arXiv:2304.04851v1 [math.AP] 10 Apr 2023

# 与斯图姆–刘维尔算子相关的退化傅里叶变换

A. V. Gorshkov

大多数已知的与数理物理方程相关的傅里叶变换都具有平凡核，并且满足反演公式和帕塞瓦尔等式。换言之，积分变换定义中涉及的特征函数系是完备的。

然而，在某些情况下，除定义该变换的连续谱部分外，微分算子还可能包含一组特征函数 $\{e_k\}$，此时帕塞瓦尔等式的形式为

$$\|f\|^2 = \|F[f]\|^2 + \sum_k (f, e_k)^2, \tag{1}$$

其中 $\{e_k\}$ 成为 $F$ 的核的元素。在这种情况下， $F$ 将称为退化变换。

例如，正弦傅里叶变换

$$\hat{f}(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sin(\lambda s) f(s) ds$$

是基于 $A = d^2/dx^2$ 在 $L_2(0,\infty)$ 中满足狄利克雷条件 $f(0) = 0$ 的特征函数。该算子的谱是连续的，并覆盖整个负半轴：$\sigma_c = (-\infty, 0]$。这种变换并不退化，其反演公式的形式为

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin(\lambda x) \left( \int_0^\infty \sin(\lambda s) f(s) ds \right) d\lambda.$$

函数 $\varphi(x,\lambda) = \sin(\lambda x)$ 是广义特征函数（即不属于算子定义所在的主空间 $L_2(0,\infty)$）：

$$\partial_{xx}\varphi(x,\lambda) = -\lambda^2 \varphi(x,\lambda).$$

类似地，具有诺伊曼条件的同一算子会生成余弦傅里叶变换。然而，对于具有罗宾边界条件 $f'(0) + af(0) = 0$with $a > 0$ 的该算子，除了广义特征函数外，还包含一个普通特征函数 $e^{-ax}$ ，其特征值为 $a^2$。其谱由连续部分 $\sigma_c = (-\infty, 0]$ 和特征值 $\lambda = a^2$ 组成。由该算子生成的傅里叶变换将具有非平凡核，其中包含这个函数（例如参见 [1]）。然而，带有 $a > 0$ 的混合边界条件属于非物理情形，通常不在微分方程中考虑。

Anot她关于一族具有退化变换的算子的重要例子 e

$$\Delta_k = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{k^2}{r^2},\ k \in \mathbb{R}.$$

对于整数 $k$，这些算子是拉普拉斯算子关于极坐标中角变量进行傅里叶级数分解后得到的傅里叶系数。

这些具有混合边界条件的算子

$$r_0 \frac{\partial w(t,r)}{\partial r}\Big|_{r=r_0} \pm k w(t, r_0) = 0$$

除了连续谱 $\sigma_c = (-\infty,0)$ 外，还具有一个特征值 $\lambda = 0$，它来自 $\Delta_k$ 的核（这里 $r_0 > 0$ 是一个固定数，可以视为圆的半径）。来自核的特征函数为 $1/r^{\pm k}$（对于 $k$ 的某些取值）。它们还产生了一种退化变换，这是韦伯积分变换的推广，其性质已由作者在 [2] 中进行了研究。

这些变换作为退化变换，已在数学物理学中得到应用。借助它，作者获得了圆外部斯托克斯问题的一个解（见 [3]）。这一切证实了这类退化变换的重要性：它们不仅对函数论具有重要意义，而且也具有重大的实际应用价值。

设定义在半轴 $x \in (0,\infty)$ 上的 Sturm-Liouville 算子 $Af(x) = f'' - q(x)f$，具有谱 $\sigma(A)$，该谱由连续部分 $E \subset \mathbb{R}$ 和至多可数个有限重数的特征值 $\{\lambda_k\}$ 组成，其特征函数为 $\{e_k\}$。众所周知 ([1][4])，若 $q(x)$ 在 $\mathbb{R}_+$ 上连续，则存在广义特征函数 $\varphi(x,\lambda)$，它们确定傅里叶变换。

$$F[f] = \int_0^\infty \varphi(x,\lambda) f(x) dx,\ A\varphi(x,\lambda) = \lambda\varphi(x,\lambda).$$

同时，存在一个谱函数 $\rho(\lambda)$，使得 $F[f]$ 属于带权重 $\rho(\lambda)$的空间 $L_2$： $F[f] \in L_2(E,\rho(\lambda))$。

**定义1**。 将函数 $\varphi(x,\lambda)$ 称为正交归一函数，记作 $(\varphi(\cdot,\lambda)\ \varphi(\cdot,\zeta)) = \delta(\lambda-\zeta)$，如果

$$\hat{f}(\lambda) = \int_0^\infty \varphi(x,\lambda) \left( \int_E \varphi(x,\zeta) \hat{f}(\zeta) d\rho(\zeta) \right) dx \tag{2}$$

$\hat{}$ $\hat{}$对于任意函数 $f(\lambda)$形如 $f(\lambda) = F[f(\cdot)](\lambda),\quad f(x) \in L_2(\mathbb{R}_+)$。

根据定义，对 $\hat{}f(\lambda)$ 形式地应用 $\delta$ 函数 $\delta(\lambda-\zeta)$ 即可得出等式。

定义 *2.* 我们称 $\{\{\varphi(\cdot,\lambda)\},\{e_k\}\}$ 是算子 $A$ 的特征函数完备正交系，如果 $(\varphi(\cdot,\lambda)\ \varphi(\cdot,\zeta)) = \delta(\lambda-\zeta)$, $(\varphi(\cdot,\lambda)\ e_k)_{L_2(\mathbb{R}_+)} = 0$, $(e_k, e_j)_{L_2(\mathbb{R}_+)} = \delta_{k,j}$ 对任意 $\lambda,\zeta \in E$、任意特征函数 $e_k$, $e_j$，且帕塞瓦尔等式 *(1)* 成立。

条件 $(\varphi(\cdot,\lambda)\ e_k)_{L_2(\mathbb{R}_+)} = 0$ 表示 $F$ 是退化变换，即$F[e_k] = 0$。

**定理 1.**设*Sturm-Liouville* 算子 $A$是强连续半群 $e^{tA}$ 在 $L_2(0,\infty)$中的生成元；其谱为实数、有上界，由连续部分和至多可数的特征值集合 $\{e_k\}$组成，并且预解式满足估计 $\|R(A,\lambda)\| \le C/\lambda$，其中某个 $C > 0$。那么，其特征函数系构成一个完备正交归一系，并且以下反演公式成立：

$$f(x) = \int_E \varphi(x,\lambda) \left( \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(s,\lambda) f(s) ds \right) f(x) d\rho(\lambda) + \sum_k (f, e_k) e_k. \tag{3}$$

证明。 考虑 $L_2(\mathbb{R}_+)$ 中的边值问题：

$$\partial_t y(t,x) - Ay = 0, y(0,x) = f(x).$$

利用定理条件下关于预解式 $R(A,\lambda)$ 的估计，该方程的解 $y(t,x) = e^{tA}$ 的可以由公式给出

$$y(t,x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma e^{\lambda t} R(A,\lambda) f(x) d\lambda,$$

其中，围道 $\gamma$ 覆盖算子 $A$ 的实谱。在无界谱的情况下， $\gamma$ 是扇形区域 $S_{a,\theta}=\{\lambda\in\mathbb{C},\ |arg(\lambda-a)|>\theta\}$，其中某些 $a>0$、$\theta\in(\frac{\pi}{2},\ \pi)$。

预解式在集合 $E$ 上存在间隙，而点 $\lambda_k$ 是其极点。积分

$$P_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-\lambda_k|=\varepsilon}R(A,\lambda)d\lambda$$

当 $\varepsilon$足够小时，它是映射到特征子空间 $E_k$ 上的有限维投影算子（见[5]）。然后，解具有以下形式:

$$y(t,x)=\frac{1}{2\pi i}\int_E e^{\lambda t}\left(R(A,\lambda-i\cdot 0)-R(A,\lambda+i\cdot 0)\right)f(x)d\lambda+\sum_k e^{\lambda_k t}(f,e_k)e_k.$$

最后一个等式中的积分定义了广义特征子空间 [1] 上的一族投影算子，并且可以用特征函数 $\varphi(x,\lambda)$ 表示，从而得到 $y(t,x)$ 的最终公式:

$$y(t,x)=\int_E e^{\lambda t}\varphi(x,\lambda)\left(\int_{\mathbb{R}_+}\varphi(s,\lambda)f(s)ds\right)f(x)d\rho(\lambda)+\sum_k e^{\lambda_k t}(f,e_k)e_k. \tag{4}$$

让我们证明反演公式(3)。然后即可得到特征函数的完备性。由于 $A$ 是强连续半群 $e^{tA}$ 的生成元，因此 $y(t,\cdot)\to f(x)$ 在 $t\to 0$ 处强收敛。如果连续谱 $E$ 的集合有界，那么允许在 (4)中积分号下取 $t\to 0$ 处的极限，从而反演公式得证。如果 $E$ 无界，那么我们必须证明在 $t\to 0$处极限过渡的合理性。只需证明等式(4)的积分部分中的极限过渡有效即可。让我们证明在 $t\to 0$ 处的弱收敛:

$$y(t,x)\rightharpoonup\int_E\varphi(x,\lambda)\left(\int_{\mathbb{R}_+}\varphi(s,\lambda)f(s)ds\right)f(x)d\rho(\lambda)+\sum_k(f,e_k)e_k.$$

取任意的 $g\in C_0^\infty(r_0,\infty)$。则 $\hat{}g(\lambda)=F[g(\cdot)](\lambda)$ 将根据 $\lambda$ 快速衰减。以下结论成立

**命题1**。对于任意的 $g\in C_0^\infty(r_0,\ \infty)$，有 $\lambda\hat{}g(\lambda)\in L_2(E,\ \rho(\lambda))$。

证明。由于 $A\varphi=\lambda\varphi$，因此

$$\hat{g}(\lambda)=\int_0^\infty\varphi(x,\lambda)g(x)dx=\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty A[\varphi(x,\lambda)]g(x)dx=\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty\varphi(x,\lambda)A[g(x)]dx.$$

由于 $A[g(x)]\in L_2(\mathbb{R}_+)$，因此 $\int_0^\infty\varphi(x,\lambda)A[g(x)]dx\in L_2(E,\rho(\lambda))$，命题得证。

□

记 $F^*[\hat{}g(\cdot)](x)=\int_E\varphi(x,\lambda)\hat{}g(\lambda)d\rho(\lambda)$。则

$$\left(F^*\left[e^{\lambda t}F[f]\right],g(\cdot)\right)_{L_2(\mathbb{R}_+)}=\left(e^{\lambda t}F[f],F[g]\right)_{L_2(E,\rho(\lambda))}=\left(e^{\lambda t}\hat{f}(\lambda),\hat{g}(\lambda)\right)_{L_2(E,\rho(\lambda))},$$

其中 $\hat{}f(\lambda)=F[f](\lambda)$，$\hat{}g(\lambda)=F[g](\lambda)$。

积分余项

$$\int_{-\infty}^L\left|e^{\lambda t}\hat{f}(\lambda)\hat{g}(\lambda)\right|d\rho(\lambda)\le\int_{-\infty}^L\left|\hat{f}(\lambda)\hat{g}(\lambda)\right|d\rho(\lambda)\le\|\hat{f}(\lambda)\|_{L_2(-\infty,L)}\|\hat{g}(\lambda)\lambda\|_{L_2(-\infty,L)}$$

在 $L \to -\infty$ 上关于 $t$ 一致收敛于零。因此，我们证明了在 $t \to 0$ 处过渡的有效性：

$$\left(e^{\lambda t}\hat{f}(\lambda), \hat{g}(\lambda)\right)_{L_2(E,\rho(\lambda))} \to \left(\hat{f}(\lambda), \hat{g}(\lambda)\right)_{L_2(E,\rho(\lambda))}.$$

根据弱极限的唯一性，并考虑到 $y(t,\cdot) \to f(\cdot)$，反演公式几乎处处成立

$$f(\cdot) = F^*\left[F[f]\right] + \sum_k (f, e_k)e_k, \tag{5}$$

这与公式（3）相同。

我们来证明 $e_k \in Ker(F)$:

$$\int_0^\infty \varphi(x,\lambda)e_k(x)dx = \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty A[\varphi(x,\lambda)]e_k(x)dx = \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty \varphi(x,\lambda)Ae_k(x)dx$$
$$= \frac{\lambda_k}{\lambda}\int_0^\infty \varphi(x,\lambda)e_k(x)dx,$$

这意味着 $F[e_k] = 0$。

正交条件 (2)可由反演公式 (5) 得出，方法是将变换 $F$ 应用于后者：

$$\hat{f} = F\left[F^*\hat{f}\right].$$

帕塞瓦尔等式 (1)根据 $\{\{\varphi(\cdot,\lambda)\},\{e_k\}\}$ 的正交归一性，由反演公式 (3) 得出。定理得证。

□

# 参考文献


[1] Titchmarsh E.C.与二阶微分方程相关的特征函数展开，第一部分。克拉伦登出版社，牛津；1946年。

[2] Gorshkov A.V. 具有非零核的特殊韦伯变换。数学札记，114:2，2023年。

[3] GorshkovA.V.相关韦伯-奥尔变换、毕奥-萨伐尔定律及圆盘外二维斯托克斯系统解的显式形式。《数学与流体力学杂志》2019年；21:41。

[4] Levitan B.M.：关于二阶自伴微分方程的谱函数的渐近行为。《苏联科学院通报·数学系列》16，325-352（1952年）

[5] Kato T. 线性算子的扰动理论，施普普林格出版社，柏林-海德堡- 纽约。1966年。



**A. V. Gorshkov**
莫斯科国立大学力学与数学系。电子邮件:
alexey.gorshkov.msu@gmail.com