta\mathbf{B} = \partial_x \delta B_x + k_y \delta B_y = 0$使用 $\nabla \cdot \delta\xi \approx 0$ 而得到。

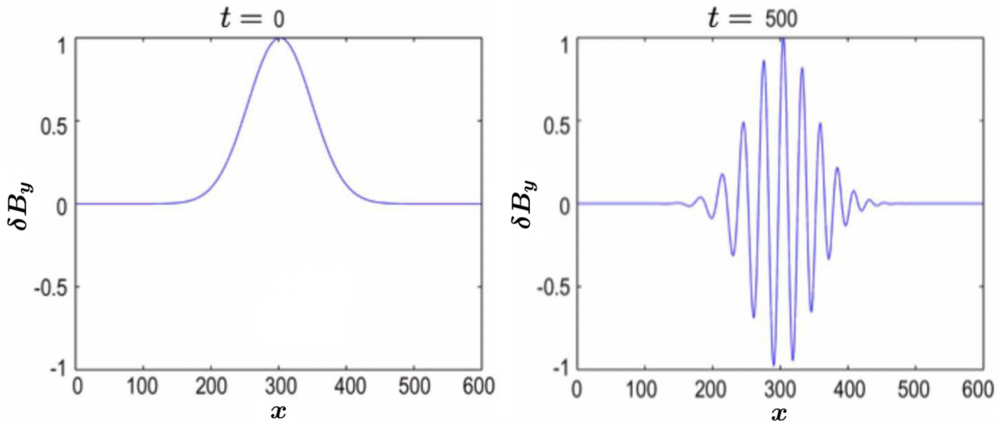


图2.1 不同时刻相对于 x 的 $\delta B_y(x,t)$ 空间结构快照，展示了较晚时刻短尺度结构的形成。图片取自 *[65, 66]*中的原图。

在非均匀情况下，剪切阿尔芬波谱具有局域性，且波长随 t^{-1} 减小；这导致波动方程出现奇点，并意味着短尺度的产生。特别是，(2.48) 和 (2.55) 表明，非均匀方向上的扰动会在阿尔芬共振层 $x = x_0$ 处发展出对数奇异性，也就是说，该层满足 $\omega^2(x_0) = \omega^2$，同时共振波能量吸收率有限。此类奇点的存在自然表明，在理想磁流体力学流体描述中被忽略的微观长度尺度物理过程，应纳入剪切阿尔芬波的长时间尺度动力学中；流体的宏观描述也必须由动力学描述取代。对于低频剪切阿尔芬波，相关且垂直于 $\mathbf{B}_0$, 的微观尺度为 [17] ，即离子拉莫尔半径 $\rho_i = v_{Ti}/\Omega_i$，其中 v_{Ti} 为

离子热速度，以及/或者 $\rho_s = v_s/\Omega_i$，其中 $v_s^2 \sim T_e/m_i$ 为离子声速（1.48）。在剪切阿尔芬波动力学中纳入有限 ρ_i 和/或 ρ_s 的影响，促成了所谓动理学阿尔芬波（KAW）的发现 [40, 41]。

2.2 动理学阿尔芬波（动理学阿尔芬波）

在上一节中，我们证明了，振荡频率沿非均匀性方向变化的连续谱的存在意味着一个相混过程[39, 37], ，根据这一过程，任何初始的剪切阿尔芬波结构扰动最终都会演化为短波长结构，而共振面处的奇点则表明，流体模型无法进一步提供有关这些尺度的信息。需要采用动理学理论方法来恰当地描述阿尔芬波的动力学；通过纳入有限离子拉莫尔半径（有限离子拉莫尔半径）和/或波粒相互作用等效应，该方法使得能够研究其中涉及的新型短波长结构，即动理学阿尔芬波（动理学阿尔芬波） [40, 41, 79, 80], 。动理学阿尔芬波的发现和首次讨论（始于1975-76 [40, 41]），略早于线性（在 1978 [7, 3] 中）和非线性（在 1982 [35]中）电磁回旋动理学理论的引入，通常被描述为采用维拉索夫动理学理论低频（$\omega \ll \Omega_i$）极限和/或漂移动理学理论方法的复杂过程，这使得在具有真实$\mathbf{B}_0(x)$的非均匀等离子体中分析动理学阿尔芬波动力学变得难以处理，尤其是在处理非线性物理时；在这种情况下，人们采用了漂移动理学或双流体描述 [59, 61, 62, 63, 64, 82]。此外，这类近似除了不适用于处理真实的等离子体状态之外，还常常忽略重要的物理效应，例如舍弃有限离子拉莫尔半径效应，因此近年来 [14, 15, 85, 17], 促使人们采用强大的非线性回旋动理学理论，重新研究动理学阿尔芬波的线性和非线性物理。

忽略非线性项（将在第 5 章中重新引入）和漂移项（因为漂移速度与热速度之比按 $\rho_i/L \ll 1$ 的尺度变化；不过，在圆柱形等离子体中忽略漂移项的影响将在第 4.1.1 节中详细讨论），以及碰撞后，回旋动理学方程（1.32）变为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_\parallel \frac{\mathbf{B}_0}{B_0}\cdot\nabla\right)\delta g = \frac{q}{T}F_M(\mathscr{E})\frac{\partial}{\partial t}\langle \delta L_g\rangle_\alpha, \tag{2.58}$$

其中，$\nabla = \nabla_{\mathbf{X}}$ 是关于回旋动理学坐标的梯度算子。对于频率为 ω 、平行波数为 $\mathbf{k}_\parallel$ 的平面波扰动，该方程的解为

$$\delta g_k = -\frac{q}{T}F_M J_0(k_\perp\rho)\frac{\omega}{k_\parallel v_\parallel - \omega}\delta L_k, \tag{2.59}$$

其中 $J_0(k_\perp\rho) = \langle e^{-\boldsymbol{\rho}\cdot\nabla}\rangle$，即第一类贝塞尔函数 J_0 体现了坐标变换的回旋平均。由于我们处理的是势函数，

基本方程是关于 $\delta\phi_k$ 的泊松方程，在 $|k\lambda_D| \ll 1$ 状态下即为准中性条件

$$\sum_{j=i,e} n_{0j} q_j \int \delta f_{jk}\, \mathrm{d}\mathbf{v} \approx 0, \tag{2.60}$$

其中 $\mathbf{v}$ 为粒子速度，而矢量势的安培方程为，

$$\nabla^2 \delta A_{\parallel k} = -\frac{4\pi}{c}\delta J_{\parallel k} = -\frac{4\pi}{c}\sum_{j=i,e} n_{0j} q_j \int v_\parallel \delta f_{jk}. \tag{2.61}$$

引入重新标度后的平行矢势

$$\delta\psi_k = \frac{\omega \delta A_{\parallel k}}{c k_\parallel}, \tag{2.62}$$

即 $\nabla\delta\psi \cdot \mathbf{B}_0/B_0 := -\partial_t \delta A_\parallel / c$，并使得总平行电场为

$$\delta E_{\parallel k} = -\frac{\mathbf{B}_0}{B_0}\cdot\nabla\left(\delta\phi - \delta\psi\right) = -\mathrm{i}k_\parallel \left(\delta\phi - \delta\psi\right)_k, \tag{2.63}$$

准中性方程或泊松方程（2.60）变为

$$\sum_j \left(\frac{n_0 q^2}{T_0}\right)_j \left\{\delta\phi_k + \Gamma_{0kj}\left[\xi_{kj} Z_{kj}\delta\phi_k - \left(1 + \xi_{kj} Z_{kj}\right)\delta\psi_k\right]\right\} = 0, \tag{2.64}$$

其中 $\Gamma_{0kj} = I_0(b_{kj})e^{-b_{kj}}$，$I_0$ 为修正贝塞尔函数，且 $b_{kj} := k_\perp^2 \rho_j^2 = k_\perp^2 T_j/(m_j\Omega_j^2)$，$\xi_{kj} = \omega/(|k_\parallel| v_{Tj})$ 和

$$Z_{kj} := Z\left(\xi_{kj}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\zeta^2}}{\zeta - \xi_{kj}}\,\mathrm{d}\zeta \tag{2.65}$$

是等离子体色散函数 [11, 34]。同时，将安培定律（2.61）代入关系式 $\nabla\cdot\delta\mathbf{J} = 0$，得到线性回旋动理学涡量方程

$$\frac{c^2}{4\pi\omega} k_\parallel^2 k_\perp^2 \delta\psi_k - \sum_j \left(\frac{n_0 q^2}{T_0}\right)_j \left(1 - \Gamma_{0kj}\right)\omega\delta\phi_k = 0. \tag{2.66}$$

注意，在理想磁流体力学极限 $\delta E_\parallel = 0$ （正如从(1.24) 中可以看出的那样），即 $\delta\phi = \delta\psi$。当波长与离子拉莫尔半径相当时，即 $|k_\perp\rho_i| \sim 1$，$|k_\perp\rho_e| \ll 1$以及因此，$\Gamma_{0ke} \approx 1$，前面的方程变为

$$\begin{aligned}\epsilon_{sk}\delta\phi_k &:= \left[1 + \xi_{ke} Z_{ke} + \tau\left(1 + \Gamma_k \xi_{ki} Z_{ki}\right)\right]\delta\phi_k = \\ &= \left[1 + \xi_{ke} Z_{ke} + \tau\Gamma_k\left(1 + \xi_{ki} Z_{ki}\right)\right]\delta\psi_k,\end{aligned} \tag{2.67}$$

$$\omega^2\delta\phi_k = k_\parallel^2 v_A^2 \frac{b_k}{1 - \Gamma_k}\delta\psi_k \tag{2.68}$$

其中

$$\epsilon_{sk} = 1 + \xi_{ke} Z_{ke} + \tau \left(1 + \Gamma_k \xi_{ki} Z_{ki}\right) \tag{2.69}$$

是慢声离子声波的介电常数，$\tau := T_{0e}/T_{0i}$ 和 $\Gamma_k := \Gamma_{0ki}$。引入 $\delta\phi_{\|k} = \delta\phi_k - \delta\psi_k$ 作为有效平行电势，我们最终得到

$$\epsilon_{sk}\delta\phi_{\|k} = -\tau\left(1 - \Gamma_k\right)\delta\psi_k, \tag{2.70}$$

$$\omega^2 \delta\phi_{\|k} = -\left(\omega^2 - k_\|^2 v_A^2 \frac{b_k}{1-\Gamma_k}\right)\delta\psi_k. \tag{2.71}$$

将（2.70）代入（2.71），我们得到

$$\left(\omega^2 - k_\|^2 v_A^2 \frac{b_k}{1-\Gamma_k}\right)\delta\psi_k = \omega^2 \frac{\tau\left(1-\Gamma_k\right)}{\epsilon_{sk}}\delta\psi_k, \tag{2.72}$$

由此可将动理学阿尔芬波色散关系表示为

$$\omega^2\left(1 - \frac{\tau\left(1-\Gamma_k\right)}{\epsilon_{sk}}\right) = k_\|^2 v_A^2 \frac{b_k}{1-\Gamma_k}. \tag{2.73}$$

在最低阶，并忽略代数上很小的电子朗道阻尼和指数上很小的离子朗道阻尼 [17, 39, 40]，我们可以写成 $\epsilon_{sk} \approx 1+\tau(1-\Gamma_k) =: \sigma_k$，因此动理学阿尔芬波实频率由此给出

$$\omega_{kr}^2 \approx k_\|^2 v_A^2 b_k \frac{1+\tau\left(1-\Gamma_k\right)}{1-\Gamma_k} = k_\|^2 v_A^2 \frac{\sigma_k b_k}{1-\Gamma_k}. \tag{2.74}$$

假设 $|k_\perp \rho_i|^2 \ll 1$并定义$\hat{}\rho^2 := (3/4+\tau)\rho_i^2$，我们最终将动理学阿尔芬波色散关系化简为

$$\omega_k^2 \approx k_\|^2 v_A^2 \left(1 + k_\perp^2 \hat{\rho}^2\right), \tag{2.75}$$

这是对剪切阿尔芬波色散关系 (2.13) 的最小扩展；在 $k_\perp^2 \rho_i^2 \to 0$ 极限下可精确还原，也就是说，此时有限离子拉莫尔半径效应变得可以忽略（长波极限）。

在 (2.75) 中令 $\omega_k^2 = -\partial_t^2$ 和 $k_\perp^2 = k_x^2 + k_y^2 = -\partial_x^2 - \partial_y^2$，对于 x 方向上的非均匀性，我们可以直接将 SAW方程 (2.56) 扩展为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_k^2\right)\delta B_y(x,t) = 0, \tag{2.76}$$

即形式上将剪切阿尔芬波色散关系 $\omega_A := k_\| v_A$ 用作定义，

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_A^2(x) - \hat{\rho}^2 \omega_A^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\delta B_y(x,t) = 0. \tag{2.77}$$

这些方程表明，有限离子拉莫尔半径的一个效应是消除了 $\omega^2 = \omega_A^2$处的奇点。根据（2.75），动理学波在 $\omega_k^2 > \omega_A^2$ 区域传播，并呈指数

衰减于 $\omega_k^2 < \omega_A^2$处，此时 k_x^2 显然为负（截止）。此外，（2.75）还表明，与磁流体力学情形不同，群速度具有非零的垂直分量，

$$\mathbf{v}_{g\perp} \approx \frac{\omega_A^2 \hat{\rho}^2}{\omega_k} \mathbf{k}_\perp. \tag{2.78}$$

总之，动力学描述超越了磁流体力学的奇异响应，引入了剪切阿尔芬波向动理学阿尔芬波的模转换。在长波极限下，（2.75）中的动理学修正 $k_\perp^2 \hat{} \rho^2$ 提供了定量描述从长波长磁流体力学扰动到短波长回旋动理学涨落之转换的最简单模型，这将在第4章中进一步分析。

2.2.1 动理学阿尔芬波的观测

Hasegawa 和 Chen [41], 指出，动理学阿尔芬波对等离子体粒子进行高效能量化（包括加热和加速）是实验室、空间和天体物理磁化等离子体中的普遍现象 [80], ，其对粒子输运的影响同样十分重要。

在实验室聚变等离子体中，实际的等离子体非均匀性和磁场几何结构通常在决定剪切阿尔芬波/动理学阿尔芬波模态结构及其稳定性方面发挥至关重要的作用 [16]; 例如，在环形聚变等离子体中，环向阿尔芬本征模（KTAE） [58] 可能存在于剪切阿尔芬波连续谱内，其动力学与动理学阿尔芬波的动力学有着内在联系。此外，实验室等离子体实验已经显示出剪切阿尔芬波本征模与动理学阿尔芬波之间存在耦合的证据 [78], ，后者还可能通过快模的模转换受到外部驱动 [32]。

然而，由于实验室等离子体中的诊断限制，大多数动理学阿尔芬波观测都是由卫星在日地空间等离子体环境中完成的。正如本章开头所述，这些环境正是促使阿尔芬波最初被引入物理学的原因之一。一个很好的例子是地球磁层中的地磁脉动：图2.2显示了由卫星 AMPTE CCE [28], 观测到的地球磁场振荡，展示了1987年3月6日02:30至17:30 UT整个轨道期间磁场数据的三分量动态功率谱。地磁 B_R从地心沿径向向外， B_E指向磁东，B_N 大致沿局部磁力线方向，分别对应于 B_x、 B_y和B_z。当卫星从晨侧向外移动时，由于 $|\mathbf{B}_0|$ 减小以及 $|k_\parallel|$ （磁力线长度增加）， ω_A 应当减小；这一点在 B_E的波频率中得到了清晰体现。 B_E是 $\delta\mathbf{B}$ 的方位角（东西向）分量（即有效 δB_y）。B_E 还显示，随着卫星向内朝向昏侧移动，波频率逐渐增加，这同样与 ω_A一致。此外，观测到的波频率由几个频带组成，这可以理解为沿磁力线方向驻波的谐波，即不同的 $k_\parallel$。

磁层中的剪切阿尔芬振荡与来自上游太阳风的激发有关：也就是说，动理学阿尔芬波由相互作用产生

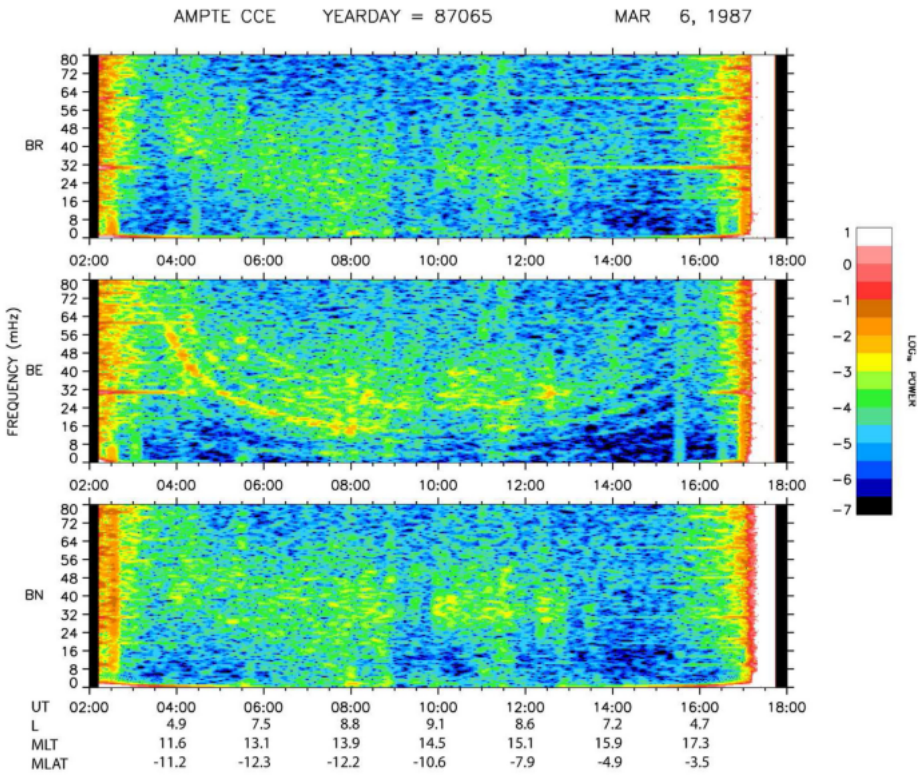


图2.2 来自 *[28]*原图的*AMPTE CCE*卫星磁场数据三分量动态功率谱。远地点位于图的中心。L、MLT和MLAT 分别对应磁力线的赤道距离（以地球半径为单位）、磁地方时和磁纬度。

太阳风与地球磁层之间。由于空间等离子体具有无碰撞性质，动理学效应会在准平行的所谓弓激波上游的前震区产生大振幅波和压力脉冲（图2.3）。当一个天体物体的磁层与附近流动的周围等离子体（例如太阳风）相互作用时，便会形成这种弓激波：对于地球和其他磁化行星而言，这是恒星风接近磁层顶时速度骤然下降所对应的边界；而对于恒星而言，该边界通常是星际泡的边缘，即恒星风与星际介质相遇之处。研究发现，前震区是（磁性）脉动连续型（Pc）磁层波的重要来源 [30, 29, 19, 22, 77]。有人提出，与前震区波的压缩模相关的模态转换过程，是直接驱动剪切阿尔芬场线共振产生频繁观测到的离散谐波频率的一种机制 [42, 40, 50]。事实上，在磁层顶边界附近，波极化经常表现出明显转变：从磁鞘中以压缩波为主，转变为边界层中的横向波 [72, 67, 8]。THEMIS观测 [8]显示，在磁层顶存在动理学阿尔芬波的湍流谱，其功率足以提供大规模的粒子输运；对前震区和磁层进行协同观测 [77] 发现了直接

由前震扰动驱动的脉动连续场线共振的证据。动理学阿尔芬波的主要模态识别方法基于波极化的测量，而波极化必须

$$\frac{c\delta\mathbf{E}_\perp}{\delta\mathbf{B}_\perp} = v_A\sqrt{\frac{b_k}{\sigma_k\left(1-\Gamma_k\right)}}, \tag{2.79}$$

减小为

$$\frac{c\delta\mathbf{E}_\perp}{\delta\mathbf{B}_\perp} = v_A \tag{2.80}$$

剪切阿尔芬波的相应数值；这种方法用于多种测量，例如利用范艾伦探测器在地球内磁层中进行的测量 [9] 以及利用 Cluster 卫星在太阳风中进行的测量 [69]，这两种测量的结果均与公式 (2.79) 给出的动理学阿尔芬波数值定性和/或定量相符。

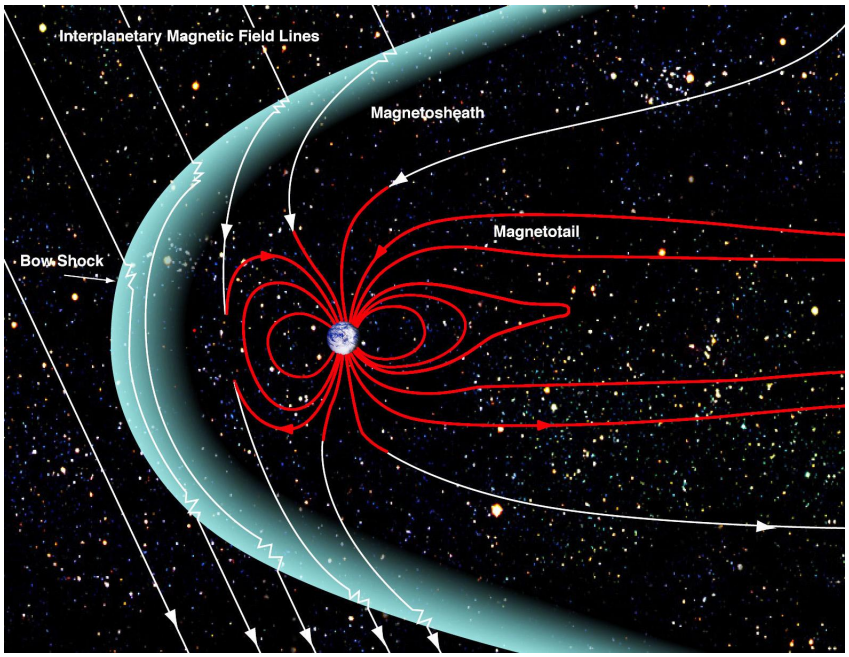


图2.3 地球向太阳一侧形成了一道超音速激波，即弓形激波。大多数太阳风粒子在弓形激波处被加热并减速，随后绕过地球，在磁鞘中流动。太阳风将地球背日侧的磁层拖曳至地球半径的约 *1000* 倍远处；其确切长度尚不清楚。磁层的这一延伸部分称为磁尾。地球受限地磁场的外边界称为磁层顶。

（图片来源：NASA/Goddard/Aaron Kaase[1]）

[1]https://www.nasa.gov/mission_pages/sunearth/multimedia/magnetosphere.html

强平行扰动电场下动理学阿尔芬波在磁尾能量输运和粒子加速中的作用 [17],

$$\left|\frac{c\delta E_{\parallel}}{\delta \mathbf{B}_{\perp}}\right| = v_A \left|\frac{k_{\parallel}}{k_{\perp}}\right| \tau \sqrt{\frac{b_k\left(1-\Gamma_k\right)}{\sigma_k}}, \tag{2.81}$$

直到最近才得到研究 [81], ，这表明电子束的能量增强是由动理学阿尔芬波引起的。

实验室实验中观察到的现象与卫星在空间等离子体中观测到的现象极为相似，从而激发了人们对动理学阿尔芬波日益浓厚的兴趣。

第3章

圆柱形等离子体中的剪切阿尔芬波

在本章以及接下来的章节中，我们将重点研究阿尔芬波在具有径向非均匀性的磁化周期性圆柱形等离子体中的相互作用（传播和吸收），其频率满足 $|\omega/\Omega_i| \ll 1$。

作为第一步，本章使用理想线性磁流体力学模型研究剪切阿尔芬波问题。正如上一章所述，空间非均匀性的存在通常对应于现实条件，它会使剪切阿尔芬波色散关系从一个常数值变为连续谱，并且振荡频率沿非均匀（径向）方向发生变化。

3.1 模型

考虑一个周期性的圆柱形等离子体（图3.1），其周期长度为 R，半径为a，且其轴沿 $\vec{z}$方向。非均匀性位于径向 r上，因此存在轴对称性，磁平衡构型为螺旋箍缩 [34]，即$\mathbf{B}_0(r) = (0, B_{0\theta}(r)\ B_{0z}(r))$。磁场的分量通过安培-麦克斯韦方程（(1.22)中的第二个方程）与等离子体电流密度的分量相关，

$$\frac{\mathrm{d}B_{0\theta}}{\mathrm{d}r} + \frac{B_{0\theta}}{r} = \frac{4\pi J_{0z}}{c}, \tag{3.1}$$

$$\frac{\mathrm{d}B_{0z}}{\mathrm{d}r} = -\frac{4\pi J_{0\theta}}{c}, \tag{3.2}$$

由于非均匀性纯粹为径向， $J_{0r}=0$。由于 $B_{0r}=0$，由（1.18）可得动量平衡的径向条件为，

$$\frac{\mathrm{d}p_0}{\mathrm{d}r}=J_{0\theta}B_{0z}-J_{0z}B_{0\theta}, \tag{3.3}$$

将（3.1）和（3.2）代入后，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(4\pi p_0+\frac{B_0^2}{2}\right)=-\frac{B_{0\theta}^2}{r}. \tag{3.4}$$

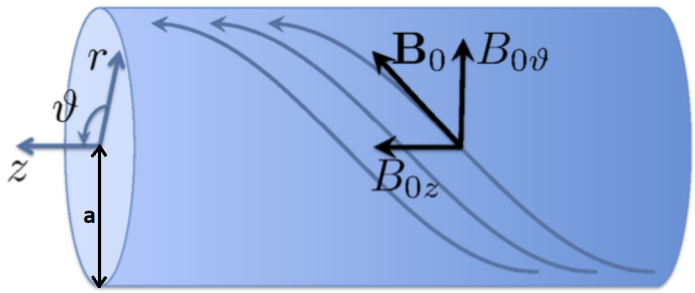


图3.1 磁化柱状等离子体。

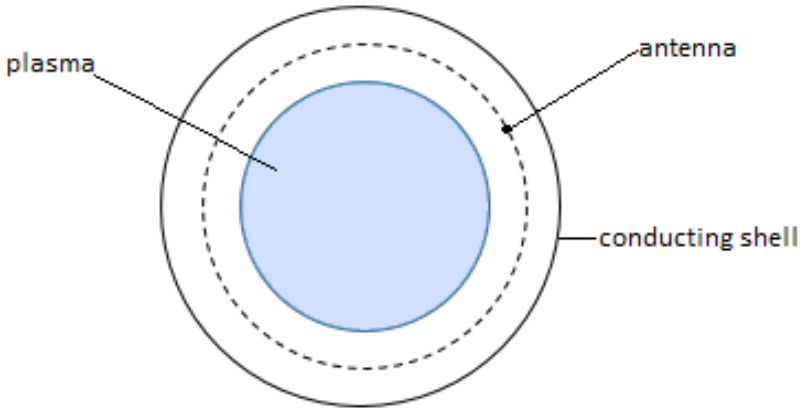


图3.2 横截面图。

等离子体柱外侧（图 3.2）环绕着一面半径为 b 的导电同轴圆柱壁；在真空区域内，距离为 d 且满足 $a<d<b$ 的位置处，天线载有振荡的螺旋电流密度 $\delta\mathbf{J}_h$，其分量为

$$\begin{gathered}\delta J_{rh}=0,\\ \delta J_{\theta h}=\delta\tilde{J}_{\theta h}e^{\mathrm{i}(-m\theta+kz-\omega_0 t)}\,\delta\left(r-d\right),\qquad \delta J_{zh}=-\frac{m}{kd}\delta\tilde{J}_{\theta h}e^{\mathrm{i}(-m\theta+kz-\omega_0 t)}\,\delta\left(r-d\right),\end{gathered} \tag{3.5}$$

其中， ω_0 是外部施加的天线频率， k 是 z 方向上的波数；为体现圆柱平衡态的周期性，通常将其记为 $k = n/R$； m 是方位波数。同时，δJ_{zh} 的表达式源于径向分量 $\delta J_{rh} = 0$ 的条件以及 $\nabla \cdot \delta \mathbf{J}_h = 0$。面电流密度为

$$\delta I_h = 2\pi d \delta J_{zh}. \tag{3.6}$$

这个简化模型中的天线会激发一个低频波。为方便起见，该波可用波动磁场的径向分量 δB_{rh} [44, 45] 表示。导电壁确保波在边界处发生完全反射， $\delta B_{rh}(r = b) = \delta E_{zh}(r = b) = 0$。通常，天线电流扰动以及表征等离子体的其他物理量的扰动 $\mathcal{F}$，都可以用傅里叶级数表示（采用通用的 ω）

$$\sum_{m,n} \delta \mathcal{F}_{mn}(r, \theta, z, t) = \sum_{m,n} \delta \mathcal{F}_{mn}(r) e^{\mathrm{i}\left(-m\theta + \frac{n}{R} z - \omega t\right)}. \tag{3.7}$$

由于在所考虑的圆柱等离子体平衡中，所有 (m, n) 分量均线性解耦，因此可以分别处理这些分量。省略冗余的 m, n 下标后，任意通用扰动可写为

$$\delta \mathcal{F}(r, \theta, z, t) = \delta \mathcal{F}(r) e^{\mathrm{i}\left(-m\theta + \frac{n}{R} z - \omega t\right)} = \delta \mathcal{F}(r) e^{\mathrm{i}(r k_\theta(r)\theta + k_z z - \omega t)}. \tag{3.8}$$

$\hat{}\,\hat{}$ 波数矢量因此为 $\mathbf{k} = k_r \hat{}\mathbf{r} + k_\theta \boldsymbol{\theta} + k_z \hat{}\mathbf{z} = k_r \hat{}\mathbf{r} - \boldsymbol{\theta} m/r + \hat{}\mathbf{z} n/R$，扰动物理量的梯度算子为

$$\nabla = \hat{\mathbf{r}} \partial_r + \mathrm{i} \hat{\boldsymbol{\theta}} k_\theta + \mathrm{i} \hat{\mathbf{z}} k_z. \tag{3.9}$$

为了更清晰地区分矢量场扰动相对于$\mathbf{B}_0$)的平行和垂直行为，我们基于磁力线及其单位向量引入一个正交归一投影

$$\begin{gathered} \mathbf{e}_r := \hat{\mathbf{r}}, \\ \mathbf{e}_\perp(r) := \frac{1}{B_0(r)} \left(0, B_{0z}(r), -B_{0\theta}(r)\right), \quad \mathbf{e}_\parallel(r) := \frac{\mathbf{B}_0}{B_0} = \frac{1}{B_0(r)} \left(0, B_{0\theta}(r), B_{0z}(r)\right), \end{gathered} \tag{3.10}$$

根据该关系，波数矢量可分解为

$$k_\perp(r) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_\perp(r) = -\frac{1}{B_0(r)} \left(B_{0z}(r) \frac{m}{r} + B_{0\theta}(r) \frac{n}{R}\right), \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned} k_\parallel(r) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_\parallel(r) &= \frac{1}{B_0(r)} \left(B_{0z}(r) \frac{n}{R} - B_{0\theta}(r) \frac{m}{r}\right) = \\ &= \left(n - \frac{m}{q(r)}\right) \frac{B_{0z}(r)}{R B_0(r)}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

其中

$$q(r) = \frac{rB_{0z}(r)}{RB_{0\theta}(r)} \tag{3.13}$$

等离子体的所谓安全因子，并且使扰动量的梯度算子变为

$$\nabla = \mathbf{e}_r\partial_r + \mathrm{i}\mathbf{e}_\perp k_\perp + \mathrm{i}\mathbf{e}_\parallel k_\parallel. \tag{3.14}$$

因此，剪切阿尔芬波色散关系为，

$$\omega_A^2(r) = k_\parallel^2(r)v_A^2(r) \tag{3.15}$$

其中 $k_\parallel$ 如（3.12）中所定义。

除电流片天线外，在等离子体与壁之间的真空区域（$a < r < b$），基本方程为麦克斯韦方程；不过，为避免阿尔芬速度发散所带来的问题（这些问题将在第 3.4 节中更清楚地说明），我们假设该区域存在一种密度近乎为零的冷等离子体。

3.1.1 场与势之间的关系

方程（2.24）在最低阶给出，

$$\delta B_r = \mathrm{i}k_\parallel B_0\delta\xi_r, \tag{3.16}$$

它是（2.52）的类似形式，并且

$$\delta B_\theta = \mathrm{i}k_\parallel B_0\delta\xi_\theta - r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{B_{0\theta}}{r}\right)\delta\xi_r. \tag{3.17}$$

当像我们的模型那样，$B_{0\theta} \ll B_{0z}$ 和 $B_{0z} \approx B_0$ 几乎均匀时，$\partial_r(B_{0\theta}/r) \approx -(B_0/m)\partial_r k_\parallel$，因此

$$\delta B_\theta \approx \mathrm{i}k_\parallel B_0\delta\xi_\theta - \frac{B_0 r}{m}\frac{\partial k_\parallel}{\partial r}\delta\xi_r, \tag{3.18}$$

最后，由于 $\nabla_\perp \cdot \boldsymbol{\xi}_\perp \approx 0$,

$$\begin{aligned}\delta B_\theta &= \frac{B_0 r}{m}\left(\frac{k_\parallel}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\delta\xi_r) + \frac{\partial k_\parallel}{\partial r}\delta\xi_r\right) = \\ &= \frac{B_0}{m}\frac{\partial}{\partial r}\left(rk_\parallel\delta\xi_r\right).\end{aligned} \tag{3.19}$$

（位移场和磁场）与势之间的关系，可先注意到，根据（1.24），$\nabla\delta\phi = -\delta\mathbf{E} = \delta\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0/c$，因此 $\mathbf{e}_\parallel \times \nabla\delta\phi = B_0\partial_t\delta\boldsymbol{\xi}_\perp/c$，由此可得

$$\delta\boldsymbol{\xi}_\perp = \frac{\mathrm{i}c}{\omega B_0}\mathbf{e}_\parallel \times \nabla\delta\phi, \tag{3.20}$$

也就是说，写成分量形式，

$$r\delta\xi_r = -\frac{cm}{\omega B_0}\delta\phi, \tag{3.21}$$

$$\delta\xi_\theta = \frac{\mathrm{i}c}{\omega B_0}\frac{\partial\delta\phi}{\partial r}, \tag{3.22}$$

并且，利用 (3.16)，

$$r\delta B_r = -\frac{\mathrm{i}cmk_\parallel}{\omega}\delta\phi, \tag{3.23}$$

$$\delta B_\theta = -\frac{c}{\omega}\frac{\partial\left(k_\parallel\delta\phi\right)}{\partial r}. \tag{3.24}$$

因此，当 B_0 几乎均匀时，标量势基本上由 $r\delta\xi_r$给出。由 MHD条件 (1.24) 还可推得 $\delta E_\parallel = 0 = \mathbf{e}_\parallel\cdot\nabla\phi - (1/c)\partial_t A_\parallel$，因此涉及平行矢势 $A_\parallel$ 的关系，

$$r\delta B_r = -\mathrm{i}m\delta A_\parallel, \tag{3.25}$$

$$\delta B_\theta = -\frac{\partial}{\partial r}\delta A_\parallel, \tag{3.26}$$

与 (3.23) 和 (3.24) 完全一致。

3.2 场方程和天线条件

在本节中，我们首先推导外部天线场，随后推导内部剪切阿尔芬波主方程。两个场之间的匹配条件就是内部解的边界条件。

3.2.1 天线方程

真空中的波动方程通常按以下方式由麦克斯韦方程导出：

$$\nabla^2\delta\mathbf{B} = -\nabla\times\nabla\times\delta\mathbf{B} = -\frac{4\pi}{c}\nabla\times\delta\mathbf{J} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\delta\mathbf{E} = -\frac{4\pi}{c}\nabla\times\delta\mathbf{J} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta\mathbf{B}; \tag{3.27}$$

由于 $[\nabla\times(r\delta\mathbf{B})]_r = [\nabla r\times\delta\mathbf{B}]_r + r[\nabla\times\delta\mathbf{B}]_r = r[\nabla\times\delta\mathbf{B}]_r$，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{r}\partial_r\left[r\partial_r\left(r\delta B_r\right)\right] + \frac{\partial_\theta^2(r\delta B_r)}{r^2} + \partial_z^2(r\delta B_r) - \frac{\partial_t^2(r\delta B_r)}{c^2} &= -\frac{4\pi r}{c}\left(\frac{\partial_\theta\delta J_z}{r} - \partial_z\delta J_\theta\right) = \\ &= \frac{4\pi\mathrm{i}r}{k_\theta c}\left(\frac{\partial_\theta^2\delta J_z}{r^2} + \partial_z^2\delta J_z\right).\end{aligned} \tag{3.28}$$

这里，我们对天线电流密度使用了 $(1/r)\partial_\theta\delta J_\theta + \partial_z\delta J_z = 0$ 。对于半径为 a 、天线位于 d 且载有电流 δI_h 的等离子体模型，外部导电壳层位于 b，并根据定义 $\nu := \sqrt{k_z^2 - \omega_0^2/c^2}$，方程 (3.28) 的解为：

对于 $a \le r < d$ （另见 [44, 45]），并引入 $|m|$ 阶第一类和第二类修正贝塞尔函数，分别记为 $I_{|m|}$ 和 $K_{|m|}$，

$$\begin{aligned} r\delta B_r = {} & \alpha_0 \left[I_{|m|}(\nu r) K_{|m|}(\nu b) - K_{|m|}(\nu r) I_{|m|}(\nu b) \right] \\ & - \frac{2\mathrm{i} m \delta I_h}{c\nu} \left(1 + \frac{k_z^2 d^2}{m^2} \right) \left[I_{|m|}(\nu r) K_{|m|}(\nu d) - K_{|m|}(\nu) I_{|m|}(\nu d) \right], \end{aligned} \tag{3.29}$$

其中 α_0 是一个取决于天线频率的常数，并且使用了

$$I_{|m|}(\nu d) K'_{|m|}(\nu d) - K_{|m|}(\nu d) I'_{|m|}(\nu d) = -\frac{1}{\nu d}, \tag{3.30}$$

而对于 $d < r \le b$，只有齐次解保留下来，

$$r\delta B_r = \alpha_0 \left[I_{|m|}(\nu r) K_{|m|}(\nu b) - K_{|m|}(\nu r) I_{|m|}(\nu b) \right]. \tag{3.31}$$

根据定义

$$\delta \hat{B}_{rh} := \frac{2m\delta I_h}{ca\nu} \left(1 + \frac{k_z^2 d^2}{m^2} \right), \tag{3.32}$$

解（3.29）可改写为

$$\begin{aligned} \frac{r}{a}\frac{\delta B_r}{B_0} = {} & -\mathrm{i}\frac{\delta \hat{B}_{rh}}{B_0} \Big\{ \left[I_{|m|}(\nu r) K_{|m|}(\nu d) - K_{|m|}(\nu r) I_{|m|}(\nu d) \right] \\ & + \alpha \left[I_{|m|}(\nu r) K_{|m|}(\nu b) - K_{|m|}(\nu r) I_{|m|}(\nu b) \right] \Big\} = \\ =: {} & -\mathrm{i}\frac{\delta \hat{B}_{rh}}{B_0} \left(y_{1\nu}(r) + \alpha y_{2\nu}(r) \right), \end{aligned} \tag{3.33}$$

或者，也，

$$y := \frac{r\delta\xi_r}{a^2} = \frac{x\delta\xi_r}{a} = -\frac{1}{k_\parallel a}\frac{\delta \hat{B}_{rh}}{B_0} \left(y_{1\nu} + \alpha y_{2\nu} \right), \tag{3.34}$$

为方便起见，引入归一化变量 $x := r/a$。复参数 α取决于天线频率，是齐次方程解与带有强迫项的特解（即天线解）之比，或者说是一种场/扰动比；正如我们将在第3.3 节中考察的那样，它是天线从外部向内区发射的坡印廷通量的度量。

3.2.2 SAW方程

磁场的曲率通过一个附加项修改动量方程（2.25），

$$\begin{aligned} \varrho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta\boldsymbol{\xi} = {} & -\nabla\delta\tilde{p} + \frac{1}{4\pi}\left(\mathbf{B}_0 \cdot \nabla \right)^2 \delta\boldsymbol{\xi} - \frac{1}{4\pi}\mathbf{B}_0 \left(\mathbf{B}_0 \cdot \nabla \right)\left(\nabla \cdot \delta\boldsymbol{\xi} \right) \\ & - \left(2\nabla \cdot \delta\boldsymbol{\xi} + \delta\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \right) \left(\frac{\mathbf{B}_0 \cdot \nabla \mathbf{B}_0}{4\pi} \right), \end{aligned} \tag{3.35}$$

在低 β 极限下容易得到 $\delta\xi_{\parallel}=0$，其中 β 为动理学压强与磁压强之比（见第 2.1.2 小节和公式 (2.38)）。与此同时，

$$\begin{aligned}\frac{\delta B_{\parallel}}{B_0}&=-\nabla\cdot\delta\boldsymbol{\xi}_{\perp}-\left(\boldsymbol{\kappa}+\frac{\nabla_{\perp}B_0}{B_0}\right)\cdot\delta\boldsymbol{\xi}_{\perp}=\\&=-\nabla\cdot\delta\boldsymbol{\xi}_{\perp}+2\frac{B_{0\theta}^2}{B_0^2 r}\delta\xi_r,\end{aligned}\tag{3.36}$$

其中 $\boldsymbol{\kappa}:=\mathbf{B}_0\cdot\nabla\mathbf{B}_0/B_0^2$ 是磁曲率。垂直力平衡方程 (2.39) 随后修改为

$$D_A\delta\boldsymbol{\xi}_{\perp}=\nabla_{\perp}\left(\frac{\delta B_{\parallel}}{B_0}\right)-\hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{B_{0\theta}^2}{r^2B_0^2}\right)r\delta\xi_r+\frac{2\mathrm{i}k_{\parallel}B_{0\theta}}{rB_0}\left(\hat{\mathbf{r}}\delta\xi_{\theta}-\hat{\boldsymbol{\theta}}\delta\xi_r\right).\tag{3.37}$$

在 $|D_A|\ll k_{\theta}^2$ 极限下（见第 2.1.2 小节），并考虑到

$$\left(1-\frac{D_A}{k_{\theta}^2}\right)^{-1}\approx\left(1+\frac{D_A}{k_{\theta}^2}\right),\tag{3.38}$$

(3.37) 的 θ 分量是

$$\delta\xi_{\theta}\approx\left(1+\frac{D_A}{k_{\theta}^2}\right)\frac{\mathrm{i}}{k_{\theta}r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\delta\xi_r\right)+\frac{2\mathrm{i}}{k_{\theta}^2 r}\left(k_{\parallel}\frac{B_{0\theta}}{B_0}-k_{\theta}\frac{B_{0\theta}^2}{B_0^2}\right)\delta\xi_r.\tag{3.39}$$

将此方程代入（3.36）以及（3.35）的 r 分量，分别可得。

$$\frac{\delta B_{\parallel}}{B_0}=\frac{D_A}{k_{\theta}^2 r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\delta\xi_r\right)+\frac{2k_{\parallel}\delta\xi_r}{k_{\theta}r}\frac{B_{0\theta}}{B_0}\tag{3.40}$$

以及波动方程处

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(rD_A\frac{\partial}{\partial r}\left(r\delta\xi_r\right)\right)-m^2D_A\delta\xi_r+r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\left(2k_{\parallel}\frac{B_{0\theta}}{B_0}-k_{\theta}\frac{B_{0\theta}^2}{B_0^2}\right)k_{\theta}\right]\delta\xi_r=0.\tag{3.41}$$

请注意，在典型情况下 $B_{0\theta}\ll B_{0z}$，

$$k_{\parallel}\approx\frac{n}{R}+k_{\theta}\frac{B_{0\theta}}{B_{0z}};\tag{3.42}$$

因此，(3.41) 变为

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(rD_A\frac{\partial}{\partial r}\left(r\delta\xi_r\right)\right)-\left(m^2D_A-r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}k_{\parallel}^2\right)\delta\xi_r=0.\tag{3.43}$$

在共振附近，并将 $|k_{\theta}|\ll|\partial_r|$ 作为第 2.1.2 小节中 $|k_y|\ll|\partial_x|$ 的类似物，我们发现，当趋近于 r_0时，

$$\delta\xi_r\approx C\ln\left(r-r_0\right)+D,\tag{3.44}$$

对于某些常数 C 和 D。因此，方程 (3.44) 描述了剪切阿尔芬波连续谱的径向奇异结构，这与在更简单的平板情形中讨论的情况类似。方程 (3.43) 描述了非均匀圆柱形等离子体中的剪切阿尔芬波振荡。在冷的稀薄等离子体极限下，例如当前情况下占据“真空”区域的等离子体，$\omega_0^2/\omega_A^2 \ll 1$，因此 $D_A \approx -k_\parallel^2$，得到

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(rk_\parallel^2\frac{\partial}{\partial r}\left(r\delta\xi_r\right)\right)-\left(m^2k_\parallel^2+r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}k_\parallel^2\right)\delta\xi_r=0. \tag{3.45}$$

当 $B_{0z}\approx B_0$ 几乎均匀时，并利用（3.16），可得

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(rk_\parallel^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r\delta B_r}{k_\parallel}\right)\right)-\left(\frac{m^2k_\parallel}{r}+\frac{\partial_r k_\parallel^2}{k_\parallel}\right)r\delta B_r=0, \tag{3.46}$$

或者，利用（3.1）和（3.42），方程 [44, 45]

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\delta B_r\right)\right)-\frac{m^2}{r^2}r\delta B_r-\frac{4\pi k_\theta\partial_r J_{0z}}{cB_0k_\parallel}r\delta B_r=0. \tag{3.47}$$

假设存在一个外力加在右端，其形式为，方程（3.41）或（3.43）也可以扩展为

$$-\frac{4\pi}{B_0^2c}k_\theta^2r^2\left(\delta\mathbf{J}\times\mathbf{B}_0\right)_r. \tag{3.48}$$

由于 $\delta J_r=0$ 和 $0=\nabla\cdot\delta\mathbf{J}=k_\theta\delta J_\theta+k_z\delta J_z$,

$$\frac{4\pi k_\theta^2r^2}{B_0^2c}\left(B_{0\theta}\delta J_z-B_0\delta J_\theta\right)=-\frac{4\pi k_\theta^2r^2\delta J_\theta B_0}{B_0^2ck_z}\left(k_z+k_\theta\frac{B_{0\theta}}{B_0}\right)=\frac{4\pi k_\theta r^2}{B_0^2c}\delta J_zB_0k_\parallel. \tag{3.49}$$

相应地，（3.47）可以扩展为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\delta B_r\right)\right)-\frac{m^2}{r^2}r\delta B_r-\frac{4\pi k_\theta\partial_r J_{0z}}{cB_0k_\parallel}r\delta B_r=-\frac{4\pi\mathrm{i}k_\theta r}{c}\delta J_z. \tag{3.50}$$

对于 $\partial_r J_{0z}=0$，取(3.50) 的真空极限，这对应于 (3.28) 的极限 $\omega_0^2\ll k_z^2c^2\ll k_\perp^2c^2$。

3.2.3 匹配条件

“真空”区域解(3.34)必须在等离子体边界处与内部等离子体解平滑连接，即与(3.41)或(3.43)的解连接；在这两种情况下，都是二阶常微分方程的解，即两个独立解的线性组合。由于正如我们所见，在共振层附近，这一线性组合变为 $D+C\ln(r-r_0)$，因此通常可将两个独立解 y_1 and y_2取为在趋近共振时分别表现为以下形式（记住 $x:=r/a$）

$$y_1(x\to r_0/a)\approx 1,\qquad y_2(x\to r_0/a)\approx\frac{\ln\left(x-x_0\right)}{R^2\partial_x\left(xD_A\right)}. \tag{3.51}$$

两个解是独立的，因为朗斯基行列式是

$$y_1 y_2' - y_1' y_2 = \frac{1}{R^2 x D_A} \neq 0. \tag{3.52}$$

用 y_1 和 y_2 的线性组合表示的内部解，分别与式 (3.34) 中的两个外部解 $y_{1\nu}$ 和 $y_{2\nu}$ 相匹配，但常数各不相同，

$$\begin{cases} Y_1(a) := -\frac{1}{k_\parallel a}\frac{\delta \hat{B}_r}{B_0} y_{1\nu}(a) = C_1 y_2(a) + D_1 y_1(a), \\ Y_2(a) := -\frac{1}{k_\parallel a}\frac{\delta \hat{B}_r}{B_0} y_{2\nu}(a) = C_2 y_2(a) + D_2 y_1(a), \end{cases} \tag{3.53}$$

因此也可以写作

$$\begin{aligned} y = x\frac{\delta \xi_r}{a} &= D_1 y_1 + C_1 y_2 + \alpha \left(D_2 y_1 + C_2 y_2\right) = \\ &= \left(C_1 + \alpha C_2\right) y_2 + \left(D_1 + \alpha D_2\right) y_1. \end{aligned} \tag{3.54}$$

边界条件需通过匹配导数来补充，

$$\begin{cases} Y_1'(a) = C_1 y_2'(a) + D_1 y_1'(a), \\ Y_2'(a) = C_2 y_2'(a) + D_2 y_1'(a), \end{cases} \tag{3.55}$$

以便将四个常数表示为 $y_{1,2}(a)$ 和 $y_{1,2}'(a)$ 的函数，

$$C_{1,2} = \frac{Y_{1,2} y_1'(a) - Y_{1,2}' y_1(a)}{y_1 y_2'(a) - y_1' y_2(a)}, \tag{3.56}$$

$$D_{1,2} = \frac{Y_{1,2} y_2'(a) - Y_{1,2}' y_2(a)}{y_1 y_2'(a) - y_1' y_2(a)}. \tag{3.57}$$

The (3.54) 的最后一项也定义了与内部区域的匹配条件。 ,

$$C = C_1 + \alpha C_2, \tag{3.58}$$

$$D = D_1 + \alpha D_2. \tag{3.59}$$

总之，如式 (3.34) 所示，按天线扰动的强度对线性解进行重新缩放后，趋近于 $r = r_0$ 处奇异层的内部区域解便由常数 α 唯一确定；如前所述，该常数表示齐次解与天线解之比。

3.3 坡印廷通量分析

坡印廷定理表述为

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{|\delta \mathbf{E}|^2 + |\delta \mathbf{B}|^2}{8\pi}\right) = -\frac{c}{4\pi}\nabla \cdot (\delta \mathbf{E} \times \delta \mathbf{B}) - \delta \mathbf{J} \cdot \delta \mathbf{E}, \tag{3.60}$$

但考虑到，在理想磁流体力学中且抗磁电流可忽略时，

$$\delta \mathbf{J}_\perp = \frac{c^2}{4\pi v_A^2}\frac{\partial}{\partial t}\delta \mathbf{E}_\perp, \tag{3.61}$$

它会变得

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\left(1+\frac{c^2}{v_A^2}\right)|\delta\mathbf{E}|^2+|\delta\mathbf{B}|^2}{8\pi}\right)=-\nabla\cdot\frac{c}{4\pi}(\delta\mathbf{E}\times\delta\mathbf{B}). \tag{3.62}$$

最后，将场写为

$$\delta\mathbf{E}=\frac{1}{2}\left(\delta\mathbf{E}_{mn}(r)e^{-\mathrm{i}\left(-m\theta+\frac{n}{R}z-\omega_0 t\right)}+c.c.\right), \tag{3.63}$$

$$\delta\mathbf{B}=\frac{1}{2}\left(\delta\mathbf{B}_{mn}(r)e^{-\mathrm{i}\left(-m\theta+\frac{n}{R}z-\omega_0 t\right)}+c.c.\right), \tag{3.64}$$

并对波周期和圆柱面通量取平均，可得

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\left(1+\frac{c^2}{v_A^2}\right)|\delta\mathbf{E}_{mn}|^2+|\delta\mathbf{B}_{mn}|^2}{16\pi}\right)=-\frac{c}{8\pi r}\partial_r\left[r\mathrm{Re}(\delta\mathbf{E}_{mn}\times\delta\mathbf{B}^*_{mn})_r\right], \tag{3.65}$$

其中，在包含多个傅里叶分量的情况下，默认对模数 m,n 求和。由于 $\delta E_\parallel=0$，我们有 $0=\delta\mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{B}=\delta E_\theta\delta B_\theta+\delta E_z\delta B_z$ 以及 $(\delta\mathbf{E}_{mn}\times\delta\mathbf{B}^*_{mn})_r=\delta E_{mn\theta}\delta B^*_{mn\parallel}$，因此利用（3.40）还可得

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\left(1+\frac{c^2}{v_A^2}\right)|\delta\mathbf{E}_{mn}|^2+|\delta\mathbf{B}_{mn}|^2}{16\pi}\right)=\frac{c}{8\pi r}\partial_r\left[r\mathrm{Im}\left(\frac{\omega_0 B_0^2 D_A}{ck_\theta^2 r}\delta\xi_r^*\partial_r(r\delta\xi_r)\right)\right], \tag{3.66}$$

按照当前记号，省略了等离子体径向位移的 mn 下标 $\delta\xi_r$。该公式意味着，当 $\delta\xi_r$ 为实数时，坡印廷通量为零。由于根据第 2.1.2 节的讨论以及（2.48），在共振$\delta\xi_r=C_m$附近，对于 $r>r_0$，有 $\ln(r-r_0)+D_m$（$r=r_0$ 是共振层的方程），因此成立（从现在起，为避免可能的混淆，仅保留下标 m to C_m）[39]

$$\delta\xi_r=C_m\left[\ln(r_0-r)-\mathrm{i}\pi\mathrm{sgn}\left(\frac{\omega_0}{(\omega_A^2)'}\right)\right]+D_m,\quad \text{for}\quad r<r_0. \tag{3.67}$$

虚部与共振和对数奇点的存在相关，它们是相位混合的体现 [39, 37]。(3.67) 中的虚部是根据“因果性约束”选取的；在实空间中，这对应于为描述朗道阻尼而对速度空间中的朗道轮廓进行修正。从这个角度来看，空间相位混合与波粒共振中的速度空间相位混合有着深层的共同根源 [37]。显然，共振必须存在于等离子体内部，这样波才能将能量传递给等离子体本身。系数 C_m 和 D_m，或者更准确地说，由于当前问题是线性的，它们的比值，必须根据等离子体边界处的条件求得，如上一节所示。然后，必须将解 (3.67) 延拓至等离子体中心，并在那里满足正则性条件。

这些条件最终将确定常数 α 以及外部天线产生的扰动的整体径向结构。对 (3.66) 积分，可得总能量的吸收率（波谱分量 m，n 中的吸收率），

$$W = 4\pi^2 R \int_0^a r\,\mathrm{d}r \left[\frac{\left(1+\frac{c^2}{v_A^2}\right)|\delta\mathbf{E}_m|^2 + |\delta\mathbf{B}_m|^2}{16\pi} \right]. \tag{3.68}$$

事实上，若对等离子体柱积分并应用斯托克斯定理，可得

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi^2}{2} r_0 R \frac{|C_m|^2 B_0^2}{(k_\theta^2 v_A^2)_{r=r_0}} |(\omega_A^2)'\omega_0|. \tag{3.69}$$

由 (3.40) 和 (3.66) 可知

$$\frac{\delta B_\parallel}{B_0} = \frac{D_A}{k_\theta^2 r}\partial_r\left(r\delta\xi_r\right) + \frac{2k_\parallel \delta\xi_r}{k_\theta r}\frac{B_{0\theta}}{B_0} \tag{3.70}$$

并且，右侧只有第一项的虚部会对 (3.66) 产生贡献。在共振附近展开 $D_A = (\omega_0^2 - \omega_A^2)/v_A^2$

$$D_A \approx -\frac{\left(\omega_A^2\right)'}{v_A^2}\left(r - r_0\right), \tag{3.71}$$

忽略不产生虚部的部分后，该项为

$$-\frac{\omega_A^{2\prime}}{v_A^2}\frac{r_0^2}{m^2}C_m, \tag{3.72}$$

也就是说，共振吸收仅取决于 C_m，而与 D_m 无关。将外部解 (3.33) 代入坡印廷通量及功率表达式中，仅考虑会产生有限功率通量的贡献，可得

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\delta\xi_r}{a}\right) \approx -\frac{\nu}{k_\parallel}\frac{\delta\hat{B}_{rh}}{B_0}\left(y_{1\nu}'(r) + \alpha y_{2\nu}'(r)\right), \tag{3.73}$$

以及时间和表面平均功率通量

$$\begin{aligned}
\overline{S}_r &= \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\left(\delta\mathbf{E}_m \times \delta\mathbf{B}_m^*\right)_r = -\frac{c}{8\pi}\mathrm{Im}\left(\frac{\omega_0 B_0^2 D_A}{c k_\theta^2 r}\delta\xi_r^*\partial_r\left(r\delta\xi_r\right)\right) = \\
&= -\frac{B_0^2}{8\pi}\mathrm{Im}\left[\frac{\omega_0 D_A a^3}{m^2}\left(x\frac{\delta\xi_r}{a}\right)^*\partial_x\left(x\frac{\delta\xi_r}{a}\right)\right] = \\
&= -\frac{B_0^2\omega_0\nu a^2 D_A}{8\pi m^2 k_\parallel^2}\left(\frac{\delta\hat{B}_{rh}}{B_0}\right)^2 \mathrm{Im}\alpha\left[(y_{1\nu}(r)y_{2\nu}'(r) - y_{1\nu}'(r)y_{2\nu}(r)\right] = \\
&= \frac{B_0^2\omega_0 a^2}{8\pi m^2 r}\left(\frac{\delta\hat{B}_{rh}}{B_0}\right)^2 \mathrm{Im}\alpha\left[(K_{|m|}(\nu d)I_{|m|}(\nu b) - K_{|m|}(\nu b)I_{|m|}(\nu d)\right],
\end{aligned} \tag{3.74}$$

在最后一步使用了朗斯基行列式恒等式

$$y_{1\nu}(r)y'_{2\nu}(r) - y'_{1\nu}(r)y_{2\nu}(r) = \frac{1}{\nu r}\left[(K_{|m|}(\nu d)I_{|m|}(\nu b) - K_{|m|}(\nu b)I_{|m|}(\nu d)\right] \tag{3.75}$$

并假设 $D_A \approx -k_\parallel^2$ 处于“真空”中。仅当 $\mathrm{Im}\alpha \neq 0$时通量才非零：因此， α （的倒数）是固定天线扰动下等离子体响应的度量，其虚部则通过相位混合提供有关等离子体吸收率的信息。总之，

$$\overline{S}_r = -\overline{S}_{rh}\,(d/r)\,, \tag{3.76}$$

正如预期的那样，对于在天线处计算的坡印廷通量（的模值），有

$$\overline{S}_{rh} := -\frac{B_0^2\omega_0}{8\pi m^2 d}\left(\frac{\delta\hat{B}_{rh}}{B_0}\right)^2 \mathrm{Im}\alpha\left[(K_{|m|}(\nu d)I_{|m|}(\nu b) - K_{|m|}(\nu b)I_{|m|}(\nu d)\right]. \tag{3.77}$$

类似地，对于等离子体解（3.54），我们也有

$$\begin{aligned} S_r &= -S_0 D_A \mathrm{Im}\left[(C_1+\alpha C_2)^* y_2 + (D_1+\alpha D_2)^* y_1\right]\left[(C_1+\alpha C_2)\,y'_2 + (D_1+\alpha D_2)\,y'_1\right] = \\ &= -S_0 D_A \left(y_1 y'_2 - y_2 y'_1\right)\mathrm{Im}\left[(C_1+\alpha C_2)\,(D_1+\alpha D_2)^*\right] = \\ &= \frac{S_0 a}{Rr}\mathrm{Im}\alpha\,(C_1 D_2 - D_1 C_2)\,, \end{aligned} \tag{3.78}$$

其中 $S_0 := \omega_0 B_0^2 a^3/(8\pi m^2)$。通过与真空中的功率通量进行比较，

$$(C_1 D_2 - D_1 C_2)\,\frac{a^2}{R^2} = \left(\frac{\delta\hat{B}_{rh}}{B_0}\right)^2\left[K_{|m|}(\nu d)I_{|m|}(\nu b) - K_{|m|}(\nu b)I_{|m|}(\nu d)\right], \tag{3.79}$$

这正如预期，是一个恒等式。这些方程本质上表明，存在一个指向内部的功率通量，在真空和等离子体中（直到 r_0）都按 $1/r$传播；与此同时，对于 $r < r_0$ 和 $r > d$，它会突然变为零。这正是稳态下天线产生的功率通量守恒以及其在共振面处被吸收所必须满足的条件。这一结论在当前的 MHD 极限下成立；在下一章中，我们将看到，在 $r = r_0$ 处表面上消失的坡印廷通量实际上描述了向动理学阿尔芬波的模转换。

3.4 平衡构型与数值结果

为求解场方程，我们设定等离子体平衡剖面，即密度、温度、电流、磁场和压强，并选择控制剪切阿尔芬波激发的天线参数。

3.4.1 平衡剖面

我们假设质量密度剖面

$$\varrho_0 = m_i n_0 = m_i n_0(0)\left[\left(1-x^2\right)^{\alpha_n} + n_\varepsilon\right]; \tag{3.80}$$

最后一项使得在距离轴 $r > a$ 处仍存在极少量等离子体粒子。采用这一（显然符合实际的）选择，其实际原因在于：否则，若密度趋于无穷小，阿尔芬速度将发散，从而给数值分析带来困难。温度剖面为

$$T_{0e,i} = T_{0e,i}(0)\left(1-x^2\right)^{\alpha_T}, \tag{3.81}$$

其中，在真空区域内 $T_{0e}(0)/T_{0i}(0) = \tau = 7/3$ 和 $T_{0e} = T_{0i} = 0$。电流密度，

$$J_{0z} = J_{0z}(0)\left(1-x^2\right)^{\alpha_J}, \tag{3.82}$$

在边界处降为零，并在整个真空区域内保持为零。该电流通过式（3.1）确定磁场的分量 $B_{0\theta}$，即

$$B_{0\theta} = \begin{cases} \frac{2\pi a J_{0z}(0)}{c(\alpha_J+1)x}\left[1-\left(1-x^2\right)^{\alpha_J+1}\right] & \text{for} \quad x<1, \\ \frac{2\pi a J_{0z}(0)}{c(\alpha_J+1)x} & \text{for} \quad x \geq 1. \end{cases} \tag{3.83}$$

根据定义

$$\overline{p}_0 := p_0 + \frac{B_{0z}^2 - B_{0z}^2(1)}{8\pi}, \tag{3.84}$$

平衡条件 (3.4) 得出

$$\begin{aligned} 4\pi\frac{\mathrm{d}\overline{p}_0}{\mathrm{d}x} &= -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}B_{0\theta}^2}{\mathrm{d}x} - \frac{B_{0\theta}^2}{x} = \\ &= -\frac{4\pi^2 a^2 J_{0z}^2(0)}{c^2\left(\alpha_J+1\right)^2 x^2}\left[2x\left(1-\left(1-x^2\right)^{\alpha_J+1}\right)\left(\alpha_J+1\right)\left(1-x^2\right)^{\alpha_J}\right]. \end{aligned} \tag{3.85}$$

p_0 场可以通过合流超几何函数进行解析积分；具体而言，对于 $x \leq 1$,

$$\begin{aligned} \overline{p}_0 = \frac{2\pi a^2 J_{0z}^2(0)}{c^2\left(\alpha_J+1\right)}\Bigg[&\frac{\left(1-x^2\right)^{\alpha_J+1}}{2\left(\alpha_J+1\right)}{}_2F_1\left(1,\alpha_J+1,\alpha_J+2,1-x^2\right) \\ &- \frac{\left(1-x^2\right)^{2\alpha_J+2}}{4\left(\alpha_J+1\right)}{}_2F_1\left(1,2\alpha_J+2,2\alpha_J+3,1-x^2\right)\Bigg], \end{aligned} \tag{3.86}$$

在边界处自动为零：更一般地，对于 $x \geq 1$，我们设定 $p_0 = 0$。在我们的情形中，

$$p_0 = n_0(0)T_0(0)\left(1-x^2\right)^{\alpha_n+\alpha_T}, \tag{3.87}$$

其中 $T_0(0) = T_{0i}(0)+T_{0e}(0)$，最终通过直接求解 (3.84) 得到 B_{0z} 关于 x 的函数。特别是，$p_0 - p_0 > 0$：因此（正如图3.3中的第一幅图所示），B_{0z} 略大于 $B_{0z}(1)$，对应着微弱的顺磁效应。在我们的模型中，$B_{0z}^2 \gg B_{0\theta}^2$ 也成立，因此 $B_{0z}(1) \approx B_0$。

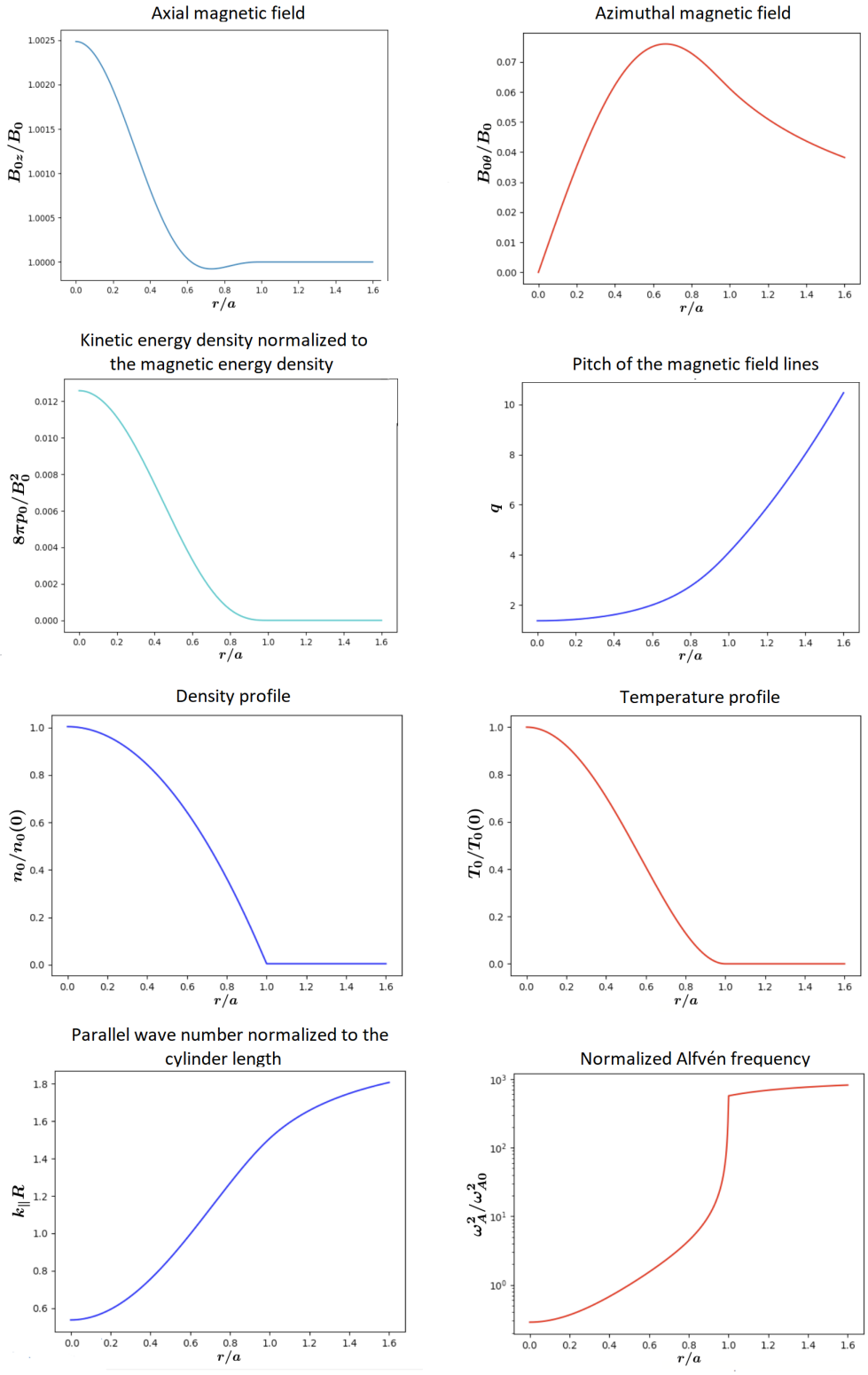


图3.3 等离子体平衡（B_0 为真空磁场，而 ω_{A0} ： $= B_0(0)(4\pi n_0 m_i)^{-1/2}/R$）。

3.4.2 参数

为多个参数所选取的数值是现实的，但主要仅用于说明，并不对应任何形式的优化。圆柱体的大半径为 $R = 2$ 米，小半径为 $a = 0.5$ 米，天线位于 $d = 0.65$ 米处，壁位于 $b = 0.8$ 米处。天线频率为 $\omega_0 = 3.14$ MHz，方位角和轴向模数为 $(m,\ n) = (2,\ 2)$。其余参数列于下方（B_0 为真空磁场）。

$$
\begin{array}{ccc}
n_0(0) = 10^{14}\ \mathrm{cm}^{-3} & T_{0e}(0) = 5\ \mathrm{keV} & J_{0z}(0) = 0.7 \cdot 10^{12}\ \mathrm{statA} \\
n_\varepsilon = 4 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{cm}^{-3} & T_{0i}(0) = 1.5\ \mathrm{keV} & \alpha_J = 2 \\
\alpha_n = 1 & \alpha_T = 2 & B_0 = 4 \cdot 10^4\ \mathrm{G}
\end{array}
$$

平衡函数和参数将共振层设定在约 $x_0 = 0.509$。

3.4.3 数值解

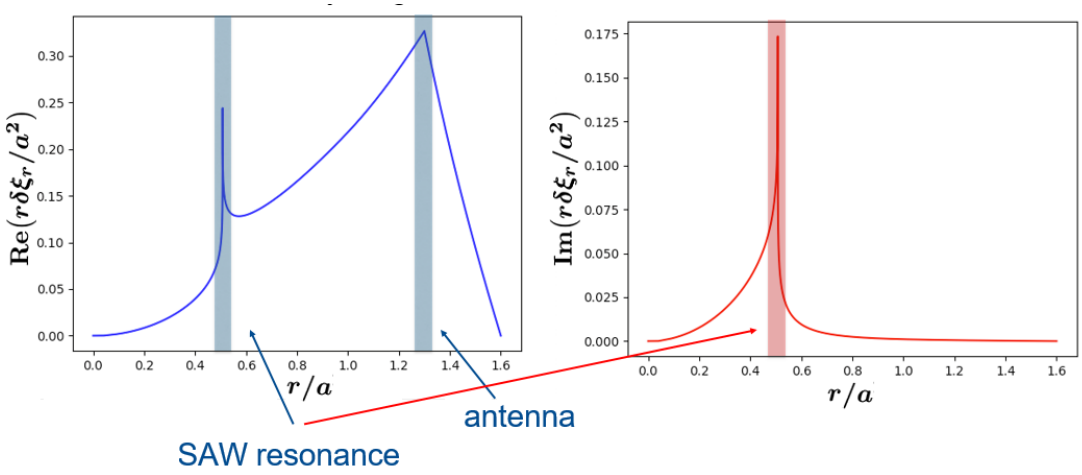


图3.4 径向位移（与磁场的径向变化相关），单位为ˆ（$-\delta B_{rh}/B_0$）。

对于前文所述、并由图 3.3 中的曲线展示的圆柱等离子体平衡，采用所列出的等离子体平衡参数，以及第 3.2.3 小节中讨论的磁轴处边界条件和正则性条件，使用一个自编的 Python 脚本（该脚本调用标准库积分器[1]），对式（3.43）形式的波动方程进行了数值建模并求解。图 3.4 展示了等离子体径向位移的解曲线 $y := x\delta\xi_r/a$，该位移按施加的天线扰动 $-\delta\hat{}B_{rh}/B_0$ 归一化（见式（3.34））， 并表示为距轴的归一化距离$x := r/a$ 的函数。不连续点位于共振面处，此处的天线

[1]具体而言，该解通过打靶法获得，使用scipy.integrate 库中的 solve_ivp 包，该包基于四阶 Runge-Kutta-Fehlberg 方法（RK45）。

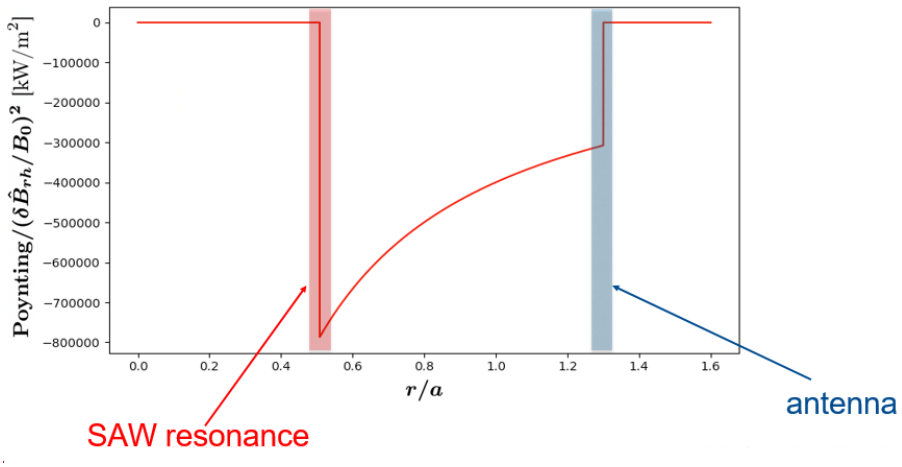


图3.5 坡印廷通量。向内的通量在真空和等离子体中（直至剪切阿尔芬波共振层）均为 $1/r$；在左侧区域（由于波吸收）以及天线与外壁之间的区域（由于波反射）中，通量为零。

频率满足局部剪切阿尔芬波色散关系，阿尔芬波形成径向（对数）奇异结构；在天线处，不连续性出现在一阶导数上（尖点），这简单地对应于穿过天线电流片，即对应于天线在稳态（时间渐近）下作为点源发射的坡印廷通量；天线向外发射的通量在壁处完全反射，因此对于 $d < r < b$，净通量为零。该通量决定了有限的能量吸收率（图3.5）。磁流体力学解给出了 $\mathrm{Re}\alpha = -0.65052655$ 和 $\mathrm{Im}\alpha = -0.00075303$，其精度受限于数值截断误差。

第 4 章

圆柱形等离子体中的动理学阿尔芬波：线性描述

连续谱的存在，以及振荡频率沿非均匀方向变化，决定了共振面处剪切阿尔芬波径向结构的奇点，这源于空间相位混合过程。在与离子拉莫尔半径相当的尺度上（超出磁流体力学的分辨率），动理学分析修正了这一图像，并表明剪切阿尔芬波会演化为动理学阿尔芬波（KAW）。因此，进一步的研究需要采用回旋动理学方法。

事实上，剪切阿尔芬波共振吸收的详细描述涉及线性磁流体力学描述未能涵盖的过程，这些过程既具有动理学特征，也具有非线性特征：本章将介绍圆柱形等离子体中动理学阿尔芬波的线性回旋动理学分析，而基于非线性回旋动理学的描述将在第 5 章给出。为了理解径向奇异结构如何消除，我们可以在假设 $k_\perp^2\rho_i^2 \ll 1$ [40, 41]的前提下，对所研究的问题采用线性回旋动理学方法。由此可推导出一个四阶常微分方程；当 $k_\perp^2\rho_i^2 \to 0$ 时，该方程可化为磁流体力学方程，其动理学解在共振半径处径向奇异层之外与磁流体力学长波解相匹配。下文将首先介绍这项分析。随后，作为长波极限的对照，我们将介绍适用于 $k_\perp^2\rho_i^2$ 任意取值的 WKB 和波包研究。在强阻尼极限下，动理学阿尔芬波在远离剪切阿尔芬波共振／模转换层之前便被完全吸收，此时可得到 Hasegawa 和 Chen [40, 41]以及 Itoh 及其同事 [44, 45]先前的研究结果。过去，人们对此情形尤为关注，因为它可能应用于聚变等离子体中由波引发的加热。

作为本研究的新成果，我们还讨论了弱阻尼极限：尽管这种情形与等离子体加热无关，但在此处仍具有重要意义，因为模转换动理学阿尔芬波可能引发多种非线性行为，这些行为将在下一章介绍。有趣的是，本分析展示了模转换层内的等离子体区域如何充当共振腔，使外部天线能够在给定频率下激发大振幅驻波。

4.1 模型和动力学阿尔芬波方程

模型与第3.1节介绍的相同，即长度为 $2\pi R$ 、半径为 a的周期性圆柱形等离子体，其轴沿 z方向，径向存在非均匀性，平衡磁场呈螺旋箍缩构型$\mathbf{B}_0 = (0,\ B_{0\theta}(r)\ B_{0z}(r))$。等离子体周围有一面半径为 b 的导电壁，并受到由天线发射的波的扰动；模型天线（见(3.5)）位于距离 d处。

第3章的核心结果具有普遍适用性；然而，对于等离子体波动方程，我们现在必须引入动力学阿尔芬波方程来代替SAW方程(3.43)。出发点是线性陀螺动理学方程(2.58)：该方程由(1.32)推导而来，推导时忽略了碰撞性、磁漂移和抗磁漂移以及非线性项。下面我们在柱面几何中进一步考察，在我们的线性描述中，漂移项是否可以忽略，以及在多大程度上可以忽略。

4.1.1 线性回旋动理学方程与漂移项的排序

让我们从包含漂移贡献的（离子）回旋动理学方程开始

$$\left(\partial_t + v_\parallel \nabla_\parallel + \mathbf{V}_d \cdot \nabla_\perp\right) \delta g = \frac{eF_M}{T} \frac{\partial \langle \delta L_g \rangle_\alpha}{\partial t} - \frac{c}{B_0} \mathbf{e}_\parallel \times \nabla \langle \delta L_g \rangle \cdot \nabla F_M. \tag{4.1}$$

从宏观角度来看，漂移贡献会消失，因为磁漂移速度通常为热速度的 ρ_i/R 阶；然而，为了进行更详细的分析，我们还必须考虑相关的微观涨落。因此，让我们聚焦于左侧第三项：在低 β 下，磁漂移速度为

$$\mathbf{V}_d \approx \frac{\mu B_0 + v_\parallel^2}{\Omega_i} \mathbf{e}_\parallel \times \boldsymbol{\kappa}, \tag{4.2}$$

其中曲率 $\boldsymbol{\kappa}$ 可表示为

$$\boldsymbol{\kappa} = -\frac{B_{0\theta}^2}{B_0^2 r} \hat{\mathbf{r}} \tag{4.3}$$

并且请记住， $B_0 \approx B_{0z}$，按比例变化的方式为

$$\kappa \sim \frac{r}{R^2}, \tag{4.4}$$

当$\Omega_i \sim v/\rho_i$时，其中隐含地有 $v = v_{i\circ}$ 由于 (4.2) 中的向量积， $\nabla_\perp$ 仅通过分量 k_θ 进入，因此我们得出 (4.1) 的第三项是.....阶

$$\frac{\rho_i k_\theta v r}{R^2}. \tag{4.5}$$

现在，第二项的阶数为 v/R；根据回旋动理学中的“最优”频率排序（将在下文进一步详细讨论），可以假设第一项的阶数也相同，即 $\omega \sim v/R$。因此，漂移项相对于第一和第二速度项的阶数为

$$\frac{\rho_i k_\theta r}{R} \ll 1 : \tag{4.6}$$

在回旋动理学中，这通常成立，因为 $r \ll R$；共振层 r_0 通常满足这一条件，除非它非常接近边界。与此同时，在长波极限下，结果 (4.6) 在边界附近仍然成立，此时 $|k_\theta \rho_i| \ll 1$（除非 m 非常高）。这里需要注意，这些结果依赖于 (4.3)，该式表达了 $\boldsymbol{\kappa}$ 与 $\hat{\mathbf{r}}$ 之间的正比关系：在圆柱几何中，曲率完全沿径向，且与磁通面正交，这意味着剪切阿尔芬波转化为动理学阿尔芬波所导致的涨落径向奇异性不会出现，最终使得漂移运动可以忽略不计。环形聚变等离子体的情况则有所不同，其测地曲率不为零。

虽然我们基于等离子体离子的典型回旋动理学排序进行了上述估计，但对于电子而言，磁漂移相对于（4.6）中的平行自由流项的重要性同样成立。事实上，粒子质量不会显式出现，除了在拉莫尔半径中出现；因此，根据（4.6），磁漂移修正更无须考虑。离子和电子两种情况下的不同之处在于，自由流项相对于显式时间变化项的相对排序。然而，在我们的分析中，这两项被置于同等地位，因此我们能够分析（朗道）阻尼对电子和离子的影响，具体如下文所述。

就抗磁项（右侧第二项）而言，其标度为

$$\frac{c k_\theta r}{B_0 a^2}, \tag{4.7}$$

而右侧第一项的阶数，在假设等离子体粒子具有典型的麦克斯韦分布时，为

$$\frac{e}{T}\omega \approx \frac{e}{T}\frac{v_{Ti}}{R\beta_i^{1/2}}, \tag{4.8}$$

将热能记作 T，并估算了作为天线谱发射的典型剪切阿尔芬波频率 $\omega \sim v_A/R \sim \beta_i^{-1/2} v_{Ti}/R$。因此，除以这个量，我们得到

抗磁贡献相对于右侧第一项的相对阶数,

$$\frac{TR\beta_i^{1/2}c}{ev_{Ti}}\frac{k_\theta r}{B_0a^2}=\frac{v_{Ti}\beta_i^{1/2}}{\Omega_i}\frac{k_\theta rR}{B_0a^2}=\rho_i k_\theta\frac{rR\beta_i^{1/2}}{a^2}; \tag{4.9}$$

根据为我们的模型所选取的真实参数，$\beta_i\sim10^{-2}$、$r/a\sim1/60$ 和$R/a\sim3$，因此 $rR/a^2\sim1/20<\frac{a^2}{R^2}\sim1/10$。因此，与对磁漂移项相关性的分析类似，我们得出结论：除非 $|k_\theta\rho_i|\ll1$条件被违反，否则在研究由天线激发的模转换 KAW 时，可以忽略抗磁修正。在第5 章研究由外部天线发射的KAW所诱导的非线性物理时，我们将看到，该条件确实可能被非线性产生的谱违反，并且抗磁效应可能在动力学中发挥至关重要的作用。由于抗磁效应通常比磁漂移效应大 $\sim(R^2/a^2)\,\beta_i^{1/2}$，正如通过比较（4.6）和（4.9）即可明显看出的那样，因此只考虑前者（见第 5 章）。

4.1.2 涡量方程

由陀螺动理学方程 (2.58) 可得涡量方程 (2.71)，我们将其写成如下形式

$$\nabla\cdot\left[\frac{\omega_k^2}{v_A^2}\frac{(1-\Gamma_k)}{b_k}\nabla_\perp\delta\phi_k-k_\parallel^2\nabla_\perp\delta\psi_k\right]+\left(\frac{1}{r}\partial_r k_\parallel^2\right)\delta\phi_k=0. \tag{4.10}$$

该方程通常是线性的，其写法使得可直接恢复 (3.43) 的长波 MHD 极限。同时，对于 $b_k\approx1$，也可重现 (2.71) 的 WKB 表达式。我们首先在 $k_\perp^2\rho_i^2\ll1$ 的极限下考察 (4.10)；在此极限下

$$\Gamma_k=I_0e^{-b_k}\approx1-b_k+\frac{3}{4}b_k^2 \tag{4.11}$$

因此，准中性方程 (2.70) 变为

$$\delta\phi_k=\left(1-\frac{\tau(1-\Gamma_k)}{\epsilon_{sk}}\right)\delta\psi_k\approx\left(1+\frac{\tau b_k}{\epsilon_{sk}}\right)\delta\psi_k, \tag{4.12}$$

将 (4.10) 转换为

$$\nabla\cdot\left[\frac{\omega_k^2}{v_A^2}\left(1-\frac{3}{4}b_k\right)-k_\parallel^2\left(1+\frac{\tau b_k}{\epsilon_{sk}}\right)\right]\nabla_\perp\delta\phi_k+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}k_\parallel^2\right)\delta\phi_k=0, \tag{4.13}$$

或者，同时记住 $b_k:=\rho_i^2k_\perp^2$ 并进一步定义

$$f_k(r):=\rho_i^2\left(\frac{3\omega_k^2}{4v_A^2(r)}+\frac{\tau k_\parallel^2(r)}{\epsilon_{sk}}\right), \tag{4.14}$$

in

$$\nabla \cdot \left(D_A - f_k k_\perp^2\right) \nabla_\perp \delta\phi_k + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} k_\parallel^2\right) \delta\phi_k = 0. \tag{4.15}$$

因此，对于 $b_k \ll 1$可得到一个描述我们问题（包括动理学效应）的四阶常微分方程，同时忽略抗磁漂移效应和磁漂移效应。介电常数 ϵ_{sk} 负责波吸收，并在理想的无吸收（无阻尼）极限下变为 $\epsilon_{sk} = 1$ 。与第3章一样，我们可以将 $\delta\phi$ 与 $r\delta\xi_r$对应起来。在MHD极限下， $b_k \to 0$ ，而准中性方程（4.12）再次给出结果 $\delta\phi = \delta\psi$ ；我们已经在第2.2节中从假设 $\delta E_\parallel = 0$ 推导出了该结果。反过来，有限的 $\delta E_\parallel$ 与有限离子拉莫尔半径相关。此外，结合（2.63）和（4.12）可以看出， $\delta E_\parallel$ 和 $\delta\phi$ 处于求积关系，除非等离子体色散函数 Z （ ϵ_{sk} 取决于它）引入了复数行为。有了 $b_k = 0$, （4.13）可化为二阶方程

$$\nabla \cdot \left(D_A \nabla_\perp \delta\phi_k\right) + \frac{\partial_r k_\parallel^2}{r} \delta\phi_k = 0, \tag{4.16}$$

这正是 MHD 主方程 (3.43)。考虑到

$$\nabla_\perp = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} - \mathrm{i}\hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{m}{r}, \tag{4.17}$$

以及这一点

$$k_\perp^2(r) = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{m^2}{r^2}, \tag{4.18}$$

方程（4.15）明确写为

$$\begin{aligned} & f_k \delta\phi_k'''' + \left(\frac{2f_k}{r} + \partial_r f_k\right) \delta\phi_k''' + \left(D_{Ak} + \frac{\partial_r f_k}{r} - \frac{2\left(m^2+1\right) f_k}{r^2}\right) \delta\phi_k'' \\ & + \left(\frac{\partial_r \left(r D_{Ak}\right)}{r} - \frac{m^2 \partial_r f_k}{r^2} + \frac{\left(6m^2+1\right) f_k}{r^3}\right) \delta\phi_k' \\ & + \left(\frac{\partial_r k_\parallel^2}{r} - \frac{m^2 D_{Ak}}{r^2} + \frac{\left(m^4 - 5m^2\right) f_k}{r^4}\right) \delta\phi_k = 0. \end{aligned} \tag{4.19}$$

4.1.3 约化方程

在 $r = r_0$ 处， D_A 消失，因此，当趋近共振半径时，我们可以写出

$$\frac{\omega_k^2}{v_A^2} - k_\parallel^2 = -a_1 \left(r - r_0\right), \tag{4.20}$$

其中，负号是由于以下事实： $\omega_k^2 > k_\parallel^2 v_A^2$ 对于 $r < r_0$ $\omega_k^2/v_A^2 \approx k_\parallel^2$ $a_2 = f_k b_k \approx a_2 \rho^2 k_\perp^2$ ；

此外，由于: ，我们得到 $k_\parallel^2$，并且的变化可以忽略不计

在 $r = r_0$ 周围的狭窄层中。$\hat{}\rho^2$ 中的介电常数可近似表示为 $\epsilon_{sk} \approx 1 + \tau(1 - \Gamma_k) + \mathrm{i}\sqrt{\pi}\xi_{ke}$，其中我们利用 $|\xi_{ki}| = \bar{}|\omega_k/(k_\parallel v_{Ti})| \gg 1$ 忽略指数级小的离子朗道阻尼，并利用 $|\xi_{ke}| = |\omega_k/(|k_\parallel|v_{Te})| \ll 1$ 将代数级小但有限的电子朗道阻尼 [40, 41, 44, 45]纳入考虑。我们将在动理学阿尔芬波的波包分析中更详细地讨论这一点。暂且，我们只需注意，$\hat{}\rho^2$ 的相应表达式可用于描述动理学阿尔芬波的强（阻尼）吸收，其原因在于其中小但有限的负虚部。同时，在弱阻尼/长波极限下，ϵ_{sk} 还可进一步简化为

$$\epsilon_{sk} \approx 1. \tag{4.21}$$

因此，对于 $r - r_0 \ll r_0$，并根据定义 $\hat{}a := a_1/a_2 > 0$，(4.13) 可简化为

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\hat{\rho}^2\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \hat{a}\,(r - r_0)\right]\frac{\partial}{\partial r}\delta\phi_k = 0. \tag{4.22}$$

注意到在将 B_0 视为常数时的 (3.21)，以及用于将物理标量场与无量纲量联系起来的 (3.34)，我们可以从 $\delta\phi$ 切换到 y，并定义 $z := \partial_x y$、引入积分常数 C，还可以将上述方程改写为含非齐次项的艾里方程

$$\left[\hat{\rho}^2\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \hat{a}\,(r - r_0)\right] z = -\hat{a}C. \tag{4.23}$$

通过引入 $s := (r - r_0)/(\hat{}\rho^2/\hat{}a)^{1/3}$ 和 $K := -C/(\hat{}\rho^2/\hat{}a)^{1/3}$，我们可以对 (4.23) 进行尺度变换，最终得到

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} - s\right) z = K. \tag{4.24}$$

s 变量是无量纲的，并通过.....与无量纲变量 x 相关联 h

$$s = \left(\frac{\overline{\rho}^2}{\overline{a}}\right)^{-1/3}(x - x_0)\,, \tag{4.25}$$

其中 $\overline{\rho} := \hat{}\rho/a$，且$\bar{}$ $a := \hat{}a a_\circ$ 在共振附近，方位角磁场满足与 (4.24) 同类的方程：事实上，在这种情况下，动理学阿尔芬波的时空演化由 (2.77) 的类似方程所支配，即

$$\left(\frac{\hat{\rho}^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r} - 1 - \frac{1}{\omega_A^2(r)}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\delta B_\theta(r,t) = 0, \tag{4.26}$$

在稳态下，使用拉普拉斯变换和 $s = -\mathrm{i}\omega$，也可得到方程

$$\left(\frac{\hat{\rho}^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r} - 1 + \frac{\omega^2}{\omega_A^2(r)}\right)\delta B_\theta(r) = \delta B_{\theta 0}. \tag{4.27}$$

在 r_0 附近，我们可以进行级数展开 $\omega_A^2 \approx \omega_0^2 + (\omega_A^2)'(r - r_0) \sim \omega_0^2 - (\omega_0^2/L_A)(r - r_0)$，其中 L_A 是 ω_A 的尺度长度，并考虑到 $r - r_0 \ll L_A$，将此方程变换为

$$\left(\frac{\hat{\rho}^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{r - r_0}{L_A} \right) \delta B_\theta(r) = \delta B_{\theta 0}. \tag{4.28}$$

现在，我们可以通过引入 $s' := -(r - r_0)/(\hat{\rho}^2 L_A)^{1/3}$ 和 $K' := L_A \delta B_{\theta 0}/(\hat{\rho}^2 L_A)^{1/3}$ 来对该方程进行缩放，最终得到 [40, 41, 17] 艾里方程。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial s'^2} - s' \right) \delta B_\theta = K'. \tag{4.29}$$

下面我们总结方程 (4.24) 的解析解策略，同时考虑 [17, 40, 41]。首先，我们知道通解可以表示为艾里函数 Ai(s) 和 Bi(s)（它们满足相应的齐次方程）的线性组合，再加上一个特解，其形式为

$$z = c_1(s)\mathrm{Ai}(s) + c_2(s)\mathrm{Bi}(s); \tag{4.30}$$

应用任意常数变易法时，我们必须施加的条件是

$$\begin{aligned} c_1' \mathrm{Ai} + c_2' \mathrm{Bi} &= 0, \\ c_1' \mathrm{Ai}' + c_2' \mathrm{Bi}' &= K, \end{aligned} \tag{4.31}$$

并且，根据朗斯基行列式 $W = \mathrm{AiBi}' - \mathrm{Ai}'\mathrm{Bi} = 1/\pi$，得到

$$\begin{aligned} c_1' &= -K \frac{\mathrm{Bi}}{W} = -\pi K \mathrm{Bi}, \\ c_2' &= K \frac{\mathrm{Ai}}{W} = \pi K \mathrm{Ai}, \end{aligned} \tag{4.32}$$

也就是说，

$$c_1 = \pi K \left(d - \int_0^s \mathrm{Bi}(s')\,\mathrm{d}s' \right), \tag{4.33}$$

$$c_2 = \pi K \left(\int_0^s \mathrm{Ai}(s')\,\mathrm{d}s' - \frac{1}{3} \right). \tag{4.34}$$

积分常数的选择取决于必须满足的边界条件：在我们的情形中，(4.34) 已作调整，使得 $c_2 \to 0$ as $s \to \infty$ (请记住，$\int_0^\infty \mathrm{Ai}(s) = 1/3$)，换句话说，使解(4.30)中发散的 $\propto$ Bi 部分在渐近意义下消失，从而能够与磁流体力学解正确匹配（至于 Ai，则呈指数级无穷小）。常数 K 由 C 导出，因此根据(3.58)，作为 α的函数，它可由外部磁流体力学解确定。将 Scorer 函数 Gi(s) 定义为

$$\mathrm{Gi}(s) := \mathrm{Bi}(s) \int_s^\infty \mathrm{Ai}(s')\,\mathrm{d}s' + \mathrm{Ai}(s) \int_0^s \mathrm{Bi}(s')\,\mathrm{d}s', \tag{4.35}$$

(4.24) 的一般解（齐次解加特解）是

$$z = K\pi \left(d\mathrm{Ai}(s) - \mathrm{Gi}(s) \right). \tag{4.36}$$

ˆ 由于 (3.51)，共振附近磁流体力学解的导数按 $-C/x$ 变化，因此只需验证 $z \sim -K/s$，其中 $s \gg 1$。在区域 $s > 0$，当 $s \gg 1$ 时，艾里函数的渐近行为为

$$\mathrm{Ai}(s) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} s^{-1/4} e^{-\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}}}, \tag{4.37}$$

$$\int_{\infty}^{s} \mathrm{Ai}(s')\,\mathrm{d}s' \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi}} s^{-3/4} e^{-\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}}}, \tag{4.38}$$

$$\mathrm{Bi}(s) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} s^{-1/4} e^{\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}}}, \tag{4.39}$$

$$\int_{0}^{s} \mathrm{Bi}(s')\,\mathrm{d}s' \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} s^{-\frac{3}{4}} e^{\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}}}, \tag{4.40}$$

from 根据定义（4.35），斯科勒函数的渐近行为 is

$$\mathrm{Gi}(s) \approx \frac{1}{\pi s}; \tag{4.41}$$

此外，上述展开还表明，相对于Scorer 函数的贡献，Ai(s)的渐近贡献呈指数级微小，因此，当 s 较大时，(4.36) 的表现为

$$z \approx -\frac{K}{s} = -\frac{\hat{C}}{x}, \tag{4.42}$$

代表与磁流体力学解相匹配的正确边界条件。总之，对于 $r \ll r_0$，由于 KAW 在 $\omega_k^2 < k_\parallel^2 v_A^2$时被“截止”（不传播），这些解是短波长函数，会随空间指数增长或衰减。由于朗道阻尼，指数增长的模（在空间中）对应于入射短波长，而衰减模是出射短波长，这与因果律一致。事实上，对于 $r > r_0$，我们恢复了与磁流体力学相连接的长波长解：没有短波长模从外区进入SAW共振层，因为天线不会产生这种模；与此同时，也没有短波长模能够从被共振层包围的等离子体区域内部传播出来。这证实了以下事实：在 $r = r_0$ 时，外部天线产生的长波长涨落会发生模转换。

在阐明类磁流体力学波（解）如何穿过剪切阿尔芬波共振并发生模转换后，接下来还需将该解延伸至整个区域$s < 0$，在该区域内，Gi 和 Ai 均为振荡解；并将其延伸至磁轴处，此处必须满足正则性条件。我们将考察该区域内的两种极限情况：强阻尼和无阻尼（或弱阻尼）。

4.1.4 强阻尼极限

强阻尼极限是指，区域 $r = r_0$ ($s < 0$)内的传播解在到达磁轴之前就被完全吸收（因朗道阻尼而呈指数衰减）：

$$y(s_{-\infty}) = y(s \gg 1) + \int_{s\gg 1}^{s\ll -1} z(s')\,\mathrm{d}s' = 0. \tag{4.43}$$

ˆ 这里， $y(s \gg 1) = D - C\ln x(s)$ 是趋近共振的磁流体力学解，而 z for$s \ll -1$ 表示朝向磁轴传播的波，因为动理学阿尔芬波在到达 $x = 0$ 并反射回来之前，就已被等离子体通过电子朗道阻尼完全吸收。正如上文（4.21）的讨论所预料的，吸收是由 ˆρ^2 微小但有限的负虚部引起的；对于实数 $x < x_0$，这会使 s for $s < 0$具有微小但有限的负虚部。利用（4.25）给出的 x 与 s 之间的关系，条件（4.43）可写为

$$0 = D + \frac{\hat{C}\ln\left(\overline{a}/\overline{\rho}^2\right)}{3} - \hat{C}\ln s + \left(\frac{\overline{a}}{\overline{\rho}^2}\right)^{-1/3}\int_{s\gg 1}^{0} z(s')\mathrm{d}s' + \left(\frac{\overline{a}}{\overline{\rho}^2}\right)^{-1/3}\int_{0}^{-\infty} z(s)\mathrm{d}s. \tag{4.44}$$

由于艾里函数在区域 $s \ll -1$ 中的渐近形式为

$$\mathrm{Ai}(s) \approx \frac{\sin\left(\frac{2}{3}(-s)^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\pi}\,(-s)^{\frac{1}{4}}}, \qquad \mathrm{Bi}(s) \approx \frac{\cos\left(\frac{2}{3}(-s)^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\pi}\,(-s)^{\frac{1}{4}}}, \tag{4.45}$$

并且由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{Ai}(s)\mathrm{d}s = 1 \qquad \text{and} \qquad \int_{0}^{-\infty}\mathrm{Bi}(s)\mathrm{d}s = 0, \tag{4.46}$$

我们看到，当 $s \to -\infty$ 时，Gi(s) ≈Bi(s)：这表明，在（4.36）中选择 $d = -\mathrm{i}$ 作为右侧选项，可得到如下形式的渐近 z

$$z \approx -\frac{k\sqrt{\pi}}{(-s)^{1/4}} e^{\mathrm{i}\left[\frac{2}{3}(-s)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right]}, \tag{4.47}$$

它表示一个朝向磁轴传播的波。从该表达式还可以清楚地看出，如上文所预期的那样，当 s 具有一个很小但有限的负虚部时， z 的值在向内传播的过程中将呈指数衰减。利用 K 的定义，我们有

$$\begin{aligned} 0 = D + \hat{C}\left(\frac{\ln\left(\overline{a}/\overline{\rho}^2\right)}{3} - \ln s + \pi\int_{s\gg 1}^{0}\left(d\mathrm{Ai}(s) - \mathrm{Gi}(s')\right)\mathrm{d}s'\right) \\ + \pi\hat{C}\int_{0}^{-\infty}(d\mathrm{Ai}(s) - \mathrm{Gi}(s))\mathrm{d}s, \end{aligned} \tag{4.48}$$

或者，为方便起见，

$$0 = D + \frac{\hat{C}\ln\left(\overline{a}/\overline{\rho}^2\right)}{3} + \pi\hat{C}\left[\mathrm{i}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{Ai}(s)\mathrm{d}s + \int_{-\infty}^{0}\mathrm{Gi}(s)\mathrm{d}s + \lim_{s\to+\infty}\left(\int_0^s \mathrm{Gi}(s')\mathrm{d}s' - \frac{1}{\pi}\ln s\right)\right]. \tag{4.49}$$

第一个积分为 1，而第二个积分可以改写并通过数值计算得到

$$\int_{-\infty}^{0}\mathrm{Gi}(s)\mathrm{d}s = \int_{-\infty}^{0}\mathrm{Bi}(s)\mathrm{d}s - \int_{-\infty}^{0}\mathrm{Hi}(s)\mathrm{d}s \approx -1.36554 - 1.12654. \tag{4.50}$$

最后一项可以通过数值估算为 ≈ 0.239 （注意，括号中的两个函数单独取值时都发散）。因此，(4.49) 可写为

$$0 = D + \frac{\hat{C}\ln\left(\overline{a}/\overline{\rho}^2\right)}{3} + \pi\hat{C}\left(\mathrm{i}+\Lambda\right), \tag{4.51}$$

其中 $\Lambda \approx -2.25308$。这是一个常数之间的关系，最终给出 α 的值；因为一旦将 $r > r_0$ 的解按 $(-\delta B_{rh}/B_0)$ 缩放，并在导电壁上施加边界条件， C 和 D 都已定义为 α 的已知线性组合。总之，强阻尼或完全吸收情形意味着两个条件：对于 $r < r_0$，只有向内传播的波；并且在 $r = b$ 处的导电壁上满足边界条件。这些条件完全确定了二阶问题，从而确定两个常数 d 和 α 的值。在第 4.2 节中，我们将说明，以这种方式确定的 α 值与理想磁流体力学模型中确定的值非常接近，这与 [41], 的最初发现一致；该发现表明，在磁流体力学和动理学分析中，等离子体阻抗基本相同。这是因为在强阻尼情形下，向内传播的模转换 KAW 在传播数个波长后，会被电子朗道阻尼完全吸收；也就是说，吸收发生在局部。

4.1.5 无阻尼极限

与迄今所研究的强阻尼极限相反，对于 $\epsilon_{sk} \approx 1$可得到无阻尼（或弱阻尼）极限，这是 $\xi_{ke} \ll 1$ （电子朗道阻尼代数上很小）和 $\xi_{ki} \gg 1$ （离子朗道阻尼指数上很小）的结果。在这种情况下，波可以进一步向内传播，而在剪切阿尔芬波共振附近分析动理学阿尔芬波传播时所采用的局部展开（见（4.23）和（4.24））不再有效。更一般地说，波可以到达磁轴，并可能发生反射。尽管如此，（4.24）的通解仍然是必需的，因为它在共振层 $s = 0$ 处给出了正确的边界条件，并与外部磁流体力学天线解相匹配。将s_∞ 记为磁流体力学适用的 $s \gg 1$，共振附近的解，即以下方程的解

(4.24)，通常来说，

$$y(s) = y(s_\infty) + \left(\frac{\overline{a}}{\overline{\rho}^2}\right)^{-1/3} \int_{s_\infty}^{s} z(s')\,\mathrm{d}s', \tag{4.52}$$

或者，更明确地说，

$$\begin{aligned} y(s) = D + \frac{\hat{C}\ln(\overline{a}/\overline{\rho}^2)}{3} + \pi\hat{C}\Bigg[& d\int_{+\infty}^{s} \mathrm{Ai}(s')\mathrm{d}s' + \int_{s}^{0} \mathrm{Gi}(s')\mathrm{d}s' \\ & + \lim_{s_\infty\to+\infty}\left(\int_0^{s_\infty} \mathrm{Gi}(s')\mathrm{d}s' - \frac{1}{\pi}\ln s_\infty\right)\Bigg] = \\ = D + \frac{\hat{C}\ln(\overline{a}/\overline{\rho}^2)}{3} & + \pi\hat{C}\left[d\int_{+\infty}^{s} \mathrm{Ai}(s')\mathrm{d}s' + \int_{s}^{0} \mathrm{Gi}(s')\mathrm{d}s' + 0.239\right], \end{aligned} \tag{4.53}$$

由此得出

$$y(0) = D + \frac{\hat{C}\ln(\overline{a}/\overline{\rho}^2)}{3} + \pi\hat{C}\left(0.239 - \frac{d}{3}\right), \tag{4.54}$$

$$y'(0) = z(0) = \pi\hat{C}\left(\frac{\overline{a}}{\overline{\rho}^2}\right)^{1/3} \left(d\mathrm{Ai}(0) - \mathrm{Gi}(0)\right), \tag{4.55}$$

因此，对于二阶和三阶导数，

$$y''(0) = \pi\hat{C}\left(\frac{\overline{a}}{\overline{\rho}^2}\right)^{2/3} \left(d\mathrm{Ai}'(0) - \mathrm{Gi}'(0)\right), \tag{4.56}$$

$$y'''(0) = \pi\hat{C}\left(\frac{\overline{a}}{\overline{\rho}^2}\right) \left(d\mathrm{Ai}''(0) - \mathrm{Gi}''(0)\right) = \pi\hat{C}\left(\frac{\overline{a}}{\overline{\rho}^2}\right). \tag{4.57}$$

因此，我们得到了四阶方程 (4.19)所需的四个边界条件，其解可以在磁轴与共振层之间通过数值方法获得；这些条件是 d 和 α的函数，而 d 和 α由两个轴向正则性条件给出

$$y(r = 0^+) = y'(r = 0^+) = 0 \tag{4.58}$$

关于方程 (4.19) 的解。

实际上，无阻尼是弱阻尼的一种理想极限情形。一般而言，由于与弱吸收相关的有趣现象的性质，非线性效应预计会发挥重要作用，因此需要采用一般的（非线性）回旋动理学表述（第 5 章）。

4.1.6 弱阻尼：波包分析

对我们而言，最有趣的情况是弱阻尼。在上一小节中，我们讨论了长波极限下涡量方程的解，该方程可约化为一个四阶常微分方程。现在让我们回到式 (4.10)，但不采用

假设 $b_k \ll 1$，并将介电常数 (2.69) 近似为

$$\epsilon_{sk} \approx 1 + \tau\left(1 - \Gamma_k\right) + \mathrm{i}\sqrt{\pi}\xi_{ek}, \tag{4.59}$$

其中，我们对 $|\xi_{ik}| \gg 1$ 使用了 $\xi_{ik}Z(\xi_{ik}) \approx -1$，并且对于由 (2.65) 引入的等离子体色散函数$Z(\xi_{ek})$，我们采用了 $|\xi_{ek}| \ll 1$ [11] 的幂级数展开。

$$Z(\xi_{ek}) = \mathrm{i}\sqrt{\pi}e^{-\xi_{ek}^2} - 2\xi_{ek}\left(1 - \frac{2}{3}\xi_{ek}^2 + ...\right) \approx \mathrm{i}\sqrt{\pi}. \tag{4.60}$$

By 直接代入 (4.12)，扰动 $\delta\psi_k$ 和 $\delta\phi_k$ 之间的关系为

$$\delta\psi_k \approx \left[1 + \tau\left(1 - \Gamma_k\right)\left(1 - \mathrm{i}\sqrt{\pi}\xi_{ek}\right)\right]\delta\phi_k. \tag{4.61}$$

因此，(2.68) 意味着（另见 [41]）色散关系

$$\frac{\omega_k^2}{k_\parallel^2 v_A^2} = \frac{b_k}{1 - \Gamma_k} + b_k\tau\left(1 - \mathrm{i}\sqrt{\pi}\xi_{ek}\right), \tag{4.62}$$

并且，就其本身而言，读起来

$$\left(D_R^0 + \mathrm{i}D_A^1\right)\delta\phi_k = 0, \tag{4.63}$$

是

$$D_R^0 := \frac{\omega_k^2}{k_\parallel^2 v_A^2} - \frac{b_k}{1 - \Gamma_k} - b_k\tau, \tag{4.64}$$

$$D_A^1 := b_k\tau\sqrt{\pi}\xi_{ek}; \tag{4.65}$$

与此同时，(4.10) 可改写为

$$\left(D_R + \mathrm{i}D_A^1\right)\delta\phi_k = 0, \tag{4.66}$$

with

$$D_R := D_R^0 + D_R^1, \quad D_R^1 := -\frac{\rho_i^2}{r\left(1 - \Gamma_k\right)}\frac{\partial_r k_\parallel^2}{k_\parallel^2}. \tag{4.67}$$

在主阶， $D_R = 0$ 和

$$k_\perp^2\rho_i^2 = k_\perp(\omega_k, x), \tag{4.68}$$

而在下一阶，对于一个波包

$$\delta\phi_k \approx e^{-\mathrm{i}\omega_k t + \mathrm{i}\int_{r_0}^r k_r \mathrm{d}r'}A(r,t), \tag{4.69}$$

(4.66) 得出 [16, 83, 84, 86]

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial D_R}{\partial\omega_k}A^2\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial D_R}{\partial k_r}A^2\right) + 2D_A^1A^2 + \mathrm{i}A\frac{\partial^2 D_R}{\partial k_r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}A = 0. \tag{4.70}$$

该方程可以作为固定边界特征值问题求解，即对于 $\partial_t = 0$：相应的解或特征值给出径向模包络 $A(r)$。下一章将把该方程扩展到非线性相互作用。

在给出 (4.70) 的数值解之前，我们可以通过 WKB 分析，求出由 (4.70) 得到的近似色散关系。忽略 r中的二阶导数项（它只在转折点附近才重要），解为

$$A \approx \frac{\text{constant}}{\sqrt{\partial_{k_r} D_R}}. \tag{4.71}$$

此外，在磁轴附近，

$$k_\perp^2 = k_{\perp 0}^2 - gr, \tag{4.72}$$

其中， g 是一个可通过数值求解（4.68）确定的常数。因此，当 $r \to 0$ 时， $\delta\phi_k$ 的方程为

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{m^2}{r^2}\right]\delta\phi_k = -k_{\perp 0}^2 \delta\phi_k. \tag{4.73}$$

在 $r = 0$ 处施加正则性条件（无发散），该方程的解为

$$\delta\phi_k = A_0 J_{|m|}(k_{\perp 0} r) \tag{4.74}$$

对于 $k_{\perp 0} r \gg 1$，可得

$$\delta\phi_k \sim \sqrt{\frac{2}{\pi k_{\perp 0} r}} A_0 \cos\left(k_{\perp 0} r - \frac{|m|\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \tag{4.75}$$

and

$$\frac{\partial}{\partial x}\delta\phi_k \sim -\sqrt{\frac{2k_{\perp 0} a}{\pi x}} A_0 \sin\left(k_{\perp 0} r - \frac{|m|\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \tag{4.76}$$

在共振层 $x = x_0$，该解必须与（4.53）及其导数 z 相匹配。为简便起见，忽略 D_R^1，我们注意到

$$\frac{\partial D_R}{\partial k_r} \approx -2k_r a^2 \overline{\rho}^2 = -2k_r a^2 \left(\frac{3}{4} + \tau\left(1 - \mathrm{i}\sqrt{\pi}\xi_{ek}\right)\right)\frac{\rho_i^2}{a^2}, \tag{4.77}$$

$$k_\perp^2 a^2 \overline{\rho}^2 \approx k_r^2 a^2 \overline{\rho}^2 \approx -\overline{a}\left(x - x_0\right), \tag{4.78}$$

由此可得

$$\frac{\partial D_R}{\partial k_r} = -2a\left(\overline{a\rho}^4\right)^{1/3}(-s)^{1/2}; \tag{4.79}$$

因此，与共振处的模转换 KAW 相匹配的 WKB解为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\sqrt{2\pi\left(\overline{a\rho}^4\right)^{1/3}}K}{\sqrt{-\partial_{k_r} D_R/a}}\Bigg[&\frac{d}{2\mathrm{i}}\left(e^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4} - \mathrm{i}\int_{r_0}^r k_r \mathrm{d}r'} - e^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{4} + \mathrm{i}\int_{r_0}^r k_r \mathrm{d}r'}\right)\\ &- \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4} - \mathrm{i}\int_{r_0}^r k_r \mathrm{d}r'} + e^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{4} + \mathrm{i}\int_{r_0}^r k_r \mathrm{d}r'}\right)\Bigg],\end{aligned} \tag{4.80}$$

其中，在线性极限下，常数 K 控制解的（任意）振幅，而该振幅又由天线解的振幅控制。将此方程与 (4.76) 相匹配可得

$$\begin{aligned}\lambda\,(d-\mathrm{i}) &= e^{\mathrm{i}\left(\frac{|m|\pi}{2}-\Phi\right)},\\ \lambda\,(d+\mathrm{i}) &= e^{-\mathrm{i}\left(\frac{|m|\pi}{2}-\Phi\right)},\end{aligned} \tag{4.81}$$

其中

$$\begin{aligned}\lambda &:= \frac{\pi K\left(\overline{a\rho}^4\right)^{1/6}(\bar{r}_0/a)^{1/2}}{A_0\sqrt{-k_{\perp 0}\partial_{k_r}D_R}}|_{x\to\bar{r}_0/a},\\ \Phi &:= \int_{\bar{r}_0}^{r_0} k_r\,\mathrm{d}r + k_{\bar{r}_0}\bar{r}_0 = \Phi_R + \mathrm{i}\Phi_I,\end{aligned} \tag{4.82}$$

其中 $\bar{r}_0 \ll r_0$，并表示 k_r 的最大值。事实上，

$$k_r^2 = \frac{b_k}{\rho_i^2} - \frac{m^2}{r^2}; \tag{4.83}$$

因此，由于 $b_k(r)$ 的行为，随着 r 减小，k_r 会增大；在轴附近达到最大值后，它会急剧减小，变得非常大且为复数，并趋近于 $r\to 0$。这体现了 $r\to 0$ 预期的贝塞尔函数行为，由式 (4.75) 表示。为避免 WKB 表示带来不必要的复杂性，可以将式 (4.75) 理解为在进行式 (4.75) 与式 (4.80) 匹配时，r_0 附近的局部 k_r：由此自然得到式 (4.82) 中的 Φ 表达式。另请注意，由于存在有限耗散（由电子朗道阻尼引起），$\lambda\to 0$ 和 $\Phi_I>0$。根据式 (4.81) 和式 (4.82)，尤其是式 (4.81) 中第二个关系呈指数级小量这一事实，对于 $d=-\mathrm{i}$，可如预期的那样恢复强阻尼极限 [41]。式 (4.81) 和式 (4.82) 给出

$$\begin{aligned}d &= -\mathrm{i}\frac{e^{-2\mathrm{i}\Phi_R}+(-1)^{|m|}e^{-2\Phi_I}}{e^{-2\mathrm{i}\Phi_R}-(-1)^{|m|}e^{-2\Phi_I}},\\ \lambda &= \frac{\mathrm{i}^{|m|+1}e^{\mathrm{i}\phi_R+\Phi_I}}{2}\left(e^{-2\mathrm{i}\Phi_R}-(-1)^{|m|}e^{-2\Phi_I}\right)\end{aligned} \tag{4.84}$$

并得到 $d=-\mathrm{i}$ 和 $\lambda\gg 1$ 的强阻尼极限（$|A_0|\ll|K|$，轴上的涨落呈指数级微小）。

总之，用 WKB 求解 (4.70) 可通过 λ 得到 A_0（轴上的涨落强度），以及 d，即共振半径内入射和出射动理学阿尔芬波的混合。也可以直接利用 (4.70) 本身求得更精确的解。类似地，不同区域内的波包动理学阿尔芬波结构可以与由 (4.71)、(4.74)、(4.76) 和 (4.80) 给出的 WKB 包络进行比较。

确定了 d 的值后，可以用与强阻尼情形相同的方程计算 α。为了更清楚地说明这一点，我们再来看（4.53），并注意到：

当 s 为较大的正值时，

$$y \approx -\hat{C} \ln s + \frac{\hat{C}}{3} \ln \left(\frac{\overline{a}}{\overline{\rho}^2} \right) + D \tag{4.85}$$

必须匹配

$$y = y_{-\infty} + \pi \hat{C} \left(d - \int_{-\infty}^{s} \mathrm{Gi}(s') \, \mathrm{d}s' \right), \tag{4.86}$$

其中， $y_{-\infty}$ 是从磁轴向共振处传播的解的值。通常，该值可以忽略，但相应的导数不可忽略：因此，在计算 α的 WKB 计算中可以忽略它，因为 α仅反映 d的值。与外区，也就是与理想磁流体力学解的匹配，与式（4.51）相同，但 d除外，即

$$0 = D + \frac{\hat{C} \ln \left(\overline{a}/\overline{\rho}^2 \right)}{3} - \pi \hat{C} \left(d + \Lambda \right), \tag{4.87}$$

而且，由于式（4.50）的数值不同，现在 $\Lambda \approx -1.431$。选择 $y_{-\infty}$ 实际变为零的位置会带来不确定性，可能使“共振腔模”的频率位置发生偏移：合理的做法是控制 $s_{-\infty}$ 值，使 $y_{-\infty} \to 0$ 与解实际变为 0 的位置进行物理匹配。考虑朗道阻尼可忽略的极限， ρ^2 为实数且 $\phi_I = 0$，例如， $|m| = 2$ 和$d =$ctgΦ_R，可得

$$\alpha = \frac{\pi \hat{C}_1 \left[\mathrm{ctg}\Phi_R - \Lambda - (1/3\pi) \ln \left(\overline{a}/\overline{\rho}^2 \right) \right] - D_1}{D_2 - \pi \hat{C}_2 \left[\mathrm{ctg}\Phi_R - \Lambda - (1/3\pi) \ln \left(\overline{a}/\overline{\rho}^2 \right) \right]}. \tag{4.88}$$

我们回顾一下， α 是齐次方程解与特解（例如，等离子体解与天线解）之比，即一种场/扰动比，并表示天线从外部发射到内区的坡印廷通量。 α 的虚部与吸收有关（它与坡印廷通量成正比），因此在无阻尼极限下趋于零。 α 的实部趋于无穷大意味着发生共振，该共振出现在固有频率处，此时等离子体核心作为腔式谐振器响应模转换KAW。因此，弱阻尼意味着波可以在剪切阿尔芬波共振内部来回传播足够多次，从而形成驻波；这与强阻尼情形相反，在强阻尼情形中，模转换 KAW在局部被吸收。由于这一原因，在弱阻尼极限下，径向模结构预计几乎不依赖于实际吸收，而与典型共振腔中的情况一样，随着吸收减小（增益增加），涨落振幅将增大。天线频率中的频移 $\Delta\omega_k$ 会引起C_1、 C_2、 D_1和 D_2 的相对变化，其量级为 $\Delta\omega_k/\omega_k$， $\Delta x_0/x_0$中也会发生类似变化。注意，(4.88)中的主导频移是由 ctgϕ_R 引起的，因为

$$\Phi_R = \mathrm{Re} \int_0^r k_r \, \mathrm{d}r. \tag{4.89}$$

由（4.62）可清楚看出， $\Delta k_r/k_r \sim \Delta\omega_k/\omega_k$ ，然后，

$$\Delta\Phi_R = k_r r_0 \frac{\Delta\omega_k}{\omega_k}, \qquad \frac{\Delta\omega_k}{\omega_k} \sim \frac{\Delta\Phi_R}{k_r r_0} \sim \frac{\pi}{k_r r_0}, \tag{4.90}$$

其中， $\Delta\omega_k$ 表示 α中两个连续共振之间的典型距离。 .

4.1.7 弱阻尼：薛定谔包络方程的解

我们将 (4.70) 重写为

$$\omega_0 \frac{\partial D_R}{\partial\omega_0}\frac{\partial A}{\partial\tau} = \frac{1}{a}\frac{\partial D_R}{\partial k_r}\frac{\partial A}{\partial x} - D_I A - \frac{\mathrm{i}}{2a^2}\frac{\partial^2 D_R}{\partial k_r^2}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}, \tag{4.91}$$

其中我们引入了时间归一化 $\tau = \omega_0 t$ ，而 ω_0 表示参考天线频率，我们将其视为单色谱。将此方程与（4.70）比较时，我们需要考虑反厄米响应是

$$D_A := D_I + \frac{1}{2a}\frac{\partial^2 D_R}{\partial x \partial k_r}, \tag{4.92}$$

而不是领先阶中更简单的 (4.65) 的 $D_A = D_I$ 。注意到方程 (4.91) 仅描述缓慢变化的包络行为，其中已提取出 $\sim e^{\mathrm{i}\int k_r \mathrm{d}r'}$，因此还可以进一步简化。为了更好地考察它与天线解之间的联系，我们引入归一化解 $z := \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$，其中

$$A := z e^{-\mathrm{i}\int_{x_0}^{x} a k_r \mathrm{d}x'}, \tag{4.93}$$

因此

$$\begin{aligned} A' &= \left(z' - \mathrm{i}k_r a z\right) e^{-\mathrm{i}\int_{x_0}^{x} a k_r \mathrm{d}x'}, \\ A'' &= \left(z'' - 2\mathrm{i}z' k_r a - \mathrm{i}k_r' a z - k_r^2 a^2 z\right) e^{-\mathrm{i}\int_{x_0}^{x} a k_r \mathrm{d}x'}, \end{aligned} \tag{4.94}$$

其中，上标 ′ 和 ″ 分别表示对 x的一阶和二阶导数。为了利用 D_R对 b_k 的依赖关系，我们可以写成

$$\begin{aligned} \frac{1}{a}\frac{\partial D_R}{\partial k_r} &= \frac{2k_r}{a}\frac{\partial D_R}{\partial\left(k_r^2\right)}, \\ \frac{1}{2a^2}\frac{\partial^2 D_R}{\partial k_r^2} &= \frac{1}{a^2}\frac{\partial D^2}{\partial k_r^2} + \frac{2k_r^2}{a^2}\frac{\partial^2 D_R}{\partial\left(k_r^2\right)^2}. \end{aligned} \tag{4.95}$$

将 (4.94) 和 (4.95) 代回 (4.91)，得到

$$\begin{aligned} \omega_0 \frac{\partial D_R}{\partial\omega_0}\frac{\partial A}{\partial\tau} e^{\mathrm{i}\int_{x_0}^{x} a k_r \mathrm{d}x'} = &-D_I z - \mathrm{i}\left(\frac{\partial D_R}{a^2\partial\left(k_r^2\right)} + \frac{2k_r^2}{a^2}\frac{\partial^2 D_R}{\partial\left(k_r^2\right)^2}\right)\left(z'' + k_r^2 a^2 z - \mathrm{i}k_r' a z\right) \\ &+ \frac{4\mathrm{i}k_r^2}{a^2}\frac{\partial^2 D_R}{\partial\left(k_r^2\right)^2}\left(\mathrm{i}z' + k_r a z\right) k_r a; \end{aligned} \tag{4.96}$$

如果 z是一个 WKB解，即一个解 $\sim e^{\mathrm{i}\int_{x_0}^{x} ak_r \mathrm{d}x'}$，那么该方程便恒等成立，这正如 $\partial_\tau A \sim \partial_\tau z = 0$ 的情形所应如此。现在注意，对于我们感兴趣的问题，

$$\left|\frac{\partial D_R}{a^2 \partial\left(k_r^2\right)}\right| \gg \left|\frac{k_r^2}{a^2}\frac{\partial^2 D_R}{\partial\left(k_r^2\right)^2}\right|. \tag{4.97}$$

因此，通过式 (4.96)，方程 (4.91) 可简化为

$$\omega_0 \frac{\partial D_R}{\partial \omega_0}\frac{\partial z}{\partial \tau} = -D_I z - \mathrm{i}\frac{\partial D_R}{\partial b_{k_0}}\frac{\rho_i^2}{a^2}\left(z'' + z\frac{b_{k_0}}{\rho_i^2}a^2 - \frac{m^2}{x^2}z\right), \tag{4.98}$$

其中 $b_{k_0}(\omega_0, x)$ 满足 WKB 色散关系。不过请注意，该方程尚未包含天线驱动项。在剪切阿尔芬波共振附近对式 (4.10) 关于半径积分，此处径向奇异结构占主导，由此很容易证明式 (4.98) 可改写为

$$\omega_0 \frac{\partial D_R}{\partial \omega_0}\frac{\partial z}{\partial \tau} = -D_I z - \mathrm{i}\frac{\partial D_R}{\partial b_{k_0}}\frac{\rho_i^2}{a^2}\left(z'' + z\frac{b_{k_0}}{\rho_i^2}a^2 - \frac{m^2}{x^2}z - \frac{\overline{a}}{\overline{\rho}^2}\right), \tag{4.99}$$

ˆ 此外，假设解 z 已归一化为 C。事实上，考虑到

$$b_{k_0}\frac{a^2}{\rho_i^2} - \frac{m^2}{x^2} + \mathrm{i}\frac{D_I a^2}{\rho_i^2}\left(\frac{\partial D_R}{\partial b_{k_0}}\right)^{-1} \approx -\frac{\overline{a}\,(x - x_0)}{\overline{\rho}^2}, \tag{4.100}$$

当 $x \to x_0$ 时。

4.2 数值解

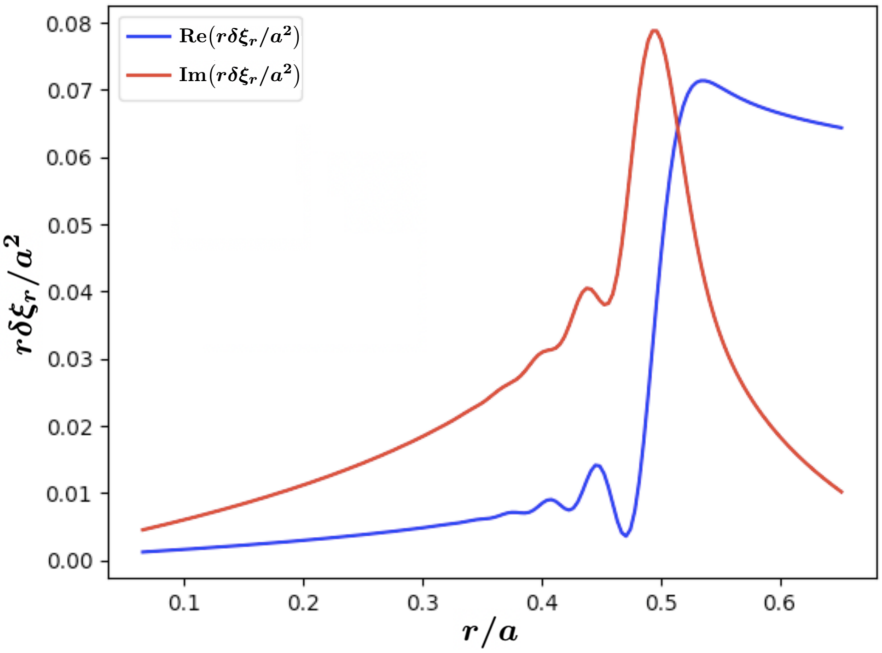
在第3.4.1 小节所描述的圆柱等离子体平衡中，并采用第3.4.2 小节所列出的等离子体平衡参数时，该问题已分别在强阻尼和弱阻尼情况下得到求解。离子拉莫尔频率几乎比天线频率高两个数量级，因此采用回旋动理学方法是合理的。在以下小节中，我们将讨论一般形式下的KAW 波动方程，以及前一节从理论上讨论的各种极限情况下的数值解。

数值方法与第 3[1]章相同；本章改变的是控制波动方程的各种形式。第一个模型为（4.19），其中采用长波极限，并使用理想磁流体力学模型中有限拉莫尔半径的主阶修正。该模型仍包含所有平衡非均匀性和几何效应。我们推测，该模型在强吸收情况下所采用的局域极限中，必然会化简为 Hasegawa 和 Chen [40, 41], 提出的模型（4.23）。对于弱吸收，波包可以传播很远（以波长为单位），而 $b_k = k_\perp^2\rho_i^2$可能变为单位阶。为了考虑这一重要变化，我们将.....

[1] 也就是说，该解是基于四阶 Runge-Kutta-Fehlberg 方法（RK45），使用scipy.integrate 库中的 solve¯ivp 软件包通过射击法获得的。

波动方程可写成波包强度方程 (4.70) 的形式。我们将其改写为 (4.99) 的形式后，分别用WKB方法进行解析求解和数值求解。特别是，在模转换层附近，(4.99) 可化为 (4.23)。因此，第3章中使用的各种波动方程在强阻尼情况下彼此一致。与此同时，在弱阻尼情况下，这些方程考虑了柱面几何和平衡态非均匀性，见 (4.19)，但仍处于长波极限；或者也能描述有限波长波包响应，见 (4.70) 和 (4.99)。当动理学阿尔芬波远离模转换层传播时，这种描述是必需的。

4.2.1 强阻尼



ˆ图4.1在强阻尼条件下，根据线性陀螺动理学解得到的径向位移，归一化为($-\delta B_{rh}/B_0$)。归一化距离 r/a 从轴延伸至剪切阿尔芬波共振之外。

在这种情况下，如第 4.1.4 小节所述，该问题基本上可以通过解析方法求解，数值部分则用于计算艾里函数的积分，并绘制解的图像；该解表示为归一化等离子体径向位移$y := x\delta\xi_r/a$ ，是归一化距离 $x := r/a$ 的函数，其中距离从磁轴测量（图 4.1）。结果表明，坡印廷通量并不是在某个给定的奇点处被吸收，而是转换为动理学阿尔芬波，并在一个空间区间内被热电子吸收（通过朗道阻尼）；该区间的宽度取决于波长和阻尼系数：实际上，在径向电场沿径向方向的几次振荡范围内即可完成。线性陀螺动理学解消除了奇点，并略微减小了振幅，从而相对于磁流体力学给出了相应略高的吸收。

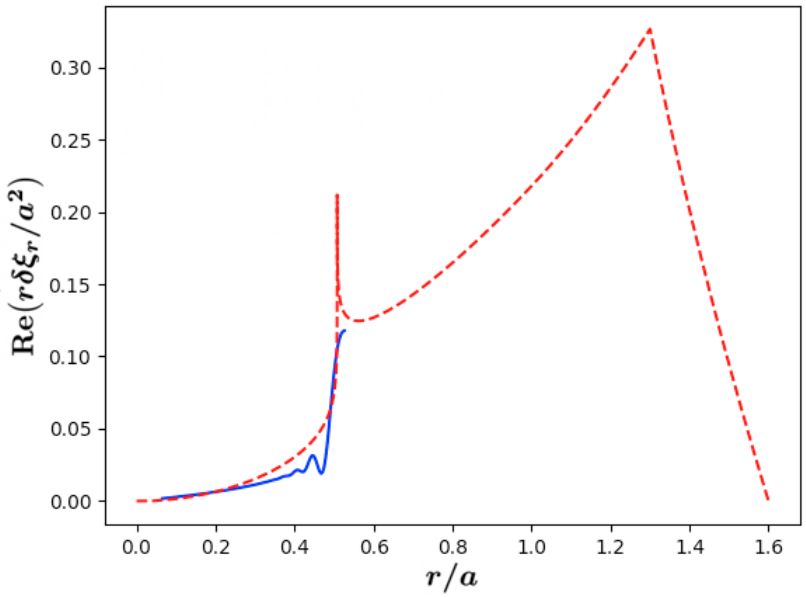


图4.2 强阻尼下线性陀螺动理学解（蓝色实线）与采用适当动理学值 α 计算并重新缩放后的磁流体力学解（红色虚线）的匹配。

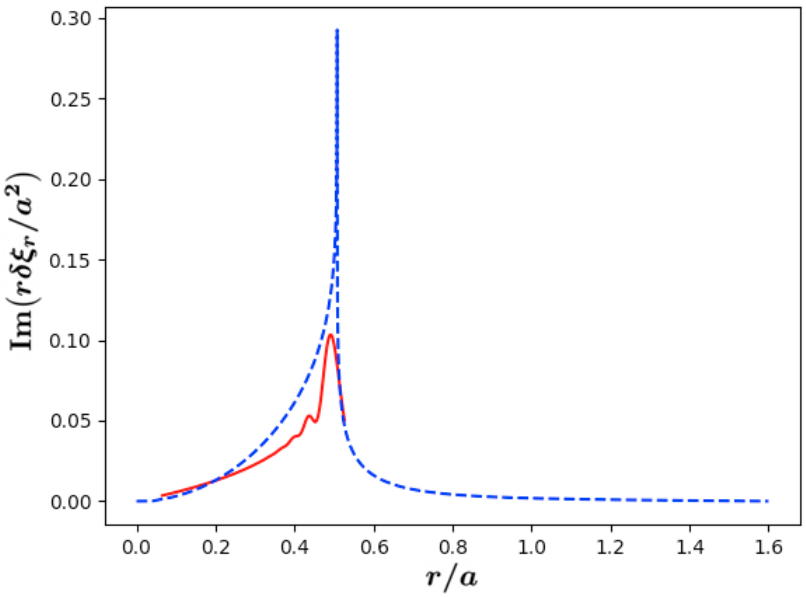


图4.3 强阻尼下线性陀螺动理学解（红色实线）与采用适当动理学值 α 计算并重新缩放后的磁流体力学解（蓝色虚线）的匹配。

由式（4.51）估算 $\mathrm{Re}\alpha = -0.65033704$ 和 $\mathrm{Im}\alpha = -0.00127338$（精确到数值截断误差）。用艾里函数表示的内部动理学阿尔芬波解按构造与外部磁流体力学解相匹配（图 4.2 和图 4.3），也就是具有适当动理学 α 的磁流体力学解。显然，所绘制的动理学解在共振附近有效，对于长波分支则不够准确。

4.2.2 弱阻尼

在弱阻尼/无阻尼情况下，我们从波动方程(4.19)的数值解开始，该方程在长波极限下有效。我们将该方程作为一个边值特征值问题，在轴与共振层之间求解。将 $\delta\phi_k$ 切换为无量纲场变量 y（为简洁起见，省略下标 k），四阶方程 (4.19) 可写成由四个一阶方程组成的等价系统

$$\begin{cases} y' = y^{\mathrm{I}}, \qquad (y^{\mathrm{I}})' = y^{\mathrm{II}}, \qquad (y^{\mathrm{II}})' = y^{\mathrm{III}}, \\ f\,(y^{\mathrm{III}})' = -\left(\frac{2f}{r} + \partial_r f\right) y^{\mathrm{III}} - \left(D_A + \frac{\partial_r f}{r} - \frac{2\left(m^2+1\right)f}{r^2}\right) y^{\mathrm{II}} \\ -\left(\frac{\partial_r (r D_A)}{r} - \frac{m^2 \partial_r f}{r^2} + \frac{\left(6m^2+1\right)f}{r^3}\right) y^{\mathrm{I}} - \left(\frac{\partial_r k_\parallel^2}{r} - \frac{m^2 D_A}{r^2} + \frac{\left(m^4-5m^2\right)f}{r^4}\right) y. \end{cases} \tag{4.101}$$

边界条件包括积分起始处共振层上的匹配条件 (4.54)、(4.55)、(4.56)、(4.57)，以及靠近磁轴处的正则性条件 (4.58)。为明确体现对 α 和 d 的依赖关系，根据 (4.54)，我们将 y 写成齐次问题的两个独立解 y_1 和 y_2 与一个非齐次特解 y_3 的叠加：

$$y = D y_1 + \pi d \hat{C} y_2 - \hat{C} y_3. \tag{4.102}$$

请注意，通过在SAW共振层处施加与外部天线解的匹配条件，齐次问题的另一个独立解已在构造过程中被消除。这些解显然满足初始条件

$$y_1(0) = 1, \qquad y_1^{\mathrm{I}}(0) = 0, \qquad y_1^{\mathrm{II}}(0) = 0, \qquad y_1^{\mathrm{III}}(0) = 0, \tag{4.103}$$

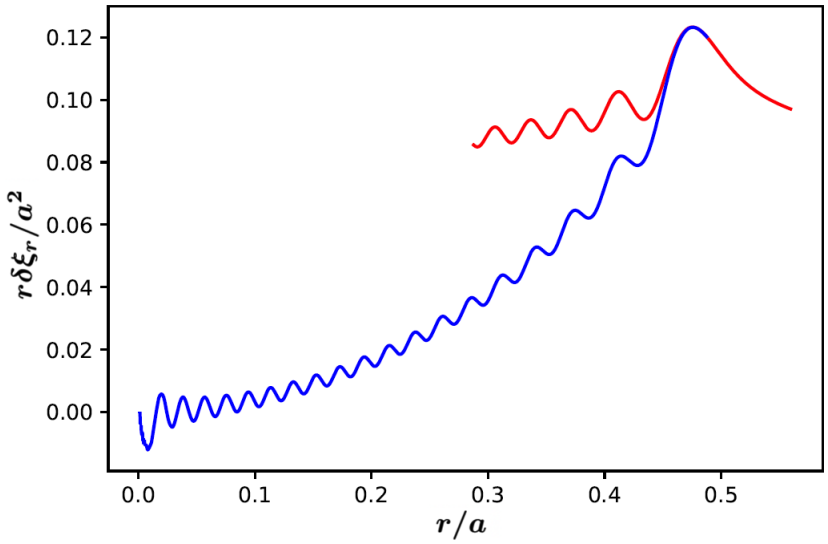
$$y_2(0) = -\frac{1}{3}, \quad y_2^{\mathrm{I}}(0) = \left(\frac{\overline{a}}{\overline{\rho}^2}\right)^{1/3} \mathrm{Ai}(0), \quad y_2^{\mathrm{II}}(0) = \left(\frac{\overline{a}}{\overline{\rho}^2}\right)^{2/3} \mathrm{Ai}'(0), \quad y_2^{\mathrm{III}}(0) = 0, \tag{4.104}$$

$$\begin{gathered} y_3(0) = -\frac{1}{3} \ln\left(\frac{\overline{a}}{\overline{\rho}^2}\right), \qquad y_3^{\mathrm{I}}(0) = \pi \left(\frac{\overline{a}}{\overline{\rho}^2}\right)^{1/3} \mathrm{Gi}(0), \\ y_3^{\mathrm{II}}(0) = \pi \left(\frac{\overline{a}}{\overline{\rho}^2}\right)^{2/3} \mathrm{Gi}'(0), \qquad y_3^{\mathrm{III}}(0) = -\frac{\overline{a}}{\overline{\rho}^2}. \end{gathered} \tag{4.105}$$

在这些条件下，我们对 (4.101) 分别进行三次积分，以得到 y_1、y_2 和 y_3；然后，应用 (4.58) 计算参数 α 和 d，该式可适当地改写为

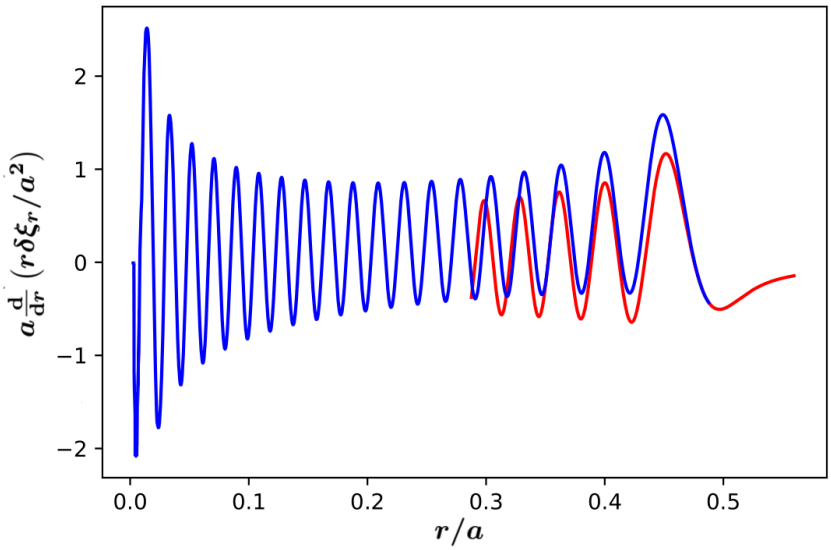
$$\begin{cases} k_1 y_1(r=0^+) + k_2 y_2(r=0^+) - y_3(r=0^+) = 0, \\ k_1 y_1^{\mathrm{I}}(r=0^+) + k_2 y_2^{\mathrm{I}}(r=0^+) - y_3^{\mathrm{I}}(r=0^+) = 0, \end{cases} \tag{4.106}$$

ˆ其中 $k_1 := D/C$ 和 $k_2 := \pi d$。确定了 k_1 和 k_2后，可由 α 和 d 重构，最终得到通解 (4.102)，并显示于图4.4- 4.5中。同时，模转换 KAW 的解析解 (4.53) 表示为艾里函数积分的线性叠加，按构造也与外部磁流体力学解平滑连接，但仅在模转换层附近有效。图4.4和图4.5中蓝色曲线与红色曲线的对比直观地展示了这一点。



ˆ图4.4 无阻尼极限下线性陀螺动理学情形的径向位移，以$(-\delta B_{rh}/B_0)$为归一化尺度（蓝线）。红线表示局部解，即方程(4.53)，它在远离 *SAW* 共振层处的长波极限下明显偏离完整解。对于此图，$B_0 = 5 \cdot 10^5$ 高斯高斯 和 $J_{0z}(0) = 10^{12}$ 静安培。归一化距离 r/a 从轴延伸至略微超出 *SAW* 共振的位置。

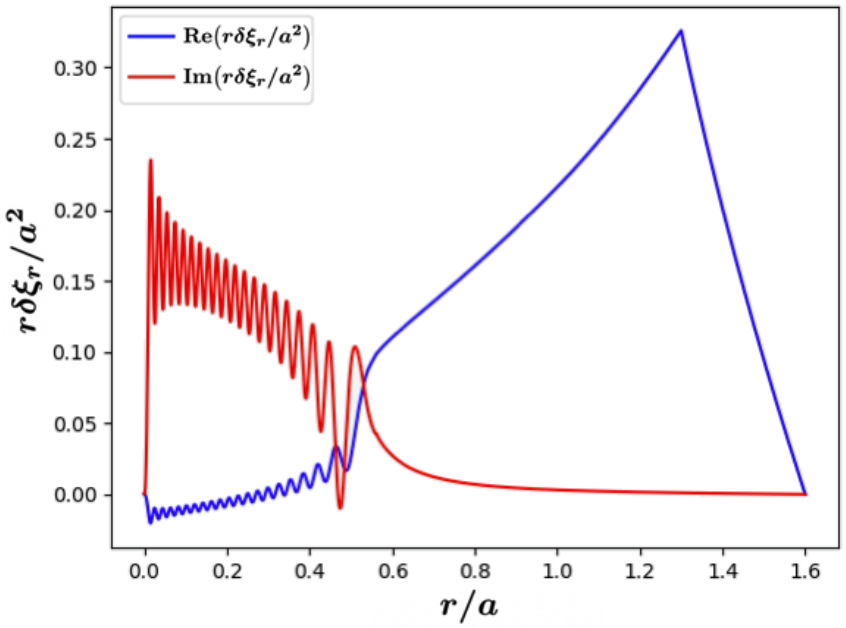
我们还使用波包形式体系求解了一般弱阻尼情形，见 (4.70) 和/或 (4.99)。图4.6展示了(4.99)的数值解结果，其中电子朗道阻尼为标称值的1%，该阻尼导致图4.1 中模转换KAW的强局部吸收。在共振层处，与强阻尼情形类似，存在从MHD 天线解到 KAW的模转换，但现在KAW仅被弱吸收并向内部传播，从而形成“共振腔”模态；这些模态对于在第5章中讨论的非线性现象至关重要。同样在这种情况下，外部磁流体力学解与之完全匹配



ˆ图4.5 线性陀螺动理学情形在无阻尼极限下（蓝线）的径向位移一阶导数，按($-\delta B_{rh}/B_0$)归一化。红线表示局部解，即非齐次艾里方程的解 z。对于此图，$B_0 = 5{\cdot}10^5$ 高斯 和 $J_{0z}(0) = 10^{12}$ 静安培。归一化距离 r/a 从轴延伸至略过剪切阿尔芬波共振的位置。

按照构造，当采用动理学吸收系数时，该结果与回旋动理学解一致，这也与 [41], 预测等离子体阻抗在主阶上保持不变相符。(4.99) 的数值解结果与 WKB 近似所得结果进行了比较，见 (4.80)。特别是，我们求解了 WKB 色散关系（见第 4.1.6 节），并首先采用名义电子朗道阻尼，绘制了 α、d 和 D/C 随天线处外加的归一化频移 $\Delta\omega/\omega_0$ 的变化曲线（见图 4.7–4.8）。请回忆，α 的（负）虚部（图 4.7 中的红线）提供了有关波吸收（坡印廷通量）的信息；尤其是，图 4.8 展示了一个间隔紧密的离散天线频率谱的存在，对于固定的外加天线扰动振幅，这些频率会引起特别强的等离子体响应。这个间隔紧密的谱与 (4.90) 对频率间隔的估算相符。图 4.9 绘出了动理学阿尔芬波谱，即 α 的实部和虚部，以及 d 和 D/C，分别作为归一化频移 $\Delta\omega/\omega_0$ 的函数，其中同时展示了 WKB解和波包解。除峰值振幅略有不同外，波包解与 WKB 近似相符；这表明，对于每隔一个径向本征态，WKB 近似在磁轴附近更容易失效。这些峰对应于“共振腔”激发；在名义电子朗道阻尼下，这种激发非常微弱。为了说明很小的天线扰动如何在等离子体内部产生有限的波振幅响应，我们将 (4.99) 的求解重复进行，此时采用名义电子朗道阻尼的 1%，得到图 4.6 所示的动理学阿尔芬波径向模结构，并与图 4.1 的结构进行比较。

因此，图 4.10 与图 4.9 相同，但专门针对这一阻尼较弱的情况。直接比较可见，在这种情况下，KAW 谱中“共振腔”模态的激发更为显著，这也解释了为何特定频率下会产生强得多的等离子体响应。为更好地了解这种“共振腔”现象的稳健性，图 4.11 放大展示了图 4.9 中第三个固有频率附近的情况，同时也包含无阻尼极限情形。绿色峰值的小幅偏移是由于无阻尼情形所采用的假设更为严格，尤其是因为我们假设处于长波极限，从而将 KAW 方程化为四阶常微分方程形式 (4.19) 或 (4.101)。



ˆ图4.6径向位移，以$(-\delta B_{rh}/B_0)$归一化，来自方程(4.99)的解；与图4.1的情况相比，阻尼减弱（为名义电子朗道阻尼的 *1%*）。从 *MHD* 天线解到动理学阿尔芬波的模转换显而易见。

最后几幅图（图4.12-4.14）表示电场的归一化分量，其定义关系为

$$\frac{c}{a\omega}\frac{\delta E_r}{\delta \hat{B}_{rh}} = -\frac{1}{m}\frac{\partial y}{\partial x}, \qquad \frac{c}{a\omega}\frac{\delta E_\parallel}{\delta \hat{B}_{rh}} = \frac{\mathrm{i}a\tau k_\parallel (1-\Gamma_k)}{m} y, \tag{4.107}$$

以及它们的比率。

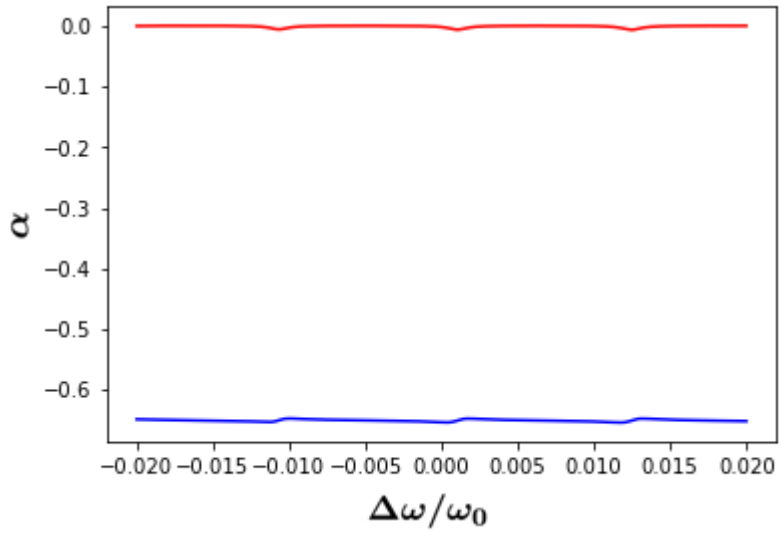
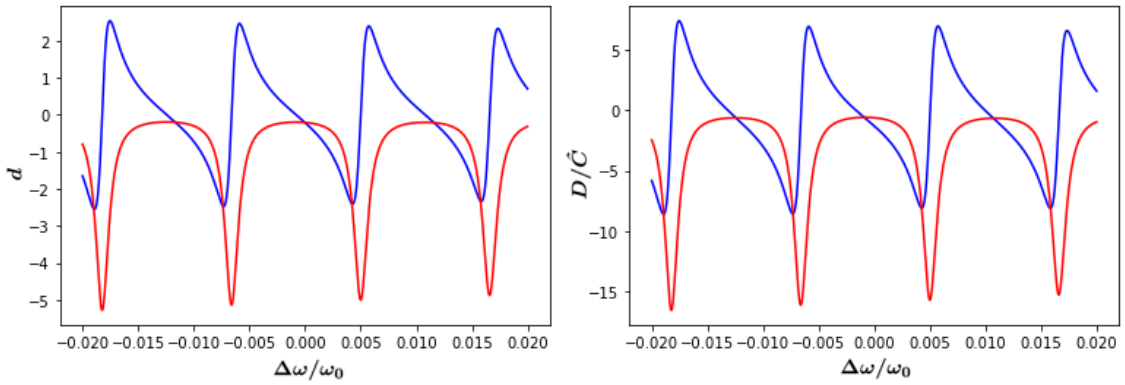


图4.7 实部α （蓝线）和 虚部α （红线），来自 *WKB* 解。



ˆ图4.8 d 和 D/C 的实部（蓝线）与虚部（红线），来自 *WKB* 解。

4.3 总结

在本章中，我们使用回旋动理学理论重新审视了第3章的理想磁流体力学分析，强调了这样一些微观尺度现象：它们构成了在外加天线频率与连续变化的剪切阿尔芬波频率谱相匹配的径向位置处，剪切阿尔芬波发生共振吸收的基础；与早期分析一致 [40, 41], ，共振吸收体现为模转换为短波长的动理学阿尔芬波，该波通常在距共振层很短的距离内，并在模转换波的数个空间振荡周期内被吸收（强吸收或强

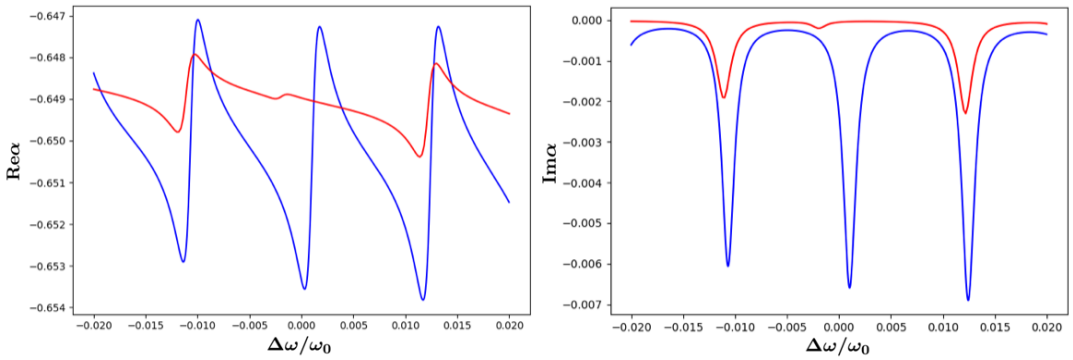


图4.9 对于电子朗道阻尼的标称值，*WKB* α （蓝线）与波包 α （红线）随参考频率 ω_0附近的天线频率变化的比较。

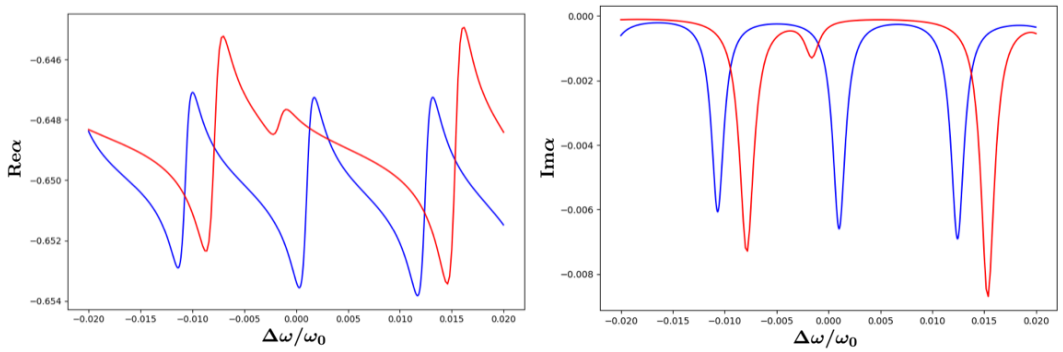


图4.10对于减小后的电子朗道阻尼（减小因子为 10^2），*WKB* α （蓝线）与波包 α （红线）随参考频率 ω_0附近的天线频率变化的比较。

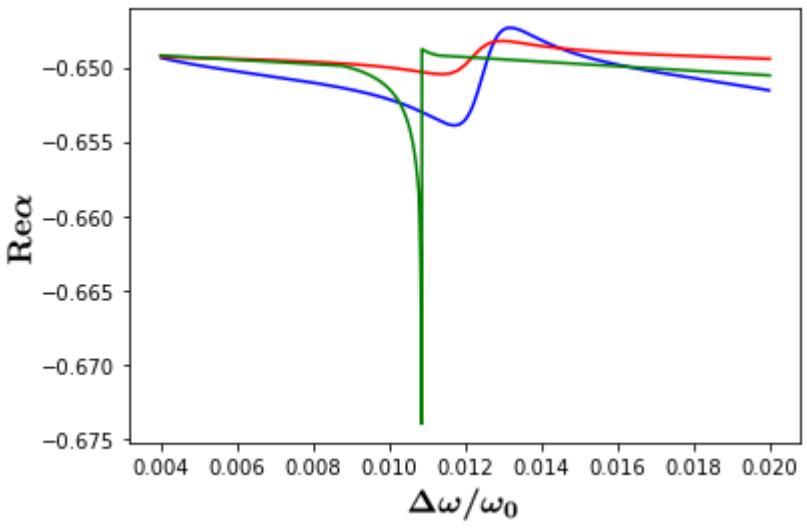


图4.11 关于“共振腔”模式的色散关系：波包解（红色）、*WKB*解（蓝色）和无阻尼 $b_k \ll 1$ 解（绿色）。

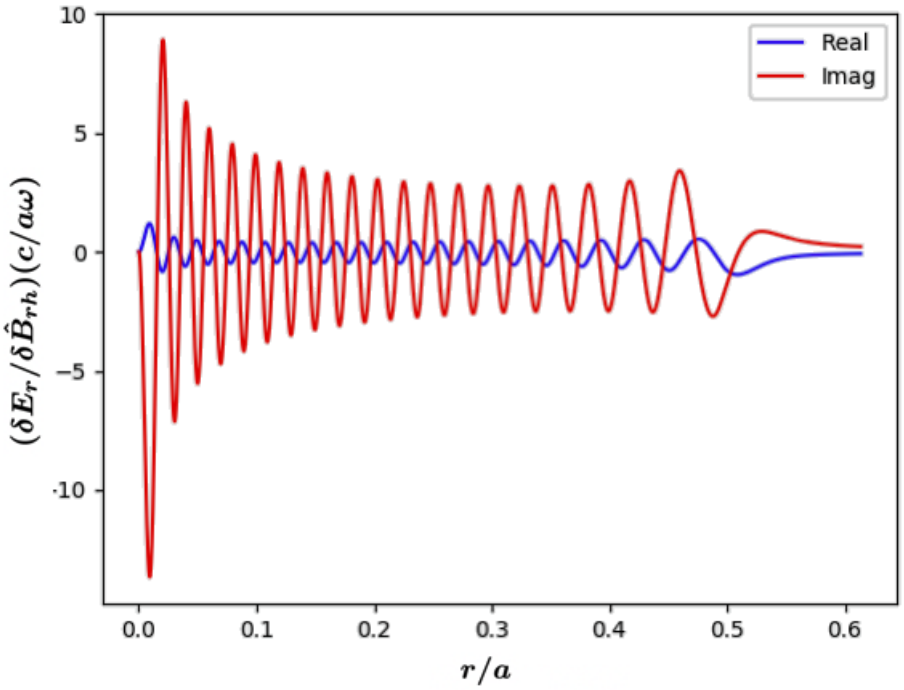


图4.12归一化动理学阿尔芬波径向电场 δE_r （用于减弱电子朗道阻尼）。

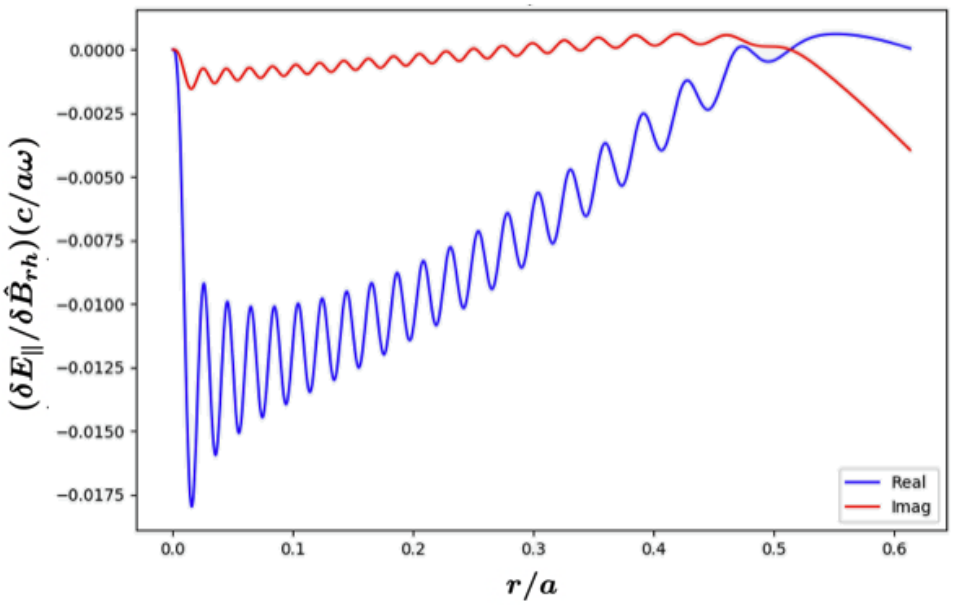


Fig.4.13 归一化动理学阿尔芬波平行电场 $\delta E_{\parallel}$ （用于降低电子朗道阻尼).

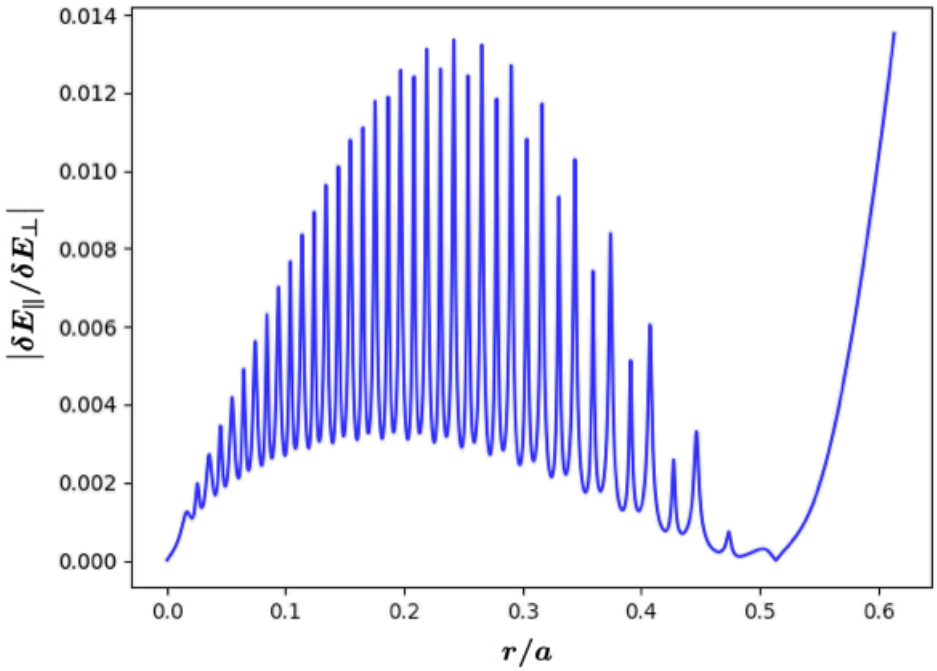


图4.14 动理学阿尔芬波电场比值的模值 $\delta E_\parallel/\delta E_\perp$ （针对减弱的电子朗道阻尼）。

阻尼）。尽管迄今为止，已有研究一直关注这一情形，因为它与等离子体加热直接相关 [40, 41, 44, 45], ，但本文重点研究的是相反的弱吸收情形：即使天线发射的剪切阿尔芬波振幅不大，也能在共振（模转换）层内激发出振幅很大的动理学阿尔芬波，并产生一系列有趣的非线性行为。作为第4章的新发现，我们证明了模转换层内的等离子体区域表现得像一个“共振腔”；也就是说，当天线频率与某个给定的离散谱相匹配时，等离子体响应会更强，呈现出受共振驱动且阻尼较弱的振荡器的明显特征。这一结果与第 5 章有关，在该章中，我们将研究由大振幅动理学阿尔芬波引发的非线性行为，这些波的相位和振幅由外部天线精细调节。

第5章

圆柱形等离子体中的动理学阿尔芬波：非线性描述

在磁流体力学描述中，天线发射的剪切阿尔芬波会在天线频率与局部剪切阿尔芬连续谱频率相匹配的径向位置形成径向奇异结构。相应地，入射的坡印廷通量在共振面处消失，这表明长波长扰动在该位置被完全吸收。通过线性回旋动理学分析，我们展示了能量通量如何通过模转换过程实际转移到动理学阿尔芬波上。新产生的动理学波会受到阻尼；对于典型参数，它会通过朗道阻尼被热等离子体中的电子吸收。从动理学阿尔芬波的发现 [40, 41] 到许多研究阿尔芬波等离子体加热应用的工作，例如 [44, 45]，这一过程已在文献中得到广泛研究。本论文旨在研究截然相反的极限情形，即模转换产生的动理学阿尔芬波吸收很弱。虽然第4章表明，这种情形对阿尔芬波加热意义不大，但我们也指出，其特征是模转换层内的等离子体表现得像一个“共振腔”。因此，即使天线施加的扰动振幅相对较小，也能激发出振幅显著较大的动理学阿尔芬波，并进而影响等离子体的非线性行为。下文中，我们采用非线性回旋动理学描述，并表明，模转换为动理学阿尔芬波的能量只有部分通过朗道阻尼被电子吸收，而占主导的部分则形成非线性对流胞，其特征由 $k_{\|} \equiv 0$描述。本章概述的调制不稳定性产生对流胞的研究，推广了此前关于均匀磁化等离子体的工作 [85], ，以及关于非均匀等离子体中磁静力对流胞的局部分析 [47]。这个问题的

这对行星磁层物理，以及通过外部激发高频波在实验室等离子体中产生纵向电场（粒子加速）都具有重要意义。本研究的理论分析得出了新的解析和数值结果，可作为提出小型桌面实验的依据，也可用作新型数值模拟代码的测试平台，例如 TRIMEG [56, 57], STRUPHY [43]和 GeFi [54], ，这些代码都针对相同的基本非线性相互作用。

由于导致对流胞元形成的调制不稳定性与参量衰变不稳定性具有相似之处，我们首先介绍这一普适过程的定性特征。随后引入对流胞元的概念，说明其在磁化等离子体跨场输运中的作用，以及这一作用为何吸引了等离子体研究领域的广泛关注。我们还将说明调制不稳定性如何激发对流胞元，以及动理学阿尔芬波在这一过程中发挥的特殊作用。在这一总体介绍之后，我们将系统分析圆柱形等离子体中动理学阿尔芬波与对流胞元之间的非线性相互作用。在更一般的非线性区间，允许涨落具有有限振幅，但要求相应的非线性频率 ω_{nl}远小于回旋频率。换言之，与线性陀螺动理学序一致，

$$|\omega_{nl}| \sim |\delta \mathbf{u}_\perp \cdot \nabla_\perp| \sim |\omega| \sim \mathcal{O}(\varepsilon)\,|\Omega_i|\,, \tag{5.1}$$

其中， $\delta \mathbf{u}_\perp$ 表示由涨落引起的粒子（导引中心）抖动速度，例如 $\delta \mathbf{u}_\perp \approx v_\parallel \delta \mathbf{B}_\perp / B_0$ 或 $\delta \mathbf{u}_\perp \approx (c/B_0^2)(\delta \mathbf{E}_\perp \times \mathbf{B}_0)$ [17], ；而 $\varepsilon = \rho_i / L \sim |\omega/\Omega_i|$是第 1.2.1 小节引入的小参数。

通过非线性回旋动理学分析，我们证明，在圆柱形等离子体中，对流胞生成的最佳条件是“θ-箍缩”平衡，即只有方位角磁场而不存在磁曲率。在适当的极限情况下，均匀等离子体中动理学阿尔芬波激发对流胞的早期结果 [85] 得以重现。同时，本论文工作也呈现了新的原创性结果。特别是，研究表明，等离子体非均匀性通过抗磁响应[13, 47]对对流胞稳定性产生重要影响，既体现在定性方面，也体现在定量方面。事实上，与均匀等离子体相比，对流胞的增长显著更强（通常可高达一个数量级），且不稳定参数区域也显著更宽。另一个至关重要的因素是非线性与等离子体非均匀性之间微妙的相互作用，它最终会影响等离子体自组织；而这种自组织可通过精细调节天线驱动的模转换动理学阿尔芬波的振幅加以控制。

5.1 参量衰变不稳定性

参量衰变不稳定性（PDI）是一种基本的非线性过程 [46, 55] ，涉及三个非线性耦合波／振荡器：当大振幅泵浦波（“母波”）的振幅超过非线性阈值后，会衰变为两个子波。由于泵浦波

波可以是自发激发的，也可以是外部激发的；参量衰变不稳定性是波能量传递的重要通道，并伴随着对等离子体加热、加速和输运的影响。以如下方程描述的两个耦合受迫谐振子系统为原型，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2}+\omega_1^2 x_1 &= c_1 x_2 E_0,\\ \frac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}t^2}+\omega_2^2 x_2 &= c_2 x_1 E_0,\end{aligned} \tag{5.2}$$

其中，$\mathbf{k}^{1,2}$ 和 $\omega_{1,2}$ 被视为共振波矢和频率，$c_{1,2}$ 是表示耦合强度的常数，而 $E_0 = E_0 \cos(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x} - \omega_0 t)$ 是驱动波（即泵浦波）的振幅。假设 $x_1 = x_1 \overline{\cos}(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} - \omega t)$ 和 $x_2 = x_2 \overline{\cos}(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x} - \omega' t)$，则式 (5.2) 的第二个方程可写为

$$\begin{aligned}\left(\omega_2^2 - \omega'^2\right) \overline{x}_2 \cos\left(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x} - \omega' t\right) &= c_2 \overline{E}_0 \overline{x}_1 \cos\left(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x} - \omega_0 t\right) \cos\left(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t\right) = \\ &= \frac{c_2 \overline{E}_0 \overline{x}_1}{2} \Big\{ \cos\left[\left(\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}\right) \cdot \mathbf{x} - \left(\omega_0 + \omega\right) t\right] \\ &\quad + \cos\left[\left(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}\right) \cdot \mathbf{x} - \left(\omega_0 - \omega\right) t\right] \Big\};\end{aligned} \tag{5.3}$$

因此，特别是，右侧的驱动项可以激发频率为 $\omega' = \omega_0 \pm \omega$ 的振荡器 x_2，而振荡器 x_1 和 x_2 构成一对衰变波。方程 (5.3) 表明，即使存在有限频移，非线性驱动项仍然有效；因此，ω' 不必恰好等于 ω_2，只需近似等于 ω_2。此外，ω' 可以是复数，因为可能存在阻尼或增长，因此振荡器 x_2 可以响应一系列频率。总之，频率和波矢匹配条件为

$$\omega_0 \approx \omega_1 \pm \omega_2, \tag{5.4}$$

$$\mathbf{k}_0 \approx \mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2. \tag{5.5}$$

当高频且相速度较大的入射电磁波激发出两个波 $\mathbf{k}_1 \approx -\mathbf{k}_2$ 时，可能会发生参量衰变不稳定性。请注意，即使阻尼（无论是碰撞阻尼还是无碰撞阻尼）很小，也会阻止参量不稳定性发生，除非泵浦波足够强。为计算波激发的阈值振幅，通过阻尼项 $2\gamma_{1,2}\dot{x}_{1,2}$ 引入 (5.2) 中第一个和第二个方程的阻尼率 γ_1 和 γ_2，最终得到

$$\left(\omega_1^2 - \omega^2 - 2\mathrm{i}\omega\gamma_1\right) x_1(\omega) = c_1 x_2 E_0, \tag{5.6}$$

$$\left[\omega_2^2 - \left(\omega - \omega_0\right)^2 - 2\mathrm{i}\left(\omega - \omega_0\right)\gamma_2\right] x_2(\omega - \omega_0) = c_2 x_1 E_0. \tag{5.7}$$

如果两个衰变波都是边际稳定或弱阻尼的正常模，那么 PDI 就是共振的；如果其中一个衰变波是强阻尼的准模，那么 PDI 就是非共振的。根据上述方程，条件 $\omega \approx \omega_1$ 和 $\omega_0 - \omega \approx \omega_2$ 给出了一个关于阻尼系数的不稳定性阈值，即将 x_1 和 x_2 表示为其

峰值振幅,

$$\left(c_1 c_2 \overline{E}_0^2\right)_{min} = 16\omega_1\omega_2\gamma_1\gamma_2; \tag{5.8}$$

因此，当阻尼趋于零时，阈值也趋于零。

现在设三个相互作用的波分别为泵浦 KAW $\mathbf{\Omega}_0 = (\omega_0, \mathbf{k}_0)$、低频子代离子声波（ISW）$\mathbf{\Omega}_s = (\omega_s, \mathbf{k}_s)$以及子代 KAW $\mathbf{\Omega}_- = (\omega_-, \mathbf{k}_-)$，其中$\omega_- = \omega_s - \omega_0$ 和 $\mathbf{k}_- = \mathbf{k}_s - \mathbf{k}_0$, 满足频率和波矢匹配条件。设较小但有限的泵浦波振幅为 $\Phi_0 = e\delta\phi_0/T_e$。由于 Ω_s 可能是一个准模，因此，为了恰当地描述非共振 PDI，需要保留 $|\Phi_0|^2$ 阶的项。KAW PDI 色散关系为 [17, 14]

$$\epsilon_{sk}\left(\epsilon_{Ak-} + \chi^{(2)}_{A-}\right) = C_k\left|\Phi_0\right|^2, \tag{5.9}$$

其中 ISW 介电常数线性近似为

$$\epsilon_{sk} = 1 + \tau + \tau\Gamma_s\xi_s Z(\xi_s), \tag{5.10}$$

而 ϵ_{Ak-} 是 KAW 衰变波的线性介电常数,

$$\epsilon_{Ak-} = \frac{1-\Gamma_-}{b_-} - \sigma_-\left(\frac{k_\parallel^2 v_A^2}{\omega^2}\right)_-, \tag{5.11}$$

其中 Γ_-、 b_- 和 σ_- 是第2.2节中引入的通常函数，目前仍以通用下标 k表示；此外，$\chi^{(2)}_{A-}$ 是一个用于描述非线性离子康普顿散射 [68, 14, 17] 的函数，而 C_k 是通过泵浦模 [14, 17]在两个子波之间产生的非线性耦合系数。在本节对参量衰变不稳定性的说明范围内，不宜对 $\chi^{(2)}_{A-}$ 和 C_k 项进行详细推导。因此，此处将省略它们。在共振衰变情况下，对于频率 $\omega_s = \omega_{sr} + \mathrm{i}\gamma$，并将$\gamma_{dA_-}$ 和 γ_{ds} 分别记作动理学阿尔芬波和ISW子波的线性阻尼率，关系式（5.9）可化为

$$\left(\gamma + \gamma_{dA_-}\right)\left(\gamma + \gamma_{ds}\right) = C_k\left|\Phi_0\right|^2\left[-\frac{\partial\epsilon_{skr}}{\partial\omega_{sr}}\frac{\partial\epsilon_{Ak-r}}{\partial\omega_{A-r}}\right]^{-1}. \tag{5.12}$$

我们看到，参量衰变不稳定性的增长率随 $|C_k|\Phi_0|^2|$增加，其随 $|k_\perp\rho_i|^4\,|\delta\mathbf{B}_{\perp 0}/B_0|^2$（对于 $|k_\perp\rho_i|^2 \ll 1$）以及 $|\delta\mathbf{B}_{\perp 0}/B_0|^2\,/\,|k_\perp\rho_i|$（对于 $|k_\perp\rho_i|^2 \gg 1$ [17,14]）变化。因此，衰变不稳定性在 $|k_\perp\rho_i| \sim 1$时最强，这清楚地表明，在处理动理学阿尔芬波的衰变不稳定性时，保留有限离子拉莫尔半径动理学效应的必要性。

最后，将磁流体力学（MHD）区间内动理学阿尔芬波的衰变不稳定性与剪切阿尔芬波的衰变不稳定性进行比较，颇有启发意义。实质上，采用理想磁流体力学的流体理论后，参量衰变不稳定性的色散关系与动理学阿尔芬波的参量衰变不稳定性色散关系（5.9）形式相似，只需将动理学阿尔芬波项替换为相应的剪切阿尔芬波项。更根本的变化在于非线性耦合项，即将 C_k 替换为 C_I，其中 [17]

$$C_I \propto \cos^2\theta_0, \qquad C_k \propto \sin^2\theta_0, \tag{5.13}$$

其中， θ_0 是$\mathbf{k}_{\perp 0}$ 与$\mathbf{k}_{\perp -}$之间的夹角；特别地，

$$\frac{C_k}{C_I} \sim \mathcal{O}\left(\left|\Omega_i/\omega_0\right|^2\right)\left|k_\perp \rho_i\right|^4, \tag{5.14}$$

对于 $\left|k_\perp \rho_i\right|^2 \ll 1$，以及

$$\frac{C_k}{C_I} \sim \mathcal{O}\left(\left|\Omega_i/\omega_0\right|^2\right), \tag{5.15}$$

对于 $\left|k_\perp \rho_i\right|^2 \sim 1$。公式 (5.14) 表明，当 $1 > \left|k_\perp \rho_i\right|^2 > \left|\omega_0/\Omega_i\right|$时，通过动理学效应产生的非线性耦合占主导。注意到在典型实验室等离子体中， $\left|\omega_0/\Omega_i\right| \sim 10^{-3}$ ，因此磁流体力学流体理论对剪切阿尔芬波非线性物理的适用范围相当有限。此外，在动理学阿尔芬波非线性效应最强的 $\left|k_\perp \rho_i\right| \sim 1$ 区域，对于典型参数，我们有 $\left|C_k\right| / \left|C_I\right| \sim \left|\Omega_i/\omega_0\right|^2$。总之，除了参量衰变不稳定性的增长率显著提高之外，动理学阿尔芬波与剪切阿尔芬波的参量衰变不稳定性之间或许还有更重要的定性差异：散射产生的子波矢量相对于泵浦波矢量的方向不同。事实上，根据 (5.13)，由于 $C_I \propto \cos^2\theta_0$ ，剪切阿尔芬波的散射在 $\theta_0 = 0,\ \pi$ 附近达到最大值，即当 $\mathbf{k}_{\perp -}$ 与 $\mathbf{k}_{\perp 0}$ 平行或反平行时。相较之下， C_k 的行为表明，动理学阿尔芬波的散射在 $\theta_0 = \pm\pi/2$ 附近达到最大值，即 $\mathbf{k}_{\perp 0}$ 与 $\mathbf{k}_{\perp -}$ 相互垂直。这种差异会影响动理学阿尔芬波湍流的非线性演化，以及动理学阿尔芬波衰变过程所引起的带电粒子输运 [17]。事实上，假设泵浦波是模转换 KAW，且 $\mathbf{k}_{\perp 0}$ 主要沿径向，那么在理想磁流体力学分析中，子动理学阿尔芬波的$\mathbf{k}_{\perp -}$ 也将主要沿径向，对等离子体输运影响很小。与此同时，在动理学区域，子动理学阿尔芬波的$\mathbf{k}_{\perp -}$ 将主要沿方位角方向，对等离子体输运产生重要影响。

5.2 对流胞

当存在约束磁场和电场时，粒子的运动由通常的拉莫尔圆周回旋与导引中心的漂移叠加而成，因此会产生一个额外的横向速度分量 [14],

$$\mathbf{v}_E = \frac{c\,\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}. \tag{5.16}$$

对于长波长，电子和离子的响应相似；然而，在离子拉莫尔半径量级的较短尺度上，电子和离子的响应变得不平衡，进而产生局部电荷分离，因此形成强径向电场。离子流形成二维（位于垂直于背景磁场的平面内）漂移图样，称为对流胞 [75, 60, 18, 20, 53, 70, 71, 27], 即沿磁力线保持恒定、但在垂直方向上发生变化的扰动；因此，这些扰动在涡旋动力学以及等离子体穿过约束磁场的扩散和输运过程中发挥着重要作用。一种分类方案用于

对流胞（CCs）可以形成于静电对流胞（ESCCs）之间，其中$\delta E = \delta E_{\perp}$ [60, 75]，也可以形成于磁静力对流胞（MSCCs）之间，其中 $\delta B = \delta B_{\perp}$ [20]。对于对流胞而言，二维性意味着 $k_{\parallel} = 0$，通常有 Re(ω) ≈ 0。因此，对流胞运动类似于不可压缩流体中的二维涡旋运动，这两种运动都是无散的。在存在碰撞的情况下，这些对流胞会因离子黏性而受到阻尼，从而产生具有纯虚频率的正常模。它们的缓慢运动甚至在热平衡状态下也能导致跨越磁场的异常快速等离子体输运，尤其是当它们与非均匀等离子体中的湍流等不稳定机制相联系时：初始给定的线性不稳定漂移波，即由压力梯度驱动、并因离子与电子运动之间的差异而失稳的波或集体激发，可以发生非线性相互作用并激发这些对流胞。导致对流胞形成的另一条非线性途径，也是本研究的核心关注点，是通过阿尔芬波和下文将讨论的调制不稳定性机制形成。

值得在此回顾一下调制不稳定性与参量衰变不稳定性之间的联系。第 5.1 节曾讨论过这种联系；历史上，这也是最早被研究的实例，研究者由此认识并阐明了等离子体中波散射的重要性 [45, 54]。下文将进一步阐述调制不稳定性与参量衰变不稳定性之间的联系。

5.2.1 调制不稳定性

在实验室聚变等离子体中，对流胞元的非线性激发通常通过背景漂移波和/或阿尔芬波不稳定性之间的模态耦合发生。由于对流胞没有平行波数，其非线性相互作用涉及具有相同 $k_{\parallel}$ 的同向传播的阿尔芬波之间的耦合，而在理想磁流体力学极限下，这对于剪切阿尔芬波而言为零。因此，人们早已认识到，只有非理想磁流体力学涨落（例如动理学阿尔芬波）才能非线性地激发对流胞。此外，由于对流胞在 $\omega = 0$处被激发，人们也认识到，其非线性激发采取调制不稳定性的形式。一般而言，调制不稳定性是波的周期性行为因非线性而进一步增强的一种偏离：非线性介质中的弱调制连续波会增长，并形成频谱边带，还可能使周期性涨落破碎为调制脉冲。在空间中，它将弱调制平面波转变为空间周期性图样。因此，调制不稳定性在形式上与参量衰变不稳定性非常相似，其中载波是泵浦波，而两个边带的行为类似于子波。以往关于通过调制不稳定性由动理学阿尔芬波激发对流胞的理论研究，受到局限于双流体或漂移动力学描述（忽略有限拉莫尔半径效应）和/或假定静电对流胞与磁静力对流胞彼此解耦的限制。这些假设被采用是为了简化理论分析，但会导致对非线性激发机制得出错误的结论。值得注意的是，只有保留关键的有限离子拉莫尔半径效应（有限离子拉莫尔半径），$|k_{\perp}\rho_i| \sim 1$；而在这一体系中，人们发现

静电对流胞和磁静力对流胞通常是内禀耦合的 [85]。作为相较于以往工作的一个全新要素 [47, 85], ，我们将采用非均匀圆柱形等离子体几何结构。同时，我们将运用非线性陀螺动理学方程，并证明有限离子拉莫尔半径以及静电对流胞与磁静力对流胞之间的有限耦合，在对流胞调制激发的动力学中都起着至关重要的定性作用。

5.3 非线性回旋动理学方程

在本文所关注的圆柱等离子体平衡中，该平衡已在第3章介绍，涡量方程可以写成（另见 [85]）

$$\begin{aligned} v_A^2\rho_i^2\nabla\cdot\left[k_\parallel^2\nabla_\perp\delta\psi_k+\frac{1-\Gamma_k}{b_kv_A^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla_\perp\delta\phi_k\right]=-\frac{c}{B_0}\Lambda_{k'}^{k''}\frac{\partial}{\partial t}\Bigg[\rho_i^2v_A^2\Bigg(k_\parallel''\frac{\delta\psi_{k''}}{\omega_{k''}}k_\parallel'k_\perp'^2\frac{\delta\psi_{k'}}{\omega_{k'}} \\ -k_\parallel'\frac{\delta\psi_{k'}}{\omega_{k'}}k_\parallel''k_\perp''^2\frac{\delta\psi_{k''}}{\omega_{k''}}\Bigg)+\left(\delta\phi_{k''}\Gamma_{k'}\delta\phi_{k'}-\delta\phi_{k'}\Gamma_{k''}\delta\phi_{k''}\right)\Bigg]; \end{aligned} \tag{5.17}$$

此处 $\mathbf{k}=\mathbf{k}'+\mathbf{k}''$，其中$\mathbf{k}'$ 和 $\mathbf{k}''$ 是与$\mathbf{k}$ 参与三波相互作用的两个波矢（类似于参量衰变不稳定性），而 $\omega_k=\omega_{k'}+\omega_{k''}$ 则来自频率匹配条件。此外， $\Lambda_{k'}^{k''}=(\mathbf{k}'\times\mathbf{k}'')\cdot\hat{\mathbf{z}}$，而 $\Gamma_k:=I_0(b_k)e^{-b_k}$，其中 I_0 为修正贝塞尔函数。外部天线通过模转换产生的动理学阿尔芬波与低振幅对流胞相互作用并产生边带。具体而言，正如我们将在下文展示的那样，振幅足够高的外部激发动理学阿尔芬波泵浦波可以自发地产生一个对流胞以及两个耦合边带，后者源于对流胞与泵浦波模之间的拍频。正如上一节已经提到的，我们知道 [85] ，只有保留关键的有限离子拉莫尔半径（FILR）效应时，对流胞的自发激发才会发生，即在 $|k_\perp\rho_i|\sim1$ 状态下；并且静电对流胞和磁静力对流胞本质上是耦合的。还应注意，（5.17）可以直接化为前面讨论过的线性极限。在 WKB 形式下，（5.17）可写为

$$\begin{aligned} \omega_k\left(\frac{k_\parallel^2v_A^2}{\omega_k^2}\right)(1-\Gamma_k)\left[\frac{\omega_k^2\delta\phi_k}{k_\parallel^2v_A^2}-\frac{b_k\delta\psi_k}{1-\Gamma_k}\right]=-\mathrm{i}\frac{c}{B_0}\Lambda_{k'}^{k''}\Bigg[\left(\Gamma_{k''}-\Gamma_{k'}\right)\delta\phi_{k'}\delta\phi_{k''} \\ -\frac{k_\parallel'k_\parallel''v_A^2}{\omega_{k'}\omega_{k''}}\left(b_{k'}-b_{k''}\right)\delta\psi_{k'}\delta\psi_{k''}\Bigg]. \end{aligned} \tag{5.18}$$

通过明确写出 $\delta\phi$ 的表达式来进行模态分解：

$$\delta\phi_0:=\frac{T_i}{2e}\left[\delta\hat{\phi}_0e^{\mathrm{i}\left(\frac{n}{R}z-m\theta-\omega_0t\right)}\right]+c.c.\qquad\text{(KAW pump)},\tag{5.19}$$

$$\delta\phi_\pm:=\frac{T_i}{2e}\left[\delta\hat{\phi}_\pm e^{\mathrm{i}\left(\pm\frac{n}{R}z-(m_z\pm m)\theta-(\omega_z\pm\omega_0)t\right)}\right]+c.c.\qquad\text{(KAW sidebands)},\tag{5.20}$$

$$\delta\phi_z:=\frac{T_i}{2e}\left[\delta\hat{\phi}_ze^{-\mathrm{i}(m_z\theta+\omega_zt)}\right]+c.c.\qquad\text{(CC)};\tag{5.21}$$

因此，下标 0 表示泵浦波，下标 $\pm$ 表示两个边带，下标 z 表示对流胞元。 $\delta\psi$ 的表达式也遵循相同的规律。请注意。

此处使用的归一化与 [12] 完全一致，与 [85] 略有不同。$\hat{}\,\hat{}\,\hat{}$ 场 $\delta\phi_0$、$\delta\phi_\pm$、$\delta\phi_z$ 均为无量纲：相应的磁流函数为

$$\delta\hat{\psi}_0 = \frac{\omega_0}{k_\parallel c}\delta\hat{A}_{\parallel 0}, \qquad \delta\hat{\psi}_\pm = \pm\frac{\omega_z \pm \omega_0}{k_\parallel c}\delta\hat{A}_{\parallel\pm}, \qquad \delta\hat{\psi}_z = \frac{\omega_0}{k_\parallel c}\delta\hat{A}_{\parallel z}, \tag{5.22}$$

其中 $k_\parallel = k_{\parallel 0}$ 和 $\psi_{0,\ \pm,\ z}$ 是有效感应平行势的分量（它们与矢量势成正比）。将 (5.19)、(5.20)、(5.21) 和 (5.22) 直接代入 (5.18)，得到以下关于动理学阿尔芬波泵浦波、边带和耦合簇的耦合非线性涡度方程：

$$\begin{aligned}\omega_0\frac{k_\parallel^2 v_A^2}{\omega_0^2}\left(1-\Gamma_0\right)\left[\frac{\omega_0^2}{k_\parallel^2 v_A^2}\delta\hat{\phi}_0 - \frac{b_0}{1-\Gamma_0}\delta\hat{\psi}_0\right] = -\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{ci}\rho_i^2\Bigg[\Lambda_{k_+}^{k_z^*}\Bigg(\left(\Gamma_z-\Gamma_+\right)\delta\hat{\phi}_+\delta\hat{\phi}_z^* \\ -\frac{k_\parallel^2 v_A^2\left(b_+-b_z\right)}{\omega_0\left(\omega_0+\omega_z\right)}\delta\hat{\psi}_+\delta\hat{\psi}_z^*\Bigg) + \Lambda_{k_-^*}^{k_z}\Bigg(\left(\Gamma_z-\Gamma_-\right)\delta\hat{\phi}_-^*\delta\hat{\phi}_z - \frac{k_\parallel^2 v_A^2\left(b_--b_z\right)}{\omega_0\left(\omega_0-\omega_z^*\right)}\delta\hat{\psi}_-^*\delta\hat{\psi}_z\Bigg)\Bigg],\end{aligned} \tag{5.23}$$

$$\begin{aligned}\left(\omega_z\pm\omega_0\right)\frac{k_\parallel^2 v_A^2}{\left(\omega_z\pm\omega_0\right)^2}\left(1-\Gamma_\pm\right)\left[\frac{\left(\omega_z\pm\omega_0\right)^2}{k_\parallel^2 v_A^2}\delta\hat{\phi}_\pm - \frac{b_\pm}{1-\Gamma_\pm}\delta\hat{\psi}_\pm\right] = \\ = -\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{ci}\rho_i^2\left[\begin{pmatrix}\Lambda_{k_0}^{k_z}\\ \Lambda_{k_0^*}^{k_z}\end{pmatrix}\left(\Gamma_z-\Gamma_0\right)\delta\hat{\phi}_z\begin{pmatrix}\delta\hat{\phi}_0\\ \delta\hat{\phi}_0^*\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\Lambda_{k_0}^{k_z}\\ \Lambda_{k_0^*}^{k_z}\end{pmatrix}\frac{k_\parallel^2 v_A^2\left(b_0-b_z\right)}{\omega_0^2}\delta\hat{\psi}_z\begin{pmatrix}\delta\hat{\psi}_0\\ \delta\hat{\psi}_0^*\end{pmatrix}\right],\end{aligned} \tag{5.24}$$

$$\begin{aligned}\omega_z\left(1-\Gamma_z\right)\delta\hat{\phi}_z = -\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{ci}\rho_i^2\Bigg[\Lambda_{k_0}^{k_-}\Bigg(\left(\Gamma_- - \Gamma_0\right)\delta\hat{\phi}_0\delta\hat{\phi}_- - \frac{k_\parallel^2 v_A^2\left(b_0-b_-\right)}{\omega_0\left(\omega_0-\omega_z\right)}\delta\hat{\psi}_0\delta\hat{\psi}_-\Bigg) \\ +\Lambda_{k_0^*}^{k_+}\Bigg(\left(\Gamma_+-\Gamma_0\right)\delta\hat{\phi}_0^*\delta\hat{\phi}_+ - \frac{k_\parallel^2 v_A^2\left(b_0-b_+\right)}{\omega_0\left(\omega_0+\omega_z\right)}\delta\hat{\psi}_0^*\delta\hat{\psi}_+\Bigg)\Bigg].\end{aligned} \tag{5.25}$$

注意，在理想磁流体力学极限下，这些方程的右端趋于 0，因为涉及 Γ_k 函数的差异以及含有 b_k 的项都会消失。另一方面，非线性行为的度量由耦合系数 $\Lambda_{k'}^{k''}$ 给出，当泵浦波数与边带波数正交时，这些耦合系数达到最大值。这些方程必须通过准中性条件闭合

$$\left(1+\frac{1}{\tau}\right)\delta\phi_k = \frac{T_i}{ne}\langle J_k\delta g_{ki} - \delta g_{ke}\rangle, \tag{5.26}$$

其中 δg_k 满足电子和离子的 Frieman-Chen 非线性陀螺动理学方程[35, 85] ，在均匀等离子体中表示为

$$\mathrm{i}\left(k_\parallel v_\parallel - \omega_k\right)\delta g_k - \frac{c}{B_0}\Lambda_{k'}^{k''}\left[\langle\delta L_g\rangle_{k'}\delta g_{k''} - \langle\delta L_g\rangle_{k''}\delta g_{k'}\right] = -\frac{\mathrm{i}e\omega_k}{T}F_M\langle\delta L_g\rangle_k. \tag{5.27}$$

求解 (5.26) 中的 $k_\parallel \neq 0$ ，我们在最低（线性）阶得到 [85], ,

$$\delta g_{ki}^{(1)} \approx \frac{eF_{Mi}J_k}{T_i}\delta L_k, \qquad \delta g_{ke}^{(1)} \approx -\frac{eF_{Me}}{T_e}\delta\psi_k, \tag{5.28}$$

其中 $\delta L_k = \delta\phi_k - (v_\parallel/c)\delta A_\parallel$。代回 (5.26) 得到

$$\sigma_k \delta\phi_k - \delta\psi_k = \frac{T_e}{ne}\langle J_k \delta g_{ki}^{(2)} - \delta g_{ke}^{(2)}\rangle, \tag{5.29}$$

其中 σ_k 如 2.2 中所定义；然而，纳入朗道阻尼后会产生 σ_k 一个负的复数虚部，$\sigma_k = 1+\tau(1-\Gamma_k)(1-\mathrm{i}\sqrt{\pi}\xi_e)$。反厄米响应主要源于电子的朗道阻尼。在下一阶，

$$\delta g_{ki}^{(2)} \approx 0, \qquad k_\parallel \delta g_{ke}^{(2)} \approx -\mathrm{i}\frac{c}{B_0}\Lambda_{k'}^{k''}\left(\delta g_{k'e}\frac{\delta A_{\parallel k''}}{c} - \delta g_{k''e}\frac{\delta A_{\parallel k'}}{c}\right). \tag{5.30}$$

注意（记住（5.22））

$$\delta g_{ze}^{(1)} \approx -\frac{e}{T_e}F_{Me}\left(\delta\phi_z - \frac{v_\parallel}{c}\delta A_{\parallel z}\right) \tag{5.31}$$

代回（5.29），得到

$$\begin{aligned}\sigma_0\delta\hat{\phi}_0 - \delta\hat{\psi}_0 = -\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{ci}\rho_i^2\Bigg[&\Lambda_{k_+}^{k_z^*}\left(\frac{\delta\hat{\psi}_z^*}{\omega_0} - \frac{\delta\hat{\phi}_z^*}{\omega_0+\omega_z}\right)\delta\hat{\psi}_+ \\ &+ \Lambda_{k_-^*}^{k_z}\left(\frac{\delta\hat{\psi}_z}{\omega_0} - \frac{\delta\hat{\phi}_z}{\omega_0-\omega_z^*}\right)\delta\hat{\psi}_-^*\Bigg]\end{aligned} \tag{5.32}$$

and

$$\hat{\sigma}_\pm\delta\hat{\phi}_\pm - \delta\hat{\psi}_\pm = \mp\frac{\mathrm{i}\omega_{ci}\rho_i^2}{2\omega_0}\begin{pmatrix}\Lambda_{k_0}^{k_z}\\ \Lambda_{k_0^*}^{k_z}\end{pmatrix}\left(\delta\hat{\psi}_z - \delta\hat{\phi}_z\right)\begin{pmatrix}\delta\hat{\psi}_0\\ \delta\hat{\psi}_0^*\end{pmatrix}. \tag{5.33}$$

ˆ 为了封闭该系统，必须独立于（5.29）确定 $\delta\psi_z$ 的方程，因为对于耦合簇，后者与（5.25）退化。对于长于无碰撞趋肤深度的波长，令电子的 $\delta J_{\parallel z}$ 消失，即可得到 $\delta\psi_z$ 的方程:

$$\frac{k_\perp^2 c^2}{\omega_{pe}^2} \ll 1, \qquad \delta J_{\parallel ze} = -e\int v_\parallel \delta f_{ze}\,\mathrm{d}\mathbf{v} \approx 0. \tag{5.34}$$

对于 $k_\parallel = 0$，非线性陀螺动理学方程变为 [85]

$$\frac{\partial\delta f_{ze}}{\partial t} = \frac{ev_\parallel F_{Me}}{cT_e}\left[\frac{\partial\delta A_{\parallel z}}{\partial t} + \frac{c}{B_0}\Lambda_{k'}^{k''}\left(\delta A_{\parallel k'}\delta\psi_{k''} - \delta A_{\parallel k''}\delta\psi_{k'}\right)\right], \tag{5.35}$$

由此可直接得到（5.31）。将（5.35）代入（5.34），最终得到

$$\frac{\partial\delta\hat{\psi}_z}{\partial t} = -\frac{\omega_{ci}\rho_i^2}{2}\left[\Lambda_{k_0}^{k_-}\left(\delta\hat{\psi}_0\delta\hat{\psi}_- - \frac{\delta\hat{\psi}_-\delta\hat{\psi}_0}{1-\omega_z/\omega_0}\right) + \Lambda_{k_0^*}^{k_+}\left(\delta\hat{\psi}_0^*\delta\hat{\psi}_+ - \frac{\delta\hat{\psi}_+\delta\hat{\psi}_0^*}{1+\omega_z/\omega_0}\right)\right], \tag{5.36}$$

也就是说,

$$\delta\hat{\psi}_z = \mathrm{i}\frac{\omega_{ci}\rho_i^2}{2\omega_0}\left[\Lambda_{k_0}^{k_-}\frac{\delta\hat{\psi}_-\delta\hat{\psi}_0}{1-\omega_z/\omega_0} - \Lambda_{k_0^*}^{k_+}\frac{\delta\hat{\psi}_+\delta\hat{\psi}_0^*}{1+\omega_z/\omega_0}\right]. \tag{5.37}$$

非线性回旋动理学涡量方程(5.23)、(5.24) 和(5.25)，以及电子平行力平衡/准中性方程(5.32)、(5.33)和(5.37)，提供了一组完整的非线性方程，用于描述均匀等离子体中由动理学阿尔芬波衰变形成对流胞。这些方程扩展了 [85] 的结果，因为通过 (5.23) 和 (5.32)，它们包含了对流胞和边带对KAW 泵浦波的反馈。在下一节中，这些方程将进一步扩展到非均匀等离子体。因此，我们有6个关于6个未知量的方程，需要以含时或定常方式求解：对于给定的 $\delta\psi_0$ 和 $\delta\phi_0$，即对于给定的泵浦波，我们可将问题化简为4 个代数方程。假设 KAW 泵浦波的振幅固定，可以通过将 (5.24) 和(5.25) 与 (5.33)和 (5.37)联立来研究参量衰变不稳定性。在确定非线性阈值后，可以通过考察整组方程来研究系统进一步的非线性演化。

改变 NL 耦合系数 $\Lambda_{k'}^{k''}$，使其成为$\mathbf{k}_0$ 和$\mathbf{k}_z$ 的函数（其中$\mathbf{k}_\pm = \mathbf{k}_z \pm \mathbf{k}_0$），我们可以研究调制不稳定性的局部增长率随波数和振幅的变化。由于对于一个耦合簇 $k_\parallel = 0$， $k_\parallel$ 由（3.12）给出，我们看到，在一般的螺旋箍缩圆柱等离子体平衡中，耦合簇的存在意味着一个强约束： $n = m = 0$。与此同时，我们的目标是最大化非线性耦合。因此，考虑一个 θ- 箍缩平衡作为一般螺旋箍缩平衡的特殊情形似乎是合理的，其中方位角磁场为零且 $q \to \infty$。这样，耦合簇的存在施加了 $n = 0$，从而允许我们自由选择 m_z 以最大化非线性耦合。同时，由于螺旋箍缩构型具有内在稳定性，我们可以适当选择电子和离子的温度剖面，以使朗道阻尼最小。换言之，这种圆柱等离子体平衡的特殊情形特别适合用于研究由外部天线激发的高振幅模转换 KAW 所产生的耦合簇。

θ-箍缩构型中的非均匀等离子体

考虑到 $|k_\parallel v_{Ti}| \ll \omega \ll |k_\parallel v_{Te}|$，在短波长极限下，漂移效应可能会改变离子的回旋动理学响应。然而，根据θ-箍缩磁场构型中的平衡条件（3.3），即

$$\nabla_\perp\left(\frac{B_0^2}{8\pi} + p_0\right) = 0, \tag{5.38}$$

容易证明，对于热离子有 $v_d \sim (\beta/2)v_*$。因此，特征离子磁漂移速度 v_d 通常远小于相应的离子磁漂移 v_*。因此，我们可以仅通过离子和电子的抗磁响应来考虑等离子体非均匀性。具体而言，为了简化起见，我们来考虑密度的影响。

仅梯度，而离子和温度剖面取为常数；另见 [13]。前一个方程在 $k_\parallel \neq 0$ 下可在最低线性阶求解，得到

$$\delta g_{ki}^{(1)} \approx \frac{eF_{Mi}J_k}{T_i}\left(1-\frac{\omega_{*i}}{\omega}\right)_k \delta L_k, \qquad \delta g_{ke}^{(1)} \approx -\frac{eF_{Me}}{T_e}\left(1-\frac{\omega_{*e}}{\omega}\right)_k \delta\psi_k, \tag{5.39}$$

其中抗磁频率定义为

$$\omega_{*i} := \frac{cT_i}{eB_0}k_\theta \frac{\partial_r n_0}{n_0}, \tag{5.40}$$

$$\omega_{*e} := -\frac{cT_e}{eB_0}k_\theta \frac{\partial_r n_0}{n_0} = -\tau\omega_{*i}. \tag{5.41}$$

这会改变 $k_\parallel \neq 0$ 模态的准中性条件（见 (5.29)），使其成为

$$\left[1+\tau-\tau\Gamma_k\left(1-\frac{\omega_{*i}}{\omega}\right)_k\right]\delta\phi_k - \delta\psi_k\left(1-\frac{\omega_{*e}}{\omega}\right)_k = \frac{T_e}{ne}\left\langle J_k\delta g_{ki}^{(2)} - \delta g_{ke}^{(2)}\right\rangle; \tag{5.42}$$

对于电子，该方程由（5.30）的解得到，并给出

$$\frac{2e}{T_i}\left\langle -\frac{T_e}{ne}\delta g_{ke}^{(2)}\right\rangle_\pm = \pm\frac{\mathrm{i}\omega_{ci}\rho_i^2}{2\omega_0}\begin{pmatrix}\Lambda_{k_0}^{k_z}\delta\hat\psi_0\\ \Lambda_{k_0^*}^{k_z}\delta\hat\psi_0^*\end{pmatrix}\left[\delta\hat\phi_z\left(1-\frac{\omega_{*e}}{\omega}\right)_z - \delta\hat\psi_z\left(1-\frac{\omega_{*e}}{\omega}\right)_0\right]. \tag{5.43}$$

与此同时，$\delta g_{ki}^{(2)}$ 贡献并不消失（对于 $\omega_{*i}=0$它会消失），并变得

$$\frac{2e}{T_i}\left\langle \frac{T_e}{ne}\delta g_{ki}^{(2)}\right\rangle_\pm = \frac{\mathrm{i}\omega_{ci}\rho_i^2\tau}{2\left(\omega_z\pm\omega_0\right)}\begin{pmatrix}\Lambda_{k_0}^{k_z}F_{1+}\delta\hat\phi_0\\ \Lambda_{k_0^*}^{k_z}F_{1-}\delta\hat\phi_0^*\end{pmatrix}\delta\hat\phi_z\left[\left(\frac{\omega_{*i}}{\omega}\right)_0 - \left(\frac{\omega_{*i}}{\omega}\right)_z\right], \tag{5.44}$$

其中 $F_{1+}=\langle J_zJ_{k0}J_{k+}F_{Mi}/n_0\rangle$、$F_{1-}=\langle J_zJ_{k0^*}J_{k-}F_{Mi}/n_0\rangle$，并且忽略了与 $\delta A_\parallel$ 成正比的项，因为它们是 $\mathcal{O}(\beta_i)$。方程（5.33）修正为以下边带准中性条件

$$\begin{aligned}\hat\sigma_\pm\delta\hat\phi_\pm - \delta\hat\psi_\pm = {}& \pm\frac{\mathrm{i}\omega_{ci}\rho_i^2}{2\omega_0\left(1-\frac{\omega_{*e}}{\omega}\right)_\pm}\begin{pmatrix}\Lambda_{k_0}^{k_z}\delta\hat\psi_0\\ \Lambda_{k_0^*}^{k_z}\delta\hat\psi_0^*\end{pmatrix}\left[\delta\hat\phi_z\left(1-\frac{\omega_{*e}}{\omega}\right)_z - \delta\hat\psi_z\left(1-\frac{\omega_{*e}}{\omega}\right)_0\right]\\ & \pm\frac{\mathrm{i}\omega_{ci}\rho_i^2}{2\left(\omega_0\pm\omega_z\right)\left(1-\frac{\omega_{*e}}{\omega}\right)_\pm}\begin{pmatrix}\Lambda_{k_0}^{k_z}F_{1+}\delta\hat\phi_0\\ \Lambda_{k_0^*}^{k_z}F_{1-}\delta\hat\phi_0^*\end{pmatrix}\tau\delta\hat\phi_z\left[\left(\frac{\omega_{*i}}{\omega}\right)_0 - \left(\frac{\omega_{*i}}{\omega}\right)_z\right],\end{aligned} \tag{5.45}$$

其中 $\hat\sigma_\pm = \left[1+\tau-\tau\Gamma_\pm(1-\omega_{*i}/\omega)_\pm\right]/(1-\omega_{*e}/\omega)_\pm$，如 [13] 所示。计算电子的平行力平衡时也可采用类似的步骤，但需注意，在电子的无质量近似下，（5.30），

$$\delta g_{ze}^{(2)} \approx \frac{\mathrm{i}cv_\parallel}{\omega_z B_0 c}\Lambda_{k'}^{k''}\frac{eF_{Me}}{T_e}\left[\left(1-\frac{\omega_{*e}}{\omega}\right)_{k''}\delta\psi_{k''}\delta A_{\parallel k'} - \left(1-\frac{\omega_{*e}}{\omega}\right)_{k'}\delta\psi_{k'}\delta A_{\parallel k''}\right]. \tag{5.46}$$

按照（5.30）之后所述的相同步骤，并寻求 $\delta J_{\parallel ze}=0$的解，可以验证（5.45）和（5.46）使电子抗磁效应得以简化，且（5.37）仍然适用，

$$\delta\hat\psi_z = \mathrm{i}\frac{\omega_{ci}\rho_i^2}{2\omega_0}\left[\Lambda_{k_0}^{k_-}\frac{\delta\hat\psi_-\delta\hat\psi_0}{1-\omega_z/\omega_0} - \Lambda_{k_0^*}^{k_+}\frac{\delta\hat\psi_+\delta\hat\psi_0^*}{1+\omega_z/\omega_0}\right]. \tag{5.47}$$

因此，通过涡量方程闭合方程组，我们得到

$$\begin{aligned}
&\omega_k\left[\left(1-\frac{\omega_{*i}}{\omega}\right)_k\left(1-\Gamma_k\right)\delta\hat{\phi}_k-\frac{b_k k_\parallel^2 v_A^2}{\omega_k^2}\delta\hat{\psi}_k\right]= \\
&=-\frac{\mathrm{i}\omega_{ci}\rho_i^2}{2}\Lambda_{k'}^{k''}\Bigg\{\Big[\left(1-\frac{\omega_{*i}}{\omega}\right)_{k''}\Gamma_{k''}-\left(1-\frac{\omega_{*i}}{\omega}\right)_{k'}\Gamma_{k'}+F_1\left(\frac{\omega_{*i}}{\omega}\right)_{k''} \\
&-F_1\left(\frac{\omega_{*i}}{\omega}\right)_{k'}\Big]\delta\hat{\phi}_{k'}\delta\hat{\phi}_{k''}-\left(\frac{k_\parallel v_A}{\omega}\right)_{k'}\left(\frac{k_\parallel v_A}{\omega}\right)_{k''}\left(b_{k'}-b_{k''}\right)\delta\hat{\psi}_{k'}\delta\hat{\psi}_{k''}\Bigg\},
\end{aligned}\tag{5.48}$$

可分别应用于动理学阿尔芬波边带，

$$\begin{aligned}
&\left(\omega_z\pm\omega_0\right)\left[\left(1-\frac{\omega_{*i}}{\omega}\right)_\pm\left(1-\Gamma_\pm\right)\delta\hat{\phi}_\pm-\frac{b_\pm k_\parallel^2 v_A^2}{\left(\omega_z\pm\omega_0\right)^2}\delta\hat{\psi}_\pm\right]= \\
&=-\frac{\mathrm{i}\omega_{ci}\rho_i^2}{2}\Bigg\{\Big[\left(1-\frac{\omega_{*i}}{\omega}\right)_z\Gamma_z-\left(1-\frac{\omega_{*i}}{\omega}\right)_0\Gamma_0+F_1\left(\frac{\omega_{*i}}{\omega}\right)_z \\
&-F_1\left(\frac{\omega_{*i}}{\omega}\right)_0\Big]\begin{pmatrix}\Lambda_{k_0}^{k_z}\delta\hat{\phi}_0\\ \Lambda_{k_0^*}^{k_z}\delta\hat{\phi}_0^*\end{pmatrix}\delta\hat{\phi}_z-\frac{k_\parallel^2 v_A^2}{\omega_0^2}\left(b_0-b_z\right)\begin{pmatrix}\Lambda_{k_0}^{k_z}\delta\hat{\psi}_0\\ \Lambda_{k_0^*}^{k_z}\delta\hat{\psi}_0^*\end{pmatrix}\delta\hat{\psi}_z\Bigg\},
\end{aligned}\tag{5.49}$$

以及对流胞，

$$\begin{aligned}
&\omega_z\left(1-\frac{\omega_{*i}}{\omega}\right)_z\left(1-\Gamma_z\right)\delta\hat{\phi}_z= \\
&=-\frac{\mathrm{i}\omega_{ci}\rho_i^2}{2}\Bigg\{\Lambda_{k_0}^{k_-}\Big[\left(1-\frac{\omega_{*i}}{\omega}\right)_-\Gamma_--\left(1-\frac{\omega_{*i}}{\omega}\right)_0\Gamma_0+F_1\left(\frac{\omega_{*i}}{\omega}\right)_- \\
&-F_1\left(\frac{\omega_{*i}}{\omega}\right)_0\Big]\delta\hat{\phi}_0\delta\hat{\phi}_--\frac{k_\parallel^2 v_A^2}{\omega_0\left(\omega_0-\omega_z\right)}\left(b_0-b_-\right)\Lambda_{k_0}^{k_-}\delta\hat{\psi}_0\delta\hat{\psi}_- \\
&+\Lambda_{k_0^*}^{k_+}\left[\left(1-\frac{\omega_{*i}}{\omega}\right)_+\Gamma_+-\left(1-\frac{\omega_{*i}}{\omega}\right)_0\Gamma_0+F_1\left(\frac{\omega_{*i}}{\omega}\right)_+-F_1\left(\frac{\omega_{*i}}{\omega}\right)_0\right]\delta\hat{\phi}_0^*\delta\hat{\phi}_+ \\
&-\frac{k_\parallel^2 v_A^2}{\omega_0\left(\omega_0+\omega_z\right)}\left(b_0-b_+\right)\Lambda_{k_0^*}^{k_+}\delta\hat{\psi}_0^*\delta\hat{\psi}_+\Bigg\}.
\end{aligned}\tag{5.50}$$

总之，(5.45)、(5.47)、(5.49) 和 (5.50) 构成了计算耦合簇调制不稳定性增长所需求解的完整方程组。这些方程包含抗磁效应（对称性破缺）；当 $\omega_{*i,e}\to 0$ 时，它们可化简为前述方程，并且与 [13] 中的分析一致。这些理论分析以及将在后续章节中给出的相应数值解，都是本论文工作的原创性贡献。

5.4 调制不稳定性的求解

为了更有针对性地开展研究，我们引入以下简化条件，以最大限度地增强非线性相互作用；这里假设泵浦 KAW 是模式转换后的

波，由外部天线以给定频率 ω_0 驱动产生，同时具有（较低的）极向和方位模数（n, m）：

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_{\perp 0} \approx \mathbf{k}_{0r}\hat{\mathbf{r}}, \qquad \mathbf{k}_{\parallel 0} = \mathbf{k}_{\parallel}\hat{\mathbf{z}} = \frac{n}{R}\hat{\mathbf{z}},\\ \mathbf{k}_{\perp z} \approx -\frac{m_z}{r}\hat{\boldsymbol{\theta}},\\ \mathbf{k}_{\perp \pm} \approx -\frac{m_z}{r}\hat{\boldsymbol{\theta}} \pm k_{0r}\hat{\mathbf{r}}, \qquad \mathbf{k}_{\parallel \pm} = \pm\frac{n}{R}\hat{\mathbf{z}},\end{aligned} \tag{5.51}$$

除了总体请求 $k_{\parallel z} = 0$ 外。请注意，这里的基本假设是，泵浦KAW 的$\mathbf{k}_\perp$ 主要沿径向方向（正如我们所预期的，因为我们通过在剪切阿尔芬波共振处进行模转换来构造泵浦/母KAW），并且其行为主要表现为振荡，同时振幅调制发生在比 ρ_i更长的尺度上。与此同时，耦合簇具有宏观径向结构，并以与 $|m_z| \gg |m|$ 相关联的短极向尺度为主。这一特征显然使非线性耦合系数 $\Lambda_{k_0}^{k_z}$ 最大化。下文将证明，该条件也与耦合簇激发率的最大化相一致。基于这些假设，我们有

$$b_\pm \approx b_0 + b_z, \qquad b_z \approx \frac{m_z^2\rho_i^2}{r^2}, \qquad b_0 \approx k_{0r}^2\rho_i^2, \tag{5.52}$$

因此

$$\Gamma_+ \approx \Gamma_-, \qquad F_{1+} \approx F_{1-} = \int_0^\infty e^{-t} J_0\left(\sqrt{2b_z t}\right) J_0\left(\sqrt{2b_0 t}\right) J_0\left(\sqrt{2b_+ t}\right) \mathrm{d}t. \tag{5.53}$$

最后，为了更方便地处理方程，我们引入符号$R_1^\pm$和 $R_2^\pm$，分别表示在 $\pm$符号下的 (5.45) 和 (5.49) 的右侧。因此，由 (5.45) 和 (5.49) 可得

$$\left[\left(1 - \frac{\omega_{*i}}{\omega}\right)_\pm (1 - \Gamma_\pm) - b_\pm \frac{k_\parallel^2 v_A^2}{\left(\omega_z \pm \omega_0\right)^2}\hat{\sigma}_\pm\right]\delta\hat{\phi}_\pm = \frac{R_2^\pm}{\omega_z \pm \omega_0} - \frac{b_\pm k_\parallel^2 v_A^2}{\left(\omega_z \pm \omega_0\right)^2} R_1^\pm, \tag{5.54}$$

$$\begin{aligned}\left[\left(1 - \frac{\omega_{*i}}{\omega}\right)_\pm (1 - \Gamma_\pm) - b_\pm \frac{k_\parallel^2 v_A^2}{\left(\omega_z \pm \omega_0\right)^2}\hat{\sigma}_\pm\right]\delta\hat{\psi}_\pm = -R_1^\pm \left(1 - \frac{\omega_{*i}}{\omega}\right)_\pm (1 - \Gamma_\pm)\\ + \frac{\hat{\sigma}_\pm R_2^\pm}{\omega_z \pm \omega_0},\end{aligned} \tag{5.55}$$

其中，考虑到 (5.51)，并注意到 $\Lambda_{k_0^*}^{k_z} = -\Lambda_{k_0}^{k_z}$,

$$\begin{aligned}R_1^\pm = \frac{\mathrm{i}\omega_{ci}\rho_i^2}{2\omega_0} \frac{\Lambda_{k_0}^{k_z}\sigma_0}{\left(1 - \frac{\omega_{*e}}{\omega}\right)_\pm} \Bigg\{ \left[1 + \left(\frac{\omega_{*i}}{\omega}\right)_z \tau - \left(\frac{\omega_{*i}}{\omega}\right)_z \frac{\tau F_1}{\sigma_0\left(1 \pm \frac{\omega_z}{\omega_0}\right)}\right]\left(\delta\hat{\phi}_z - \delta\hat{\psi}_z\right)\\ + \left[\left(\frac{\omega_{*i}}{\omega}\right)_z \tau - \left(\frac{\omega_{*i}}{\omega}\right)_z \frac{\tau F_1}{\sigma_0\left(1 \pm \frac{\omega_z}{\omega_0}\right)}\right]\delta\hat{\psi}_z \Bigg\} \begin{pmatrix} \delta\hat{\phi}_0 \\ \delta\hat{\phi}_0^* \end{pmatrix},\end{aligned} \tag{5.56}$$

and

$$\begin{aligned}\pm R_2^{\pm}=\frac{\mathrm{i}\omega_{ci}\rho_i^2}{2}\Lambda_{k_0}^{k_z}\Bigg\{&\left[\Gamma_0-\Gamma_z-\left(\frac{\omega_{*i}}{\omega}\right)_z(F_1-\Gamma_z)-\frac{1-\Gamma_0}{b_0}(b_z-b_0)\right]\delta\hat{\psi}_z\\&+\left[\Gamma_0-\Gamma_z-\left(\frac{\omega_{*i}}{\omega}\right)_z(F_1-\Gamma_z)\right]\left(\delta\hat{\phi}_z-\delta\hat{\psi}_z\right)\Bigg\}\begin{pmatrix}\delta\hat{\phi}_0\\ \delta\hat{\phi}_0^*\end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{5.57}$$

引入边带的动理学阿尔芬波介电常数

$$\epsilon_{A\pm}:=\left(1-\frac{\omega_{*i}}{\omega}\right)_{\pm}\frac{1-\Gamma_{\pm}}{b_{\pm}}-\frac{k_{\parallel}^2v_A^2}{\left(\omega_z\pm\omega_0\right)^2}\hat{\sigma}_{\pm}\tag{5.58}$$

整理各项后，方程（5.54）和（5.55）可写成

$$\begin{aligned}\left(\omega_0\pm\omega_z\right)b_{\pm}\hat{\epsilon}_{A\pm}\delta\hat{\phi}_{\pm}&=\frac{\mathrm{i}\omega_{ci}\rho_i^2}{2}\Lambda_{k_0}^{k_z}\left[c_{\phi}^{\pm}\left(\delta\hat{\phi}_z-\delta\hat{\psi}_z\right)+d_{\phi}^{\pm}\delta\hat{\psi}_z\right]\begin{pmatrix}\delta\hat{\phi}_0\\ \delta\hat{\phi}_0^*\end{pmatrix},\\\left(\omega_0\pm\omega_z\right)b_{\pm}\hat{\epsilon}_{A\pm}\delta\hat{\psi}_{\pm}&=\frac{\mathrm{i}\omega_{ci}\rho_i^2}{2}\Lambda_{k_0}^{k_z}\left[c_{\psi}^{\pm}\left(\delta\hat{\phi}_z-\delta\hat{\psi}_z\right)+d_{\psi}^{\pm}\delta\hat{\psi}_z\right]\begin{pmatrix}\delta\hat{\phi}_0\\ \delta\hat{\phi}_0^*\end{pmatrix},\end{aligned}\tag{5.59}$$

其中

$$\begin{aligned}c_{\phi}^{\pm}:=&\Gamma_0-\Gamma_z-\left(\frac{\omega_{*i}}{\omega}\right)_z(F_1-\Gamma_z)\\&-\frac{b_{\pm}\left(1-\Gamma_0\right)}{b_0\left(1-\frac{\omega_{*e}}{\omega}\right)_{\pm}\left(1\pm\frac{\omega_z}{\omega_0}\right)}\left[1+\left(\frac{\omega_{*i}}{\omega}\right)_z\tau\left(1-\frac{F_1}{\sigma_0\left(1\pm\frac{\omega_z}{\omega_0}\right)}\right)\right],\end{aligned}\tag{5.60}$$

$$\begin{aligned}d_{\phi}^{\pm}:=&\Gamma_0-\Gamma_z-\left(\frac{\omega_{*i}}{\omega}\right)_z(F_1-\Gamma_z)-\frac{(b_z-b_0)\left(1-\Gamma_0\right)}{b_0}\\&-\frac{b_{\pm}\left(1-\Gamma_0\right)}{b_0\left(1-\frac{\omega_{*e}}{\omega}\right)_{\pm}\left(1\pm\frac{\omega_z}{\omega_0}\right)}\left[\left(\frac{\omega_{*i}}{\omega}\right)_z\tau\left(1-\frac{F_1}{\sigma_0\left(1\pm\frac{\omega_z}{\omega_0}\right)}\right)\right],\end{aligned}\tag{5.61}$$

$$\begin{aligned}c_{\psi}^{\pm}:=&\hat{\sigma}_{\pm}\left[\Gamma_0-\Gamma_z-\left(\frac{\omega_{*i}}{\omega}\right)_z(F_1-\Gamma_z)\right]\\&-\frac{\left(1-\Gamma_{\pm}\right)\left(1-\frac{\omega_{*i}}{\omega}\right)_{\pm}\left(1\pm\frac{\omega_z}{\omega_0}\right)}{\left(1-\frac{\omega_{*e}}{\omega}\right)_{\pm}}\sigma_0\left[1+\left(\frac{\omega_{*i}}{\omega}\right)_z\tau\left(1-\frac{F_1}{\sigma_0\left(1\pm\frac{\omega_z}{\omega_0}\right)}\right)\right],\end{aligned}\tag{5.62}$$

$$\begin{aligned}d_{\psi}^{\pm}:=&\hat{\sigma}_{\pm}\left[\Gamma_0-\Gamma_z-\left(\frac{\omega_{*i}}{\omega}\right)_z(F_1-\Gamma_z)-\frac{(b_z-b_0)\left(1-\Gamma_0\right)}{b_0}\right]\\&-\frac{\left(1-\Gamma_{\pm}\right)\left(1-\frac{\omega_{*i}}{\omega}\right)_{\pm}\left(1\pm\frac{\omega_z}{\omega_0}\right)}{\left(1-\frac{\omega_{*e}}{\omega}\right)_{\pm}}\sigma_0\left[\left(\frac{\omega_{*i}}{\omega}\right)_z\tau\left(1-\frac{F_1}{\sigma_0\left(1\pm\frac{\omega_z}{\omega_0}\right)}\right)\right].\end{aligned}\tag{5.63}$$

利用（5.59）、（5.60）、（5.61）、（5.62）和（5.63），我们可以计算调制不稳定性色散关系。首先注意到

$$\hat{\sigma}_{\pm}=\frac{\omega_z\left(1+\tau-\tau\Gamma_{\pm}\right)\pm\omega_0\left(1+\tau-\tau\Gamma_{\pm}\right)+\tau\Gamma_{\pm}\omega_{*i}}{\omega_z\pm\omega_0+\tau\omega_{*i}}, \tag{5.64}$$

ω_{*i} 为耦合簇抗磁频率（5.40）。同时，采用记号 $\sigma_{\pm}$ 表示 $\hat{}\sigma_{\pm}$，其中不含 ω_{*i}，可写为

$$\begin{aligned} b_{\pm}\hat{\epsilon}_{A\pm}=&\frac{\left(1-\Gamma_{\pm}\right)\left(1\pm\frac{\omega_z}{\omega_0}\right)\left(1\pm\frac{\omega_z}{\omega_0}\pm\tau\frac{\omega_{*i}}{\omega_0}\right)\left(1\pm\frac{\omega_z}{\omega_0}\mp\frac{\omega_{*i}}{\omega_0}\right)}{\left(1\pm\frac{\omega_z}{\omega_0}\right)^2\left(1\pm\frac{\omega_z}{\omega_0}\pm\tau\frac{\omega_{*i}}{\omega_0}\right)}\\ &-\frac{\frac{1-\Gamma_0}{b_0\sigma_0}\sigma_{\pm}b_{\pm}\left(1\pm\frac{\omega_z}{\omega_0}\pm\frac{\tau\Gamma_{\pm}}{\sigma_{\pm}}\frac{\omega_{*i}}{\omega_0}\right)}{\left(1\pm\frac{\omega_z}{\omega_0}\right)^2\left(1\pm\frac{\omega_z}{\omega_0}\pm\tau\frac{\omega_{*i}}{\omega_0}\right)}, \end{aligned} \tag{5.65}$$

由此得到

$$\begin{aligned} b_{\pm}\hat{\epsilon}_{A\pm}\left(1\pm\frac{\omega_z}{\omega_0}\right)^2\left(1\pm\frac{\omega_z}{\omega_0}\pm\frac{\tau\omega_{*i}}{\omega_0}\right)=&2\left(1-\Gamma_{\pm}\right)\left(1\pm\frac{\omega_z}{\omega_0}\right)\left(\frac{\omega_z^2}{2\omega_0^2}-\frac{\tau\omega_{*i}^2}{2\omega_0^2}\pm\frac{\omega_z}{\omega_0}-\frac{\Delta_{\pm}}{\omega_0}\right)\\ &\pm\frac{\omega_{*i}}{\omega_0}\left(1-\Gamma_{\pm}\right)\left(\left(\tau-1\right)\left(1\pm\frac{\omega_z}{\omega_0}\right)^2-\frac{\tau\Gamma_{\pm}b_{\pm}\left(1-\Gamma_0\right)}{\sigma_0b_0\left(1-\Gamma_{\pm}\right)}\right)\Bigg], \end{aligned} \tag{5.66}$$

with

$$\frac{\Delta_{\pm}}{\omega_0}:=\frac{\left(1-\Gamma_0\right)b_{\pm}\sigma_{\pm}-\left(1-\Gamma_{\pm}\right)b_0\sigma_0}{2b_0\sigma_0\left(1-\Gamma_{\pm}\right)} \tag{5.67}$$

表示边带频率与预期正常模频率之间的主导阶频率失配。事实上，(5.66) 和 (5.67) 表明，KAW边带不是该系统的正常模，因此，$\hat{}\epsilon_{A\pm}\neq0$。

为了简化记号，下面我们采用下标 $+$ 来表示KAW边带的上、下边带。合并各项并注意到 $\Delta_{\pm}=\Delta_{+}$、$b_{\pm}=b_{+}$、$\Gamma_{\pm}=\Gamma_{+}$ 和 $\sigma_{\pm}=\sigma_{+}$，我们可以写成

$$b_{\pm}\hat{\epsilon}_{A\pm}\left(1\pm\frac{\omega_z}{\omega_0}\right)\left(1\pm\frac{\omega_z}{\omega_0}\pm\frac{\tau\omega_{*i}}{\omega_0}\right)=\pm\tilde{\epsilon}_{A1}-\tilde{\epsilon}_{A2}, \tag{5.68}$$

哪里

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_{A1}&=\left(1-\Gamma_{+}\right)\left\{2\frac{\omega_z}{\omega_0}+\frac{\omega_{*i}}{\omega_0}\left[\tau-1-\left(\frac{2\Delta_{+}}{\omega_0}+1\right)\frac{\tau\Gamma_{+}}{\sigma_{+}\left(1-\frac{\omega_z^2}{\omega_0^2}\right)}\right]\right\},\\ \tilde{\epsilon}_{A2}&=\left(1-\Gamma_{+}\right)\left\{2\frac{\Delta_{+}}{\omega_0}-\frac{\omega_z^2}{\omega_0^2}+\tau\frac{\omega_{*i}^2}{\omega_0^2}-\frac{\omega_z\omega_{*i}}{\omega_0^2}\left[\tau-1+\left(\frac{2\Delta_{+}}{\omega_0}+1\right)\frac{\tau\Gamma_{+}}{\sigma_{+}\left(1-\frac{\omega_z^2}{\omega_0^2}\right)}\right]\right\}. \end{aligned} \tag{5.69}$$

与此同时，方程（5.59）变为

$$\begin{aligned}(\pm\tilde{\epsilon}_{A1}-\tilde{\epsilon}_{A2})\,\delta\hat{\phi}_{\pm}&=\frac{\mathrm{i}\omega_{ci}\rho_i^2}{2\omega_0}\Lambda_{k_0}^{k_z}\begin{pmatrix}\delta\hat{\phi}_0\\ \delta\hat{\phi}_0^*\end{pmatrix}\left[(c_{\phi_2}\pm c_{\phi_1})\left(\delta\hat{\phi}_z-\delta\hat{\psi}_z\right)+(d_{\phi_2}\pm d_{\phi_1})\,\delta\hat{\psi}_z\right],\\ (\pm\tilde{\epsilon}_{A1}-\tilde{\epsilon}_{A2})\,\delta\hat{\psi}_{\pm}&=\frac{\mathrm{i}\omega_{ci}\rho_i^2}{2\omega_0}\Lambda_{k_0}^{k_z}\begin{pmatrix}\delta\hat{\phi}_0\\ \delta\hat{\phi}_0^*\end{pmatrix}\left[(c_{\psi_2}\pm c_{\psi_1})\left(\delta\hat{\phi}_z-\delta\hat{\psi}_z\right)+(d_{\psi_2}\pm d_{\psi_1})\,\delta\hat{\psi}_z\right],\end{aligned}\tag{5.70}$$

其中，由 (5.60)、(5.61)、(5.62)、(5.63)，可得

$$c_{\phi_1}=\left(\frac{\omega_z}{\omega_0}+\frac{\tau\omega_{*i}}{\omega_0}\right)\left[\Gamma_0-\Gamma_z-\frac{\omega_{*i}}{\omega_z}\left(F_1-\Gamma_z\right)\right]-\frac{\tau\omega_{*i}b_+\left(1-\Gamma_0\right)F_1}{\omega_0 b_0\sigma_0\left(1-\frac{\omega_z^2}{\omega_0^2}\right)},\tag{5.71}$$

$$c_{\phi_2}=\Gamma_0-\Gamma_z-\frac{\omega_{*i}}{\omega_z}\left(F_1-\Gamma_z\right)-\frac{b_+\left(1-\Gamma_0\right)}{b_0}\left[1+\frac{\tau\omega_{*i}}{\omega_z}-\frac{\tau\omega_{*i}F_1}{\omega_z\sigma_0\left(1-\frac{\omega_z^2}{\omega_0^2}\right)}\right],\tag{5.72}$$

$$\begin{aligned}d_{\phi_1}=&\left(\frac{\omega_z}{\omega_0}+\frac{\tau\omega_{*i}}{\omega_0}\right)\left[\Gamma_0-\Gamma_z-\frac{\omega_{*i}}{\omega_z}\left(F_1-\Gamma_z\right)-\frac{\left(1-\Gamma_0\right)\left(b_z-b_0\right)}{b_0}\right]\\&-\frac{\tau\omega_{*i}b_+\left(1-\Gamma_0\right)F_1}{\omega_0 b_0\sigma_0\left(1-\frac{\omega_z^2}{\omega_0^2}\right)},\end{aligned}\tag{5.73}$$

$$\begin{aligned}d_{\phi_2}=&\Gamma_0-\Gamma_z-\frac{\omega_{*i}}{\omega_z}\left(F_1-\Gamma_z\right)\\&-\frac{1-\Gamma_0}{b_0}\left\{b_z-b_0+b_+\left[\frac{\tau\omega_{*i}}{\omega_z}\left(1-\frac{F_1}{\sigma_0\left(1-\frac{\omega_z^2}{\omega_0^2}\right)}\right)\right]\right\},\end{aligned}\tag{5.74}$$

and

$$\begin{aligned}c_{\psi_1}=&\sigma_+\left(\frac{\omega_z}{\omega_0}+\frac{\tau\omega_{*i}\Gamma_+}{\omega_0\sigma_+}\right)\left[\Gamma_0-\Gamma_z-\left(\frac{\omega_{*i}}{\omega}\right)_z\left(F_1-\Gamma_z\right)\right]\\&-\sigma_0\left(1-\Gamma_+\right)\left[\left(\frac{2\omega_z-\omega_{*i}}{\omega_0}\right)\left(1+\frac{\tau\omega_{*i}}{\omega_z}\right)-\frac{\tau\omega_{*i}\left(\omega_z-\omega_{*i}\right)F_1}{\omega_0\omega_z\sigma_0}\right],\end{aligned}\tag{5.75}$$

$$\begin{aligned}c_{\psi_2}=&\sigma_+\left[\Gamma_0-\Gamma_z-\left(\frac{\omega_{*i}}{\omega}\right)_z\left(F_1-\Gamma_z\right)\right]\\&-\sigma_0\left(1-\Gamma_+\right)\left[\left(\frac{\omega_z\left(\omega_z-\omega_{*i}\right)}{\omega_0^2}+1\right)\left(1+\frac{\tau\omega_{*i}}{\omega_z}\right)-\frac{\tau\omega_{*i}F_1}{\omega_z\sigma_0}\right],\end{aligned}\tag{5.76}$$

$$\begin{aligned}d_{\psi_1}=&\sigma_+\left(\frac{\omega_z}{\omega_0}+\frac{\tau\omega_{*i}\Gamma_+}{\omega_0\sigma_+}\right)\left[\Gamma_0-\Gamma_z-\left(\frac{\omega_{*i}}{\omega}\right)_z\left(F_1-\Gamma_z\right)-\frac{\left(1-\Gamma_0\right)\left(b_z-b_0\right)}{b_0}\right]\\&-\sigma_0\left(1-\Gamma_+\right)\left[\frac{\tau\omega_{*i}}{\omega_0}\left(2-\frac{F_1}{\sigma_0}\right)-\frac{\tau\omega_{*i}^2}{\omega_0\omega_z}\left(1-\frac{F_1}{\sigma_0}\right)\right],\end{aligned}\tag{5.77}$$

$$
\begin{aligned}
d_{\psi_2} = \sigma_+ &\left[\Gamma_0 - \Gamma_z - \left(\frac{\omega_{*i}}{\omega}\right)_z (F_1 - \Gamma_z) - \frac{(1-\Gamma_0)(b_z - b_0)}{b_0}\right] \\
&- \sigma_0 (1-\Gamma_+) \frac{\tau\omega_{*i}}{\omega_z}\left[1 + \frac{\omega_z(\omega_z - \omega_{*i})}{\omega_0^2} - \frac{F_1}{\sigma_0}\right].
\end{aligned} \tag{5.78}
$$

现在考虑（5.47），我们写道

$$
\begin{aligned}
\delta\hat{\psi}_z &= \mathrm{i}\frac{\omega_{ci}\rho_i^2}{2\omega_0}\Lambda_{k_0}^{k_z}\sigma_0\left(\frac{\delta\hat{\phi}_0\delta\hat{\psi}_-}{1-\frac{\omega_z}{\omega_0}} + \frac{\delta\hat{\phi}_0^*\delta\hat{\psi}_+}{1+\frac{\omega_z}{\omega_0}}\right) = \\
&= \mathrm{i}\frac{\omega_{ci}\rho_i^2}{2\omega_0}\Lambda_{k_0}^{k_z}\sigma_0\frac{\delta\hat{\phi}_0\delta\hat{\psi}_- + \delta\hat{\phi}_0^*\delta\hat{\psi}_+ + \frac{\omega_z}{\omega_0}\left(\delta\hat{\phi}_0\delta\hat{\psi}_- + \delta\hat{\phi}_0^*\delta\hat{\psi}_+\right)}{1-\frac{\omega_z^2}{\omega_0^2}},
\end{aligned} \tag{5.79}
$$

然后，利用式 (5.70) 中的第二个式子，

$$
\begin{aligned}
\left(1-\frac{\omega_z^2}{\omega_0^2}\right)\left(\tilde{\epsilon}_{A2}^2 - \tilde{\epsilon}_{A1}^2\right)\delta\hat{\psi}_z = -2\left|\frac{\omega_{ci}\rho_i^2}{2\omega_0}\Lambda_{k_0}^{k_z}\delta\hat{\phi}_0\right|^2\sigma_0\Bigg\{&\left[\frac{\omega_z}{\omega_0}\left(\tilde{\epsilon}_{A1}c_{\psi_2} + \tilde{\epsilon}_{A2}c_{\psi_1}\right) - \tilde{\epsilon}_{A1}c_{\psi_1}\right. \\
&\left.-\tilde{\epsilon}_{A2}c_{\psi_2}\right]\left(\delta\hat{\phi}_z - \delta\hat{\psi}_z\right) + \left[\frac{\omega_z}{\omega_0}\left(\tilde{\epsilon}_{A1}d_{\psi_2} + \tilde{\epsilon}_{A2}d_{\psi_1}\right) - \tilde{\epsilon}_{A1}d_{\psi_1} - \tilde{\epsilon}_{A2}d_{\psi_2}\right]\delta\hat{\psi}_z\Bigg\}.
\end{aligned} \tag{5.80}
$$

在均匀等离子体极限下，该方程可化简为 [85] 和 [17] 中的方程。对 CC涡量方程也可采用相同的步骤，根据式 (5.50)，该方程可改写为

$$
\begin{aligned}
\frac{\omega_z}{\omega_0}\left(1-\frac{\omega_{*i}}{\omega_z}\right)(1-\Gamma_z)\delta\hat{\phi}_z = -\mathrm{i}\frac{\omega_{ci}\rho_i^2}{2\omega_0}\Lambda_{k_0}^{k_z}\Bigg\{&\left[\Gamma_+ - \Gamma_0 - \frac{(F_1-\Gamma_+)\omega_{*i}\omega_z}{\omega_0^2\left(1-\frac{\omega_z^2}{\omega_0^2}\right)}\right. \\
&\left.+ \frac{b_z(1-\Gamma_0)}{b_0\left(1-\frac{\omega_z^2}{\omega_0^2}\right)}\right]\left(\delta\hat{\phi}_0\delta\hat{\phi}_- - \delta\hat{\phi}_0^*\delta\hat{\phi}_+\right) \\
&- \left[\frac{(F_1-\Gamma_+)\omega_{*i}}{\omega_0\left(1-\frac{\omega_z^2}{\omega_0^2}\right)} - \frac{b_z(1-\Gamma_0)\omega_z}{b_0\omega_0\left(1-\frac{\omega_z^2}{\omega_0^2}\right)}\right]\left(\delta\hat{\phi}_0\delta\hat{\phi}_- + \delta\hat{\phi}_0^*\delta\hat{\phi}_+\right)\Bigg\}.
\end{aligned} \tag{5.81}
$$

再次使用 (5.70) 中的第一个公式，该方程变为

$$\begin{aligned}
&\frac{\omega_z}{\omega_0}\left(1-\frac{\omega_{*i}}{\omega_z}\right)\left(\tilde{\epsilon}_{A2}^2-\tilde{\epsilon}_{A1}^2\right)\left(1-\Gamma_z\right)\delta\hat{\phi}_z=\left|\frac{\omega_{ci}\rho_i^2}{2\omega_0}\Lambda_{k_0}^{k_z}\delta\hat{\phi}_0\right|^2\left\{\left[2\left(\Gamma_+-\Gamma_0\right.\right.\right.\\
&\left.-\frac{\left(F_1-\Gamma_+\right)\omega_{*i}\omega_z}{\omega_0^2-\omega_z^2}\right)\left(\tilde{\epsilon}_{A1}c_{\phi_2}+\tilde{\epsilon}_{A2}c_{\phi_1}\right)+\frac{2\left(F_1-\Gamma_+\right)\omega_{*i}\omega_0}{\omega_0^2-\omega_z^2}\left(\tilde{\epsilon}_{A1}c_{\phi_1}+\tilde{\epsilon}_{A2}c_{\phi_2}\right)\\
&\left.+\frac{2b_z\left(1-\Gamma_0\right)}{b_0\left(1-\frac{\omega_z^2}{\omega_0^2}\right)}\left(\tilde{\epsilon}_{A1}c_{\psi_2}+\tilde{\epsilon}_{A2}c_{\psi_1}-\frac{\omega_z}{\omega_0}\left(\tilde{\epsilon}_{A1}c_{\psi_1}+\tilde{\epsilon}_{A2}c_{\psi_2}\right)\right)\right]\left(\delta\hat{\phi}_z-\delta\hat{\psi}_z\right)\\
&+\left[2\left(\Gamma_+-\Gamma_0-\frac{\left(F_1-\Gamma_+\right)\omega_{*i}\omega_z}{\omega_0^2-\omega_z^2}\right)\left(\tilde{\epsilon}_{A1}d_{\phi_2}+\tilde{\epsilon}_{A2}d_{\phi_1}\right)\right.\\
&+\frac{2\left(F_1-\Gamma_+\right)\omega_{*i}\omega_0}{\omega_0^2-\omega_z^2}\left(\tilde{\epsilon}_{A1}d_{\phi_1}+\tilde{\epsilon}_{A2}d_{\phi_2}\right)\\
&\left.\left.+\frac{2b_z\left(1-\Gamma_0\right)}{b_0\left(1-\frac{\omega_z^2}{\omega_0^2}\right)}\left(\tilde{\epsilon}_{A1}d_{\psi_2}+\tilde{\epsilon}_{A2}d_{\psi_1}-\frac{\omega_z}{\omega_0}\left(\tilde{\epsilon}_{A1}d_{\psi_1}+\tilde{\epsilon}_{A2}d_{\psi_2}\right)\right)\right]\delta\hat{\psi}_z\right\}.
\end{aligned}\tag{5.82}$$

此外，在均匀等离子体极限下，该方程也化为 [85] 和 [17]中的方程。方程（5.80）和（5.82）是两个耦合方程，对于给定的功率谱和$\mathbf{k}_{\perp z}\hat{}\,\hat{}$，它们给出 ω_z 和比值 $\delta\psi_z/\delta\phi_z$作为解。也就是说，它们完整地解决了调制不稳定性问题以及通常为混合型的耦合簇偏振问题。事实上，不可能先验地假定静磁耦合簇和/或静电耦合簇，而必须自洽地计算偏振（偏振问题将在 [85] 和 [17]中讨论）。鉴于此，本文的分析与 [47], 具有一些共同特征，尤其是考虑了等离子体非均匀性的重要作用，这将在下一节中进一步讨论。与 [47], 相比，本文的工作不局限于静磁对流胞，并扩展到了圆柱形等离子体。通过类比 [85, 17], 的分析，耦合簇方程的标准形式可写成

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{\epsilon}_{A2}^2-\tilde{\epsilon}_{A1}^2}{4\left(1-\Gamma_+\right)^2\left(1+\frac{\Delta_+}{\omega_0}\right)}\delta\hat{\phi}_z&=-\alpha_\phi\left(\delta\hat{\phi}_z-\delta\hat{\psi}_z\right)+\beta_\phi\delta\hat{\psi}_z,\\
\frac{\tilde{\epsilon}_{A2}^2-\tilde{\epsilon}_{A1}^2}{4\left(1-\Gamma_+\right)^2\left(1+\frac{\Delta_+}{\omega_0}\right)}\delta\hat{\psi}_z&=-\alpha_\psi\left(\delta\hat{\phi}_z-\delta\hat{\psi}_z\right)+\beta_\psi\delta\hat{\psi}_z,
\end{aligned}\tag{5.83}$$

其中 $\alpha_{\phi,\ \psi}$ 和 $\beta_{\phi,\ \psi}$ 通过比较 (5.83) 与 (5.80) 和 (5.82) 可直接确定。在均匀等离子体极限下，方程 (5.83) 相当于 [85]中的方程 (16) 以及 [17]中的方程 (120)。然而，在非均匀等离子体中，通过变换 $\omega_{*i}\mapsto-\omega_{*i}$可以明显看出对称性破缺。这显然会影响调制不稳定性过程，此时在泵浦 KAW 振幅达到耦合簇激发的临界阈值 [85, 17]时，已不再由 $\omega_z=0$ 来表征。事实上，临界不稳定CC通常沿电子抗磁方向旋转，与 ω_{*i}方向相反，这与 [47], 一致；预计这一事实会影响耦合簇对等离子体输运的作用。然而，这种对称性破缺

与有限 ω_{*i} 相关的效应并不违反系统整体的柱对称性，这体现在耦合簇色散关系在变换 $\omega_{*i} \mapsto -\omega_{*i}$ 和 $\omega_z \mapsto -\omega_z$下保持不变。

5.5 平衡构型与数值解

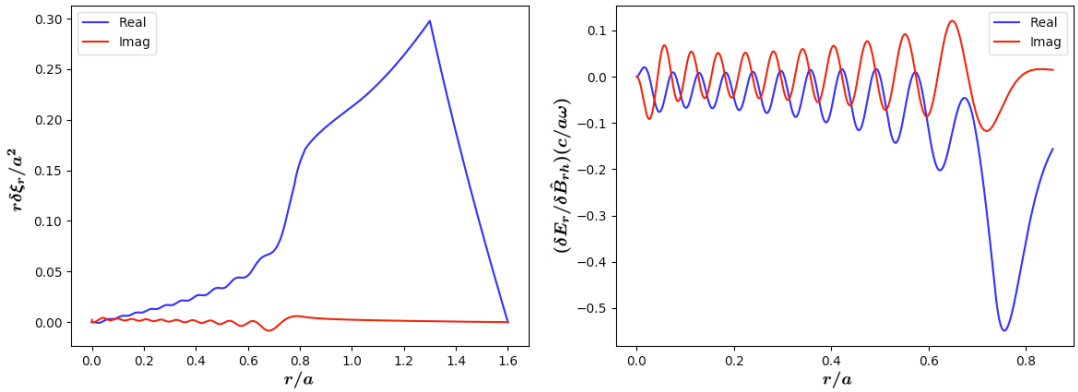
第3.4节中引入的等离子体平衡剖面和参数定义了一种通用的螺旋箍缩构型，其中磁场的轴向分量相对于方位角分量占主导地位。同时，在第5.3节中我们已经证明，为了通过调制不稳定性最大化非线性耦合以及对流胞的产生，首选的圆柱等离子体平衡是 θ箍缩，这可以看作方位角磁场消失和/或 $q \to \infty$时螺旋箍缩的极限情形。通过将 J_{0z} 的值降低几个数量级，可以实现这种情况，从而根据（3.83），方位角分量在任何实际意义上都变为零。我们还调整了 B_{0z}(0)和 n_0(0)的值，以进一步方便处理。下文所考虑的新平衡具有显著的抗磁等离子体响应（等离子体内部较小的 B_{0z} ），并且在中心处， β 最高接近0.4（高于前一种情况），以保持KAW电子朗道阻尼较小。天线频率为 $\omega_0 = 1.53$ MHz，并且为简单起见，我们假设 $n_0 = m_0 = 2$。这些选择将共振层移至 $x_0 = 0.746$。在下文中，我们还假设

$$n_0(0) = 5 \cdot 10^{14}\ \mathrm{cm}^{-3} \qquad J_{0z}(0) = 0.7 \cdot 10^4\ \mathrm{statA} \qquad B_{0z}(0) = 1.6 \cdot 10^4\ \mathrm{G}$$

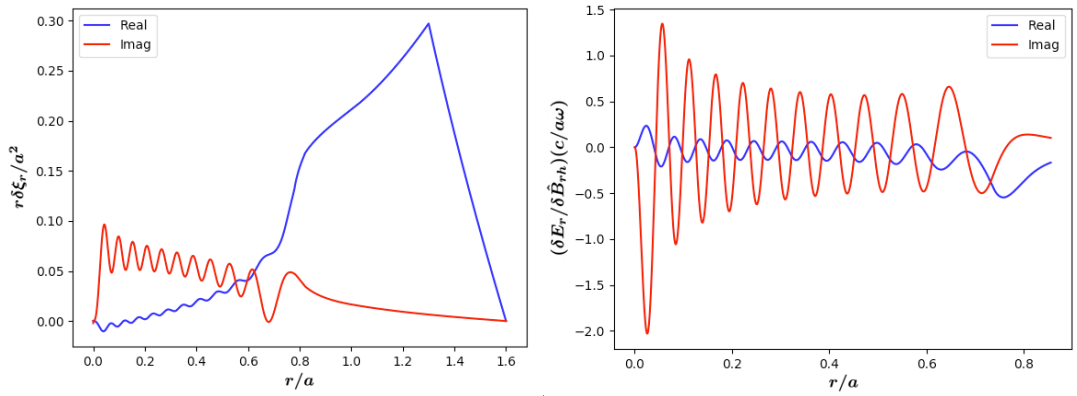
其他参数与第3.4节相同。与第4章一样，对于当前发射的天线谱，可以忽略模转换 KAW 泵浦波的抗磁效应。然而，对于耦合簇和 KAW边带，抗磁效应通常都很重要。对于当前应用，我们任意选择 $\delta B_{rh}/B_0 = 0.01$，对于 KAW 泵浦波（在缓慢径向尺度上）对应于 $\delta B_{\theta 0}/B_0 \approx 0.003$。利用这些参数，可以得到耦合簇的频率、增长率和极化的径向变化。

在相同频率 $\omega_0 = 1.53$ MHz 下，分别计算标称阻尼值（图5.1）、标称值的 10%（图5.2）和标称值的 1%（图5.3）对应的归一化径向位移和径向电场：第二组和第三组图在定性上相同，这表明当阻尼降至标称值的约 10% 时，模结构基本不再依赖阻尼（振幅和相位效应除外）。下文将采用上述等离子体参数，对应于 aθ-箍缩平衡，并假设阻尼降低至标称阻尼的 10^{-2}，以更好地展示耦合簇非线性激发的影响。

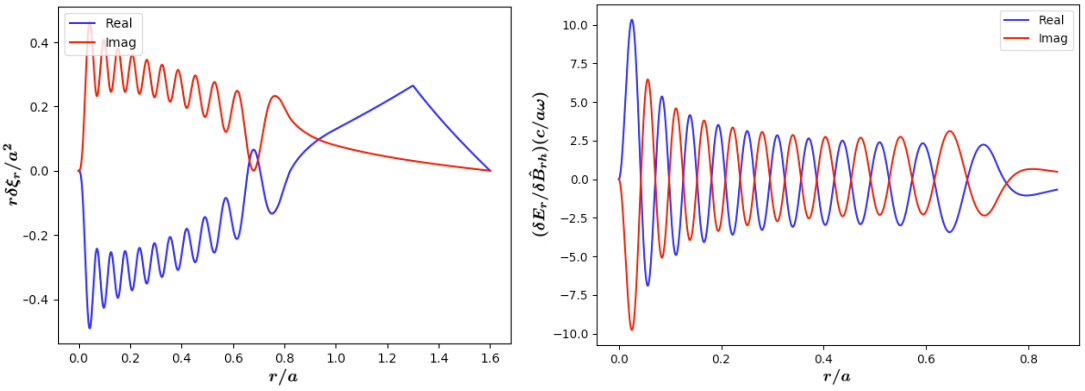
下文中，我们研究由调制不稳定性产生对流胞元的问题，该不稳定性源于模转换 KAW 泵浦波模的非线性激发。关于色散关系，所求解的方程为（5.83），而（5.80）和（5.82）仅用于定义进入（5.83）的系数。相应地，极化



ˆ图5.1径向位移（归一化至$(-\delta B_{rh}/B_0)$）和归一化径向电场，适用于 θ-箍缩情形（标称阻尼）。



ˆ图5.2径向位移（归一化至$(-\delta B_{rh}/B_0)$）和归一化径向电场，适用于 θ-箍缩情形（标称阻尼的10%）。



ˆ图5.3径向位移，归一化到$(-\delta B_{rh}/B_0)$，以及归一化径向电场，对于 θ-箍缩情形（标称阻尼的1%）。

该矢量是在所求特征值 ω_z[1]处，作为方程（5.83）的解计算得到的。由于耦合簇色散关系在变换$\omega_{*i} \mapsto -\omega_{*i}$ 和 $\omega_z \mapsto -\omega_z$下具有对称性，我们可以将分析限定在通常取正值的 ω_0 和正值的 ω_{*i} （离子抗磁频率（5.40））上。作为对理论方法的初步检验，我们取均匀等离子体极限，即 $\omega_{*i} = 0$，并重现 [85] 中得到的边际稳定性曲线（此处见图5.4）。通过将径向与 x 对应、方位角方向与 y对应，即可直接联系到 [85]中的均匀等离子体平板。请注意，根据定义（5.40）， ω_{*i}不仅取决于耦合簇方位角波矢，也取决于密度梯度：因此，对于有限的 $k_y\rho_i$，若取均匀等离子体极限，则 $\omega_{*i} = 0$ 。图5.4假设$k_{\|0}\rho_i = k_{\|}\rho_i = 0.02$, 与 [85], 一致，因此如预期般精确重现了先前的结果。与此同时，图5.5假设 $k_{\|0}\rho_i = k_{\|}\rho_i = 0.003$，这与本分析所考虑的 θ箍缩平衡的典型取值，以及前文提到的由外部天线发射的波谱相符。显然，在均匀等离子体极限下，调制不稳定性的行为与 [85]中的定性相同，只需将 $k_x\rho_i \mapsto k_0\rho_i$ 和 $k_y\rho_i \mapsto k_z\rho_i$替换；主要的定量差异源于 $k_{\|}\rho_i$的取值不同。图5.4和图5.5展示了不稳定区域的上限和下限：上限由 $|k_0| \approx |k_z|$ 给出（在第一幅图中则由 $|k_x| \approx |k_y|$给出），也就是说，在均匀极限下，调制不稳定性无法产生波长短于泵浦波长的耦合簇（关于这一点的进一步讨论见 [85] ）。这一结果是式（5.51）、（5.52）和（5.53）所给出的最大化调制不稳定性条件的主要动机。事实上，$\mathbf{k}_z$ 必须同时满足条件 $|k_z| < |k_0|$ ，并且垂直于$\mathbf{k}_0$ （主要沿径向，与模转换 KAW 泵浦波一致）及背景磁场。下文将证明，纳入抗磁效应不会定性地改变这一条件。

让我们现在聚焦于更一般的非均匀等离子体情形，考察抗磁效应对边际稳定性曲线、CC 实频率和调制不稳定性增长率的影响，以及相关的对称性破缺效应。在图5.6中，我们看到了不同 ω_{*i}值下的结果，展示了平衡等离子体非均匀性所产生的关键定量影响。请注意，与先前为取得具有恰当物理意义的均匀等离子体极限所作的讨论类似，我们可以通过调节密度梯度，独立改变 $k_z\rho_i$ 和 ω_{*i} 。对于当前的 θ-箍缩圆柱等离子体平衡， ω_{*i} 值的范围对应于 $|m_z| = \mathcal{O}(10) \gg |m_0|$。因此，正如上文所预期的，抗磁效应对 CC 和 KAW边带很重要，但对 KAW 泵浦波并不重要，这与方程（5.51）、（5.52）和（5.53）一致。观察图示的上半部分可以看到，与均匀情形不同，CC 调制不稳定性可以在比泵浦 KAW 波长更短的波长下发生：事实上，区域 $|k_z| > |k_0|$的部分范围可以进入不稳定状态。实际上，非均匀性也会影响下限；因此，在

[1]贝塞尔函数通过 scipy.special Python 库计算，而式 (5.53) 中的函数 F_1 则通过 scipy 的 integrate 软件包进行求积计算。最后，使用 scipy.optimize 中的 fmin 例程，在复平面上某个猜测值附近最小化色散函数的绝对值，从而求得色散函数的根。

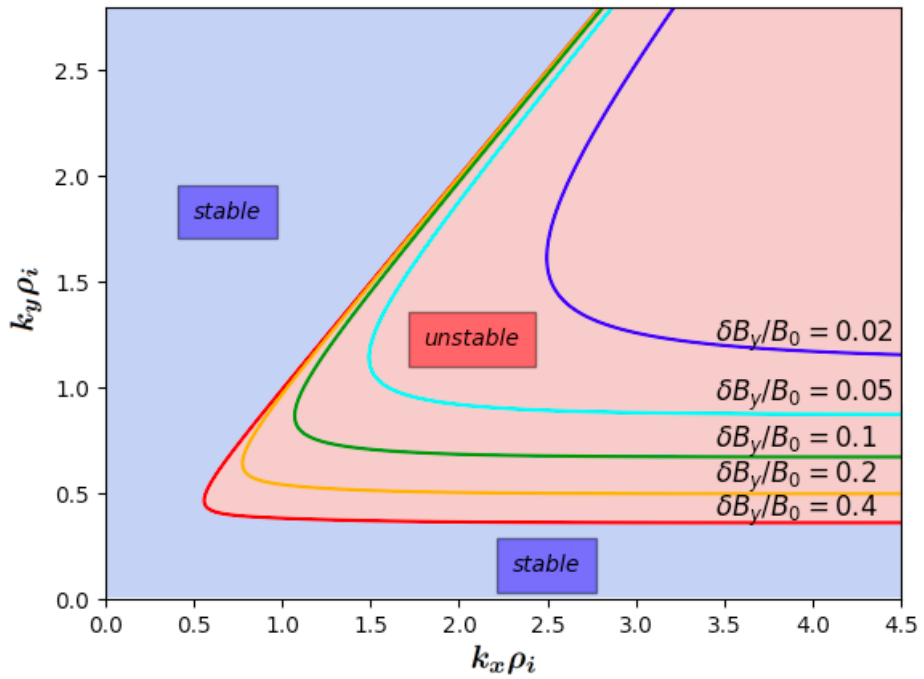


图5.4 在均匀等离子体极限下以及对于 $k_{\|}\rho_i = 0.02$，通过当前分析在$(k_x\rho_i, k_y\rho_i)$平面中得到的边际稳定性曲线，与 *[85, 17]*中研究的不同 $\delta B_y/B_0$ 值下的原始结果一致地再现。

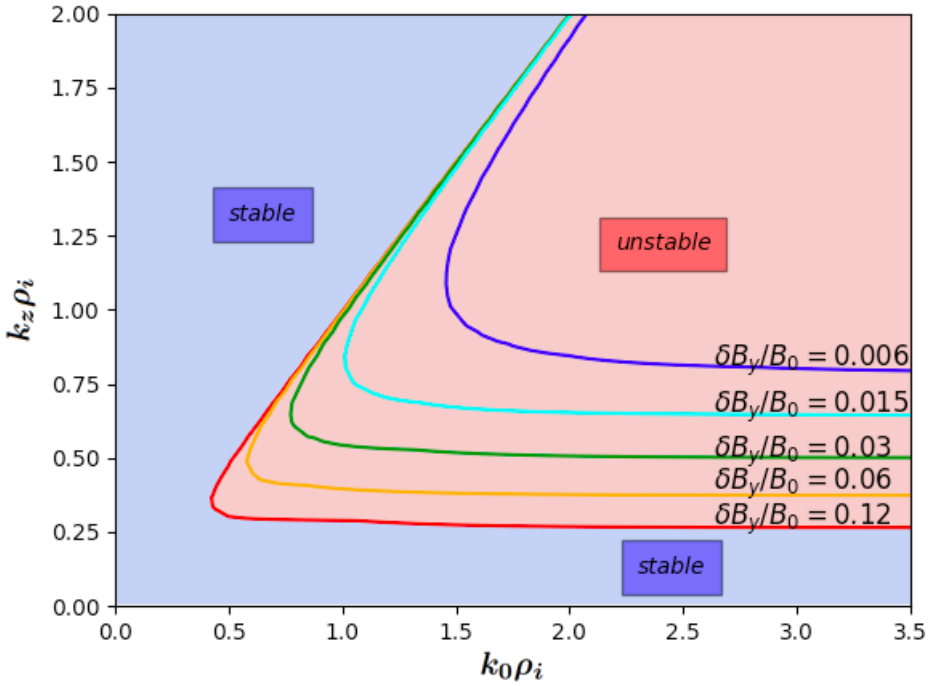


图5.5均匀情形下的边际稳定性图。这里 k_z 是耦合簇的波数（主要沿 θ方向），而 k_0 是泵浦*KAW*的波数（主要沿径向）。结果与 *[85]*, 一致，而定量差异源于 $k_{\|}\rho_i = 0.003$的取值。注意，方位角*KAW*泵浦磁场涨落 $\delta B_{\theta 0}/B_0$取代了图5.4中的 $\delta B_y/B_0$ 。

一般而言，它会扩大调制不稳定性区域，使其延伸至更短和更长的 CC 波长。

接下来，我们讨论 CC 实频率、增长率和极化随 KAW 泵浦波振幅 $\delta B_{\theta 0}/B_0$ 的变化；该振幅与径向电场的关系为 $\delta B_{\theta 0}/B_0 =(k_{\|0}/\omega_0)\sigma_0(c/B_0)\delta E_{r0}$。非线性局部色散关系的输入量为 $k_0\rho_i$ 和 $k_z\rho_i$、泵浦波振幅 $\delta B_{\theta 0}$、CC 抗磁频率 ω_{*i}/ω_0 以及 $k_{\|0}\rho_i = k_{\|}$。色散关系的解为 CC 频率 ω_z/ω_0 和极化 $\delta\psi_z/\delta\phi_z$。在我们研究的极低耗散极限下，色散关系是具有实系数的多项式，因此其根为实根或共轭复根：一对共轭根由一个稳定解和一个不稳定解构成，而后者正是我们关注的对象。值得注意的是，从图 5.7 所示的增长率 $\mathrm{Im}(\omega_z/\omega_0)$ 可以看出，在低抗磁频率下实际上存在两个阈值，对应曲线上的两个“拐点”；这是由于色散关系的不同分支，以及非线性与非均匀性之间复杂的相互作用所致。随着抗磁频率升高，这些拐点逐渐变为平缓的弯折（橙线和红线）。对于 $\omega_{*i}/\omega_0 = 0.3$，增长率随泵浦波振幅变化的斜率几乎没有明显改变。与此同时，图 5.8 显示，接近边际稳定性的 CC 会沿电子抗磁方向旋转（其符号与此处取为正值的离子抗磁频率相反），这与 [47] 中的结果一致。然而，随着不稳定性增强，CC 会逐渐转向离子抗磁方向。这证实了非线性与非均匀性之间复杂的相互作用，也表明 KAW 分支与漂移波分支在非线性区间中发生混合和耦合。

最后，我们计算了调制不稳定性的径向依赖性，即径向位置对应的增长率和频率，以及耦合簇的极化。从图 5.3中可以清楚地看出，泵浦 KAW主要由其短径向尺度主导，这是模转换涨落结构的典型特征。然而，同样清楚的是，正如上文所述，最“有效”的耦合簇激发具有相对较短的方位波长和相对较长的径向尺度。因此，长径向尺度下的“有效”KAW振幅如图 5.9所示，它是从图5.3中针对较小耗散（名义值的1%）得到的。对于 KAW泵浦波，b_k 几乎完全为实数，这正如我们所预期的那样，并且在耦合簇调制激发所关注的范围内，与先前的结果一致。在图5.10中，我们可以识别出共振面的所在位置，在此处 b_0 的值变为负-值。 b_0 的行为基本上是线性的，直到接近磁轴处，此时柱面几何的影响变得重要。在图 5.11中， b_z 随 $1/r^2$变化，因为它反映了方位波数的主导行为。同时，归一化的平行波数 $b_{\|} = k_{\|}^2\rho_i^2$显示于图5.12中。因此，从共振层向磁轴移动时，首先存在一个区域，其中 $b_0 > b_z$，即泵浦 KAW的径向波长短于耦合簇的方位波长。随后，从 $r/a \approx 0.2$开始，情况已经反转， b_z 占主导。鉴于图 5.6的稳定性图，我们预计这一事实将对耦合簇增长率的径向依赖性产生重要影响。我们预计最强的增长基本上出现在区域 $b_0 \gtrsim b_z$

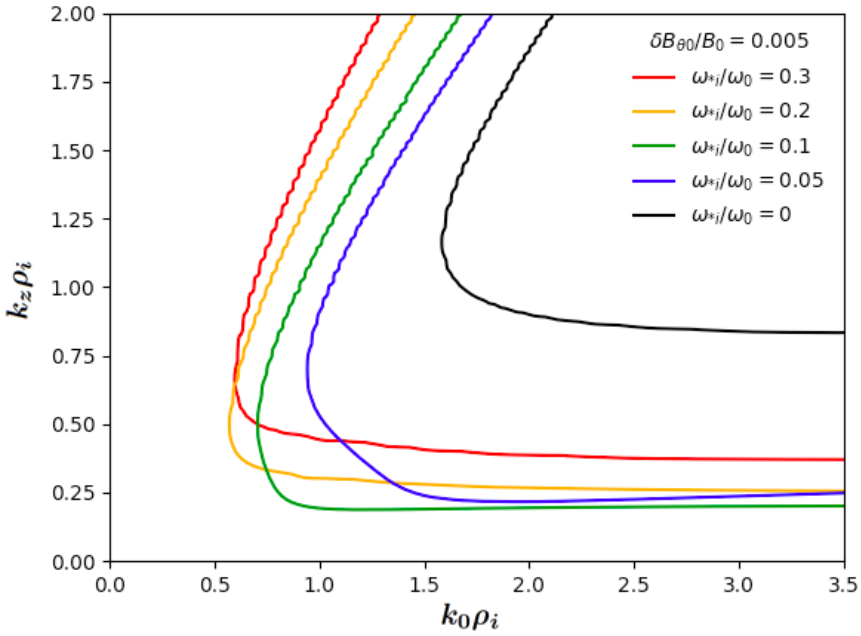


图5.6*CC*调制不稳定性的边际稳定性曲线随等离子体非均匀性变化的关系，其中等离子体非均匀性由 ω_{*i}/ω_0的局部值计入；特别地， $\omega_{*i}/\omega_0 = 0$ （黑线）表示均匀等离子体极限。 $\delta B_{\theta 0}/B_0 = 0.005$ 保持不变，且黑色曲线与图5.4中显示的等值线一致。

增长率，正如我们从图5.13中所看到的（大约在 $r/a = 0.2$ 和 $r/a = 0.4$之间）。最终，图5.6表明，由于增大的b_z 和减小的 ω_{*i}，耦合簇增长率应在轴附近受到抑制。当接近共振层时，增长率也应降低，因为 b_k 趋于零（尽管 ω_{*i} 在增加），而且我们需要FLR 来激发对流胞。图5.14展示了耦合簇的极化，并证实了 [85, 17] 的发现：一般而言，静电和/或静磁对流胞并不是由调制不稳定性产生的自洽非线性解，且必须适当地考虑极化状态，并针对具体情况加以确定。

为了理解如何在外部控制耦合簇的径向结构，我们来分析不同径向位置处局部耦合簇的频率、增长率和极化随动理学阿尔芬波泵浦波振幅的变化。图 5.15 和图 5.16 展示了 $r/a = 0.2$ 处的这些变化，因此这里是 $b_0 \lesssim b_z$ 的区域。与图 5.7–5.8 中的先前发现一致，只有在有限范围的动理学阿尔芬波泵浦波强度下，耦合簇才会被有效激发。与此同时，图 5.17–5.18 展示了 $r/a = 0.4$ 处的相同变化；在那里，耦合簇的增长随动理学阿尔芬波泵浦波强度单调增加，符合 $b_0 > b_z$ 的预期。这些结果再次表明，非线性与等离子体非均匀性之间存在复杂的相互作用，并说明控制外部天线扰动振幅是调控耦合簇径向结构的一种非常有效的方法。

T对流胞的激发伴随着感应平行电场的形成 ric

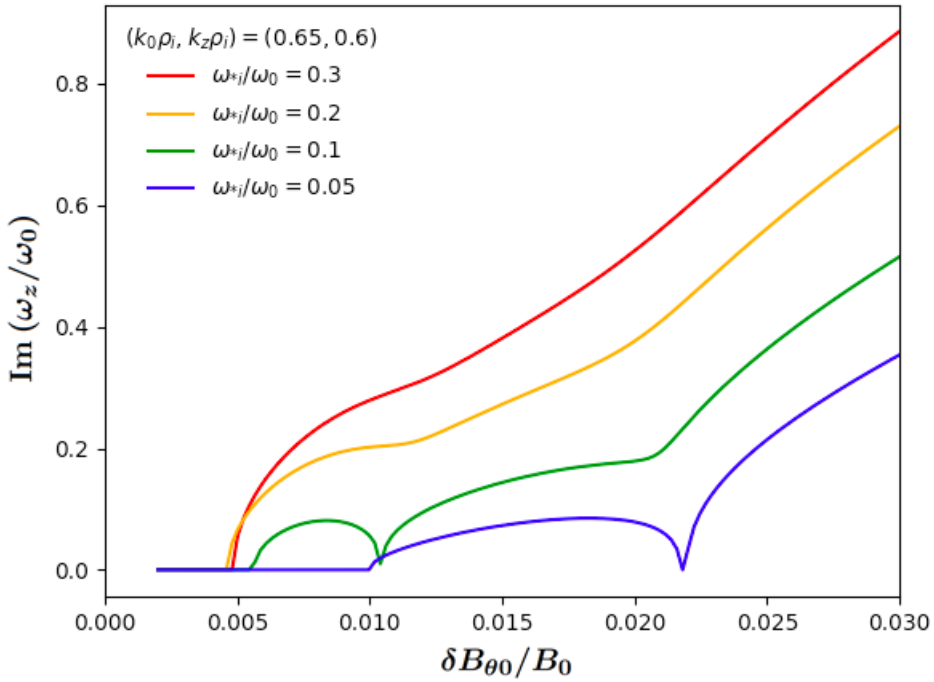


图5.7 耦合簇频率虚部随泵浦KAW振幅的变化。

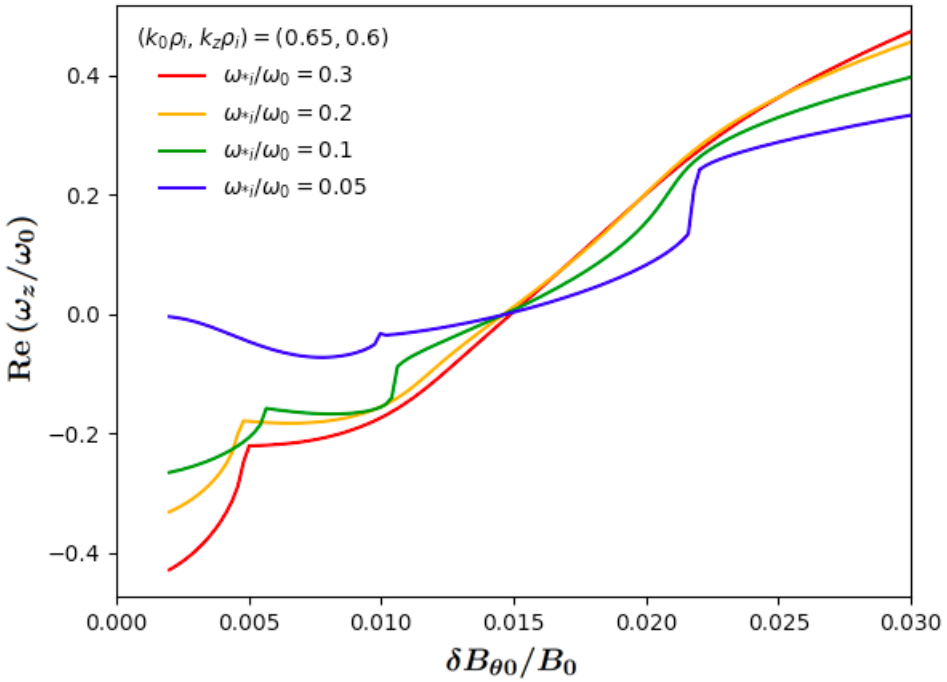


图5.8 耦合簇频率实部随泵浦KAW振幅的变化。

场结构可直接推导为

$$\delta E_{\parallel z} = \mathrm{i}\frac{T_i k_{\parallel 0}\omega_z}{e\omega_0}\delta\hat{\psi}_z. \tag{5.84}$$

ˆ 对于当前情形， $\delta E_{\parallel z}$ 的径向结构以千伏/米为单位并以 $\delta\psi_z$归一化后如图5.19所示。平行电场在空间物理学中发挥着非常重要的作用，特别是在地球磁层中，它能够显著影响粒子加速 [85, 17]。本研究表明，在当前参数下，实验室等离子体中通常产生的平行电场值相当小，约为几十伏/米，这与聚变研究所关注的高温磁化等离子体中通常观测到的低电场值一致；尽管如此，我们的研究也揭示了电场随等离子体参数变化的典型标度关系，可据此产生更强的电场，例如提高电子温度并缩短所发射天线波谱的平行波长。

5.6 总结

本章对圆柱等离子体平衡中的动理学阿尔芬波进行了理论非线性分析，重点研究大振幅动理学阿尔芬波自发产生对流胞的过程，并考察了使非线性耦合最大化、朗道阻尼最小化的构型；随后，我们求得了数值解。在适当的极限情形下，我们重现了此前关于均匀等离子体中动理学阿尔芬波激发对流胞的结果 [85] 。我们发现，等离子体非均匀性通过抗磁响应 [13, 47]，在定性和定量上都对对流胞稳定性产生重要影响。作为新的结果，我们表明，在接近临界激发阈值时，对流胞沿电子抗磁方向旋转；与均匀等离子体中的情形相比，对流胞增长显著增强（通常可达一个数量级），且不稳定参数区域显著扩大。此外，我们还揭示了非线性与等离子体非均匀性之间微妙的相互作用。因此，通过精细调节天线驱动的模转换动理学阿尔芬波的振幅，可以控制等离子体自组织。最后，我们自洽地计算了所产生感应平行电场的对流胞（通常为混合）极化和径向结构。

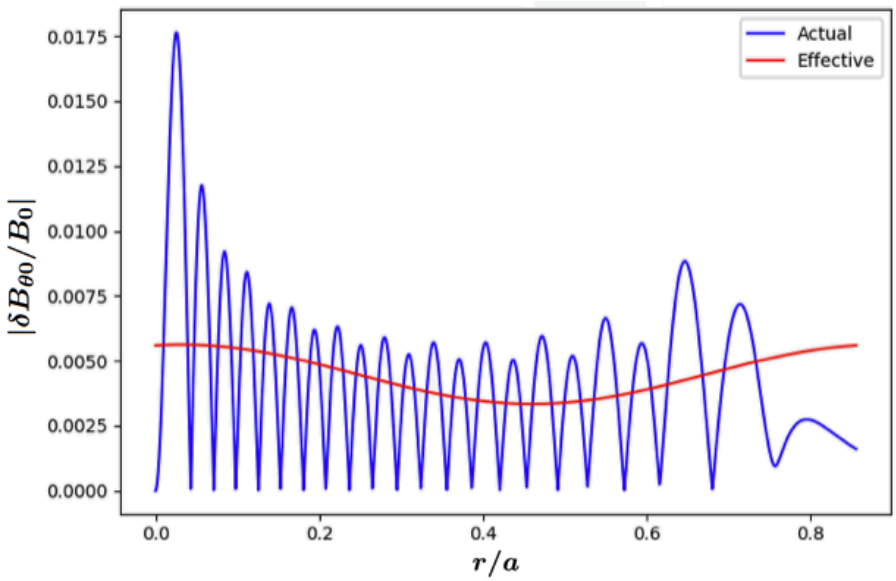


Fig.5.9 归一化有效 KAW 方位磁场与径向坐标 $r/$ $a.$

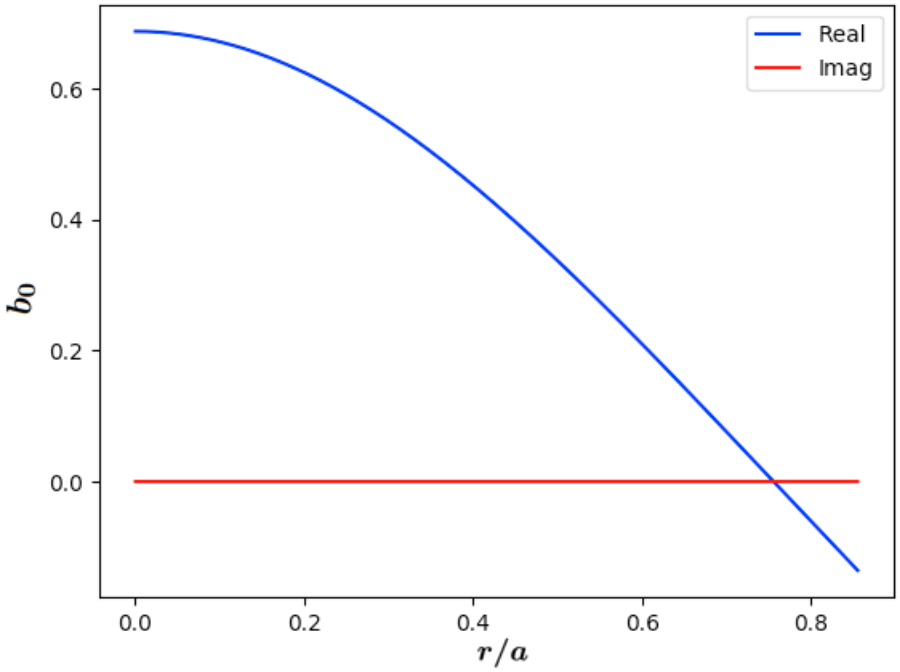


图 5.10 归一化泵浦 KAW 径向波数随径向位置的变化。

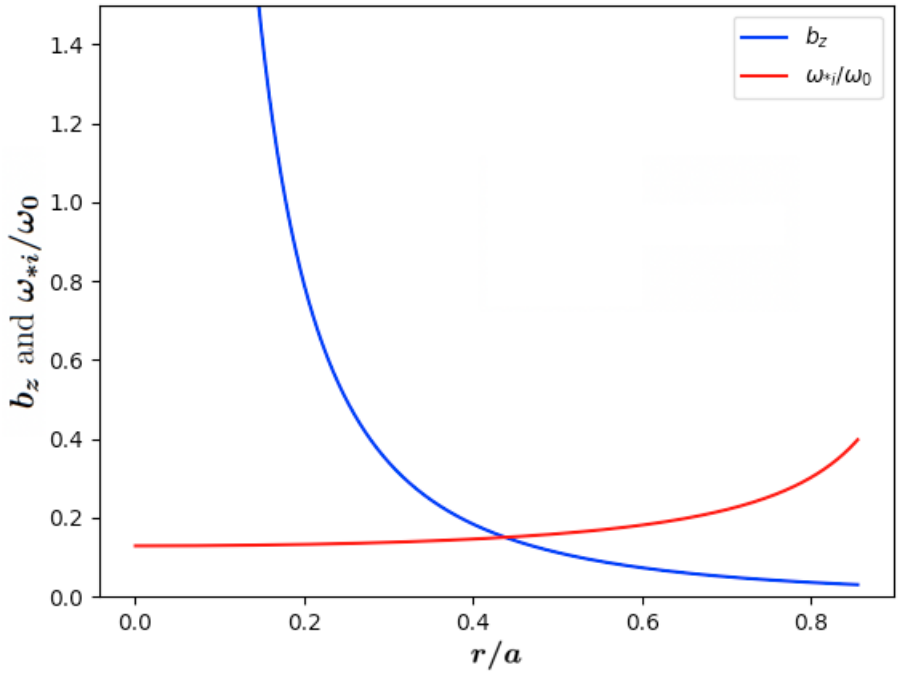


图5.11 归一化*CC*方位波数和抗磁频率随径向位置的变化。

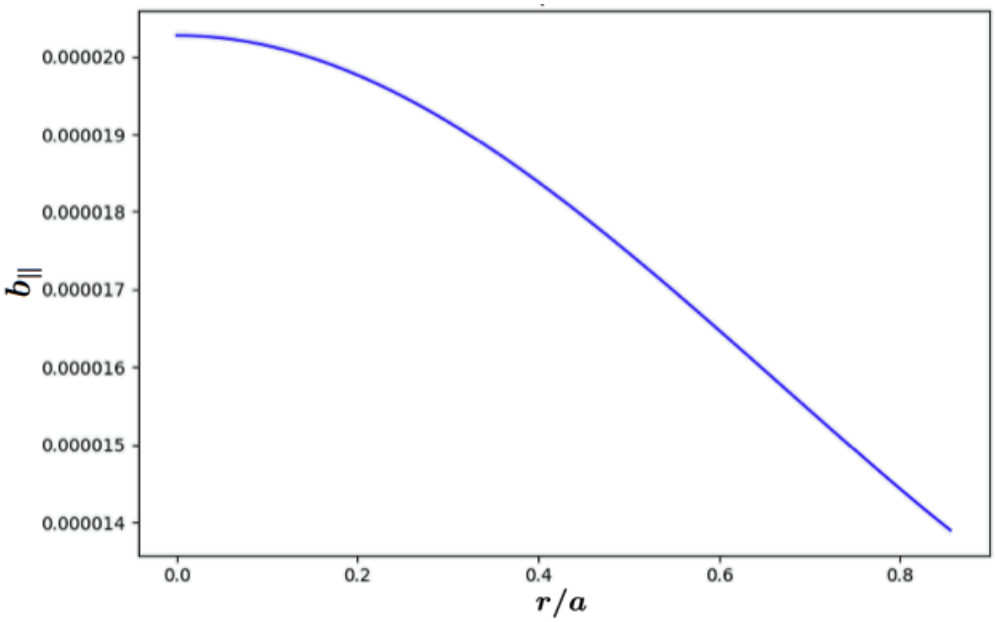
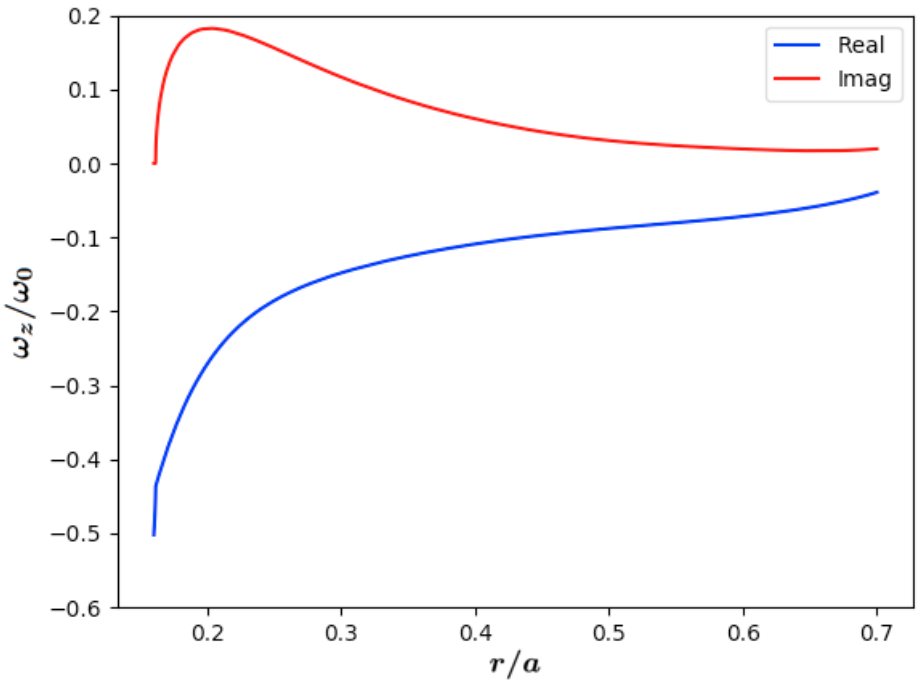


图5.12 归一化动理学阿尔芬波平行波数随径向位置的变化。



F图5.13 归一化对流胞频率和增长率随径向位置的变化。

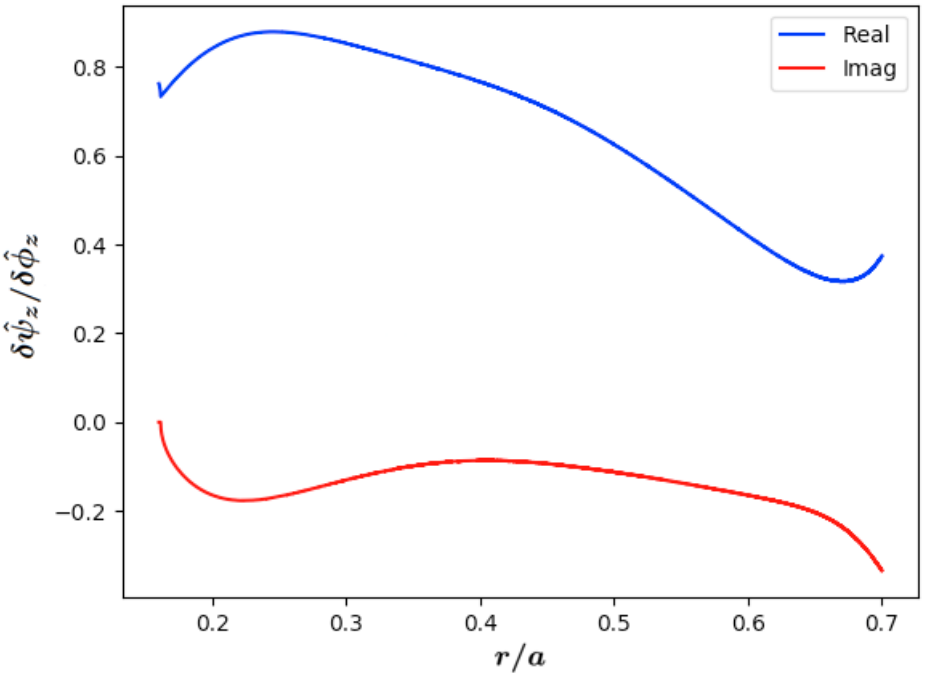


图5.14 归一化耦合簇极化随径向位置的变化。

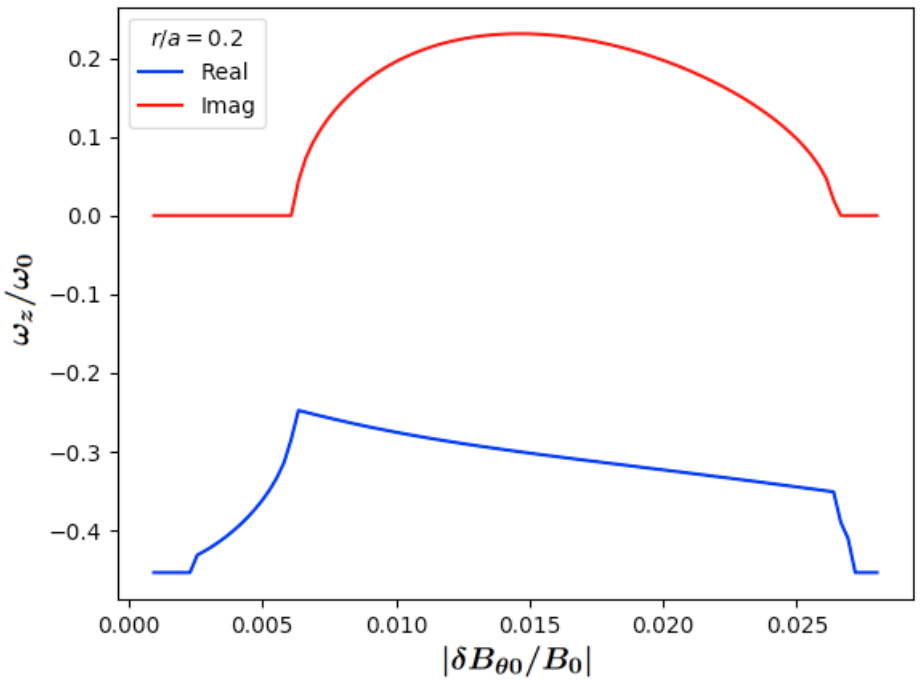


Fig.5.15 在 $r/a = 0$ 条件下，归一化对流胞频率和增长率随 KAW 泵浦波强度的变化 .2.

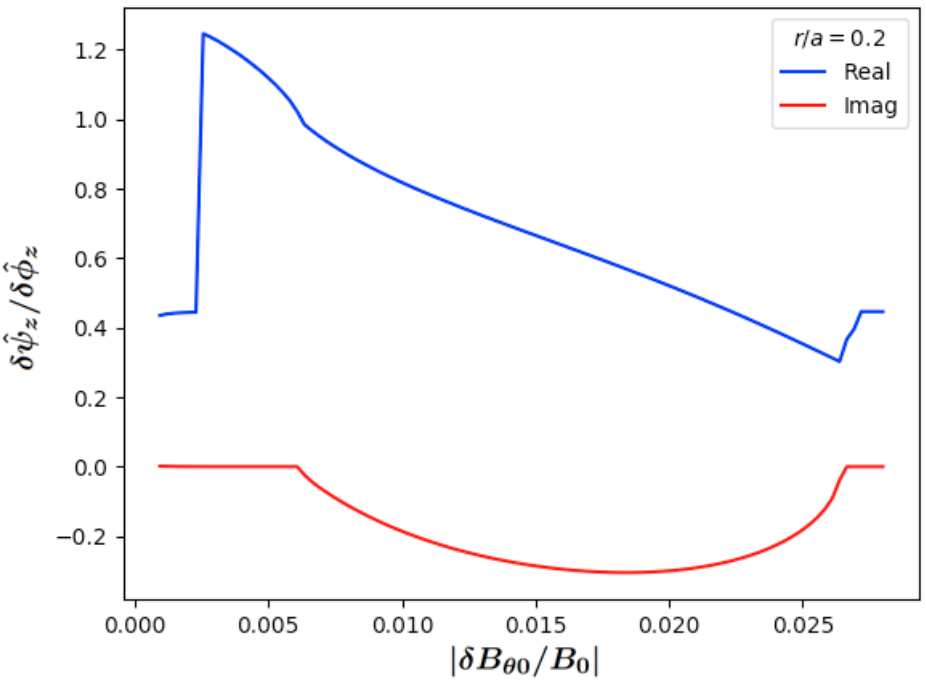


图5.16 在 $r/a = 0.2$ 条件下，对流胞极化随 KAW 泵浦波强度的变化。

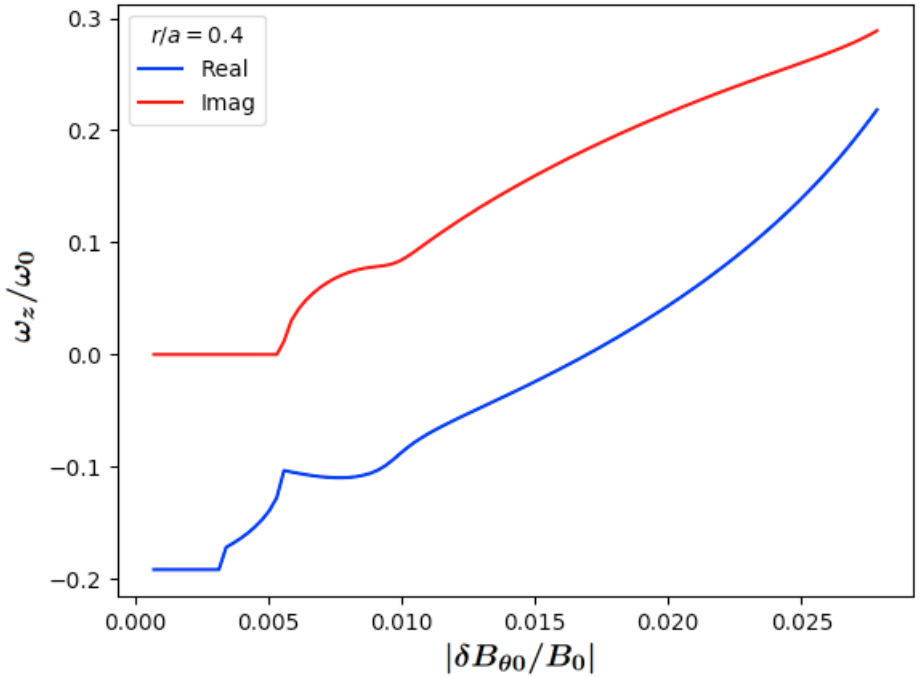


Fig.5.17 $r/a = 0$ 处归一化对流胞频率和增长率随 KAW 泵浦波强度的变化 .4.

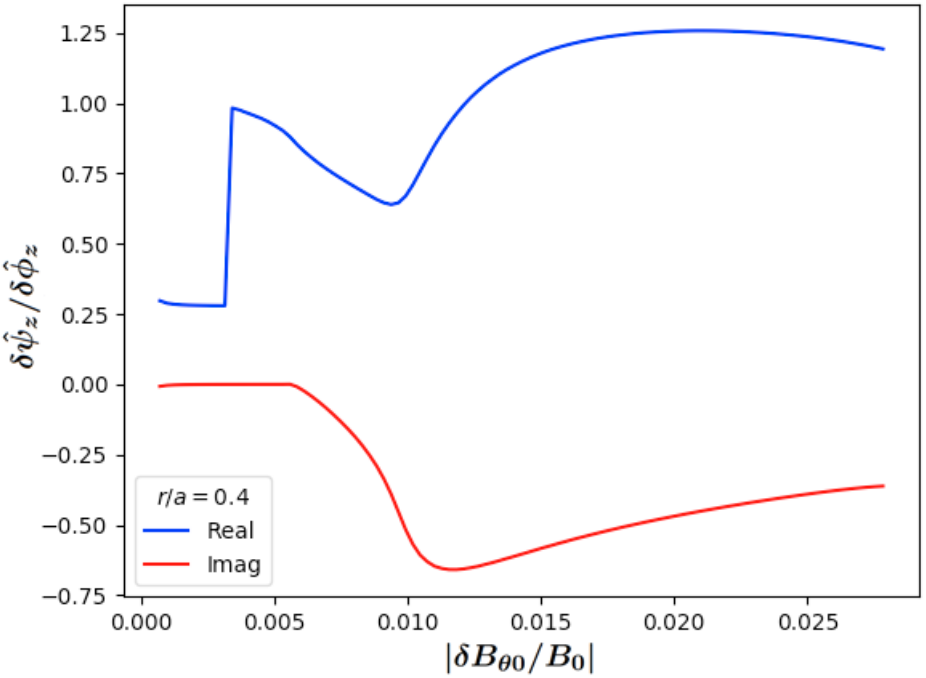


图5.18 $r/a = 0.4$ 处对流胞极化随 KAW 泵浦波强度的变化。

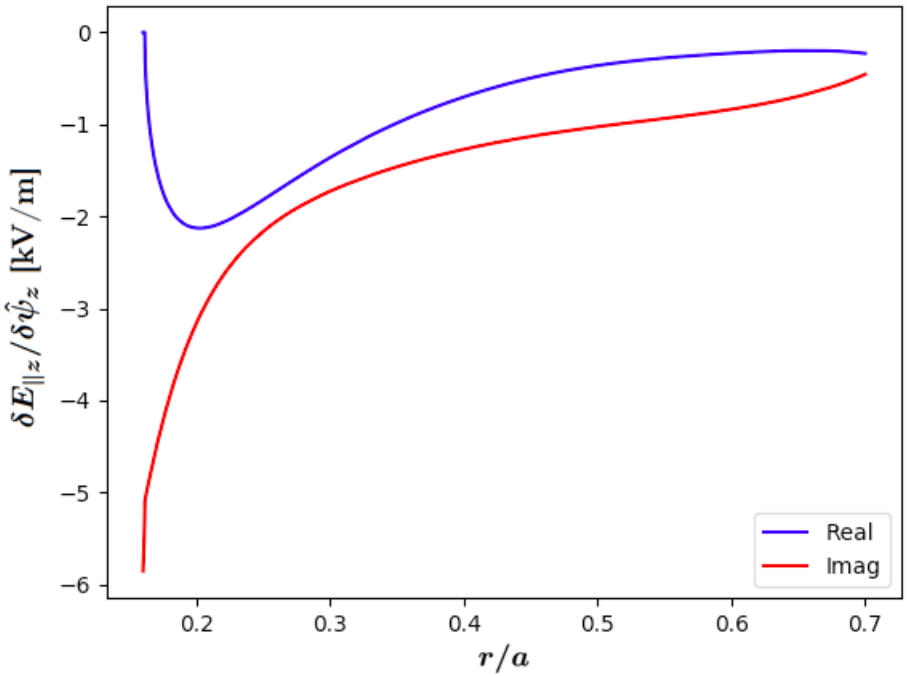


图5.19 归一化 *CC* 平行电场随 r/a 的变化，以千伏/米为单位表示。

第 6 章

结论与展望

在这项博士论文工作中，我们研究了柱形非均匀磁化等离子体中剪切阿尔芬波和动理学阿尔芬波（剪切阿尔芬波和动理学阿尔芬波）的物理学。这是聚变等离子体物理中一个众所周知的经典问题，我们重新审视了这一问题，并从新的角度提出了新的结果。

在第一部分中，我们深入回顾了由外部天线激发的波的传播与吸收的线性理想磁流体力学（MHD）和回旋动理学（GK）分析。当激发波的频率与局部剪切阿尔芬波连续谱的频率相匹配时，在非均匀等离子体的相应径向位置处会发生共振波吸收过程；这一过程表现为随时间渐近地产生越来越短的波长（与现有文献中的经典方法一致 [37, 39]），最终打破磁流体动力学长波长假设，并需要进行回旋动理学分析。在理想磁流体力学模型中，剪切阿尔芬波产生局域径向奇异结构的这一自然趋势，在陀螺动理学描述中对应于波动性质从宏观尺度的（剪切阿尔芬波）涨落到微观尺度的（动理学阿尔芬波）涨落的完全转变；后者存在于热离子拉莫尔半径的典型空间尺度上 [40, 41, 17]。特别地，我们展示了，在介于系统宏观尺度与离子拉莫尔半径之间的艾里尺度上，剪切阿尔芬波坡印廷通量逐步且完全转化为动理学阿尔芬波坡印廷通量 [41]。这解释了为什么当模转换KAW 在距模转换层仅几个径向波长的范围内被强烈吸收时，按照陀螺动理学描述计算出的等离子体吸收功率与使用理想磁流体力学计算出的结果基本相同。换言之，正如 [41, 44, 45],中所指出的，无论采用哪种模型进行计算，天线阻抗都保持不变。

本研究的第二部分聚焦于弱阻尼模转换 KAW 的线性和非线性行为，即微尺度涨落可以传播至磁轴而不会显著吸收的情形。对于经典的等离子体加热问题，这种情形几乎无关紧要，但对于分析非均匀圆柱形等离子体中动理学阿尔芬波的非线性行为，却具有重要意义。因此，这一问题构成了本博士论文研究创新贡献的核心。在有限线性范围内，我们证明，模转换层内部的等离子体区域表现得如同一个“共振腔”；也就是说，当天线频率与某个给定的

离散谱相匹配时，等离子体响应会更强，呈现出明显的共振驱动、弱阻尼振荡器行为。不出所料，这种行为在此首次针对 KAW 谱得到证明，其定性特征与 [6] 中所述模转换电子伯恩斯坦波的行为相似。对于我们研究大振幅 KAW 所诱发的非线性行为而言，这种行为也尤为重要。事实上，通过适当调节天线频率，即使天线功率相对较小，模转换 KAW 也能在时间渐近意义上被泵浦至显著高的振幅。因此，在简要回顾了非线性波激发所依据的参量衰变过程之后，我们重点研究了非均匀圆柱等离子体平衡中，弱阻尼大振幅模转换 KAW 的调制不稳定性所自发产生的对流胞（CC）；具体而言，为了最大化非线性波—波耦合，我们考察了具有纯轴向背景磁场的 a θ 夹缩平衡。在均匀等离子体的极限情形下，我们重现了早期结果[85]。同时，作为新的研究成果，我们讨论并证明了平衡非均匀性的定性和定量效应，这些效应由抗磁等离子体响应所体现。首先，在接近临界激发阈值时，对流胞优先沿电子抗磁方向旋转，这与对磁静态对流胞的预测 [47]一致：这意味着，圆柱平衡的对称轴周围的旋转发生了奇偶对称性破缺，而且可以通过选择天线发射波谱来控制自组织非线性等离子体平衡的等离子体旋转。此外，调制不稳定性增长率显著更高（通常可达均匀等离子体中的一个数量级），不稳定参数区域也显著更宽：这类似于近期在 [13] 中讨论的 KAW 参量衰变不稳定性的相似效应，因而证实了对反应堆相关聚变等离子体中的对称性破缺波—波耦合至关重要。在本研究的一项创新成果中，我们还表明，由于非线性与等离子体非均匀性之间微妙的相互作用，自组织非线性等离子体平衡可以通过精细调节模转换 KAW 的振幅来控制；事实上，局部对流胞旋转频率、增长率和极化都显著取决于抗磁等离子体响应，以及泵浦 KAW 和对流胞各自的谱。这是柱面几何的结果，并导致例如对流胞增长率通常不会随模转换 KAW 振幅单调变化。最后，我们自洽地计算了通常为混合型的对流胞极化，以及所产生的感应平行电场的径向结构。

这项博士论文工作的新发现具有多方面的意义 [25, 26] ，这些意义都与以下事实相关：阿尔芬波是磁化等离子体中的基本电磁振荡，能够对带电粒子的加热和输运过程作出重要贡献。采用柱面几何中的非均匀磁化等离子体平衡至关重要，因为这涉及现实模型必须纳入的基本物理要素。具体而言，我们关于对流胞生成的解析和数值结果可作为回旋动理学及全流体模型的试验基准。

动理学或混合代码。事实上，本工作表明，在同等基础上准确处理多个时空尺度，对于正确描述底层物理至关重要，这可以作为宝贵的验证测试。目前，我们的研究结果正在 CNPS[1] 合作网络内与 TRIMEG [56, 57] 和 STRUPHY [43] 数值模拟结果进行比较。作为进一步的未来步骤，比较将扩展至 GeFi 代码 [54]的回旋动理学电子和全动理学离子描述。这项工作将意味着在现实环形聚变等离子体平衡中实施 GeFi 的第一步，同时也将验证 GK 约化描述的有效性范围；GK 约化描述是 TRIMEG 及其他陀螺动理学代码的基础。

尽管本研究采用了简化的柱面几何，但此处讨论的新颖结果对环形聚变等离子体的应用具有重要意义。我们引入了弱 KAW 吸收这一关键假设，以研究远离模转换层传播的波结构特性，并深入了解非均匀等离子体中相应的非线性物理。在环形等离子体中，可以实现并通过外部控制类似条件，即在托卡马克和仿星器的弱磁剪切核心区域 [21]。通过磁场构型控制有限的平行电场，可使动理学阿尔芬波到达磁轴，并通过非对称涨落谱的电子朗道阻尼，在近轴区域高效驱动等离子体电流。

此外，值得注意的是，由于等离子体非均匀性增强的参量衰变过程 [13] ，以及高能粒子 [16, 82, 83] 的强烈激发，环形聚变等离子体核心中的 KAW 谱预计近乎各向同性。因此，主要依赖于径向通量坐标的纬向场结构很容易被激发，而由于与有限磁剪切不相容，沿极向变化的耦合簇会受到抑制$k_{\|} = 0$ 。换言之，这与本文的情况正好相反：在简化的 θ-箍缩构型中，耦合簇占主导地位，而纬向场结构的非线性激发较弱。然而，除这些显著但并非十分关键的差异外，本文讨论的情形与环形等离子体核心近轴区域的相似性显而易见；同样显而易见的，还有与等离子体非均匀性相关的对称性破缺效应对对流输运和电流驱动的重要性 [13]。

展望未来，鉴于动理学阿尔芬波在实验室、空间和天体物理等离子体中的重要应用，值得进一步探讨本研究发现的潜在应用。我们的研究结果表明，可以开展一种理想的“桌面式”等离子体实验：借助外部天线，控制动理学阿尔芬波与耦合簇之间的非线性相互作用所产生的自组织等离子体状态。考虑到相对简单的柱面几何，可以设计一套适当的诊断系统，并具备合适的时空分辨率，从而实际测量其背后的物理过程以及相应的特征空间和时间尺度。尤其是，这种方法或可应用于平行电场的产生，并用于

[1]非线性等离子体科学中心，https://www.afs.enea.it/zonca/CNPS/

粒子加速和输运。换言之，本博士论文所提出的研究有望为验证非线性物理提供一种简单而有效的范式，并以理论为支撑，借助先进的动理学（GeFi）、回旋动理学（TRIMEG）和混合（STRUPHY）代码，以及实验测量来开展验证。

Bibliography

[1] H. Alfvén，电磁流体动力学波的存在性，《自然》150.3805，405（1942年）[2] H.Alfvén，R.D.Richtmyer，E. Teller，宇宙射线的起源，《物理评论》75.5，892（1949年）[3] T.M. AntonsenJr.，B. Lane，非均匀等离子体中低频不稳定性的动力学方程，《流体物理学》23.6，1205（1980）[4] C.K. Birdsall，A.B. Langdon，通过计算机模拟研究等离子体物理学，CRC出版社（2004）[5]A.Brizard，使用磁坐标的非线性回旋动力学麦克斯韦-弗拉索夫方程，《等离子体物理学杂志》41.3，541（1989）[6] S.J. Buchsbaum，A. Hasegawa，电子回旋谐波附近的纵向等离子体振荡，《物理评论》143.1，303（1966）[7] P.J. Catto，线性化回旋动力学，《等离子体物理学》20.7，719（1978）[8] C.C. Chaston，J.W. Bonnell，J.P.McFadden，C.W.Carlson，C. Cully，O. Le Contel，A. Roux，H.U. Auster，K.H. Glassmeier，V. Angelopoulos，C.T.Russell，基于*THEMIS*对磁层顶附近湍流加热和跨场输运的研究，《地球物理研究快报》35.17（2008）[9] C.C. Chaston，J.W. Bonnell，J.R. Wygant，F. Mozer，S.D. Bale，K. Kersten，A.W. Breneman，C.A. Kletzing，W.S. Kurth，G.B. Hospodarsky，C.W. Smith，E.A. MacDon- ald，动理学尺度场线共振的观测，《地球物理研究快报》41.2，209（2014年）[10] F.F.Chen，一个不可或缺的真理：聚变能如何拯救地球，Springer（2011年）[11] F.F.Chen，等离子体物理学与受控聚变导论，Springer（2016）[12] L.Chen，低频磁流体动力学波诱导的等离子体输运理论，《地球物理研究杂志：空间物理学》104.A2，2421（1999）

[13] L. Chen、Z.Qiu、F.Zonca，非均匀等离子体中动理学阿尔芬波的宇称破缺参量衰变不稳定性，《等离子体物理学》29.5，050701（2022年）[14] L.Chen、F.Zonca，动理学阿尔芬波参量衰变的回旋动理学理论，《欧洲物理快报》96.3，35001（2011年）[15] L.Chen、F.Zonca，剪切阿尔芬波的非线性物理，《等离子体物理学》20.5，055402（2013年）[16] L.Chen、F.Zonca，燃烧等离子体中的阿尔芬波和高能粒子物理学，《现代物理评论》88.1，015008（2016年）[17] L. Chen、F.Zonca、Y. Lin，动理学阿尔芬波物理学：一种回旋动理学理论方-法，《现代等离子体物理评论》5.1，1（2021年）[18] C.Z.Cheng、H.Okuda，漂移不稳定性导致的对流胞元形成、反常扩散和强等离子体湍流，《物理评论快报》38.13，708（1977）[19] P.J. Chi、C.T.Russell、G.Le，在地质科学研究所阵列各处探测到的长时间低行星际磁场锥角期间的*Pc 3*和*Pc 4*活动，《地球物理研究杂志：空间物理学》99.A6，11127（1994）[20] C. Chu、M.S.Chu、T.Ohkawa，静磁模与跨磁场电子输运，《物理评论快报》41.9，653（1978）[21] M.S.Chu、V.S.Chan、P.A. Politzer、D.P. Brennan、M.Choi、L.L.Lao、H.E. St. John、A.D.Turnbull，托卡-马克中心处的动理学阿尔芬波及其相关电流驱动，《等离子体物理学》13.11，114501（2006）[22] L.B.N.Clausen、T.K. Yeoman、R.C. Fear、R. Behlke、E.A. Lucek、M.J.Engebretson，首次同时测量太阳风、磁层和地面上弓形激波产生的波，《地球物理年鉴》Vol.27No.1，Copernicus GmbH（2009）[23] N.F. Cramer，阿尔芬波的物理学，John Wiley & Sons（2011年）[24] J.M. Dawson，等离子体的粒子模拟，《现代物理评论》55.2，403（1983）[25] L.De Fabrizio、M.V. Falessi、Z.Qiu、F.Zonca，圆柱形等离子体中的线性和非线性动理学阿尔芬波物理学，AAPPS-DPP2022远程会议 FP-9，2022年10月10日至14日[26] L.DeFabrizio等，圆柱形等离子体中的线性和非线性动理学阿尔芬波物理学，已提交至《等离子体物理学》[27] P.H. Diamond、S.-I. Itoh、K.Itoh、T.S.Hahm，等离子体中的纬向流——综述，《等离子体物理与受控聚变》47.5，R35（2005）

[28] M.J. Engebretson, L.J. Zanetti, T.A. Potemra, W. Baumjohann, H. Lühr, M.H. Acuna，太阳风与地球磁层中 *Pc 3–4* 脉动的同步观测，《地球物理研究杂志：空间物理学》92.A9, 10053 (1987)[29] M.J. Engebretson, N. Lin, W. Baumjohann, H. Luehr, B.J. Anderson, L.J. Zanetti, T.A. Potemra, R.L. McPherron, M.G. Kivelson，太阳风、磁鞘和日侧磁层中超低频涨落的比较，《地球物理研究杂志：空间物理学》96.A3, 3441 (1991)[30] D.H. Fairfield, W. Baumjohann, G. Paschmann, H. Lühr, D.G. Sibeck，与弓形激波相关的上游压力变化及其对磁层的影响，《地球物理研究杂志：空间物理学》95.A4, 3773 (1990)[31] M.V. Falessi, F. Zonca，相空间带状结构的输运理论，《等离子体物理学》26.2, 022305 (2019)[32]A. Fasoli, J.B. Lister, S. Sharapov, D. Borba, N. Deliyanakis, C. Gormezano, J. Jacquinot, A. Jaun, H.A. Holties, G.T.A. Huysmans, W. Kerner, J.-M. Moret, L. Villard，多种动理学阿尔芬本征模的观测《物理评论快报》76.7, 1067 (1996)[33] E. Fermi，关于宇宙辐射的起源，《物理评论》75.8, 1169 (1949)[34] J.P. Freidberg，理想磁流体力学，剑桥大学出版社 (2014)[35] E.A. Frieman, L. Chen，一般等离子体平衡中低频电磁波的非线性陀螺动理学方程，《流体物理学》25.3, 502 (1982)[36] X. Garbet, Y. Idomura, L. Villard, T.H. Watanabe，湍流输运的回旋动理学模拟，《核聚变》50.4, 043002 (2010)[37] H. Grad，等离子体，《今日物理》22.12, 34 (1969)[38] T.S. Hahm, W.W. Lee, A. Brizard，有限 β 等离子体的非线性回旋动理学理论，《流体物理学》31.7, 1940 (1988)[39] A. Hasegawa, L. Chen，阿尔芬波相位混合引起的等离子体加热，《物理评论快报》32.9, 454 (1974)[40] A. Hasegawa, L. Chen，阿尔芬波激发导致等离子体加热的动力学过程，《物理评论快报》35.6, 370 (1975)[41] A. Hasegawa, L. Chen，阿尔芬波共振模转换加热等离子体的动力学过程，《流体物理学》19.12, 1924 (1976)[42] A. Hasegawa, C.G. Maclennan, Y. Kodama，漂移波和罗斯贝波的非线性行为与湍流谱，《流体物理学》22.11, 2122 (1979)

[43] *F. Holderied, S. Possanner, X. Wang*，基于保结构有限元与粒子网格方法的磁流体力学—动理学混合代码，《计算物理学杂志》*433, 110143 (2021)*[44] *S.-I. Itoh, K. Itoh, K. Nishikawa*，圆柱形托卡马克中的动理学阿尔芬波传播，《等离子体物理学》*24.9, 1027 (1982)*[45] *K. Itoh, S.-I. Itoh*，剪切阿尔芬波加热的能量沉积分布，《等离子体物理学》*25.9, 1037 (1983)*[46] *E.A. Jackson*，辐射对等离子体的参量效应，《物理评论》*153.1, 235 (1967)*[47] *P.K. Kaw, L. Chen*，动理学漂移阿尔芬波对静磁涨落的非线性激发，《流体物理学》*26.6, 1382 (1983)*[48] *I. Langmuir*，电离气体中电子的散射，《物理评论》*26.5, 585 (1925)*[49] *P. Lauber*，热等离子体中的超热粒子——动理学模型、数值求解策略及与托卡马克实验的比较，《物理学报告》*533.2, 33 (2013)*[50] *L.C. Lee, J.R. Johnson, Z.W. Ma*，动理学阿尔芬波作为日侧磁层顶等离子体输运的来源，《地球物理研究杂志：空间物理学》*99.A9, 17405 (1994)*[51] *W.W. Lee*，粒子模拟中的回旋动理学方法，《流体物理学》*26.2, 556 (1983)*[52] *W.W. Lee*，回旋动理学粒子模拟模型，《计算物理学杂志》*72.1, 243 (1987)*[53] *A.T. Lin, J.M. Dawson, H. Okuda*，热磁涨落与反常电子扩散，《物理评论快报》*41.11, 753 (1978)*[54] *Y. Lin, X.Y. Wang, Z. Lin, L. Chen*，一种回旋动理学电子与全动理学离子等离子体模拟模型，《等离子体物理与受控聚变》*47.4, 657 (2005)*[55] *C.S. Liu, M.N. Rosenbluth*，电磁波衰变为两个等离子体振荡模的参量过程及其后果，《流体物理学》*19.7, 967 (1976)*[56] *Z.X. Lu, P. Lauber, T. Hayward-Schneider, A. Bottino, M. Hoelzl*，面向真实托卡马克几何中全等离子体回旋动理学模拟的非结构网格方法：开发与测试，《等离子体物理学》*26.12, 122503 (2019)*[57] *Z.X. Lu, G. Meng, M. Hoelzl, P. Lauber*，电磁粒子模拟中阿尔芬波与高能粒子物理全 *f* 隐式方法的开发，《计算物理学杂志》 *440, 110384 (2021)*

[58] R.R. Mett, S.M. Mahajan, 环向性诱导的阿尔芬本征模的动理学理论，《流体物理B：等离子体物理》4.9，2885（1992年）[59] A.B. Mikhailovskii, E.A. Kovalishen, M.S. Shirokov, A.I. Smolyakov, V.S. Tsypin, R.M.O. Galv˜ao，动理学阿尔芬波产生纬向流，《等离子体物理学报告》33.2，117（2007）[60] H. Okuda, J.M. Dawson，磁场中等离子体扩散的理论与数值模拟，《流体物理学》16.3，408（1973）[61] O.A. Onishchenko, O.A. Pokhotelov, M.A. Balikhin, L. Stenflo, R.Z. Sagdeev，电离层极光空腔中阿尔芬波对对流胞产生的抑制，《等离子体物理学》11.11，4954（2004）[62] O.G. Onishchenko, O.A. Pokhotelov, R.Z. Sagdeev, L. Stenflo, R.A. Treumann, M.A. Balikhin，动理学阿尔芬波在高层电离层中产生对流胞，《地球物理研究杂志：空间物理学》109.A3（2004）[63] O.A. Pokhotelov, O.G. Onishchenko, R.Z. Sagdeev, R.A. Treumann，高层电离层中惯性阿尔芬波的非线性动力学：静电对流胞的参量产生，《地球物理研究杂志：空间物理学》108.A7（2003）[64] O.A. Pokhotelov, O.G. Onishchenko, R.Z. Sagdeev, M.A. Balikhin, L. Stenflo，动理学阿尔芬波与对流胞的参量相互作用，《地球物理研究杂志：空间物理学》109.A3（2004）[65] Z. Qiu，托卡马克等离子体中测地声模的理论，博士论文，中国科学技术大学，合肥，中国（2010）[66] Z. Qiu, F. Zonca, L. Chen，测地声模的动理学理论：径向结构、高能粒子的线性激发与非线性饱和，《等离子体科学与技术》13.3，257（2011年）[67] L. Rezeau, A. Morane, S. Perraut, A. Roux, R. Schmidt，磁层顶边界层中阿尔芬型涨落的表征，《地球物理研究杂志：空间物理学》94.A1，101（1989）[68] R.Z. Sagdeev, A.A. Galeev，非线性等离子体理论，由T.M. O’Neil和D.L. Book修订并编辑，W.A. Benjamin（1969）[69] C.S. Salem, G.G. Howes, D. Sundkvist, S.D. Bale, C.C. Chaston, C.H.K. Chen, F.S. Mozer, 太阳风中动理学阿尔芬波湍流的识别，《天体物理学杂志快报》745.1，L9（2012年）[70] P.K. Shukla, M.Y. Yu, H.U. Rahman, K.H. Spatscheck，漂移波激发对流胞，《物理评论A》23.1，321（1981）

[71] P.K. Shukla, M.Y. Yu, H.U. Rahman, K.H. Spatscheck, 等离子体中的非线性对流运动，《物理学报告》105.4-5, 227（1984年）[72] P. Song, C. Russell, R. Strangeway, J. Wygant, C. Cattell, R. Fitzenreiter, R. Anderson，日下点磁层顶附近的波特性：北向行星际磁场下 *Pc 3-4* 的能量耦合，《地球物理研究杂志：空间物理学》98.A1, 187（1993年）[73] W.M. Stacey，聚变等离子体物理，John Wiley & Sons（2012年）[74] T.H. Stix，等离子体中的波，Springer Science & Business Media（1992年）[75] J.B. Taylor, B. McNamara，二维扩散，《流体物理学》14.7, 1492（1971年）[76] C. Walén，论太阳黑子理论，《数学、天文学与物理学档案》30A no.15, 1（1944年）[77] B. Wang, Y. Nishimura, H. Zhang, X.-C. Shen, L. Lyons, V. Angelopoulos, Y. Ebihara, A. Weatherwax, A.J. Gerrard, H.U. Frey，*THEMIS*卫星与地基成像仪联合观测到的前震驱动磁力线共振的二维结构，《地球物理研究杂志：空间物理学》124.8, 6792（2019年）[78] K.L. Wong, N. Bretz, G.Y. Fu, J. Machuzak, J.R. Wilson, Z. Chang, L. Chen, D.K. Owens, G. Schilling，环向阿尔芬本征模与动理学阿尔芬波之间耦合的证据，《物理快报A》224.1-2, 99（1996年）[79] D.-J. Wu，动理学阿尔芬波：理论、实验与应用，科学出版社（2012年）[80] D.-J. Wu, L. Chen，实验室、空间与天体物理等离子体中的动理学阿尔芬波，Springer（2020年）[81] Z. Zhang, Z. Yuan, S. Huang, X. Yu, Z. Xue, D. Deng, Z. Huang，等离子体片边界层中动理学阿尔芬波及相关电子加速的观测，《地球与行星物理》6（2022年）[82] J.S. Zhao, D.J. Wu, J.Y. Lu, L. Yang, M.Y. Yu，动理学阿尔芬波产生对流胞，《新物理学杂志》13.6, 063043（2011年）[83] F. Zonca, L. Chen, S. Briguglio, G. Fogaccia, A.V. Milovanov, Z. Qiu, G. Vlad, X. Wang，聚变等离子体中的高能粒子与多尺度动力学，《等离子体物理与受控聚变》57.1, 014024（2014年）[84] F. Zonca, L. Chen, S. Briguglio, G. Fogaccia, G. Vlad, X. Wang，聚变等离子体中相空间带状结构的非线性动力学与高能粒子物理，《新物理学杂志》17.1, 013052（2015年）

[85] F. Zonca, Y.Lin, L.Chen, 动理学阿尔芬波自发激发对流胞元，Europhysics Letters 112.6, 65001（2015年）

[86] F. Zonca, L. Chen, M.V. Falessi, Z. Qiu, 托卡马克等离子体中的非线性径向包络演化方程与高能粒子输运，《Journal of Physics: Conference Series》第1785卷第1期，IOP Publishing（2021）