arXiv:2304.04850v1 [math.CA] 10 Apr 2023

关于分数阶微分方程及其应用的渐近周期解

VU TRONGLUONG、NGUYEN DUC HUY、NGUYEN VAN MINH 和 NGUYEN NGOC VIEN

Abstract. 本文研究如下形式的分数阶微分方程解的渐近行为： $D_C^\alpha u(t) = Au(t) + f(t)$ $u(0) = x$， $0 < \alpha \leq 1$，(∗)，其中 $D_C^\alpha u(t)$ 表示函数 u 在 Caputo 意义下的导数， A 是巴拿赫空间 $\mathbb{X}$ 上的线性算子，该算子可能无界，并且f 满足如下性质：$\lim_{t\to\infty}(f(t+1) - f(t)) = 0$，我们将其称为渐近 1-周期性。利用半直线上的函数谱理论，我们推导出了 Katznelson-Tzafriri 定理和 Massera定理的类似结果。具体而言，我们根据算子 A的谱性质给出了充分条件，使得方程 (*) 的所有渐近温和解都是渐近 1-周期的，或者存在一个渐近 1-周期的渐近温和解。

1. Introduction

我们关注以下形式的线性分数阶微分方程解的渐近行为

$$D_C^\alpha u(t) = Au(t) + f(t), u(0) = x, 0 < \alpha \leq 1, \tag{1.1}$$

其中，$D_C^\alpha u(t)$ 是函数 u 在 Caputo 意义下的导数， A 是巴拿赫空间 $\mathbb{X}$ 上可能无界的线性算子，并且 f 满足 $\lim_{t\to\infty}(f(t+1) - f(t)) = 0$ 的性质，我们将其称为“渐近 1-周期性”。

近几十年来，分数阶微分方程受到越来越多的关注，因为这类方程使我们能够对更复杂的过程建模。关于其在物理学和工程学中的应用，读者可参阅专著 [11, 15] 。关于抽象空间中的一般结果和概念，读者可参阅 [3, 6, 7]。

微分方程解的渐近行为是微分方程与动力系统定性理论中的一个核心主题，其中蕴含着丰富的成果与思想。由于解的周期性具有应用价值，数学家们最早关注的解的行为便是周期性。沿着这一方向有许多经典成果，成为后续研究的范例。在众多此类工作中，我们提请读者关注 Massera[20] 和 Katznelson-Tsafriri [13] 的著名成果，因为他们采用了截然不同的研究方法。

Date: 2023年4月12日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 主分类：34K37，34G10；次分类：34K30，45J05。*Key words and phrases.* 渐近行为、多项式有界性、稳定性、半直线上函数的谱。本文部分内容是在第一作者访问越南高等数学研究院（VIASM）期间撰写的。他谨此感谢该研究院的热情接待。作者感谢匿名审稿人认真阅读稿件并提出改进稿件表达的建议。

这些结果最近在[19] 和 [22]中被推广到了更广泛的方程和解的类别。自然会问，近期这些工作中的概念和结果是否能够推广到更大的一类方程(1.1)。本文将尝试回答这一问题。

更具体地说，我们将寻找一些条件，使得某些（或所有）解$x(\cdot)$是渐近 1-周期的。我们将为方程 (1.1) 的这类解证明卡茨内尔森-茨法里定理和 Massera定理的一个类似结果。我们采用的方法是使用函数谱理论和分解技巧，而不是该领域常用的周期映射，因为方程实际上并非周期的，且其齐次方程即使在自治情形下也不会生成动力系统。在近期的一篇论文 [19] 中，研究了 $\alpha = 1$情形下、具有周期系数的演化方程中的类似问题，所用方法基于函数谱理论。具体而言，在 [19] 中，函数 $f \in BUC(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$（ $[0, \infty$上所有一致连续有界函数构成的空间）的谱被定义为单位圆 Γ 上复平面中的子集 $\sigma(f)$，它由所有满足以下条件的¯ ¯点 ξ_0 组成：复函数 $R(\lambda, S)f$ 无法解析延拓至 ξ_0的任何¯邻域。这里， S 表示平移 1， S 表示由 S 在商空间 $\mathbb{Y} := BUC(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})/C_0(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$上诱导的算子（该空间由在无穷远处趋于零的连续¯ ¯函数构成），而 $R(\lambda, S)$表示 S的预解式。在 [19], 中，函数 $f \in BUC(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$的渐近 1-周期性由性质 $\sigma(f) \subset \{1\}$刻画。请注意，对于分数阶方程 (1.1)，使用¯ ¯变换 $R(\lambda, S)f$ 来捕捉方程 (1.1) 的渐近温和解的谱并不可行。如 [18], 所示，由变换

¯ ¯ ¯$R(\lambda, \mathcal{D})f$确定的谱 $sp(f)$可用于研究方程 (1.1) 的渐近行为，其中 $\mathcal{D}$ 是微分算子 d/dt，而 $\mathcal{D}$ 表示由 $\mathcal{D}$ 在 $\mathbb{Y}$中诱导的算子。下一步，我们将用 $sp(f)$来刻画渐近 1-周期性。为此，我们将证明恒等式 $\sigma(f) = \overline{e^{i \cdot sp(f)}}$，该恒等式基于针对 C_0-等距群的弱谱映射定理。对渐近 1-周期性的这一刻画，使我们能够研究方程 (1.1) 的所有渐近温和解的渐近 1-周期性，从而得到卡茨内尔森-茨法里定理在分数阶方程中的类似结果。我们还基于分解技巧，为这类方程证明了 Massera定理的一个类似结果。主要结果见定理 3.9、3.12 和 3.16。

2. 预备知识与符号说明

2.1.记号。本文中，我们用 $\mathbb{R}$、$\mathbb{R}^+$、$\mathbb{C}$ 分别表示实数轴（$-\infty$、 ∞）、半直线 $[0, +\infty$）和复平面。对于 J 为 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{R}^+$的情形，记号 $BUC(J, \mathbb{X})$表示所有取值于（复）巴拿赫空间 $\mathbb{X}$ 、具有上确界范数的有界且一致连续函数所构成的函数空间。本文中我们将使用以下记号

$$C_0(\mathbb{R}^+, \mathbb{X}) := \{f \in BUC(\mathbb{R}^+, \mathbb{X}) : \lim_{t \to \infty} \|f(t)\| = 0\}$$

$$g_\alpha(t) := \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, t > 0, \alpha > 0.$$

对于复数 z， $\Re z$ 表示其实部， $\Im z$ 表示其虚部。本文中，复变量 λ 的单值幂函数 λ^α 唯一地定义为 $\lambda^\alpha = |\lambda|^\alpha e^{i\alpha \cdot arg(\lambda)}$，其中 $-\pi < arg(\lambda) < \pi$。

2.2. Caputo 意义下的分数阶微分。设 $\alpha > 0$、 $t \geq a$ 和 a 是一个固定数。那么，分数阶算子

$$J_a^\alpha u(t) := (g_\alpha * u)(t) = \int_a^t g_\alpha(t-\tau)u(\tau)d\tau \tag{2.1}$$

被称为阶为 α 的分数阶Riemann–Liouville积分。该函数

$$D_C^\alpha u(t) := \begin{cases} J^{n-\alpha}u^{(n)}(t) = \dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\displaystyle\int_a^t \frac{u^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}}d\tau, & n-1 < \alpha < n \in \mathbb{N}, \\ u^{(n)}(t), & \alpha = n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

称为 Caputo意义下的 α阶分数阶导数。根据此记号，对于 $0 < \alpha \leq 1$，我们有

$$J_a^\alpha D_C^\alpha u(t) = u(t) - u(a).$$

2.3. 柯西问题。对于固定的 $0 < \alpha \leq 1$，考虑柯西问题

$$D_C^\alpha u(t) = Au(t), u(0) = x, \tag{2.2}$$

其中， A 通常是一个无界线性算子。(2.2) 的适定性等价于该问题的

$$u(t) = x + \int_0^t g_\alpha(t-s)Au(s)ds. \tag{2.3}$$

关于当 A 通常为无界算子时此类方程适定性的深入研究，请读者参阅专著 [26] 。更一般方程的近期拓展可见 [14] 及其参考文献，其中包含更多细节。

我们来考虑以下形式的非齐次线性方程。

$$D_C^\alpha u(t) = Au(t) + f(t), t \geq 0, \tag{2.4}$$

其中 $f \in BUC(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ 已给出。

定义2.1. 方程(2.4)在 $\mathbb{R}^+$ 上的温和解 u 是$\mathbb{R}^+$ 上的连续函数，使得，对于每个 $t \in \mathbb{R}^+$， $J^\alpha u(t) \in D(A)$以及

$$u(t) = AJ^\alpha u(t) + J^\alpha f(t) + u(0).$$

2.4. 有界函数的谱理论。本文将使用 [18] 中概述的定义在半直线上的函数谱理论。有界函数在半直线上的谱定义如下:

令 $\mathcal{D}$ 表示 $BUC(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ 中定义域为 的微分算子 d/dt。

$$D(\mathcal{D}) = \{f \in BUC(\mathbb{R}^+, \mathbb{X}) : \exists f',\ f' \in BUC(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})\}.$$

引理 2.2. $S(t)_{t\geq 0}$平移半群在 $BUC(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ 中是强连续的，其无穷小生成元为 $\mathcal{D}$ 。

证明。这是一个众所周知的结果（例如参见 [10]）。 □

˜2.5. 算子 $\mathcal{D}$。在本小节中，我们回顾 [18]中构造的一些内容。由于 $C_0(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$ 是 $BUC(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$的一个闭子空间，并且在平移半群（$S(t)_{t\geq 0}$）下不变。在空间 BUC $(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$中，我们引入如下关系 R:

$$f \ R \ g \text{ if and only if } \ f-g\in C_0(\mathbb{R}^+,\mathbb{X}). \tag{2.5}$$

这是一个等价关系，而商空间 $\mathbb{Y}:=BUC(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})/R$ 是一个巴拿赫空间。如果不会引起混淆，我们也将该商空间中的范数 $\mathbb{Y}$ 记为 $\|\cdot\|$。

包含 $f\in BUC(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$ 的类记为 $\tilde{f}$。定义如下： $\tilde{\mathcal{D}}$属于 $\mathbb{Y}=BUC(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})/R$:

$$D(\tilde{\mathcal{D}}) \ := \ \{\tilde{f}\in\mathbb{Y}:\exists u\in\tilde{f}, u\in D(\mathcal{D})\}. \tag{2.6}$$

˜如果 $f\in D(\mathcal{D})$，我们令

$$\tilde{D}\tilde{f}:=\widetilde{\mathcal{D}u} \tag{2.7}$$

˜对于某个 $u\in f$。下面的引理将说明，这个 D 在 $\mathbb{Y}$ 中作为一个算子是良定义的。

˜引理2.3。使用上述记号， $\mathcal{D}$ 是 $\mathbb{Y}$中的定义良好的单值线性算子。

证明。证明见 [18]。 □

对于每个给定的 $f\in BUC(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$，考虑下述定义在 λ 中的复函数 ˆ $f(\lambda)$:

$$\hat{f}(\lambda):=(\lambda-\tilde{\mathcal{D}})^{-1}\tilde{f}. \tag{2.8}$$

ˆ定义2.4。所有满足 $f(\lambda)$ 在 $i\xi_0$ 的任意邻域内都没有解析延拓的点 $\xi_0\in\mathbb{R}$ 的集合定义为 f 的谱，记为 $sp(f)$。

3. Main results

3.1. 渐近 1-周期性的谱刻画。

定义 3.1. 设 p 是 $[0,2\pi)$ 中给定的一个实数。若函数 $g\in BUC(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$ 是类型为 p 的渐近布洛赫 1-周期函数，则彩票开户

$$\lim_{t\to\infty}(g(t+1)-e^{ip}g(t))=0.$$

如果 $p=0$，渐近布洛赫 1-周期函数 g 的类型为 p ，将被称为渐近 1-周期函数。当 $p=\pi$ 我们称该函数为渐近反 1-周期。

下面我们将证明，函数 $f\in BUC(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$ 的谱可以确定为线性算子的谱。我们将 $\mathcal{M}_f$ 定义为˜ ¯所张成的线性空间 $\{S(t)f$ 的闭包: $t\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{Y}$。显然， $S(t)$ 对每个 $t\in\mathbb{R}$ 都使 $\mathcal{M}_{\tilde{f}}$保持不变。我们考虑等距变换的 C_0-群 $\{S|_{\mathcal{M}_f},t\in\mathbb{R}\}$。该群的生成元记为 $D|_{\mathcal{M}_f}$。

引理 3.2. 对于每个 $f\in BUC(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$，我们有

$$i\cdot sp(f)=\sigma(\tilde{\mathcal{D}}|_{\mathcal{M}_f}). \tag{3.1}$$

˜证明. 若 $\lambda_0 \in \rho(D|_{\mathcal{M}_f})$，则对于 $\lambda \in U(\lambda_0)\backslash i\mathbb{R}$，其中 $U(\lambda_0)$ 是 λ_0 的一个小邻域

$$\hat{f}(\lambda) = (\lambda - \tilde{\mathcal{D}})^{-1}\tilde{f} = (\lambda - \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{M}_f})^{-1}\tilde{f}.$$

因此，ˆ $f(\lambda)$ 在λ_0的某个邻域内有一个解析延拓$(\lambda - \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{M}_f})^{-1}\tilde{f}$。这意味着 $\lambda_0 \notin i \cdot sp(f)$。

ˆ 反之，设 $\lambda_0 \in i\mathbb{R}\backslash i \cdot sp(f)$。则， $f(\lambda)$ 在 λ_0 的连通邻域 $U(\lambda_0)$ 上具有解析延拓。我们将证明该方程

$$\lambda_o y - \tilde{\mathcal{D}} y = w \tag{3.2}$$

存在唯一解 $y \in \mathcal{M}_f$，对于每个 $w \in \mathcal{M}_f$。首先，我们证明方程(3.2)有一个解。对于 $\lambda \in U(\lambda_0)\backslash i\mathbb{R}$ 使得 $\Re\lambda > 0$，利用公式

$$R(\lambda, \tilde{\mathcal{D}})\tilde{f} = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\tilde{S}(t)\tilde{f}dt,$$

ˆ˜ ˜ ˆ我们看到 $f(\lambda) = R(\lambda, D)f \in \mathcal{M}_f$。随后， $f(\lambda_0) \in \mathcal{M}_f$。由于算子˜ ˆ$D$ 是闭算子，且 $f(\lambda)$ 在 λ_0 处解析，我们看到的是

$$\lambda_0\hat{f}(\lambda_0) - \tilde{\mathcal{D}}\hat{f}(\lambda_0) = w. \tag{3.3}$$

接下来，我们将证明，对于给定的 $w \in \mathcal{M}_f$，方程 (3.2) 的解是唯一的。这等价于证明齐次方程只有平凡解。事实上，设 $y_0 \in \mathcal{M}_f$ 是方程的一个解。

$$\lambda_0 y_0 - \tilde{\mathcal{D}} y_0 = 0.$$

利用全纯函数的最大模原理，如 [5, 证明定理 2.2，第 2074] 页所示，然后利用全纯函数序列收敛的Vitali定理，我们可以证明，对于每个 $w \in \mathcal{M}_f$，函数 ˆ$w(\lambda)$在连通邻域 $U(\lambda_0)$ 中的 λ_0 上具有解析延拓。接下来，对于$\lambda \in U(\lambda_0)\backslash i\mathbb{R}$，根据恒等

$$R(\lambda, \tilde{\mathcal{D}})(\lambda - \tilde{\mathcal{D}})y_0 = y_0$$

我们有

$$\lambda R(\lambda, \tilde{\mathcal{D}})y_0 - y_0 = R(\lambda, \tilde{\mathcal{D}})\tilde{\mathcal{D}}y_0 = R(\lambda, \tilde{\mathcal{D}})\lambda_0 y_0.$$

因此

$$\hat{y}_0(\lambda) = R(\lambda, \tilde{\mathcal{D}})y_0 = \frac{y_0}{\lambda - \lambda_0}. \tag{3.4}$$

该函数在 λ_0 的邻域内具有解析延拓，当且仅当$y_0 = 0$。也就是说， λ_0 属于 $\rho(\mathcal{D}|_{\mathcal{M}f})$。引理的证明到此完成。□

回忆一下，在 [22] 中， $f \in BUC(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ 的“圆形”谱 $\sigma(f)$被定义˜ ˜为满足以下条件的 $\lambda_0 \in \Gamma$ 的集合：复函数 $R(\lambda, S(1))f$ 在 λ_0的任意邻域内都没有解析延拓。以与 [21, 引理 2.7] 相同的方式，我们可以证明

引理 3.3。对于 $f \in BUC(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$，下列结论成立。

$$\sigma(f) = \sigma(\tilde{S}(1)|_{\mathcal{M}_f}). \tag{3.5}$$

推论 3.4。对于 $f \in BUC(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$，我们有

$$\sigma(f) = \overline{e^{i\cdot \mathrm{sp}(f)}}, \tag{3.6}$$

其中，上划线表示复平面拓扑中的闭包。

˜证明。由于 $S(t)$ $t \in \mathbb{R}$ 是一个 C_0-等距群，根据弱谱映射定理（例如参见 [10, 定理 3.16，第 283] 页），等式 (3.6) 成立。□

在 [19] 中证明了，函数 $g \in BUC(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ 是类型为 p 的渐近布洛赫 1-周期函数，当且仅当 $\sigma(g) \subset \{e^{ip}\}$。下面将给出另一种以谱 $sp(f)$ 为依据的刻画，因为在许多情况下，估计该谱比估计 $\sigma(f)$ 更容易。

定理 3.5。设 $g \in BUC(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$。那么，

i)如果 ξ_0 是 $sp(g)$中的一个孤立点，那么 $i\xi_0$ 要么是可去的，要么是ˆ$g(\lambda)$ 的一个阶小于1 的极点；ii) 如果 $sp(g) = \emptyset$，那么 $g \in C_0(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$；iii) $sp(g)$是 $\mathbb{R}$的一个闭子集；iv) g 是类型为 p 的渐近布洛赫 1-周期函数，当且仅当 $sp(g) \subset p + 2\pi\mathbb{Z}$。

证明。关于 (i)、(ii) 和 (iii) 的证明，见 [18]。对于 (iv)，注意到如 [19],f 所示，f 是 p 类型的渐近布洛赫 1-周期函数，当且仅当 $\sigma(f) \subset \{e^{ip}\}$。根据推论 3.4，这等价于 $sp(f) \subset p + 2\pi\mathbb{Z}$。□

3.2. 对方程 (1.1) 解的渐近行为的应用。我们将应用上一节中有界函数的谱理论，研究满足 $0 < \alpha \leq 1$ 的方程 (2.2) 温和解的渐近行为。

定义 3.6. 若存在函数 $\epsilon(\cdot) \in C_0(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$，使得 u 是方程的温和解，则称函数 $u \in BUC(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ 是方程 (2.2) 的渐近温和解

$$D_C^\alpha u(t) = Au(t) + f(t) + \epsilon(t), t \geq 0. \tag{3.7}$$

下面我们将用 $\rho(A, \alpha)$表示所有 $\xi_0 \in \mathbb{C}$ 的集合，这些 $\xi_0 \in \mathbb{C}$ 满足$(\xi_0^\alpha - A)$具有一个逆$(\xi_0^\alpha - A)^{-1}$，且该逆在 ξ_0的邻域内是解析的；并用 $\Sigma_i(A, \alpha) :=i\mathbb{R}\backslash\rho(A, \alpha)$表示。

我们将使用一种新的记号

$$R_\alpha(\lambda, A) := \lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}. \tag{3.8}$$

下面的引理实际上陈述于 [1, 引理 2。2]以下是对 [18, 引理 4。1] 所作的改编。

引理 3.7. 设 $u \in BUC(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$、$\xi_0 \in \mathbb{R}$，且函数 $G(\lambda)$（属于 λ）是函数 ˆ$u(\lambda) = (\lambda - \tilde{\mathcal{D}})^{-1}\tilde{u}$（其中 $\Re\lambda > 0$）在开圆盘$B(i\xi_0, r)$ 上的解析延拓，其中 r 为某个正数。则，对于圆盘 $B(i\xi_0, r)$ 上的 $\Re\lambda < 0$，有 $G(\lambda) =$ ˆ$u(\lambda)$。

推论 3.8。设 $u \in BUC(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$是方程(2.2) 的渐近温和解，其中 $f \in BUC(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$。那么，

$$i \cdot sp(u) \subset \Sigma_i(A, \alpha) \cup i \cdot sp(f). \tag{3.9}$$

证明。参见 [18, 引理 4.2]。□

本文的主要结果如下:

定理 3.9。假设 $\Sigma_i(A, \alpha) \subset 2i\pi\mathbb{Z}$ ($\Sigma_i(A, \alpha) \subset (2\mathbb{Z}+1)i\pi$，分别地) 且 $sp(f) \subset 2\pi\mathbb{Z}$ ($sp(f) \subset (2\mathbb{Z} + 1)\pi$，分别地)。那么，方程 (2.2) 的每个渐近温和解都是渐近 1-周期解（分别为渐近反 1-周期解）。

证明。根据推论 3.8，每个渐近温和解 $u \in BUC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ 都具有以下性质：

$$i \cdot sp(u) \subset \Sigma_i(A, \alpha) \cup i \cdot sp(f).$$

因此，$sp(u) \subset 2\pi\mathbb{Z}$ 若 $\Sigma_i(A, \alpha) \cup i \cdot sp(f)$ 都是 $2i\pi\mathbb{Z}$ 的组成部分，那么根据定理 3.5，u 是渐近 1-周期的。渐近反 1-周期性的情形也以相同方式处理。□

引理 3.10. 对于 $\alpha \in [0, 1)$，以下断言成立

i) 算子 J^α 将 $C_0(\mathbb{R}^+, \mathbb{X}) \to C_0(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ 映射到，因此它导出了一个线性˜有界算子 J^α，其定义域为 $\mathbb{Y} \to \mathbb{Y}$。ii) 设 $u \in BUC(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ 是方程 (2.2) 的一个渐近温和解，且 A 是有界线性算子。那么，

$$\tilde{S}\tilde{u} = \tilde{A}\tilde{J}^\alpha\tilde{S}\tilde{u} + \tilde{S}\tilde{J}^\alpha\tilde{f}. \tag{3.10}$$

证明. 第 (i) 部分：证明显而易见。
第 (ii) 部分：

$$\begin{aligned}
[Su](t) &= u(t+1) \\
&= A\int_0^{t+1} g_\alpha(t+1-\tau)u(\tau)d\tau + \int_0^{t+1} g_\alpha(t+1-\tau)[f(\tau)+\epsilon(\tau)]d\tau \\
&= A\left[\int_1^{t+1} g_\alpha(t+1-\tau)u(\tau)d\tau + \int_0^1 g_\alpha(t+1-\tau)u(\tau)d\tau\right] \\
&\quad + \int_1^{t+1} g_\alpha(t+1-\tau)f(\tau)d\tau + \int_0^1 g_\alpha(t+1-\tau)[f(\tau)+\epsilon(\tau)]d\tau \\
&= A\left[[J^\alpha Su](t) + \int_0^1 \frac{(t+1-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}u(\tau)d\tau\right] \\
&\quad + J^\alpha S[f+\epsilon](t) + \int_0^1 \frac{(t+1-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}[f(\tau)+\epsilon(\tau)]d\tau
\end{aligned}$$

由于 A 是有界的且

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty}\int_0^1 \frac{(t+1-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}[f(\tau)+\epsilon(\tau)]d\tau = 0, \\
&\lim_{t\to\infty} J^\alpha S\epsilon(t) = 0.
\end{aligned}$$

由此得出（3.10）。 □

引理 3.11. 设 $u \in BUC(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ 且 A 是有界线性算子。进一步假设，当且仅当 u 是方程 (2.2) 的渐近温和解时

$$\tilde{u} = \tilde{A}\tilde{J}^\alpha\tilde{u} + \tilde{J}^\alpha\tilde{f}. \tag{3.11}$$

证明. 只需证明，如果 $u \in BUC(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$满足 (3.11)，那么它必定是方程 (2.2) 的渐近温和解。事实上，存在函数 $\epsilon_i(\cdot) \in C_0(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ 使得

$$u(t) + \epsilon_1(t) = AJ^\alpha[u+\epsilon_1](t) + \epsilon_2(t) + J^\alpha f(t) + \epsilon_3(t) \tag{3.12}$$

因此，由于 A 是一个有界线性算子，

$$u(t) + = AJ^\alpha u(t) + J^\alpha f(t) + \epsilon_4(t), \tag{3.13}$$

其中 $\epsilon_4(t) := AJ^\alpha\epsilon_1(t) - \epsilon_1(t) + \epsilon_2(t) + \epsilon_3(t)$。由于 A 是有界线性算子，且 $\tilde{J}^\alpha$ 有界， $\epsilon_4 \in C_0(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$。 □

定理 3.12.假设 A 是一个有界算子， $e^{\Sigma_{i(A,\alpha)}\setminus\{1\}}$是闭的，并且$f$ 是渐近1-周期的。那么，方程 (2.2)有渐近1-周期解，当且仅当它在 $\mathbb{R}^+$ 上有一个有界一致连续渐近解。

证明。考虑算子

$$L\tilde{u} := \tilde{u} - (\tilde{A}\tilde{J}^\alpha\tilde{u} + \tilde{J}^\alpha\tilde{f}).$$

显然，当且仅当 $L\tilde{u} = 0$ 时， $u \in BUC(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ 是方程 (2.2) 的渐近温和解。令 $\Lambda := e^{\Sigma_{i(A,\alpha)}} \cup \{1\}$, $\Lambda_1 := e^{\Sigma_{i(A,\alpha)}\setminus\{1\}}$ 以及 $\Lambda_2 := \{1\}$。那么，根据假设， Λ_1 和 Λ_2 是单位圆 Γ 上两个不相交的闭子集。由推论 3.8， $\sigma(u) \subset \Lambda$。此外，根据 [19, 断言 (iii), 命题 3.4] ，存在一个投影 $P: \mathbb{Y}_\Lambda \to \mathbb{Y}_{\Lambda_2}$ ，它与任何和 S 对易的有界算子 $\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$对易。因此，由于 $SL = LS$，我们有 $PL = LP$。因此，

$$\begin{aligned} 0 &= PL\tilde{u} \\ &= LP\tilde{u} \\ &= P\tilde{u} - (\tilde{A}\tilde{J}^\alpha P\tilde{u} + \tilde{J}^\alpha\tilde{f}). \end{aligned}$$

这意味着， $P\tilde{u}$ 包含方程 (2.2) 的一个渐近温和解。由于 $P\tilde{u} \in \mathbb{Y}_{\Lambda_2}$该解的谱必定是 $\Lambda_2 = \{1\}$的一部分。根据 [19, 命题 3.4]，该解是渐近 1-周期的。□

注 3.13。上述定理是 [20]中关于分数阶微分方程的著名结果的一个类似版本。将定理陈述中的集合 $\{1\}$ 替换为集合 $\{-1\}$，即可得到关于渐近反 1-周期解的另一个类似结果。

3.3. 无界 A的情形。现在我们可以陈述定理 3.12 在 A 为无界算子的情形下的类似版本。我们假设 $A: D(A) \subset X \to X$是一个闭线性算子，它生成 X 中的 C_0-半群 $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ ，并且$\{\lambda^\alpha : Re\lambda > 0\} \subset \rho(A)$。对 (2.2) 两边取拉普拉斯变换，得到

$$\hat{u}(\lambda) = \hat{S}_\alpha(\lambda)x + \big(\widehat{(\cdot)^{\alpha-1}P_\alpha}\big)(\lambda)\cdot\hat{f}(\lambda). \tag{3.14}$$

其中$\widehat{\quad}(\cdot)^{\alpha-1}P_\alpha(\lambda) = (\lambda^\alpha - A)^{-1}$,$\hat{}S_\alpha(\lambda) = \lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}$。拉普拉斯变换的逆变换表明， $u(t)$ 具有如下形式

$$u(t) = S_\alpha(t)x + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}P_\alpha(t-s)f(s)ds.$$

因此，(2.2) 的渐近温和解定义为满足以下条件的函数 $u \in BUC(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$。

$$u(t) = S_\alpha(t)x + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}P_\alpha(t-s)(f(s)+\epsilon(s))ds,\ t \geq 0. \tag{3.15}$$

根据从属原理（见 [6]），S_α和 P_α，$\alpha \in (0,1]$, 存在，当 A生成一个C_0-半群 $\{T(t)\}_{t\geq 0}$。S_α 和 P_α 的显式公式见 [6, 27]:

$$S_\alpha(t) = \int_0^\infty \Phi_\alpha(s)T(t^\alpha s)ds,$$
$$P_\alpha(t) = \alpha \int_0^\infty s\Phi_\alpha(s)T(t^\alpha s)ds,$$

其中，Φ_α 是在 $(0,\infty)$上定义的概率密度函数，即 $\Phi_\alpha(t) \geq 0$且 $\int_0^\infty \Phi_\alpha(t)dt = 1$。假设半群 $\{T(t)\}_{t\geq 0}$由 A 生成且是指数稳定的，即存在正数 a、M 使得

$$\|T(t)\| \leq Me^{-at}, t \geq 0.$$

根据这一事实（见 [28]）

$$\int_0^\infty \Phi_\alpha(\theta)e^{-z\theta}d\theta = E_{\alpha,1}(-z),$$
$$\int_0^\infty \alpha\theta\Phi_\alpha(\theta)e^{-z\theta}d\theta = E_{\alpha,\alpha}(-z),$$

我们有

$$\begin{aligned}\|S_\alpha(t)\| &\leq \int_0^\infty \Phi_\alpha(\theta)\|T(\theta t^\alpha)\|d\theta \\ &\leq \int_0^\infty \Phi_\alpha(\theta)e^{-at^\alpha\theta}d\theta = E_{\alpha,1}(-at^\alpha),\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\|P_\alpha(t)\| &\leq \alpha \int_0^\infty \theta\Phi_\alpha(\theta)\|T(\theta t^\alpha)\|d\theta \\ &\leq M\alpha \int_0^\infty \theta\Phi_\alpha(\theta)e^{-at^\alpha\theta}d\theta \\ &= ME_{\alpha,\alpha}(-at^\alpha).\end{aligned}$$

其中 $E_{\alpha,\beta}$，Mittag-Leffler 函数定义如下。

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\beta)},\ \alpha,\beta > 0,\ z \in \mathbb{C}.$$

对于 $\alpha \in (0,1)$ $t \in \mathbb{R}$，这些 Mittag-Leffler 函数具有

$$\lim_{t\to-\infty} E_{\alpha,1}(t) = \lim_{t\to-\infty} E_{\alpha,\alpha}(t) = 0.$$

根据上述估计，我们得到

$$\|S_\alpha(t)\|, \|P_\alpha(t)\| \to 0, t \to \infty.$$

and

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^t (t-s)^{\alpha-1}\|P_\alpha(t-s)\|ds &\leq M\int_{-\infty}^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-a(t-s)^\alpha)ds \\ &\leq \frac{M}{a}E_{\alpha,1}(-a(t-s)^\alpha)\Big|_{-\infty}^t = \frac{M}{a}.\end{aligned}$$

这意味着 $S_\alpha(t)x \in C_0(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$。采用与引理 3.11 的证明中相同的论证，我们得到以下结果。

引理 3.14。假设 A 生成一个指数稳定半群，且 $\{\lambda^\alpha : Re\lambda > 0\} \subset \rho(A)$。那么，当且仅当 $u \in BUC(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ 是方程 (2.2) 的渐近温和解时，

$$\tilde{u} = \tilde{F}_\alpha \tilde{f}, \tag{3.16}$$

$$where\ F_\alpha f(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t-s) f(s) ds,\ t > 0.$$

在下文中，我们假设 $e^{\Sigma_i(A,\alpha)} \backslash \{1\}$ 是闭的，且 f 是渐近 1-周期的。然后，若采用定理 3.12 证明中的记号，令 $\Lambda := e^{\Sigma_i(A,\alpha)} \cup \{1\}$，$\Lambda_1 := e^{\Sigma(A,\alpha)} \backslash \{1\}$ 且 $\Lambda_2 := \{1\}$，并令投影为 P: $\mathbb{Y}_\Lambda \to \mathbb{Y}_{\Lambda_2}$。

引理 3.15. 在引理 3.14 的假设下，我们假设 $e^{\Sigma_i(A,\alpha)} \backslash \{1\}$ 是闭的，且 f 是渐近 1-周期的。则若 $u \in BUC(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ 是方程 (2.2) 的渐近温和解，

$$P\tilde{u} = \tilde{F}_\alpha \tilde{f}. \tag{3.17}$$

证明. 算子 F_α 将 $C_0(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ 映射到 $\to C_0(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$，因此它诱导出一个从 $\mathbb{Y} \to \mathbb{Y}$ 出发的有界线性算子 $\tilde{F}_\alpha$。若 $g \in C_0(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$，则对每个 $\epsilon > 0$，存在一个数 $T > 0$，使得对所有 $s \geq T.$ 都有 $\|g\| \leq \epsilon$。于是对所有 $t \geq 2T$，有

$$\begin{aligned}
\|F_\alpha f(t)\| \leq & \|g\| \int_0^{t/2} (t-s)^{\alpha-1} \|P_\alpha(t-s)\| ds + \epsilon \int_{t/2}^t (t-s)^{\alpha-1} \|P_\alpha(t-s)\| ds \\
\leq & \|g\| \int_0^{t/2} (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-a(t-s)^\alpha) ds + \epsilon \frac{M}{a} \\
= & \|g\| (E_{\alpha,1}(-at^\alpha) - E_{\alpha,1}(-a(t/2)^\alpha)) + \epsilon \frac{M}{a}.
\end{aligned}$$

此外，

$$\begin{aligned}
SF_\alpha f(t) = & \int_0^{t+1} (t+1-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t+1-s) f(s) ds \\
= & \int_1^{t+1} (t+1-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t+1-s) f(s) ds + \int_0^1 (t+1-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t+1-s) f(s) ds \\
= & F_\alpha S f(t) + h(t).
\end{aligned}$$

注意

$$\|h(t)\| = \| \int_0^1 (t+1-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t+1-s) f(s) ds \| \leq \|f\| (E_{\alpha,1}(-a(t+1)^\alpha) - E_{\alpha,1}(-a(t)^\alpha)),$$

这意味着 $h \in C_0(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ 与 F_α 可交换于 S。使用定理 3.12中的记号，容易看出，如果 $u \in BUC(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ 是方程 (2.2) 的渐近温和解，那么

$$\begin{aligned}
0 = & P(\tilde{u} - \tilde{F}_\alpha \tilde{f}) \\
= & P\tilde{u} - P\tilde{F}_\alpha \tilde{f} \\
= & P\tilde{u} - \tilde{F}_\alpha \tilde{f}.
\end{aligned}$$

□

作为引理 3.15的推论，我们注意到 $\sigma(F_\alpha f) \subset \sigma(f)$。根据上述论证，我们还得到以下定理。

定理3.16。假设 A 生成一个指数稳定半群，并且$\{\lambda^\alpha : \ Re\lambda > 0\} \subset \rho(A)$，$e^{\Sigma_i}{}_{(A,\alpha)}\backslash\{1\}$是闭的，且 f 是渐近1-周期的。那么，方程 (2.2)具有渐近1-周期解，当且仅当它在 $\mathbb{R}^+$ 上具有有界的一致连续渐近解。

3.4. 例子。

例 3.17. 考虑初值问题

$$\begin{cases} D_t^\alpha u(x,t) = a u_{xx}(x,t) + f(x,t), \quad x \in \Omega = (0,\pi), \ t > 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \ x \in \Omega, \end{cases} \tag{3.18}$$

其中，$D_t^\alpha u(x,t)$是 t 中阶数为 $\alpha \in (0,1)$的 Caputo意义下的分数阶导数，$u(x,t)$ $f(x,t)$是标量值函数，使得对每个$t \in \mathbb{R}^+$, $f: \ f(\cdot,t) \in L^2(\Omega)$ 一致连续且有界，并且给定了 $a > 0$ 。我们按以下公式定义空间 $\mathbb{X} := L^2(\Omega)$ 以及 $A: \ \mathbb{X} \to \mathbb{X}$

$$\begin{cases} Ay = ay'', \\ D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega). \end{cases} \tag{3.19}$$

问题 3.18 可改写为演化方程的形式

$$D_t^\alpha u(t) = Au(t) + f(t), \ t \in \mathbb{R}^+, u(0) = u_0, \tag{3.20}$$

其中 $u(t) \in \mathbb{X}$, A 如上所定义。众所周知，A 的谱由满足该方程的特征值组成

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dx^2} = \frac{1}{a}\lambda u & \text{in } \Omega. \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases}$$

这意味着

$$\lambda_n = -an^2, u_n = C\sin(nx), n \in \mathbb{N}$$

此外，A 生成一个紧半群 $S(t)$，且

$$\|S(t)\| \le M \cdot e^{-at}, \forall t \ge 0$$

根据从属原理，A 生成从属预解算子$S_\alpha(t)$ $\alpha \in (0;1)$，使得 $\lim_{t\to\infty} \|S_\alpha(t)\| = 0$. 根据定义，

$$\Sigma_i(A,\alpha) = \{\lambda \in i\mathbb{R} : \ (\lambda^\alpha - A)^{-1} \text{ does not exists as a bounded operator}\}.$$

As

$$\lambda^\alpha \in \sigma(A) \Longleftrightarrow \lambda^\alpha = -an^2, n = 1,2,..$$

我们有

$$\lambda^\alpha = |\lambda|^\alpha \cdot e^{i\alpha \arg\lambda}$$

$$\lambda^\alpha = -an^2 = an^2 e^{i\pi}, n = 1,2,..$$

这等价于

$$\begin{cases} |\lambda|^\alpha = an^2, n = 1,2,.. \\ \arg\lambda = \frac{\pi}{\alpha} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\lambda| = a^{\frac{1}{\alpha}} n^{\frac{2}{\alpha}}, n = 1,2,.. \\ \arg\lambda = \frac{\pi}{\alpha} \end{cases}$$

如果选项是 $\alpha = \frac{2}{3}, a = \sqrt[3]{\pi^2}$，我们得到：

$$\lambda_n = n^3\pi e^{i\cdot\frac{3\pi}{2}} = -in^3\pi, n = 1, 2, ..$$

因此

$$\Sigma_i(A, 2/3) = \left\{-in^3\pi, n = 1, 2, ..\right\}$$

and

$$e^{\Sigma_i(A,2/3)} = \{1\} \cup \{-1\}.$$

如果 $f(\cdot, t)$ 关于 t 是渐近 1-周期的，那么 $\cdot e^{i\ sp_{(f)}} = \{1\}$。因此，根据定理 3.16，方程 (3.20) 存在渐近 1-周期解 u，当且仅当方程 (3.20) 存在渐近温和解。若 f 是渐近 1-反周期的，也可以得出类似结论。这是分数阶微分方程 (3.20) 的 Massera定理的一个类似结果。

例 3.18。我们用不同的 α 值再次考察问题 3.18，以说明一种 Katznelson-Tzafriri 型结果。我们假设 α 是一个满足以下条件的数。

$$\frac{\pi}{\alpha} = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

对于某个 $k = 1$、2、.....例如，

$$\alpha = \frac{2}{2k+1},$$

其中 k 是一个正整数。则

$$\lambda_n = \left((2\pi)^{\frac{2}{2k+1}} \cdot n^2\right)^{\frac{2k+1}{2}} \cdot e^{i\cdot\frac{2k+1}{2}\pi}$$

$$\lambda_n = \pm i2n^{(2k+1)}\pi = 2mi\pi,$$

其中 $m \in \mathbb{N}^*$。

因此，假设 $f(\cdot)$是渐近 1-周期，根据定理 3.9，如果 $u \in BCU(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$是方程 (3.20) 的渐近温和解，则 u 必须是渐近 1-周期。

References

1. W. Arendt, C. J.K. Batty. 一阶和二阶柯西问题的几乎周期解。 *J. Differential Equations*, 137 (1997), 363-383. 2. W. Arendt, C.J.K Batty, M. Hieber, F. Neubrander. 向量值拉普拉斯变换与柯西问题。第二版。数学专著，96。比克豪泽出版社/施普林格出版社巴塞尔股份公司，巴塞尔，2011。 3. B. Baeumer, M.M. Meerschaert, and E. Nane. 布朗运动从属过程与分数阶柯西问题。 *Trans. Am. Math. Soc.*, 361 (2009), 3915-3930. 4. A. G. Baskakov. 巴拿赫空间上幂有界算子及有界算子半群的调和分析与谱分析。（俄文） *Mat. Zametki* **97**(2015), no. 2, 174–190；译文见 *Math. Notes*, **97** 2015 164 178 ( ), - . C. J. K. Batty, J. van Neerven, F. Rabiger, 局部谱与一致有界C0半群的单个轨道稳定性。 *Trans. Amer. Math. Soc.* **350** (1998), no. 5, 2071-2085. 6. E. Bazhlekova. “巴拿赫空间中的分数阶演化方程”。论文，埃因霍温理工大学，2001。7. Ph. Clement, G. Gripenberg, and S.-O. Londen. 分数阶导数方程的 Schauder 估计。 *Trans. Am. Math. Soc.*, 352 (2000), 2239-2260. 8. E. Cuesta. 分数阶积分微分方程解的渐近行为及若干时间离散化方法。 *Discrete Contin. Dyn. Syst.*(增刊) (2007), 277-285. 9. S.D. Eidelman and A.N. Kochubei. 分数阶扩散方程的柯西问题。 *J.Differential. Equations*, 199 (2004), 211-255.

10. K-J. Engel, R. Nagel, "*One-parameter semigroups for linear evolution equations*"。S. Brendle、M. Campiti、T. Hahn、G. Metafune、G. Nickel、D. Pallara、C. Perazzoli、A. Rhandi、S. Romanelli 和 R. Schnaubelt 参与撰写。数学研究生教材，194。施普林格出版社，纽约，2000。11. R. Hilfer. "分数阶微积分在物理学中的应用"。世界科技出版公司，里弗埃奇，新泽西州，2000。12. Y. Hino, T. Naito, Nguyen Van Minh; J.S. Shin. "巴拿赫空间中的微分方程几乎周期解"。稳定性与控制：理论、方法与应用，15。泰勒与弗朗西斯出版集团，伦敦，2002。13. Y. Katznelson, L. Tzafriri. 关于幂有界算子。 *J. Funct. Anal.*, 68 (1986), 313–328. 14. V. Keyantuo, C. Lizama, M. Warma. 时间分数阶波动方程解的存在性、正则性与表示。 *Electron. J. Differential Equations*, 2017, 论文编号 222，42 页。15. A.A. Kilbas, H.M. Srivastsava, and J.J. Trujillo. "分数阶微分方程理论与应用"。北荷兰数学研究丛书，第204卷。爱思唯尔科学出版社，阿姆斯特丹，2006。16. C. Lizama, G. M. N'Guerekata. 抽象分数阶微分方程的温和解。*Applicable Analysis*, 92 (2013), 1731-1754. 17. C. Lizama, G. M. N'Guerekata. 巴拿赫空间中半线性积分微分方程的有界温和解。 *Integr. Eqns Oper. Theory*, 68 (2010), 207-227. 18. Vu Trong Luong, Nguyen Van Minh. 多项式有界解及其在微分方程中的应用：一种简单的谱理论。 *Semigroup Forum*, 102 (2021). 456-476. 19. Vu Trong Luong, Do Van Loi, Nguyen Van Minh, Hideaki Matsunaga. 周期演化方程渐近周期解的 Massera 定理。 *J. Differential Equations*, 329 (2022). 371-394. 20. J. Massera. 微分方程组周期解的存在性。 *Duke Math.J.*, 17 (1950), 457-475. 21. Nguyen Van Minh. 离散系统单个轨道的渐近行为。 *Proc. Amer.Math. Soc.* ,137 (2009), 3025-3035. 22. Nguyen Van Minh, H. Matsunaga, Hideaki, Nguyen Duc Huy, Vu Trong Luong, 一类关于差分方程及其应用的 Katznelson-Tzafriri 型定理。 *Proc. Amer. Math. Soc.* **150** (2022), 1105-1114. 23. Nguyen Van Minh; G. N'Guerekata, S. Siegmund, 周期演化方程的圆谱与有界解。 *J. Differential Equations*, 246 (2009), 3089-3108. 24. T. Naito, Nguyen Van Minh, Jong Son Shin. 演化方程几乎周期解的新谱判据。 *Studia Math.*, 145 (2001), 97-111. 25. J. van Neerven. "线性算子半群的渐近行为"。算子理论：进展与应用，88。比克豪泽出版社，巴塞尔，1996。26. J. Pr¨uss. "演化积分方程及其应用"。数学专著，87。比克豪泽出版社，巴塞尔，1993。27. Y. Zhou, F. Jiao, (2010), 分数阶中性演化方程温和解的存在性, *Comp. Math. Appl.*, 59(2010), 1063-4475. 28. R.-N. Wang, D.-H. Chen, and T.-J. Xiao. 几乎扇形算子下的抽象分数阶柯西问题。 *J. Differential Equations*, 252 (2012), 202-235.

VNU University of Education, Vietnam National University at Hanoi, 144 Xuan Thuy, Cau Giay, Hanoi, Vietnam*Email address*: vutrongluong@gmail.com

VNU University of Education, Vietnam National University at Hanoi, 144 Xuan Thuy, Cau Giay, Hanoi, Vietnam*Email address*: huynd@vnu.edu.vn

Department of Mathematics and Statistics, University of Arkansas at Little Rock, 2801 S University Ave, Little Rock, AR 72204, USA*Email address*: mvnguyen1@ualr.edu

Faculty of Foundations, Hai Duong University, Hai Duong City, Vietnam*Email address*: uhdviennguyen.edu@gmail.com