arXiv:2304.04847v1 [math.AP] 10 Apr 2023

# 带延迟扩散项的尼科尔森果蝇模型中行波的存在性

威廉 BARKER

Abstract. 本文研究扩散型尼科尔森蝇类方程的行波，其中扩散项和出生函数具有不同的离散时间延迟。我们通过单调迭代方法构造拟上解和下解。这也允 $C^2$ 许构造上解和下解，进而构造行波解。随后，我们给出了迭代核的数值结果。

## 1. Introduction

扩散型 Nic　　带有出生项中单一时滞的 Nicholson 果蝇模型形式为

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} - \delta u(t,x) + p u(t-\tau_1, x) e^{-a u(t-\tau_1, x)} \tag{1.1}$$

对于 $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$. $u(t,\ x)$ 表示某一时刻空间中的吹蝇种群, $t$. 死亡率为 $\delta > 0$, 对未成熟种群的影响率为 $p > 0$ ，这是由于出生造成的，而 $\tau_1 > 0$ 是成熟延迟时间。有关该模型的更多信息，请参阅 Nicholson 的开创性工作， [13, 14] 以及纳入空间扩散后的改进模型， [17, 18, 23]。上述模型已在多篇著名论文中得到研究。

2001年，So 和 Zou， [19] 提出了一项优雅的结果，为出生函数存在时滞的情形构造了上解和下解。这拓展了 Wu 和 Zou， [22]提出的、通过所谓单调迭代方法证明行波解存在性的开创性成果。在标准的单调或拟单调迭代方法中，构造上波前解和下波前解往往十分重要。Ma， [10] 拓展了这一思路，提出了上解和下解，从而放宽了 Wu 和 Zou 的条件。

日期：2023 年 4 月 12 日。2000 数学学科分类。主要分类：35C07；次要分类：35K57。关键词和短语。行波；反应扩散方程；延迟；Nicholson 吹蝇方程。

2000年，Gourley和Ruan通过能量方法以及泛函微分方程的比较原理，讨论了具有分布式时滞的尼科尔森吹蝇模型中行波的动力学， [5] 。在最近的一篇论文中，Deng和Wu研究了具有分布式时滞的非单调模型中正稳态的全局吸引性， [4]。

2004年，Mei等， [12] 在加权 $L^2$ 范数下讨论了含时滞扩散项的 Nicholson 丽蝇方程行波前沿的非线性稳定性。这一结果非常有趣，后来 Lin 和 Mei， [9]通过有限差分法给出了数值结果，并对其进行了拓展。此外，Huang 和 Liu， [7]以及 Huang 和 Xu [8] 近期研究了出生函数包含两种不同延迟的行波存在性。

Boumenir 和 Nguyen， [3] 通过修正的 Perron 定理提出了拟上解和拟下解的构造思路，参见 Mallet-Peret， [11]中的定理（4.1）。更多信息也可见 Pruss， [15]。这引出了本文的研究动机。将扩散项置于其中是一种相对较新的思路。事实上，BARKER 和 Nguyen， [2] 证明了如下形式的反应扩散方程存在行波，其中扩散项和反应项均含有离散时滞：

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u(x,t-\tau_1)}{\partial x^2} + f(u_t), \tag{1.2}$$

其中 $t \in \mathbb{R}, \tau_1 > 0, x, u(x,t) \in \mathbb{R}$， $D > 0$， $f$：$C([-\tau_2, 0], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ 连续，且$u_t(x) \in C([-\tau_2, 0], \mathbb{R})$，定义为

$$u_t(x) = u(x, t+\theta),\ \theta \in [-\tau_2, 0],\ t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}.$$

其中 $f$ 是 Lipschitz 连续的，且

$$f(0) = f(K) = 0, \text{ and } f(u) \neq 0,\ 0 < u < K.$$

满足某些单调性条件。

本文结构安排如下：第 2 节将介绍后续章节可能用到的一些预备记号。第 3 节将陈述主要结果，并讨论行波的存在性以及二阶指数型多项式方程的解。第 3 节的最后部分将明确构造 Nicholson 果蝇方程（含扩散时滞）的拟上解和拟下解。第 4 节将介绍卷积核以及由此得到的上解和下解的一些数值结果。

## 2. Preliminaries

本文将使用一些标准记号，例如 $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ 分别表示实数域和复数域。 $\Re z$ 和 $\Im z$ 分别表示复数 $z$的实部和虚部。所有从 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ 到 $BC(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$的有界连续函数构成的空间，赋予上确界范数 $\|f\| := \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t)\|$。$BC^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$表示所有 $k$次连续可微函数 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ 构成的空间，其中直至 $k$ 阶的所有导数均有界。

如果去掉上述函数空间中的有界性条件，我们将其简记为 $C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ 和 $C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$。我们将在 $BC(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ 中采用如下定义的自然序：对于 $f, g \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$，当且仅当对所有 $t \in \mathbb{R}$, $f(t) \le g(t)$ 时，我们称 $f \le g$；若对所有 $t \in \mathbb{R}$, $f(t) \le g(t)$，且对所有 $t \in \mathbb{R}$, $f(t) \ne g(t)$，则称 $f < g$。

## 3. Main Results

我们考虑以下扩散时滞尼科尔森吹蝇模型

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t-\tau_1,x)}{\partial x^2} - \delta u(t,x) + p u(t-\tau_2,x) e^{-a u(t-\tau_2,x)} \tag{3.1}$$

此外，我们假设 $1 < p/\delta \le e$，那么可以找到两个平衡点

$$U_0 = 0,\ U_e = \frac{1}{a}(\ln(p/\delta)).$$

我们关注的问题是：方程（3.1）的两个平衡态之间是否存在行波前?

为此，我们假设波的平移形式为 $\xi = x + ct$，其中 $c$ 为正的波速。将变换 $\phi(\xi) = u(t, x)$ 应用于方程（3.1），得到

$$\phi''(\xi - c\tau_1) - c\phi'(\xi) - \delta\phi(\xi) + p\phi(\xi - c\tau_2) e^{-a\phi(\xi - c\tau_2)} = 0. \tag{3.2}$$

通过变换 $\zeta = \xi - r_1$，其中 $r_1 = c\tau_1$，$r_2 = c\tau_2$，将时滞移出扩散项，可得到等价模型。

$$\phi''(\zeta) - c\phi'(\zeta + r_1) - \delta\phi(\zeta + r_1) + p\phi(\zeta + (r_1 - r_2)) e^{-a\phi(\zeta + (r_1 - r_2))} = 0. \tag{3.3}$$

为简单起见，令 $\zeta = t$，模型变为

$$\phi''(t) - c\phi'(t + r_1) - \delta\phi(t + r_1) + p\phi(t + (r_1 - r_2)) e^{-a\phi(t + (r_1 - r_2))} = 0. \tag{3.4}$$

我们对 $f$ 引用以下单调条件。

(H1) $f(\hat{0}) = f(\hat{K}) = 0$，其中，$\hat{0}$ 和 $\hat{U}_e$ 分别是常值函数 $\phi(\theta) = 0(\phi(\theta) = U_e$，对所有 $\theta \in [-\tau_2, 0]$ 均成立；
(H2) 存在一个正数常数 $\beta$ 使得

$$f(\varphi) - f(\psi) + \beta(\varphi(0) - \psi(0)) \geq 0$$

对于所有 $\varphi, \psi \in C([-\tau_2, 0], \mathbb{R})$，满足 $0 \leq \varphi(s) \leq \phi(s) \leq U_e$ 对于所有 $s \in [-\tau_2, 0]$；利用单调条件（H1）和（H2），我们可以将方程 (3.4) 写成

$$\phi''(t) - c\phi'(t + r_1) - \delta\phi(t + r_1) - \beta\phi(t + r_1) + H(\phi(t)) = 0, \tag{3.5}$$

其中 $H(\phi(t)) = p\phi(t + (r_1 - r_2))e^{-a\phi(t+(r_1-r_2))} + \beta\phi(t + r_1)$。其渐近行为是

$$\lim_{t\to-\infty} \phi(t) = U_0, \ \lim_{t\to\infty} \phi(t) = U_e.$$

**定义 3.1**。函数 $\varphi \in BC^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 称为波动方程 (3.5) 的上解（分别为下解），如果其满足以下

$$\begin{aligned} &D\varphi''(t) - c\varphi'(t + r_1) + f^c(\varphi_{t+r_1}) \leq 0, \\ &(D\varphi''(t) - c\varphi'(t + r_1) + f^c(\varphi_{t+r_1}) \geq 0, \text{ respectively}) \end{aligned}$$

对所有 $t \in \mathbb{R}$。

这里，$f_c \in \mathbb{X}_c := C([-c\tau_2, 0], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$，定义为

$$f_c(\psi) = f(\psi^c), \quad \psi^c(\theta) := \psi(c\theta), \quad \theta \in [-\tau_2, 0].$$

**定义 3.2**。</style>函数 $(, \mathbb{R})$，其中 $\varphi, \varphi'$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界，$\varphi''$ 在 $\mathbb{R}$ 上局部可积且本性有界（即 $\varphi'' \in L^\infty$），称为波动方程（3.5）的拟上解（分别为拟下解），如果它对几乎处处的 $t \in \mathbb{R}$ 满足以下条件

$$\begin{aligned} &D\varphi''(t) - c\varphi'(t + r_1) + f^c(\varphi_{t+r_1}) \leq 0, \\ &(D\varphi''(t) - c\varphi'(t + r_1) + f^c(\varphi_{t+r_1}) \geq 0, \text{ respectively}). \end{aligned}$$

二次方程 $\lambda^2 - c\lambda - \delta = 0$，其有两个不同的实根

$$\lambda_1 = \frac{c - \sqrt{c^2 + 4\delta}}{2} < 0, \ \lambda_2 = \frac{c + \sqrt{c^2 + 4\delta}}{2} > 0,$$

每当 $c > 2\sqrt{\delta}$. 时，这就得到了以下引理。

**Lemma 3.3.** 令 $c > 2\sqrt{\delta}$ 并考虑方程 *(3.5)* 的特征方程

$$\lambda^2 - c\lambda e^{r_1\lambda} - \delta e^{r_1\lambda} = 0. \tag{3.6}$$

定义一个开条带 $U \subset \mathbb{C}$，其中 $\{z \in \mathbb{C}: \ \lambda_1 - \varepsilon \leq \Re z \leq 0\}$. 那么，对于充分小的$r_1$, $\varepsilon > 0$

*i*）特征方程在虚轴上没有根；*ii*）特征方程有一个随 $r_1$ 连续变化的单根（ $U$ 中），记为 $\eta_1(r_1)$。

这是 [2] 中命题（3.1）的一个特例。由此可知，根据修正的 Perron 定理，我们有一个唯一的有界解，见 [11]。因此，由 [2] 可得以下结果。方程 3.5 的解为

$$F(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s, r)H(\phi(s))ds, \tag{3.7}$$

其中存在一些正常数 $M_1$, $\delta_1$，使得对所有 $t \in \mathbb{R}$, $|G（t, \ r）| \leq M_1 e^{-\delta_1|t|}$

**引理 3.4**。 设 $(\phi)$ 是方程（*3.5*）的拟上解（分别为拟下解）。则， $F(\phi)$ 是方程（*3.5*）的上解（分别为下解）。

**定理 3.5**。假设$(H1)$ 和$(H2)$ 成立，若方程 *(3.5)* 在 $\Gamma$ 中存在一个上解 $\overline{\phi}$ 和一个下解 $\underline{\phi}$, 使得对所有 $t \in \mathbb{R}$

$$0 \leq \underline{\phi}(t) \leq \overline{\phi}(t).$$

因此，系统 *(3.5)* 存在一个单调行波解。

**3.1.拟上解**。 我们现在将明确求得一个可接受的拟上解。二次方程 $\mu^2 - c\mu + p = 0$，当 $c > 2\sqrt{p}$. 时有两个实根 $\mu_1 < 0 < \mu_2$事实上，我们需要以下引理。

**引理 3.6**。 令 $c > 2\sqrt{p}$ 并考虑该方程

$$\mu^2 - c\mu e^{r_1\mu} + pe^{r_1\mu} = 0, \tag{3.8}$$

并定义一个开条带 $V \subset \mathbb{C}$ 由 $\{z \in \mathbb{C}: \ 0 < \Re z < \mu_2 + \varepsilon\}$. 那么，对于充分小的$r_1$, $\varepsilon > 0$ 使得 $V \cap \{\mu_2\} = \emptyset$. 则方程*(3.8)* 在 $V$ 中有一个关于 $r_1$ 连续依赖的单根，记为 $\eta_2(r_1)$。此外， $\eta_2(r_1)$ 为实数且

$$\lim_{r_1 \to 0} \eta_2(r_1) = \mu_2. \tag{3.9}$$

**断言 3.7**. 当 $r_1$ 和 $c > 2\sqrt{p}$充分小时，且 $\eta_2$ 为方程（3.8）在 $V$中的根，则函数

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} \frac{U_e}{2}e^{\eta_2 t}, & t \le t_0, \\ U_e(1 - \frac{1}{2}e^{-\eta_2 t}), & t > t_0 \end{cases}$$

是 (3.5) 的拟上解。

证明。 由初等微积分可容易看出

$$\varphi_1'(t) = \begin{cases} \frac{U_e\eta_2}{2}e^{\eta_2 t}, & t \le 0, \\ \frac{U_e\eta_2}{2}e^{-\eta_2 t}, & t > 0 \end{cases}, \quad \varphi_1''(t) = \begin{cases} \frac{U_e\eta_2^2}{2}e^{\eta_2 t}, & t \le 0, \\ \frac{-U_e\eta_2^2}{2}e^{-\eta_2 t}, & t > 0 \end{cases}$$

注意， $\varphi_1'$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续且有界，并且 $\varphi_1''$ 存在且处处连续，除 $t = 0$外均有界。为简洁起见，我们记 $U_e = 1$， 因为它出现在每一项中。证明现在可分三种情况完成。

**情形 1** $t < -r_1$：我们有

$$\begin{aligned} &\phi''(t) - c\phi'(t + r_1) - \delta\phi(t + r_1) + p\phi(t + (r_1 - r_2))e^{-a\phi(t+(r_1-r_2))} \\ &= \frac{\eta_2^2}{2}e^{\eta_2 t} - \frac{c\eta_2}{2}e^{\eta_2(t+r_1)} - \frac{\delta}{2}e^{\eta_2(t+r_1)} + \frac{p}{2}e^{\eta_2(t+r_1)}e^{-a\phi(t+(r_1-r_2))} \\ &\le \left(\frac{\eta_2^2}{2} - \frac{c\eta_2}{2}e^{\eta_2 r_1} + \frac{p}{2}e^{\eta_2 r_1}\right)e^{\eta_2 t} - \frac{\delta}{2}e^{\eta_2(t+r_1)} \\ &= -\frac{\delta}{2}e^{\eta_2(t+r_1)} \le 0. \end{aligned}$$

**情形 2** $-r_1 \le t \le 0$：我们有

$$\begin{aligned} &\phi''(t) - c\phi'(t + r_1) - \delta\phi(t + r_1) + p\phi(t + (r_1 - r_2))e^{-a\phi(t+(r_1-r_2))} \\ &= \frac{\eta_2^2}{2}e^{\eta_2 t} - \frac{c\eta_2}{2}e^{-\eta_2(t+r_1)} - \delta\phi(t + r_1) + \frac{p}{2}e^{\eta_2(t+r_1-r_2)}e^{-a\phi(t+(r_1-r_2))} \\ &\le \frac{\eta_2^2}{2}e^{\eta_2 t} - \frac{c\eta_2}{2}e^{-\eta_2(t+r_1)} - \delta\phi(t + r_1) + \frac{p}{2}e^{\eta_2(t+r_1)} \\ &= \frac{\eta_2^2}{2}e^{\eta_2 t} - \frac{c\eta_2}{2}e^{\eta_2(t+r_1)} + \frac{p}{2}e^{\eta_2(t+r_1)} + \frac{c\eta_2}{2}e^{\eta_2(t+r_1)} - \frac{c\eta_2}{2}e^{-\eta_2(t+r_1)} - \delta\phi(t + r_1) \\ &\left(\frac{\eta_2^2}{2} - \frac{c\eta_2}{2}e^{\eta_2 r_1} + \frac{p}{2}e^{\eta_2 r_1}\right)e^{\eta_2 t} + c\eta_2\sinh(r_1\eta_2) - \delta\phi(t + r_1) \\ &= c\eta_2\sinh(r_1\eta_2) - \delta\phi(t + r_1), \end{aligned}$$

因为 $\eta_2$ 是方程（3.8）的一个根。当 $r_1 \to 0$， $c\eta_2\sinh(r_1\eta_2) \to 0$. 因此，存在一个足够小的 $r_1$ 使得

$$c\eta_2\sinh(r_1\eta_2) - \delta\phi(t + r_1) \le 0.$$

**情形 3** $0 \le t$: 我们有

$$\begin{aligned}
&\phi''(t) - c\phi'(t+r_1) - \delta\phi(t+r_1) + p\phi(t+(r_1-r_2))e^{-a\phi(t+(r_1-r_2))} \\
&= \frac{-\eta_2^2}{2}e^{-\eta_2 t} - \frac{c\eta_2}{2}e^{-\eta_2(t+r_1)} + p\left(1 - \frac{1}{2}e^{-\eta_2(t+(r_1-r_2))}\right)e^{-a\phi(t+(r_1-r_2))} - \delta\phi(t+r_1) \\
&\le \frac{-\eta_2^2}{2}e^{-\eta_2 t} - \frac{c\eta_2}{2}e^{-\eta_2(t+r_1)} + p\left(1 - \frac{1}{2}e^{-\eta_2(t+(r_1-r_2))}\right) - \delta\phi(t+r_1) \\
&= \frac{-\eta_2^2}{2}e^{-\eta_2 t} + \frac{c\eta_2}{2}e^{-\eta_2 t+\eta_2 r_1} - \frac{p}{2}e^{-\eta_2 t+\eta_2 r_1} + \frac{p}{2}e^{-\eta_2 t+\eta_2 r_1} - \frac{c\eta_2}{2}e^{-\eta_2 t+\eta_2 r_1} - \frac{c\eta_2}{2}e^{-\eta_2(t+r_1)} \\
&+ p\left(1 - \frac{1}{2}e^{-\eta_2(t+(r_1-r_2))}\right) - \delta\phi(t+r_1).
\end{aligned}$$

□

利用 $\eta_2$ 是方程 (3.8) 的一个根，我们得到如下简化

$$\begin{aligned}
&= \frac{p}{2}e^{-\eta_2 t+\eta_2 r_1} - \frac{c\eta_2}{2}e^{-\eta_2 t+\eta_2 r_1} - \frac{c\eta_2}{2}e^{-\eta_2(t+r_1)} + p\left(1 - \frac{1}{2}e^{-\eta_2(t+(r_1-r_2))}\right) - \delta\phi(t+r_1) \\
&= -c\eta_2 e^{-\eta_2 t}\cosh(\eta_2 r_1) + \frac{p}{2}e^{-\eta_2 t}\left(e^{\eta_2 r_1} - e^{\eta_2(r_1-r_2)}\right) - \delta\phi(t+r_1) + p.
\end{aligned}$$

注意到，当 $r_1 \to 0,$ 意味着 $\cosh(\eta_2 r_1) \to 1$ and $e^{\eta_2 r_1} - e^{\eta_2(r_1-r_2)} \to 1 - e^{-\eta_2 r_2}$ 我们可以取 $r_1, r_2$ 足够小，使得 $e^{\eta_2 r_1} - e^{\eta_2(r_1-r_2)} \approx o(r_1 - r_2)$。由此可知，对于足够小的 $r_1, r_2$

$$\begin{aligned}
&= -c\eta_2 e^{-\eta_2 t}\cosh(\eta_2 r_1) + \frac{p}{2}e^{-\eta_2 t}\left(e^{\eta_2 r_1} - e^{\eta_2(r_1-r_2)}\right) - \delta\phi(t+r_1) + p \\
&\approx \left(-c\eta_2 + \frac{p}{2}o(r_1 - r_2)\right)e^{-\eta_2 t} - \delta\phi(t+r_1) + p \\
&\le -c\eta_2 + \frac{p}{2}o(r_1 - r_2) - \delta\phi(t+r_1) + p.
\end{aligned}$$

此外,

$$\lim_{c \to 2\sqrt{p}} -c\mu_1 = -p,$$

and

$$\lim_{r_1 \to 0} \eta_2(r_1) = \mu_1$$

我们有 that

$$\begin{aligned}
&- c\eta_2 + \frac{p}{2}o(r_1 - r_2) - \delta\phi(t+r_1) + p \\
&\approx \frac{p}{2}o(r_1 - r_2) - \delta\phi(t+r_1).
\end{aligned}$$

因此，我们可以取足够小的 $r_1, r_2$，使得

$$\frac{p}{2}o(r_1 - r_2) < \delta\phi(t + r_1).$$

这证明了该结果。

为了构造拟下解，我们将考察一个定义如下的函数

$$f(t) = a(t - T)^3 + b(t - T)^2 + \frac{1}{2}.$$

此外，对于某个足够大的 $T > 0$，我们有如下性质：

i) 该函数将 $e^{\eta_1 t}/4$ 与常函数 $1/2$ 平滑地连接起来

ii) $f(-T) = (1/4)e^{\eta_1 T}$, $f'(-T) = (-\eta_1/4)e^{\eta_1 T}$, $f'(T) = 0$, $f(T) = 1/2$.

Barker 和 Nguyen 的研究表明，[2] 有

$$a = \frac{\eta_1 T e^{-\eta_1 T} + e^{-\eta_1 T} - 2}{16T^3}$$
$$b = \frac{-\eta_1 T e^{-\eta_1 T} + 6\left(\frac{e^{-\eta_1 T}}{4} - \frac{1}{2}\right)}{8T^2},$$

以及以下结论。

**断言 3.8**. 定义 $f(t)$ 为上述桥接函数，则

$$\lim_{T\to\infty} \sup_{-T\le t\le T} \max\{|f'(t)|, |f''(t)|\} = 0. \tag{3.10}$$

**断言 3.9**. 当 $r_1$ 和 $c > 2\sqrt{\delta}$ 足够小时，且 $\eta_1$ 为方程 (3.6) 的正根，则函数

$$\underline{\varphi}(t) = \begin{cases} \frac{e^{\eta_1 t}}{4}, & t < -T, \\ f(t), & -T \le t \le T \\ \frac{1}{2}, & t > T, \end{cases}$$

是 (3.5) 的拟上解。

证明。 我们将像之前一样分情况处理。

**情形 1：** $t \le -T - r_1$

$$\begin{aligned}
&\phi''(t) - c\phi'(t+r_1) - \delta\phi(t+r_1) + p\phi(t+(r_1-r_2))e^{-a\phi(t+(r_1-r_2))} \\
&= \frac{\eta_1^2}{2}e^{\eta_1 t} - \frac{c\eta_1}{2}e^{\eta_1(t+r_1)} - \frac{\delta}{2}e^{\eta_1(t+r_1)} + \frac{p}{2}e^{\eta_1(t+r_1)}e^{-a\phi(t+(r_1-r_2))} \\
&= \left(\frac{\eta_1^2}{2} - \frac{c\eta_1}{2}e^{\eta_1 r_1} - \frac{\delta}{2}e^{\eta_1 r_1}\right)e^{\eta_1 t} + \frac{p}{2}e^{\eta_1(t+r_1)}e^{-a\phi(t+(r_1-r_2))} \\
&= \frac{p}{2}e^{\eta_1(t+r_1)}e^{-a\phi(t+(r_1-r_2))} \ge 0,
\end{aligned}$$

因为 $\eta_1$ 是方程 (3.6) 的一个根。

**情形 2：** $-T - r_1 \le t \le T$ 这一情形由以下事实得出：在此区间上

$$\sup_{-T-r_1\le t\le T} |\underline{\varphi}_1''(t)| \pm c|\underline{\varphi}_1'(t+r_1)| = \sup_{-T\le t\le T} |f'(t)| \pm c|f''(t)|$$

只要取 $T$ 足够大，就可以使其任意小，并且 $p > \delta$. 因此，对于某个足够大的 $T$

$$\begin{aligned}
&\phi''(t) - c\phi'(t+r_1) - \delta\phi(t+r_1) + p\phi(t+(r_1-r_2))e^{-a\phi(t+(r_1-r_2))} \\
&= -\delta\phi(t+r_1) + p\phi(t+(r_1-r_2))e^{-a\phi(t+(r_1-r_2))} + o(T) \ge 0.
\end{aligned}$$

此情形已得到证明。

**情形 3：** $T \le t$ 此情形显然是由于该函数为常数这一事实。 □

**推论 3.10.** 假设给定 $c > 2\sqrt{p}$。那么,⁻当时滞 $\tau_1, \tau_2$ 足够小时，方程 (3.5) 存在行波解 $u(x,t)\phi(x+ct)$。

## 4. Numerical Simulations

本节将通过一个具体例子，为方程 (3.5) 构造数值上下解。利用 Mallet-Peret 的定理 (4.1) 中给出的公式 [11]，我们有

$$G(t,r) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\xi t}}{-\xi^2 - ci\xi e^{i\xi r_1} - \delta e^{i\xi r_1}} d\xi \tag{4.1}$$

由于拟上下解和较光滑的上下解的性质，采用相对简单的数值格式应该是合适的。为此，我们有如下引理。

**引理 4.1**。设 $G(t, r)$ 为由公式（*4.1*）求得的格林函数，则

*i*）对于所有的 $N \in \mathbb{N}$、 $t$、$\xi \in \mathbb{R}$，存在某个正的常数 $K$，且与 $N$ 无关，使得

$$|G(-N,r)+G(N,r)|<K.$$

*ii)* 对任意小的正数 $\varepsilon$，存在一个充分大的 $N \in \mathbb{N}$，它依赖于 $\varepsilon$，使得对于所有 $t$, $\xi \in \mathbb{R}$

$$|G(-N,r)+G(N,r)|<\varepsilon.$$

证明。由于对于所有 $t \in \mathbb{R}$，都存在某个正常数 $\delta_1$，使得 $||G(t,r)|| \leq K_1 e^{-\delta_1|t|}.$，因此这两部分的证明都很直接。事实上，部分 $i.$) 可通过对 $N$ 使用归纳法证明。取 $N=1$，则

$$|G(-N,r)+G(N,r)| \leq 2K_1 e^{-\delta_1} < 2K_1.$$

取 $K=2K_1$，则结论成立。为证明部分 $ii.$)，固定 $\varepsilon>0$，则存在某个 $N \in \mathbb{N}$，使得

$$N \geq \ln\left(\frac{\varepsilon}{2K_1}^{\frac{-1}{\delta_1}}\right)$$

我们有以下估计：

$$|G(-N,r)+G(N,r)| \leq 2K_1 e^{-\delta_1 N} < \varepsilon.$$

□

这使我们能够忽略格林函数的尾部，并聚焦于某个有限区间，从而对任意固定的 $t \in \mathbb{R}.$ 数值近似该积分。事实上，该区间可以选得相对较小。我们知道，以下迭代是收敛的

$$\phi_n = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s,r)H(\phi_{n-1}(s))ds,$$

其中 $H$ 我们取 $r_1=1,\ r_2=1/4,\ p=2,\ \delta=1,\ c=2\sqrt{2},\ N=50,\ T=1$。然后我们将进行近似

$$G(t,r) \approx\ -\frac{1}{2\pi}\int_{-50}^{50} \frac{e^{i\xi t}}{-\xi^2 - ai\xi e^{i\xi} - be^{i\xi}} d\xi.$$

此外，由于 $\phi_n \geq 0$，我们得到近似式

$$\phi_n = \left|\int_{-\infty}^{\infty} G(t-s,r)H(\phi_{n-1}(s))ds\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |G(t-s,r)H(\phi_{n-1}(s))|\,ds.$$

有鉴于此，我们知道 $|G(t-s,\ r)| \leq K_1 e^{-\delta_1|t|}.$。将积分路径移至平行直线 $z=\xi+i|\lambda_1|$，其中 $\lambda_1$ 是方程 (3.6) 的负根，可得

$$|G(t-s,r)| \leq K_1 e^{\lambda_1|t|}.$$

我们将使用复合辛普森法进行近似

$$K_1 \approx \frac{1}{2\pi}\int_{-50}^{50} \frac{1}{(\xi+i|\lambda_1|)^2+[2i(\xi+i|\lambda_1|)+1]\,e^{(\xi+i|\lambda_1|)}}d\xi.$$

为简便起见，我们记

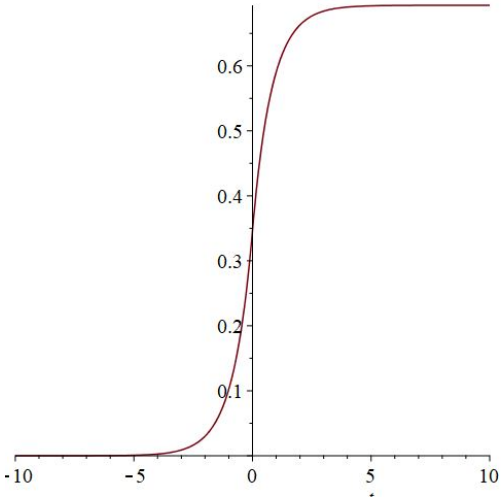
$$f(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-50}^{50} \frac{1}{(\xi+i|\lambda_1|)^2+[2i(\xi+i|\lambda_1|)+1]\,e^{(\xi+i|\lambda_1|)}},$$

那么，众所周知，复合辛普森法则可写为

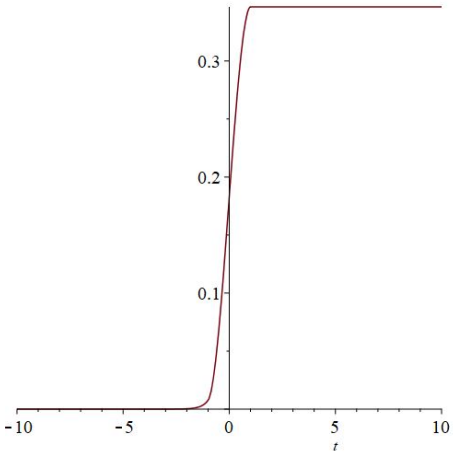
$$I_n=\int_{-50}^{50} f(\xi) \approx \frac{h}{3}\left[f(-50)+4\sum_{i=1}^{n/2} f(\xi_{2i-1})+2\sum_{i=1}^{n/2-1} f(\xi_{2i})+f(50),\right]$$

其中 $h=100/n,\quad n$ 为子区间的数量。不同步长下的结果（使用 MATLAB 计算）见下表，准上解和下解的图也见下方

| $n$ | $h$ | $\lvert I_n\rvert$ |
|---|---|---|
| 100 | 1 | .2861 |
| 1000 | .1 | .3064 |
| 10000 | .01 | .3066 |
| 100000 | .001 | .3067 |
| 1000000 | .0001 | .3067 |




拟上解




拟下解

## References

1. J. Al-Omari, S. Gourley，单物种年龄结构反应扩散模型中的单调行波前沿。*J Math Biol* **45**, 294–312 (2002) 2. W.K. BARKER, N. Van Minh，扩散项和反应项均含时滞的反应扩散方程中的行波 *arXiv*预印本 **arXiv:2301.11504** (2023)。已提交作最终发表 3. A. Boumenir, N. Van Minh，延迟反应扩散方程行波单调迭代法中的 Perron 定理，*J. Differential Equations* **7** (2008) 1551-1570. 4. K. Deng, Y. Wu，具有分布时滞的扩散型尼科尔森吹蝇方程。应用数学快报 **50** (2015) 126-132. 5. S.A. Gourley, S. Ruan，具有分布时滞的扩散型尼科尔森吹蝇方程的动力学，*Proc. Roy. Soc.* Edinburgh **130A** (2000) 1275-1291. 6. W.S.C. Gurney, S.P. Blythe, R.M. Nisbet，重新审视尼科尔森吹蝇，*Nature* **287** (1980) 17-21. 7. C. Huang 和 B. Liu，伴有成熟时滞和反馈时滞的扩散型尼科尔森吹蝇方程的行波前沿，应用数学快报 **134** (2022), Paper No. 108321, 6 pp. 8. L. Huang 和 Z. Xu，具有两个时滞的扩散型尼科尔森吹蝇方程的行波前沿，应用数学快报, **139** (2023) 108545, 7 pp. 9. C.K Lin, M. Mei，具有扩散项的尼科尔森吹蝇方程的行波前沿，*Proceedingsof the Royal Society of Edinburgh* **140A** (2010) 135-152. 10. S. Ma，通过不动点定理求解延迟反应扩散系统的行波，*J. Differ- ential Equations*, 171 (2001) 294-314. 11. J. Mallet-Paret. 混合型函数微分方程的 Fredholm 择一定理。*J. Dy- namics and Differential Equations*, **11** (1999). p. 1-47. 12. M. Mei, J. W.-H. So, M. Y. Li 和 S. S. P. Shen. 具有扩散项的尼科尔森吹蝇方程行波的渐近稳定性。*Proc. R. Soc. Edinb. A* **134** (2004), 579-594. 13. A. J. Nicholson. *Lucilia cuprina* 幼虫之间的食物竞争。载于 *Proc. VIII Int. Congr. ofEntomology, Stockholm,*(Stockholm: Axel R Elfstroms Boktryckeri AB, 1948) 277-281 14. A. J. Nicholson. 动物种群动力学概述。*Aust. J. Zool.* **2** (1954), 9–65. 15. J. Pruss. Volterra 方程的有界解。*SIAM J. Math Anal.*, **19** (1988), 133-149. 16. K. Schaaf，抛物型泛函微分方程的渐近行为与行波解，*Transactions of the American Mathematical Society* **302** (1987) 587-615. 17. J. W.-H. So 和 Y. Yang. 扩散型尼科尔森吹蝇方程的 Dirichlet 问题。*J. Differential Equations* **150** (1998), 317-348. 18. J. W.-H. So, J. Wu 和 Y. Yang. 扩散型尼科尔森吹蝇方程的数值稳态与 Hopf 分岔分析。*Appl. Math. Computat.* **111** (2000), 53-69. 19. J. W.-H. So 和 X. Zou. 扩散型尼科尔森吹蝇方程的行波。*Appl. Math.Computat.* **122** (2001), 385-392 20. H. Smith，单调动力系统：竞争与合作系统理论导论, Am. Math. Soc., Providence, RI, 1995. 21. A. I. Volpert, V. A. Volpert, and V. A. Volpert.抛物型系统的行波解. 数学专著译丛，第**140**卷，Am. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

22.J. Wu, X. Zou, 《反应扩散方程》带时滞的行波前沿, 《动力学与微分方程杂志》**13** (2001) 651-687。
23.Y. Yang和 J. W.-H. So。扩散型尼科尔森吹蝇方程的动力学。载于动力系统与微分方程，**第 II卷**（W.Chen 和 S. Hu编），（密苏里州斯普林菲尔德：西南密苏里州立大学出版社，1998）。333-35224.X. Q. Zhao, W.Wang，流行病模型中的费希尔波。《离散与连续动力系统*B*辑》**4** (2004) 1117-1128。

Department of Mathematics and Statistics, University of Arkansas at Little Rock, 2801S University Ave, Little Rock, AR 72204. USA邮箱地址: wkbarker@ualr.edu