arXiv:2304.04853v1 [physics.flu-dyn] 10 Apr 2023

一种用于研究黏性液体上初生风成波演变的 VOF-RANS 联合方法

Florent Burdairon[a], Jacques Magnaudet[a,*]

[a]图卢兹流体力学研究所（*IMFT*），图卢兹大学´，法国国家科学研究中心，图卢兹，法国

摘要

近期实验室实验表明，通过将承载液体的黏度改变数个数量级，可以深入认识风驱动表面波生成所涉及的重要物理过程。本文介绍一种配套方法的开发，旨在通过数值模拟研究类似现象；这种方法有望消除部分实验局限，尤其是界面附近区域的局限，并能够通过任意忽略或关闭某些物理过程，评估多个过程的相对影响。在回顾现有方案后，我们选择了一种结合流体体积法与二维雷诺平均纳维–斯托克斯方程的方法：前者用于追踪气液界面的演变，后者则配以湍流模型，以预测两种流体中的速度场和压力场。我们考察了这种非定常二维表述在形式和物理框架上的适用性，并采用单方程Spalart-Allmaras模型封闭控制动量方程，该模型直接求解涡黏度的输运方程。为此，我们假设相对于空气中的湍流脉动，界面表现为刚性壁面，并实现了一种通用算法，用于计算到界面的局部距离，不受界面形状限制。首先，我们在波状刚性壁面上的未分离流和分离流等单相构型中评估该模型的性能；这些构型与风浪生成密切相关。随后，我们讨论两相模拟中采用的初始化方案，该方案在界面位置施加具有白噪声分布的脉冲扰动。最后，我们展示了不同风速和不同黏度液体条件下获得的一些界面演变示例，并结合界面扰动统计、流线分布和能谱，讨论其中揭示的物理机制。

关键词： 风浪生成，气液界面，数值模拟，流体体积法，湍流模型 el

1. 引言

一个多世纪以来，理解和预测吹过液体表面的风如何在其表面生成波浪，以及波场又如何反过来改变该表面上方、甚至可能是下方的湍流运动，一直是海洋学家和流体力学家面临的挑战[1；2； 3]。湍流如何影响甚至支配风浪生成过程中涉及的物理机制，至今仍存在争议，尽管试图阐明这些机制的两种奠基理论如今已有三分之二个世纪的历史。在其中第一种理论中，Phillips [4]探讨了湍流边界层中的压力波动与该表面的自由变形模态之间可能发生共振。这一机制会导致表面变形的线性增长，后续测量结果表明，它可能适用于描述风生波增长的极早期阶段 [5]。与此同时，Miles [6]发展了一种无黏理论，其中表面变形按照二维线性失稳机制增长，从而导致指数增长。在该理论的原始版本中，湍流的唯一作用是在边界层中建立对数平均速度剖面，这会在液体表面产生平均剪切应力。稍后，Miles 在多个方面改进了其初始模型，其中考虑了黏性修正的影响等因素。

*通讯作者电子邮箱地址： florent.burdairon@imft.fr (Florent Burdairon), jmagnaud@imft.fr (Jacques Magnaudet)

预印本已提交至《欧洲力学杂志—*B*辑/流体》 *2023*年*4*月*12*日

气流 [7], 以及弱黏性液体中表面黏性应力 [8], 的作用，他证明后者在毛细波和短重力波的生成过程中具有重要意义。后来，最初受到Lighthill对Miles的一般性失稳机制以“涡力” [9], 形式重新诠释的启发，人们开展了多项研究，试图将波浪诱导的湍-流应力对气流向波浪的能量传递的影响纳入考虑 [10；11；12；13；14； 15]。借助各种闭合模型进行建模的湍流应力被证明会显著增-加这种传递。对于短波，预测的增长率与实验数据呈现出合理的、尽管取决于闭合模型的吻合，但对于长波，其对波浪增长的预测却始终严重不足。

显然，迄今为止大多数理论发展和实验测量都集中于气-水系统。然而，研究黏度更高的液体同样具有极其重要的意义。首先，这为现有理论模型提供了严格的检验。例如，超过该风速后波开始产生并传播的最小风速会随液体黏度的增加而显著升高 [16；17； 18],而一致的模型必须准确预测这一增幅。其次，最近已有研究表明，在黏度达到水的数百倍的液体表面，会形成特定的“黏性孤子”波 [19]。从自由表面流中图案形成的角度来看，理解其潜在机制，以及从规则波列向这类黏性孤子的过渡是如何发生的，显然具有重要意义 [20]。从方法论角度看，与水相比，黏性液体可能是检验二维理论预测的更佳对象，因为气流对流体粒子的卷吸在此类液体中更加困难，从而使表面不易产生由小尺度三维湍流驱动的运动。

迄今为止，致力于研究黏性液体表面风浪生成的少数研究均属于实验性质。高精度光学技术在检测微小界面变形方面发挥了重要作用，而粒子图像测速则详细获取了垂直平面内的瞬时速度场，这些平面同时位于气相和液体中，但位于变形界面波谷与波峰之间的两相区域除外。在气-水系统中，数值模拟已被证明能够有效补充为揭示两种流体之间相互作用细节而开展的实验室测量，尤其是在难以进行准确测量的关键两相区域内。

几乎无法实现。本文报告了类似方法在任意黏度液体表面风浪生成问题中的发展与应用。本文主要旨在逐步介绍相应计算策略的构建过程。因此，本文基本上属于方法论研究，提供的是“概念验证”，而非对结果的物理讨论。对这些结果的全面展示以及对其背后物理过程的详细讨论，将留待后续论文发表。

本文结构如下。第2节讨论过去几十年间，以及近几年为模拟风致表面波演化而开发的各种计算策略。第3节说明本研究采用的建模框架，并讨论其潜力与固有局限。第4节详细介绍本方法所考虑的控制方程，包括湍流模型。第5节讨论数值框架，以及在本文关注的两相流构型中使用该湍流模型所涉及的具体问题。第6节展示并分析湍流模型在与风浪生成直接相关的单相构型中的表现，尤其是流体流经刚性波状壁面的情形。最后，第7节考察与黏性液体上风浪生成问题相关的典型两相构型。我们详细说明初始化方案——这是该问题中的关键环节，并展示一些典型的流动演化过程。第8节总结本研究的主要发现。

2. Review ofavailable modelling strategies

模拟风生表面波的演化面临重大的数值困难。事实上，这种情况既需要跟踪气液界面的变形（以及可能发生的拓扑变化），又需要模拟高雷诺数的湍流气流。迄今为止，大多数数值尝试通过使用坐标变换来处理第一个问题，借助这种变换，随时间演化的界面被映射到一个平面上。通常，所采用的变换仅作用于垂直坐标，因此变换空间中的三个坐标不再彼此正交。由于这一原因，动量方程中会出现许多附加项 [22；23；24；25；26； 27]。如果只关注波浪发展的最初阶段，则需要在界面处满足的边界条件，即不可穿透（或运动学）条件，

与速度和应力的连续性条件（后者包括静水压力和毛细力的贡献）可以一并线性化，并投影到未变形的界面上，从而避免上述坐标变换 [28； 29]。当然，这两种方法都假设界面始终是单值的，因此无法处理涉及破碎波的情形。最近，人们开始探索另一条途径，即考虑体积流体（VOF）方法及其一些变体所提供的可能性 [30；31； 32]。VOF方法通常用于涉及液滴和气泡的两相流。在这种表述中，整个流场计算域内求解一组控制方程；局部流体属性（即密度和黏度）以及毛细力，则通过计算其中一种流体局部体积分数随时间的演变来确定。该方法的主要优点是无需再使网格随界面的瞬时位置变化而调整，因此可以采用控制方程的笛卡尔形式。难点则转移到了数值格式的稳健性和精度上，这些格式需要（i）确保各流体的体积守恒；（ii）处理界面区域内物理属性（进而速度梯度）的极大梯度。尽管如此，过去二十年来，这些技术方面已取得重大进展。因此，本研究采用了这种方法。

第二个问题是，能够在液体表面产生波浪的气流必然是湍流。在气-水系统中，当主体区域的风速超过约 1.5 $m.s^{-1}$[5], 时，便可观察到微小的三维表面变形；而超过约 3.6 $m.s^{-1}$ [18]的临界风速则会直接产生规则的二维波浪。更常见的是，风浪生成相关的气流特性用摩擦速度表示，即界面处剪切应力（除以空气密度）的平方根，u^*。上述两个阈值分别对应$u^* \approx 0.07$ $m.s^{-1}$ 和$u^* \approx 0.18$ $m.s^{-1}$。最先进的直接数值模拟 [27； 32]所处理的摩擦速度约为 0.1 $m.s^{-1}$，这种方法看起来非常适合深入了解波浪生成机制中涉及的过程。然而，处理黏度远高于水的液体，会带来严格得多的要求。例如，只有当气流速度超过 $\approx 8 m.s^{-1}$时，黏度为水一百倍的液体表面才会形成二维波浪，也就是说，其临界摩擦速度约为 $u^* = 0.35$ $m.s^{-1}$。因此，与气-水系统相比，这种系统的临界条件相差 4 倍；这意味着，为了求解空气中从大尺度到 Kolmogorov尺度的全部湍流运动，所需的网格点数量将相差 $4^{9/4} \approx 23$ 倍。尽管如今进行如此大规模的模拟并非遥不可及，但成本仍然极高，无法以合理的成本对该问题开展参数研究。

一个颇具吸引力的替代方案是采用大涡模拟（LES）。一些研究团队已广泛采用这种方法，并将其与上文讨论的坐标变换技术结合起来。这类相位解析大涡模拟已用于给定波浪之上，无论这些波浪是周期性的 [33； 34], 还是以宽带谱 [35]或波包 [36]形式分布的。在最近的研究中，LES被用于求解湍流气流，而势流求解器则用于随时间推演波列，并在相应时刻将从LES流场导出的表面压力分布输入其中 [26]。 [37]给出了一篇近期综述，介绍了LES方法中采用的各种数值技术和亚格子尺度模型，以及这些技术和模型在理解风浪耦合方面取得的进展。该综述指出，LES尚未与VOF方法结合使用。文中没有讨论其原因，但原因其实很容易理解。事实上，在交替充满液体和空气的区域中对亚格子尺度传递进行建模是一项艰巨任务，因为与单相湍流相比，滤波动量方程包含许多不同的二阶和三阶未知关联项，必须为这些关联项制定适当的封闭定律 [38]。

几十年来，人们一直采用一种较简单的方法来处理由给定二维周期波所扭曲的气-水界面。该方法使用在随波移动的参考系中表达的雷诺平均纳维–斯托克斯方程，并结合一种现象学湍流闭合模型，将雷诺应力张量的相关分量与流场的局部特征联系起来。为此，人们采用了一系列湍流模型，从最简单的零方程混合长度模型 [39], 到最复杂的五方程雷诺应力模型 [39; 40; 41], 通过一方程模型则将湍动能输运方程与预先给定的湍流积分长度尺度分布相结合 [41; 42]。这种方法面临的一个重要问题是界面处的边界条件。虽然假设雷诺平均速度的各分量在水面处分别与相应的轨道速度分量相匹配，但对于湍流未知量则采用现象学边界条件。在上述文献中，这些条件以如下假设为依据：界面上方的对数区域存在对数速度剖面，且湍流能量产生与耗散处于局部平衡。

每个雷诺平均速度分量都假设在水面处与相应的轨道速度分量相匹配，而湍流未知量则采用现象学边界条件。在上述文献中，这些条件以如下假设为依据：界面上方的对数区域存在对数速度剖面，且湍流能量产生与耗散处于局部平衡。这种“壁面函数”方法的显著优点是，无需在界面附近使用高度细化的网格，从而降低了总体计算成本；对于处理已充分发展的表面波，该方法似乎也很适用。相反，一旦涉及预测小振幅界面变形的演化，它便构成雷诺平均方法的主要局限之一，因为此时预期界面上方黏性底层和缓冲层中的湍流应力局部特征及纵向分布会发挥重要作用 [13; 14; 43]。因此，在这种情况下，必须采用允许在界面处直接对湍流量施加“自然”边界条件的湍流模型。

3. 建模框架

在下文中，我们采用上述雷诺平均框架来表示气液界面上方、可能也包括界面下方的湍流效应，并结合一种在界面处满足“自然”条件的湍流模型；界面的演化则采用 VOF方法进行追踪。乍看之下，在通过雷诺平均方法表示湍流效应的同时，考察非周期性、随时间变化的界面变形，似乎自相矛盾。其核心问题在于如何区分湍流脉动与轨道速度和压力脉动；在非周期性三维波场中，这是一项极其复杂的任务 [44；45； 46]。这里，“轨道”指由界面任何法向位移所引起或与之相关的脉动。显然，如果这两种成分之间存在明确的时间尺度分离，上述问题便会大大简化，因为届时可以在针对中间时间尺度进行平均的控制方程框架内，研究在“长”时间尺度上演化的波对涵盖一系列“短”时间尺度的湍流脉动所作出的响应。然而，这一颇具吸引力的框架遗憾地并不适用，因为风生界面变形的特征时间尺度通常与湍流运动涉及的时间尺度相重叠 [12]。因此，只有引入一种大幅简化的假设，才能实现严格且一致的分离通过引入一个极为简化的假设实现。

在下文中，我们假设界面位移是二维的，即发生在（x，z）平面内；而湍流脉动当然是三维的，也就是说，它们同时取决于局部位置 $\mathbf{X}$ = （x，y，z）和时间t。在这一假设下，任意量 Φ（$\mathbf{X}$，t）都可以分解为以下形式

$$\Phi(\mathbf{X},t) = \langle\Phi\rangle(\mathbf{x},t) + \Phi'(\mathbf{X},t)\,, \tag{1}$$

其中，算子 $\langle\cdot\rangle$ 表示沿展向（y）进行空间平均，$\mathbf{x}$ = (x,z)是局部位置在竖直平面上的投影，而 Φ' ($\mathbf{X}$,t)表示 Φ的湍流脉动。根据这一数学定义，$\langle\Phi\rangle$ 和 Φ' 互不相关，因此$\langle\langle\Phi\rangle\Phi'\rangle \equiv 0$。上述假设已由 Miles [10], 采用，它还意味着，与界面瞬时位置直接相关的量不具有湍流分量。在VOF方法的框架中，借助其中一种流体的体积分数（例如C）来定义该位置。界面的几何特性，例如其局部单位法向量$\mathbf{n}$和平均曲率 $\kappa = \nabla\cdot\mathbf{n}$，也分别通过$C$ 的一阶和二阶导数，以$\mathbf{n} = \nabla\mathbf{C}/\|\nabla\mathbf{C}\|$ 和 $\kappa = \nabla\cdot\mathbf{n}$的形式定义。类似地，两相介质的局部密度和黏度仅取决于 C，并可能取决于其梯度。基于上述原因，C 及上述几何或物理特性都不具有湍流分量。因此，例如，

$$C(\mathbf{X},t) \equiv \langle C\rangle(\mathbf{x},t)\,, \tag{2}$$

使得 $\langle C\Phi\rangle = \langle\langle C\rangle\Phi\rangle = \langle C\rangle\langle\Phi\rangle$。上述假设的主要优点是，基于应用算子 $\langle\cdot\rangle$ 得到的平均纳维–斯托克斯方程与经典不可压缩雷诺平均方程相似。特别是，湍流仅通过二阶相关张量 $\langle u'u'\rangle$ 出现，其中 $u(X,t) = \langle u\rangle(x,t) + u'(X,t)$ 为局部流体速度。如有需要，可通过在适当距离上对所关注的物理量进行积分来定义 x 平均量，下文以带上横线表示；该距离必须远大于 C 的谱中存在的最低波数。这些平均量仍然取决于z 和t，例如 $\Phi(z,t)$，而差值 $\langle\Phi\rangle(x,t) - \Phi(z,t)$ 表示 Φ的轨道贡献。 $\overline{\overline{}}$

显然，上述简化假设严重降低了相应框架所能研究的物理情形的普适性。尤其是，它阻碍了对纵向条带发展以及

在低风速和/或短风区内使气-水界面发生变形的三维微小“皱纹”的研究；这些皱纹可被视为二维波的前兆 [5；18；47； 48]。更广泛地说，它排除了考察本质上三维的 Phillips 机制[4]相关性的任何可能性。尽管存在这些严格限制，所提出的方法仍颇具吸引力，因为它有望用于探索界面的二维演化，并将其与 Miles 失稳机制[6；7；9； 49]联系起来。事实上，该失稳情景考虑的是二维界面 $z = \eta(x,t)$ 的演化；该界面承受的压力和剪切应力分布源自气流中由边界层内的湍流运动所形成的给定 $\mathbf{u}(z)$-速度剖面。在雷诺平均动量方程框架下运行的湍流模型，正是为预测相应的平均剪切而设计的。在 Miles 建立其最初的“准层流”理论 [6], 之后，人们重新考察了波浪诱导的（或按本文术语称为“轨道”）湍流应力在波浪增长中的作用 [14； 50] 并发现，在年轻波浪的增长过程中，这种作用的效率超过了原始机制 [51]。在上述框架下，同样可以评估这种影响。因此可以预期，只要采用合适的湍流模型，这一路径就能为理解 Miles 机制及其变体在任意黏度液体表面生成风浪过程中的效率和相关性提供有价值的新见解。

4. 控制方程与湍流模型

原则上，采用雷诺应力模型求解四个分量$\langle u'^2\rangle$、$\langle v'^2\rangle$、 $\langle w'^2\rangle$、 $\langle u'w'\rangle$ 的输运方程，以及至少一个与积分长度尺度相关的额外标量量（例如耗散率），是理想的。实际上，这类模型旨在考虑非局部和非平衡效应；当空气-液体界面发生变形时，预计这些效应会在其上方边界层的外部区域发生 [14； 15； 43]。然而，为耗散率或任何其他相关尺度定义量的输运方程设计适当的近界面修正远非显而易见，这一困难大多数时候是通过采用“壁面函数”方法来规避的。出于这一原因，我们在此没有保留这类模型，而是选择了简单得多的单方程涡黏度模型。正如后文将展示的，尽管存在若干缺陷，这该模型准确再现了平均流剖面，并捕捉到本文所关注的各种状态下波状表面上方气流变化的大部分重要特征。因此，我们认为该模型是探索上述通用方法潜力的有益一步，尽管未来肯定还需要考虑更复杂的模型。

选定涡黏性闭合后，雷诺应力张量 $\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}'\rangle$ 与应变率张量 $\langle \mathbf{S}\rangle = \frac{1}{2}\left(\nabla\langle\mathbf{u}\rangle + \nabla\langle\mathbf{u}\rangle^{\mathrm{T}}\right)$ 之间的关系可表示为$\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}'\rangle = \frac{2}{3}\langle\bar{k}\rangle\mathbf{I} - 2\nu_t\langle\mathbf{S}\rangle$，其中 $\langle k\rangle = \frac{1}{2}\langle \mathbf{u}'\cdot\mathbf{u}'\rangle$为单位质量的湍动能， ν_t 为涡黏度，$\mathbf{I}$ 为单位张量。在 VOF方法框架下，雷诺平均两相流随后由平均纳维–斯托克斯方程控制

$$\partial_t C + \langle\mathbf{u}\rangle\cdot\nabla C = 0, \tag{3}$$

$$\nabla\cdot\langle\mathbf{u}\rangle = 0, \tag{4}$$

$$\partial_t(\rho\langle\mathbf{u}\rangle) + \nabla\cdot(\rho\langle\mathbf{u}\rangle\langle\mathbf{u}\rangle) = \rho\mathbf{g} - \nabla\mathcal{P} + 2\nabla\cdot[(\mu+\rho\nu_t)\langle\mathbf{S}\rangle] - \gamma\kappa\nabla C, \tag{5}$$

其中， ρ 和 μ 分别为两相流体介质的局部密度和黏度（$\nu = \mu/\rho$为运动黏度），γ 为表面张力， $\mathcal{P} = \langle P\rangle + \frac{2}{3}\rho\langle k\rangle$ 为修正压力，$\mathbf{g}$表示重力。在式 (5) 中，毛细力采用[52] 中提出的经典形式表示，界面平均曲率计算为 $\kappa = \nabla\cdot(\nabla C/\|\nabla C\|)$。局部密度和黏度通过线性关系定义。

$$\rho(C) = C\rho_l + (1-C)\rho_a, \qquad \mu(C) = C\mu_l + (1-C)\mu_a, \tag{6}$$

其中下标 l 和a 分别指液体和空气的性质。

与（3）—（5）中的所有量类似，涡黏度在整个流动计算域内定义，因此无法在界面处对其施加边界条件。因此，边界层在界面上方以及可能在界面下方的连续子区域之间的 ν_t-变化，必须直接通过 通过 湍流模型获得。这意味着，该模型必须以某种方式考虑到其与界面的距离，以便使雷诺应力在界面附近呈现适当的行为。下文中，我们认为气流将界面‘感知’为刚性壁面。更具体地说，这里假设界面处的法向速度脉动为零，因此，雷诺应力张量的非对角分量（在位于恒定 z 处的平面界面情况下为 $\langle u'w'\rangle$）在那里消失。鉴于以下事实，这一假设是合理的：(i) 湍流源自气流，

不在液体中，并且 (ii)密度比 ρ_a/ρ_l 非常小，因此气流中的法向速度脉动几乎不会使液体表面发生变形。显然，如果气流的卷吸作用足够强，并且液体的黏度足够低，液体中的流动也可能是湍流。这一点将在后文讨论。

为预测涡黏度的变化，我们选用了 Spalart-Allmaras 模型 [53]。该模型广泛应用于复杂几何形状上的高雷诺数空气动力流，直接求解涡黏度的输运方程，遵循 [54] 早期提出的方法。更具体地说，在单相壁面流中，该模型首先通过求解输运方程来确定一个辅助湍流黏度 $\tilde{\nu}_t$

$$\begin{aligned}\partial_t\tilde{\nu}_t \quad &+ \quad \langle\mathbf{u}\rangle\cdot\nabla\tilde{\nu}_t = c_{b1}f_r\tilde{\Omega}\tilde{\nu}_t - c_{w1}f_w\left[\frac{\tilde{\nu}_t}{\ell}\right]^2 \qquad (7)\\ &+ \quad \frac{1}{\sigma}\Big\{\nabla\cdot[(\nu+\tilde{\nu}_t)\nabla\tilde{\nu}_t] + c_{b2}\nabla\tilde{\nu}_t\cdot\nabla\tilde{\nu}_t\Big\}.\end{aligned}$$

在 (7) 中，ℓ 是到壁面的局部距离；Ω 表示一个正标量，在黏性区和缓冲区之外，该标量等于局部涡量大小 $\Omega = (2\,\Omega{:}\,\Omega)^{1/2}$，其中 $\Omega = \frac{1}{2}\left(\nabla\langle\mathbf{u}\rangle - \nabla\langle\mathbf{u}\rangle^{\mathrm{T}}\right)$ 为旋转率张量。(7) 中的各个函数和常数经过设定，使得在近壁区，$\tilde{\nu}_t \propto \ell$ 和 $\tilde{\Omega} \propto \ell^{-1}$ 一直延伸至壁面；详情见附录 A。然后，(5) 中涉及的涡黏度 ν_t 与 $\tilde{\nu}_t$ 通过经验阻尼函数 f_{v1} 呈线性关系，其形式为

$$\nu_t = f_{v1}\tilde{\nu}_t\,. \qquad (8)$$

函数 f_{v1} 在接近壁面时趋于 0，而远离壁面时为 1。该阻尼函数能够准确估算近壁区的湍流剪切应力，包括缓冲层和黏性底层。式 (7)–(8) 中涉及的各种经验函数和常数详见附录 A。有趣的是，在 [13], 中，Miles 曾指出，Spalart-Allmaras 模型在当时还是全新的模型，可能是研究轨道雷诺应力对风成波增长影响的理想选择。

上述模型可直接扩展至本文所关注的两相构型中的气流，前提是将 $\ell(\mathbf{x},t)$ 视为气流中任意位置（即满足 $1 - C(\mathbf{x},t) > 0.5$ 的区域内的位置）到界面的距离。ℓ 的计算将在下一节详细说明。边界层内 ν_t 的变化通过式（7）—（8）中涉及的经验函数 f_w 和 f_{v1} 获得，此外 $\tilde{}$ 还包括涡量大小 Ω 的近壁修正（见（A.2））。

如果将界面下方液体中的流动视为层流（§7.3 中讨论的示例即采用这一假设），则只需将式 (8) 扩展至整个两相流动区域，即可直接施加此条件，形式如下

$$\nu_t = (1 - C)f_{v1}\tilde{\nu}_{t>}\,, \qquad (9)$$

其中，$\tilde{\nu}_{t>}(\mathbf{x},t)$ 表示在时刻 t，所考虑的位置 $\mathbf{x}$ 位于空气中时，式 (7) 的计算解。“本构”方程 (9) 保持气流中的涡黏度不变，但将液体中的涡黏度设为零。如果液体中的流动为湍流（当风速达到每秒数米时，水中便会出现这种情况），则可轻松调整模型，以预测液体中的涡黏度。事实上，正如附录 B 中所讨论的物理原因所示，气液界面下方的湍流与刚性壁面附近的湍流表现不同。因此，液体中的湍流剪切应力随到界面的距离线性增长，即使在黏性底层内也是如此，正如 $\tilde{\nu}_t$ 在式 (7) 中的变化一样。因此，只需在式 (8) 中令 $f_{v1} \equiv 1$，就能在从界面下方接近界面时，使涡黏度以符合实际的方式衰减。在这类湍流-湍流构型中，整个两相流中的涡黏度为

$$\nu_t = (1 - C)f_{v1}\tilde{\nu}_{t>} + C\tilde{\nu}_{t<}\,, \qquad (10)$$

其中，当所考察的位置处于液体中时，$\tilde{\nu}_{t<}(\mathbf{x},t)$ 是由 (7) 计算得到的 $\tilde{\nu}_t$ 局部值，即 $C(\mathbf{x},t) > 0.5$.

5. 数值框架和具体技术

采用在 IMFT 开发的 JADIM 代码求解控制方程 (3)–(7)。该二阶有限体积代码在交错网格上求解纳维–斯托克斯方程和标量输运方程。方程以一般正交曲线坐标 [55]，表示，因此能够直接处理 §6 中部分测试案例所涉及的曲线几何形状。对流项和源项采用三阶龙格–库塔格式推进时间，而黏性项则采用半隐式克兰克–尼科尔森格式 [56]。每个时间步结束时，通过求解压力增量对应的泊松方程，将不可压缩性约束满足到机器精度。采用通量限制输运格式求解描述界面演化的方程 (3)，并将其分解为一系列一维步骤 [57]。在 (7) 中，产生项和非线性扩散

项， $\sigma^{-1}c_{b2}\nabla\tilde{\nu}_t\cdot\nabla\tilde{\nu}_t$，被视为源项，而菲克型扩散项，$\sigma^{-1}\nabla\cdot[(\nu+\tilde{\nu}_t)\nabla\tilde{\nu}_t]$，以及壁面破坏项则采用Crank- Nicolson格式处理；将此破坏项进行隐式处理有助于提高整体算法的数值稳定性。

在下文报告的所有计算中，流动均发生在一个施加了狄利克雷条件的刚性壁面上

$$\langle\mathbf{u}\rangle=\mathbf{0},\quad \tilde{\nu}_t=0, \tag{11}$$

。上边界可以是对称平面，也可以是刚性平壁。在前一种情况下，施加自由滑移条件

$$\langle\mathbf{u}\rangle\cdot\mathbf{n}_\mathbf{u}=0,\ \mathbf{n}_\mathbf{u}\cdot\nabla[\langle\mathbf{u}\rangle-(\langle\mathbf{u}\rangle\cdot\mathbf{n}_\mathbf{u})\mathbf{n}_\mathbf{u}]=\mathbf{0},\ \mathbf{n}_\mathbf{u}\cdot\nabla\tilde{\nu}_t=0 \tag{12}$$

，其中$\mathbf{n}_u$表示所考虑平面的单位法向量。在所有情况下，流动在流向（x）方向上均具有周期性。

确定湍流黏度时的一个重要问题，是计算给定位置 x 处到界面的距离 $\ell(\mathrm{x},\mathrm{t})$。对于单相壁面流，我们首先以显式参数形式建立壁面几何的表示：$\mathrm{x}_w(\mathrm{s})\equiv(\mathrm{x}_w(\mathrm{s}),\mathrm{z}_w(\mathrm{s}))$，其中 $\mathrm{ds}=(\mathrm{dx}_w^2+\mathrm{dz}_w^2)^{1/2}$ 为无穷小弧长元。随后，在壁面上改变 s（实际上是在 x 两侧流向位置 x_w 的一个“合理”有限区间内取值），计算该区间内的距离 $\ell_s(\mathrm{x})=\{(\mathrm{x}-\mathrm{x}_w(\mathrm{s}))^2+(\mathrm{z}-\mathrm{z}_w(\mathrm{s}))^2\}^{1/2}$，并令 $\ell(\mathrm{x})=\min|_s(\ell_s(\mathrm{x}))$。对于两相构型，假设界面保持单值，我们采用标准 SLIC 技术 [58]定位界面。具体而言，从计算域顶部开始，在给定 x 处沿 z 逐渐减小，检查依次遇到的网格单元中的体积分数，直到检测到第一个满足 $\mathrm{C}(\mathrm{x},\mathrm{t})>05$ 的网格单元。由此可得到所考虑横坐标处界面位置 $\mathrm{z}_i(\mathrm{x},\mathrm{t})$ 的第一近似值。然后，通过要求界面下方包围的液体体积等于体积分数场给出的体积，得到界面的精确位置 $\mathrm{z}_s(\mathrm{x},\mathrm{t})$，即

$$z_s(x,t)=z_i(x,t)+\int_{z_i}^{z_s}C(x,z',t)dz'. \tag{13}$$

然后，我们按照单相情形计算 $\ell(\mathbf{x},t)$。然而，可能会出现这种情况，尤其是在长时间运行中，界面不再保持单值，因为某些波分量可能发生倾覆。在这种情况下，上述方法不再足够，因为它只能检测给定横-坐标处界面的最上方位置。为了处理这些更一般的在这种情况下，我们采用以下策略。定义一个半径为 R 、以当前位置$\mathbf{x}$为圆心的圆盘，并引入指标 $\alpha(x',z')$，使其在属于该圆盘的所有网格位置(x',z')处满足 $\alpha=1$，即满足$(x'-x)^2+(z'-z)^2\le R^2$,，否则为 $\alpha=0$。然后，以由上述 SLIC 技术给出的初始猜测$R=\ell(\mathbf{x},t)$为起点，计算圆盘内的平均体积分数，即。

$$\mathfrak{C}(R,t)=\frac{\int_{\mathcal{V}}\alpha(x',z')C(x',z',t)d\mathcal{V}}{\int_{\mathcal{V}}\alpha(x',z')d\mathcal{V}}. \tag{14}$$

我们将 $\mathfrak{C}(R,t)$ 与圆盘中心处的局部体积分数 $C(\mathbf{x},t)$ 进行比较。如果两者的相对差异超过预设容差，则表明圆盘内的体积分数发生了变化，因此到界面的实际距离小于 R。因此，我们减小 R ，直到 $\mathfrak{C}(R,t)$ 足够接近 $C(\mathbf{x},t)$。通过对迭代过程中涉及的最后两个 R 值进行插值，最终确定 $\ell(\mathbf{x},t)$；最后一个值低估了到界面的距离，而倒数第二个值则高估了该距离。

6. 初步测试：单相计算

在研究风浪生成之前，有必要评估湍流模型在相关单相流中的性能和局限性。这里最简单且值得关注的构型，或许是平面槽道中的充分发展湍流。对于两相构型的初始化，这种流动也很有参考意义，因为在这一阶段会使用相应的速度场和湍流黏度场，正如第7节将要介绍的那样。相关测试详见附录C。结果表明，即使在雷诺数较高时，该模型仍能准确预测平均速度剖面，而黏性底层中的网格点数量非常有限。这表明，在平壁上的零压梯度流中，式（7）—（8）涉及的各种近壁修正和黏性修正都能发挥良好作用。

与风浪生成直接相关的更复杂单相构型，是湍-流流经刚性波状壁面的情形。Han- ratty及其同事对这一构型进行了广泛的实验研究，研究对象既包括非分离构型，也包括分别由小- [59;60; 61] 和大- [62;63; 64]波动振幅引起的分离构型。对这些波动的湍流响应揭示了若干微妙现象，首先体现在壁面压力流向变化的振幅和相位偏移上

以及剪切应力，以及分离情况下分离点和再附着点的位置。对未分离构型的测量表明，标准混合长度类模型无法预测上述相位偏移；对于波数k 满足$k^+ = k\delta_\nu \lesssim 0.01$、且 $\delta_\nu = \nu/u^*$ 为近壁黏性长度尺度的“长”波动，这些模型尤其如此。相比之下，通过引入一种 *ad hoc* “松弛”机制，对混合长度进行修正，以考虑流向压力梯度对缓冲层和黏性底层厚度的非局部影响，便可获得准确的预测，无论k^+ 为何值 [65]。此后，这种流动构型得到了广泛的实验研究（采用大振幅波动）[66；67；68； 69] 以及计算研究，包括直接数值模拟（DNS） [70；71；72； 73],大涡模拟（LES） [74；75；76； 77], , 或采用双方程湍流模型的雷诺平均纳维–斯托克斯（RANS）模拟 [66；76；78；79；80； 81]。

这里我们评估 Spalart-Allmaras 模型在两种不同波状壁面构型中的表现，分别对应无分离流和分离流。这两个案例分别基于 [59； 61]一方面和 [63]另一方面的实验条件，在此前的一项大涡模拟研究 [74], 中被作为参考，以下也使用这些大涡模拟预测结果进行比较。流动计算域为一个波状槽道，总高度为H，从波谷（$z = -a$）延伸至上方的刚性平壁（$z = H - a$），两侧壁面均施加无滑移条件。波状壁面的形状定义为 $z_w(x) = a\cos(2\pi x/\lambda)$，波陡$2a/\lambda$ 在无分离情况下为 0.031，在分离情况下为 0.2；在两种情况下，波长均接近平均槽道高度 $H_m = H - a$。基于高度$H_b/2$ 和主体区域速度 $U_b = H_{ref}^{-1}\int_0^{H_m} u(z')dz'$ 定义的流动雷诺数Re_b，在无分离情况下为 6560（其中 $H_{ref} = H_m$），在分离情况下为10600（其中$H_{ref} = H_m - a$）。网格为曲线正交网格，从一个壁面到另一个壁面包含144个单元，每个波长内包含 52个单元。网格沿槽道方向为非均匀分布，近壁最小单元尺寸 $\Delta z^+_{min} = \Delta z_{min} u^*/\nu$在无分离和分离情况下分别接近 0.04 和 0.09，其中u^* 表示波状壁面上的波长平均摩擦速度。计算通过指定压力梯度$d\mathcal{P}/dx$，并使用从$z = 0$ 到 $z = H_m$ 的相应泊肃叶分布和抛物线分布 $\tilde{\nu}_t(x,t = 0) = 40\nu z(H_m - z)/H_m^2$分别初始化速度和湍流黏度场来进行。此外，在波谷区域$-a \le z \le 0$中，初始速度和湍流黏度分布均设为零。

图1显示了未分离情况下波状壁面上的压力和剪切应力分布。无量纲壁面压力和剪切应力分别定义为 $p_w(x/\lambda) = (\mathcal{P}(x, z_w(x)) - \mathcal{P}(0, z_w(0)))/(\frac{1}{2}\rho U_b^2)$ 和 $\tau_w(x/\lambda) = \mu\partial_n\langle u\rangle(x, z_w(x))/(\rho u^{*2})$，其中 ∂_n 表示相对于壁面的法向导数。与较高Re_b [59]条件下的实验结果一致，单方程湍流模型预测的壁面压力（子图（*a*））呈现出近乎谐波的响应，其最大值位于波谷稍下游处。相比之下，剪切应力分布（子图（*b*））相对于壁面轮廓向前偏移了近 55°。如图所示，这种相位偏移与实验结果和大涡模拟预测结果吻合良好。然而，剪切应力变化幅度被严重低估，尤其是在波峰迎风侧，模型预测剪切应力较其平均值增加了50%，而实验数据和大涡模拟结果均表明其增加了一倍。

分离情况下p_w 和 τ_w 的分布如图2所示。这里同样正确捕捉到了两种分布的大致形态，但对于p_w 和 τ_w，分别位于波峰前方 90° 和 50° 处的最大值被低估了近30%。预测壁面剪切应力在$x/\lambda \approx 0.072$处变为负值，并在$x/\lambda \approx 0.720$处恢复为正值，与实验测量结果的符合程度略优于大涡模拟的预测结果。然而，实验结果更表明，流动在$x/\lambda \approx 0.13$处分离，并在$x/\lambda \approx 0.66$处重新附着，因此该模型实际上在波峰背风侧稍微提前预测了分离，并略微延迟了重新附着。二阶模型系统性地存在同样的缺陷 [78]。模型预测p_w最大值的位置与重新附着点重合，这与 [62]的实验结果一致。在分离区域，Spalart-Allmaras模型预测的壁面剪切应力与实验揭示的近乎平坦的分布更加吻合，而不是与参考大涡模拟中计算得到的结果一致。模型的曲率敏感版本中，产生项(7)的大小根据局部旋转率与应变率之比，按照(A.6)进行调制；该版本的预测结果与标准模型相比仅存在细微差异。最明显的差异体现在壁面压力上：考虑曲率效应后，波峰背风侧的壁面压力升高，使p_w分布中出现一个“肩部”，这与实验和大涡模拟结果所显示的特征一致。

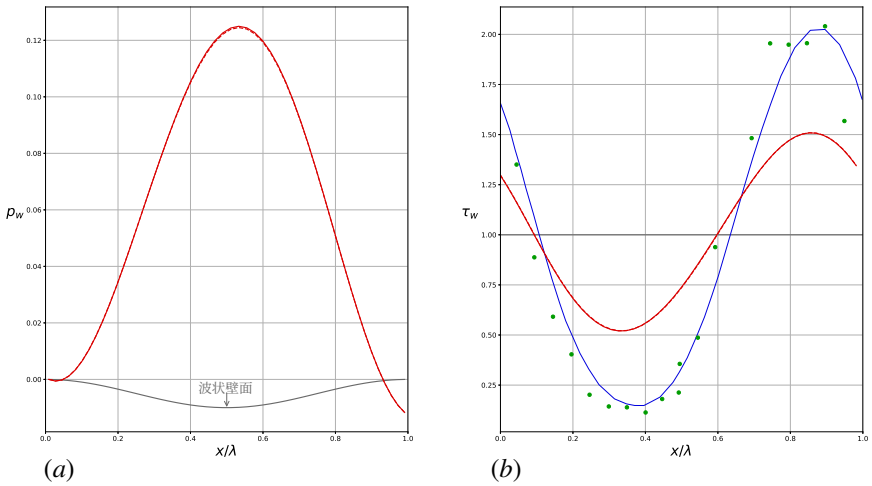


图1：波状壁面上非分离流动的壁面分布，$2a/\lambda \approx 0.031$、$H_m/\lambda = 1$ 和 $Re_b \approx 6560$ ($Re^* = H_m u^*/2\nu = 370$, $k^+ = \pi Re^{*-1} H_m/\lambda \approx 8.5 \times 10^{-3}$)。（a）：归一化压力 p_w；（b）：归一化剪切应力。——：采用标准湍流模型（式（7）中的 $f_r = 1$）得到的当前预测结果；- - - -：采用曲率敏感湍流模型（由 A.6)-(A.7) 给出的 f_r）得到的预测结果；●：实验结果 [59] ($Re_b \approx 7850$)；——：大涡模拟预测结果 [74]。

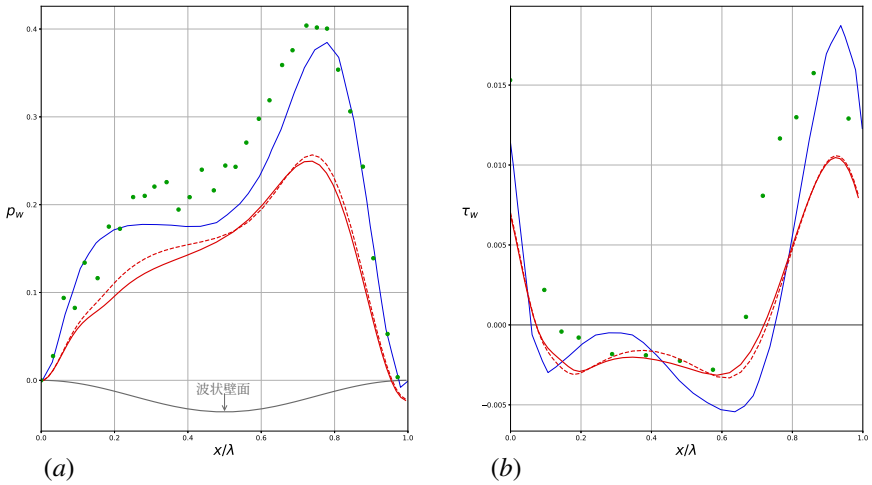


图2：壁面分布　　于波状壁面上分离流动的壁面分布，$Re_b \approx 10600$ ($Re^* = 1370$)、$H_m/\lambda = 0.933$ 和 $2a/\lambda = 0.2$。图注见图1；实验　　所有数据均取自 [63]（雷诺数 $_b \approx 12000$）。

图3显示了分离情况下的流线形态，并将其与[66]中确定的实验形态进行了比较。在两个面板中都可以看到，分离区延伸至位于波谷上方的大部分区域。然而，使用Spalart-Allmaras 模型预测的回流区比实验中观察到的回流区更平坦。例如，在平面$x/\lambda = 0.5$中，即正好位于波谷上方，回流区顶部位于高度$z/H \approx 0$处，而在实验中则检测到其位于$z/H \approx 0.06$处。此外，波状壁面在流向速度 $\langle u \rangle$ (x,z)分布中引起的扰动，其足迹仍然存在在计算结果中，主体区域更深处确实出现了一个明显的凸起，这与速度极小值有关，位于核心区域（$z/H \lesssim 0.5$）；而对应的实验分布则呈现出平坦得多的剖面。

总之，在波状壁面上的未分离湍流中进行的测试表明，在所研究的情况下，单方程 Spalart-Allmaras 模型能够正确预测壁面压力和剪切应力分布的相位，该情况对应于 $k^+ \approx 8.5 \times 10^{-3}$。其他 k^+ 的附加结果见附录D。这些结果进一步证实了在更大大小规律

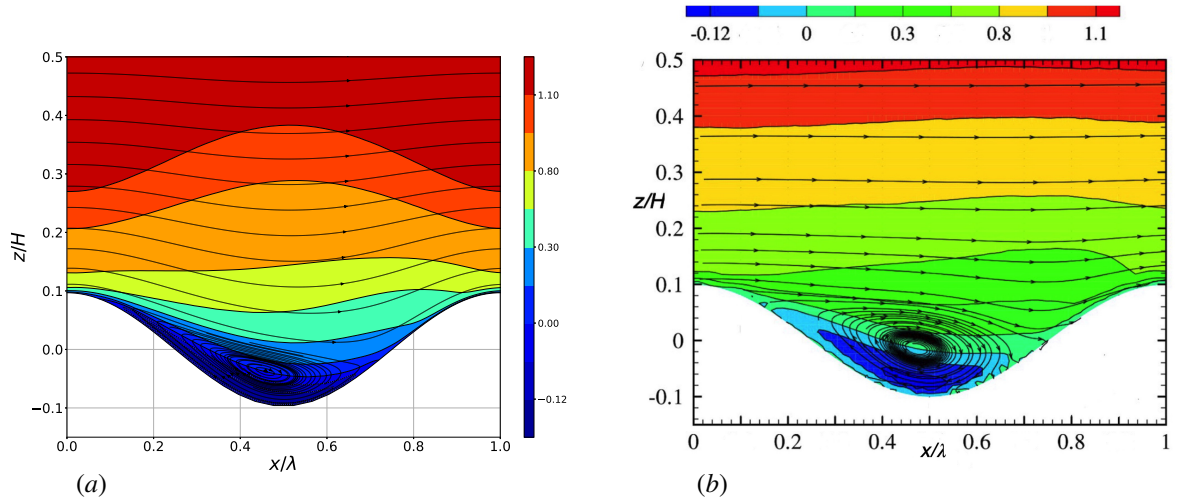


图3：在 $Re_b \approx 10600$、$Hm/\lambda = 0.933$ 和 $2a/\lambda = 0.2$ 条件下，波状壁面上分离流的流线。（a）：本文结果；（b）：实验（改编自 [66] 的图5（b））。颜色标尺表示流向平均速度 $\langle u \rangle(x,z)$ 的等值线。

k^+（与风浪生成相关），而对于较小的k^+（与涌浪传播更为相关），该模型无法正确预测相位滞后，这一点在基于涡黏度概念的湍流模型中已被系统地观察到 [14; 43; 65]。在分离构型中，该模型对分离点和再附点位置的预测相当准确，尽管它低估了壁面法向量方向上回流区域的范围。在这两种情况下，就目前的研究目的而言，该模型的主要缺陷似乎是显著低估了p_w-和 τ_w-变化的幅度，尤其是其峰值。换言之，Spalart-Allmaras 模型似乎过度“平滑”了沿正弦壁面轮廓的流动变化。这一缺陷或许可以通过调整（A.3）—（A.5）中详述的模型经验函数和常数来减轻。然而，这些参数过去已在多种流动中完成标定，改变其中任何一个参数以改善其在本文所考虑的特定构型中的预测，都可能会对其他流动产生不利影响。因此，我们没有尝试调整这些参数中的任何一个。我们唯一进行的尝试，是将流向上的扩散项（式（7）右端的最后一项）设为零，以促进涡黏度沿流动方向产生更尖锐的变化。然而，这一尝试并未显示出p_w-和 τ_w-分布的任何显著变化，平均速度场 $\langle u \rangle$（x，z）的分布也没有显著变化。

7. 两相构型

7.1. 几何形状与网格

现在转向基于完整方程组 (3)-(7) 的两相计算。模拟在一个矩形计算域中进行，其流向 (x) 和垂直方向 (z) 的尺寸分别为 $L \times H$。假设流动在 x 方向上具有周期性，底部和顶部壁面分别采用无滑移和自由滑移条件。在大多数计算中，界面的平均位置 z_0，假定位于底面与上表面的中间，这与 [18] 的实验条件相近。计算采用网格，其 z 方向的单元间距在平均界面两侧均为非均匀分布。具体而言，单元间距从 $z = 0$ 到 $z = z_0 - \Delta/2$ 逐渐减小，在 $z_0 - \Delta/2 \le z \le z_0 + \Delta/2$ 的条带区域内保持恒定，然后从 $z = z_0 + \Delta/2$ 到位于 $z = H$ 的上部自由滑移壁面逐渐增大。中间条带内的网格间距设为 $\Delta z_{min} \approx 0.5\delta_\nu$，其中 $\delta_\nu = \nu/u^*$ 为气流的特征近壁长度尺度。条带厚度设为 $\Delta/H = 1/8$，在大多数条件下，这使加密区域足够厚，能够追踪表面波可能发展至饱和的过程。由此，该条带内的单元数为 $N_\Delta = \frac{1}{2} Re^*$。下部和上部的非均匀区域各划分为 $0.35N_\Delta$ 个单元，因此，最大单元的高度（分别位于底部壁面和上部自由滑移表面附近）约为$10\delta_\nu$。流向采用均匀网格间距 Δx，

以避免加密区域内单元过度变形，比例 $\Delta x/\Delta z_{min}$ 保持接近 5。由此得到流向上的单元总数 $N_x \approx 0.8Re^*L/H$。综合上述信息可知，单元总数约为 $0.8Re^*L/H \times 0.85Re^* \approx 0.7(L/H)Re^{*2}$。例如，当 $Re^* = 800$ 且 $L/H = 3/2$ 时，网格总共包含 1026×678 个单元。

7.2. 初始化方案

气流由平均压力梯度 $d\mathcal{P}/dx$ 驱动，模拟的控制参数是界面处的摩擦速度 u^*，二者通过流向动量平衡所得到的约束 $\rho_a u^{*2} = -\frac{H}{2} d\mathcal{P}/dx$ 相关联。可以引入一个较小的负流向重力分量 g_x，以使液体中的平均流量为零，从而模拟 [18] 的实验，在该实验中液体被封闭在矩形水槽内。事实上，气流中单位体积总驱动力的 x 分量为 $G_a = \rho_a g_x - d\mathcal{P}/dx$，而液体中的该分量为 $G_l = \rho_l g_x - d\mathcal{P}/dx$。由于 $\rho_l/\rho_a \gg 1$，较小但非零的 g_x 几乎不会改变气流中的驱动力（$G_a \approx -d\mathcal{P}/dx$），但可能会在液体中提供主要贡献（$G_l \approx \rho_l g_x$）。

只要液体中的流动被视为层流，就采用 Poiseuille 分布 $u_l(z) = \mu_l^{-1}[G_l(z_0 - z/2) + \rho_a u^{*2}]z$，该分布满足下部壁面的无滑移条件以及平均界面位置处剪切应力的连续性。在假定液体净流量为零的情况下，条件 $\int_0^{z_0} u_l(z')dz' = 0$ 给出 $G_l = -\frac{3}{2}\rho_a u^{*2} z_0^{-1}$。对于 G_l，也可以采用其他规定。例如，施加 $G_l = -\rho_a u^{*2} z_0^{-1}$ 会在液层底部产生零剪切应力条件。对于水而言，在大多数风况下，近表层流动都是湍流。因此，上述 Poiseuille 流动以及对 G_l 的估计在物理上并不适用。适当的初始化程序见附录 B。

为初始化气流，我们单独进行一次计算，以求解高度为 $H - z_0$，的平面半通道中的单相湍流，并将下壁面的摩擦速度设为 u^*。这次预计算所采用的离散方式与上文所述相同，即在邻近壁面、厚度为 $\Delta/2$ 的区域内采用恒定网格间距 $\Delta z_{min} = 0.05/u^*$，随后逐渐增大网格间距，直至上方的自由滑移表面。该计算收敛后，将相应的速度场和湍流黏度场粘贴到两相计算域的上部，并在计算得到的空气速度分布中加上液体在平均界面位置处的速度 $u_i = u_l(z = z_0)$，以确保在 $z = z_0$ 处速度连续。值得注意的是，当液体中的流动为层流且满足零流量条件时，有 $u_i = \mu_l^{-1}[G_l z_0/2 + \rho_a u^{*2}]z_0 = 4\mu_l^{-1}\rho_a u^{*2}$。接着，将液体中的特征雷诺数定义为 $Re_l = \frac{2}{3}\rho_l u_i z_0/\mu_l$（由于 u(z) 的最小值位于 $\bar{z} = z_0/3$ 处，因此会产生 2/3 的系数），可证明 Re_l 与气流的摩擦雷诺数 $Re^* = \rho_a(H - z_0)u^*/\mu_a$ 之间存在如下关系：$Re_l = \frac{2\rho_l}{3\rho_a}[z_0(H - z_0)\mu_a\mu_l Re^*]^2$。因此，以黏度为水的 10 倍的液体为例，并考虑 $z_0 = H/2$、$Re^* = 800$ 的构型，可得 $Re_l \approx 270$。这一估算表明，尽管界面上方的气流具有强湍流特征，液体中的流动仍保持层流；液体黏度越大，这一结论就越成立。

完成上述速度场和湍流黏度场的初始化后，方程 (3)-(7) 的求解开始随时间推进。然而，为确保界面处速度和剪切应力的匹配不会在离散解中引入任何扰动，我们首先让模拟从 $t = 0$ 运行至 $t = \Delta t_0 = 100\nu/u^{*2}$，期间不更新体积分数分布 $C(\mathbf{x},t)$。随后，我们在初始界面位置 z_0, 处加入脉冲扰动 $\zeta_0(x)\delta(t - \Delta t_0)$，其中 $\delta(t)$ 为狄拉克δ函数。实际操作中，扰动施加一个时间步。然后，让方程 (3)-(7) 的解（包括体积分数和局部流体性质）自由演化，持续时间为 $t > \Delta t_0$。本文考虑了两种特定的扰动形状。一种是简单的谐波分布 $\zeta_0(x) = a\cos(kx)$，其中波数 k 必须是由计算域长度所允许的最小波数的整数倍，即 $2\pi/L$。为避免指定特定波数，我们通常改用定义为以下形式的白噪声扰动

$$\zeta_0(x) = aN^{-1/2}\sum_{n=1}^{N}\cos(k_n x + 2\pi\Phi_n), \qquad (15)$$

其中 $k_n = 2\pi n/L$、$k_N = \pi/(2\Delta x)$ 和 Φ_n 随机相位。该相位由专用程序生成，确保在给定网格上进行的所有计算都具有相同的 Φ_n分布，因此扰动谱也相同。式（15）的一个重要优点是，只需一次计算，就能同时观测$N_x/2 \approx 0.6Re^*$ 个相互独立波长的增长，只要非线性相互作用的影响可以忽略不计。对于给定的a，上述两种扰动具有相同的均方根（rms）振幅。在两种情况下，我们都选取$a = 2\delta_v$，对应于 4 个网格单元，因为$\Delta z_{min} \approx 0.5\delta_v$。无论选取何种形式的 $\zeta(x)$, the

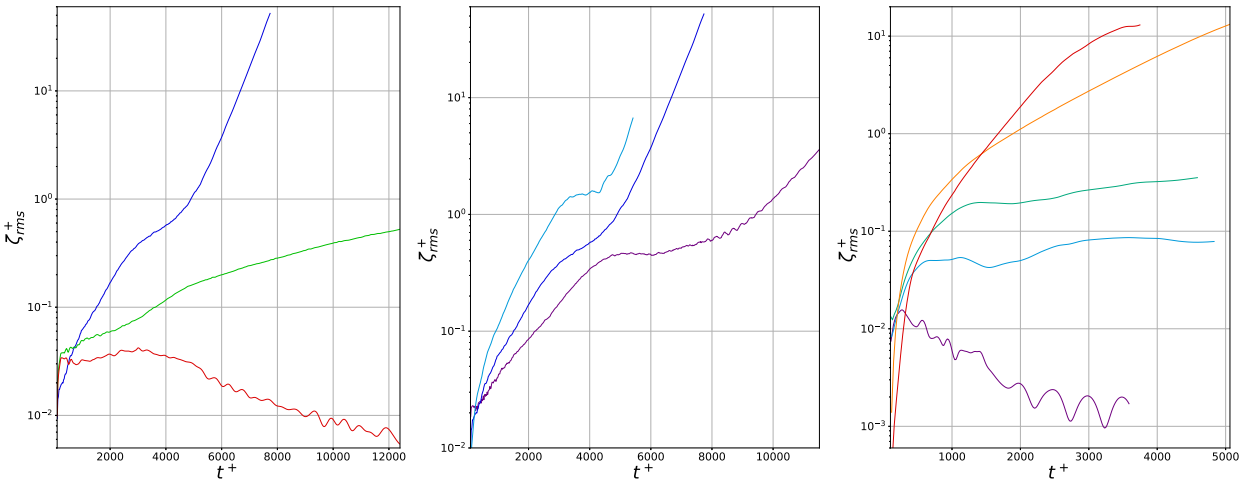


图 4：不同液体黏度和风况下均方根界面变形的演变。（a）：恒定风况（$Re^* = 800$）下的水（蓝色）、$\mathcal{L}_{12}$（绿色）和 $\mathcal{L}_{30}$（红色）；（b）：$Re^* = 613$（紫色）、800（蓝色）和1067（青色）下的水；（c）：$Re^* = 613$（紫色）、1067（蓝色）、1333（绿色）、1600（橙色）和1867（红色）下的 $\mathcal{L}_{100}$。

界面位置的扰动被转化为如下形式的体积分数扰动

$$C(x,z,t=\Delta t_0) = \frac{1}{2}\left\{1 - \mathrm{erf}\left(\frac{z - z_0 - \zeta_0(x)}{\gamma_d \Delta z_{min}}\right)\right\}, \quad (16)$$

其中，γ_d 是一个 O（1）参数，用于控制过渡区域的厚度；体积分数在该区域内从界面上方的0变化到液体中的1（下文记作$\gamma_d = 1$）。

7.3. 界面演变的几个示例

最后，我们展示了一些典型结果，这些结果是借助全文所发展的方法获得的，用于描述界面的演化。关于结果的详细讨论，以及液体黏度对表面波增长的影响所产生的后果，将留待后续发表的论文。下文中，在所有情况下，液体内均施加零流量条件，并且用于触发风浪生成的脉冲扰动遵循白噪声分布（15）。为隔离液体黏度的影响，液体的其他物理性质，即表面张力和密度，均保持不变，并取与水相对应的数值。出于同样的原因，尽管在大多数风况下，水中的流动实际上会是湍流，但在所有计算中仍将液体中的流动视为层流。下文中，为简洁起见，黏度比水大q 倍的液体将记为 $\mathcal{L}_q$。表面变形和时间均按以下量进行归一化：气流的黏性近壁尺度，$\delta_\nu = \nu/u^*$ 和$t_\nu = \nu/u^{*2}$，分别表示，相应的法向量化量用带有 + 上标的形式表示。

图 4(a) 展示了在相同风速（$Re^* = 800$）下，对三种黏度逐渐增加的液体施加相同初始界面扰动后，界面如何演化，即水、$\mathcal{L}_{12}$ 和 $\mathcal{L}_{30}$。对于水，ζ^+_{rms} 呈现出急剧、近乎指数增长的两个阶段，其间由一个中间阶段分隔，该阶段对应于从$t^+ \approx 3000$到$t^+ \approx 5000$较为缓和的增长。正如我们将在后文看到的，这两次指数增长分别与具有不同波数的扰动分量相关。在模拟结束时（$t^+ \approx 8000$），表面变形仍在呈指数增长，其均方根值已达到 50 个黏性长度单位。对于 $\mathcal{L}_{12}$，界面演化遵循不同的路径。这里同样可以识别出三个不同阶段，但均方根变形现在在短暂的中间阶段表现出最大的增长率。在$t^+ = 6000$ 时，变形仍在增长，但增长率正在降低，并且这一趋势在后续阶段仍然持续（在$t^+ = 12000$ 时为$\zeta^+_{rms} \approx 0.5$）。因此，预计该情况下饱和波幅将与黏性近壁长度尺度同量级。最后，在增长至$t^+ \approx 3000$后，$\mathcal{L}_{30}$ 表面的变形开始衰减。这一趋势贯穿整个模拟过程，在$t^+ = 12000$ 时的均方根变形通常比$t^+ \approx 3000$时达到的宽峰值小一个数量级。因此，对于$Re^* = 800$，当前模拟预测其表面会发展出大波幅波浪

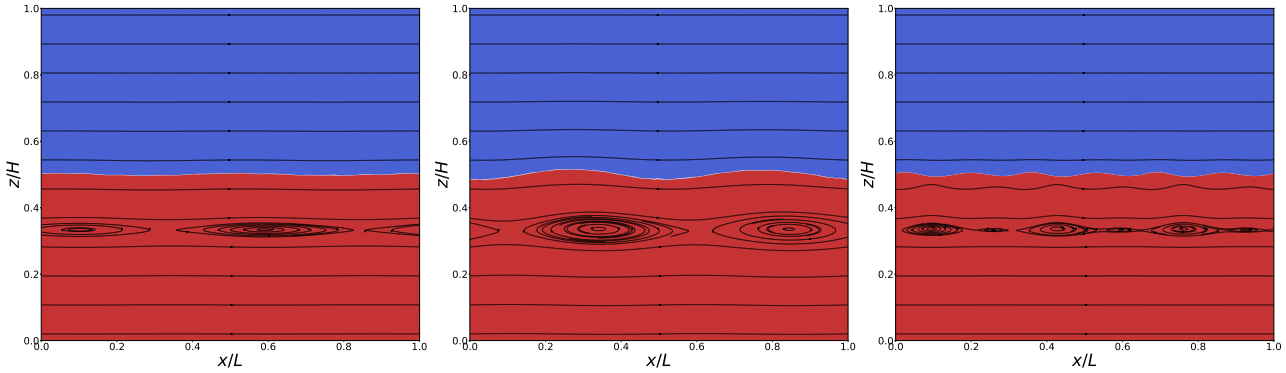


图5：实验室参考系中的界面变形和流线分布快照。（a）：当Re^* = 800 时的水，t^+ = 6000；（b）：t^+ = 7000时的相同情况；（c）：当Re^* = 1600 时的 $\mathcal{L}_{100}$，$t^+ \approx 5000$。液体（红色）层和空气（蓝色）层分别定义为瞬时体积分数$C(\mathbf{x},t)$大于或小于0.5的区域。

而在水的情况下， $\mathcal{L}_{12}$ 的波浪几乎只能达到 δ_ν量级的波幅； $\mathcal{L}_{30}$ 表面的扰动先是短暂增长，随后经历持续衰减。

图 4(b) 展示了在一系列条件下，水表面变形随风速的变化；这些条件对应的空气主体区域有量纲速度约为 4.5m.s^{-1} 至 8m.s^{-1}，后者是 [18]中考虑的最高速度。不出所料，风速越高，增长率越大，即给定t^+时的 ζ^+_{rms} 越大。还可以注意到，这三种演化呈现出共同趋势，尤其是图 4(a) 中已观察到的三阶段结构：中间阶段的增长率明显低于较短和较长时间段。事实上，在风速足够低时，该阶段的增长率甚至可能为零，Re^* = 613对应的曲线便表明了这一点。图 4(c) 考察了 $\mathcal{L}_{100}$的情况。初始瞬态之后，在最低风速下（Re^* = 613），均方根变形迅速衰减；而在Re^* = 1067 时，变形几乎保持不变，约为 δ_ν 的十分之一（注意，这一风况对应图 4(b) 中水的最大增长）。风速继续升高时，Re^* = 1333下的界面变形呈现出更稳定的增长，但模拟结束时其均方根值仍显著小于 δ_ν。相比之下，最高的两种风况（Re^* = 1600和Re^* = 1867）会带来持续增长，增长率随时间逐渐降低，且计算结束时振幅超过 $10\delta_\nu$。值得注意的是，水中观察到的三阶段结构在 $\mathcal{L}_{100}$的情况下并不存在，这表明低黏度和高黏度液体中的界面变形演化在定性上存在差异

在低黏度和高黏度液体存在下的界面变形。

界面变形达到较大振幅后，界面和流线形态的一些示例见图 5。在水的情况下（图 5($a-b$），长时间后，波长 $\lambda = L/2$ 的波占据主导地位；而在 $\mathcal{L}_{100}$ 的情况下（图 5(c)），则出现了波长较短、为 $\lambda = L/6$ 的主导波。相应的波陡分别接近 0.2 和 0.275，表明波浪已经发展到非线性效应显著的阶段。所有情况下，液体中都可见一系列闭合流线，其高度约为液层高度的三分之二。这一现象是零流量条件造成的，该条件迫使液体底部发生回流。在 $\mathcal{L}_{100}$ 的情况下，闭合流线形心的垂直位置几乎与波谷的位置重合；而在水的情况下，形心位置则略微超前于波峰。同样，在水的情况下，界面下方第一条流线的波峰和波谷几乎分别与界面的波峰和波谷重合；而在 $\mathcal{L}_{100}$ 的情况下，这条流线的起伏与界面起伏几乎反相。造成这一差异的原因可以定性地理解如下：由于表面平均速度表达式中存在 μ_l^{-1} 前置因子，主导波的相速度c_0 约为以波数k_0, 估算所得$c_0 = (g/k_0)^{1/2}$，在图 5(c)中约为u_i的五倍，而在图 5($a-b$)中仅为其三分之一。因此，后一种情况下存在临界层，而前一种情况下则没有。因而，$\mathcal{L}_{100}$ 表面传播的波几乎是无旋的，而

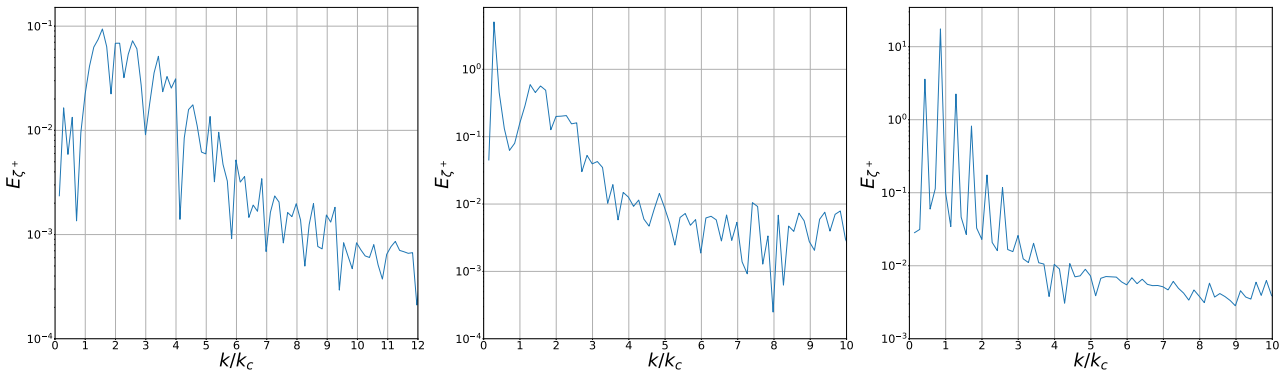


图 6：波场的功率谱密度 $E_\zeta^+(k/k_c)$。（a）：水在 $Re^* = 800$ 和 $t^+ = 2000$ 时；（b）：在 $t^+ = 6000$ 时的相同情况；（c）：$\mathcal{L}_{100}$ 在 $Re^* = 1600$ 和 $t^+ = 5000$ 时。波数以毛细波数 $k_c = (\rho_l g/\gamma)^{1/2}$ 进行归一化。

在水层上传播的波则具有显著的涡旋分量。已知在给定 z 处，无旋单色波的流函数在波峰下方达到最大值，在波谷下方达到最小值；在固定的实验室参考系中观察时，这会呈现出图 5(c)所示的反相形态。相反，由于水的情况下 c_0/u_i 比值较小，相应的界面在实验室参考系中变形缓慢，因此接近一条流线。这就是为何图 5($a-b$)中的流线分布让人联想到开尔文猫眼形态。显然，如果将水中的流动视为湍流（这符合所研究风速下的实际情况），图 5($a-b$)中观察到的流线形态将会发生显著变化。此时，附录 B 中建立的近似模型表明，表面流速约为假设层流条件时预测值的六分之一，因此液体中不会存在临界层。水的情况下，风驱动的近表层流动呈层流还是湍流所产生的影响，将在后续论文中讨论。

图 6 显示了一些典型的波能谱，$E_\zeta^+(k/k_c)$，仍然针对水的两种情况：$Re^* = 800$和 $\mathcal{L}_{100}$ 下的$Re^* = 1600$。毛细波数$k_c = (\rho_l g/\gamma)^{1/2}$在所有计算中保持恒定，用于对波数进行归一化。图 6(a) 展示的相当早期阶段中，位于 $1.2 \le k/k_c \le 2.8$ 范围内的多个波数主导着波场，能量峰值出现在$k_0/k_c \approx 1.55$ 处，即波长为 $\lambda_0 \approx 0.09L$。波数较低、满足$k/k_c < 1$ 的波所含能量通常低一个数量级。超过$k/k_c \approx 3$后，能量密度随着波数增加而逐渐衰减，未-直到$k/k_c \approx 10$ 处，其值比峰值低两个数量级。随后，直至网格所允许的最高波数，谱含量都保持在相近水平（未显示）。随着时间推移，范围$k/k_c \lesssim 10$ 内的谱成分发生了显著变化。在子图（b）中，也就是时间间隔为子图（a）的三倍时，一个单独的分量主导了波场，其能量密度比先前占主导地位的波数范围高一个数量级。该分量对应$k_0/k_c \approx 0.285$，即 $\lambda_0 = L/2$。因此，两张快照之间的主导波数降低了 5.55 倍。这种波数下移对应于空间增长波中广为人知的频率下移，尤其是在短风区 [82; 83; 84]。已知频率下移是 Benjamin-Feir 不稳定性的结果。在机械造波中，波浪破碎和毛细波纹的生成等耗散效应很快就被认定为可能的重要耗散来源 [83; 85]。然而，后来研究表明，纯保守的三维效应也会显著促进这一现象 [86], ，尽管人们曾争论这些效应是否能在没有任何耗散源的情况下产生观测到的下移 [86; 87]。对于风成波，空气中的湍流以及液体中可能存在的湍流，又构成了另一个显而易见的耗散来源。假设空气中具有对数速度剖面，且空气和水中的涡黏度均为常数，研究表明，在包含纯重力波 [88] 和重力—毛细波 [89]的二维构型中，可以预测出与实验数据相当吻合的频率下移。在此，三维效应不存在，且波浪破碎不会发生于

图 6（a –b）所示的阶段。此外，液体中的流动被人为限制为层流；鉴于水的黏度较低，主体区域中相应的黏性耗散可以忽略不计。因此，唯一显著的耗散来源是空气边界层中的湍流；此外，承载重力波的波谷区域存在陡峭的高波数毛细波纹，也可能带来一些水中的近表面黏性耗散（见图 5（b））。当前结果表明，即使在这一严格受限的建模框架下，也会发生大幅波数下移。当然，将这些预测与实验室观测进行比较——观测显示，对于水和黏性更大的液体，主导波长均随风区增长而增大——是对当前方法的一项重要检验，其中也包括所选用的单方程湍流模型。

图 6(c)显示，在 $\mathcal{L}_{100}$ 情况下，波能量的谱分布截然不同。在这里，大部分能量集中于一组离散的射线上，包括占主导地位的分量 $k_0/k_c \approx 0.855$，即 $\lambda_0 = L/6$、其子谐波 $k_0/2$，以及后续的谐波 $3k_0/2$、$2k_0$，等。在主导分量与第八条谱射线之间，能量衰减了三个数量级；第八条谱射线对应于第四谐波 $k = 4k_0$。图 6(c)所示的能量分布清楚表明，强烈的子谐波[82； 90]以及超谐波 [91] 不稳定性可能会影响在高黏度液体上方传播的风成波，这与非线性无旋表面波中的通常情况相同。由于这里的波陡度接近 0.3，因此出现如此强烈的非线性效应实际上并不令人意外。

8. 总结与结论

本文报告了我们逐步发展一种一致数值方法的过程，该方法旨在计算黏性液层与其上方湍流气流之间界面的演化。最终目标是建立一套数值方案，用于预测液体表面风成波的增长；这种液体的黏度可能比水高数个数量级，这意味着空气中会出现较高的主体区域流速，进而使边界层内形成宽广的涡旋谱。在回顾了各种现有模拟方法的优势与局限后，这些流动条件促使我们采用一种组合方案：对整个随时间演化的流场采用单流体表述，同时对控制方程采用雷诺平均表述。鉴于.....的时间尺度

轨道运动与湍流运动通常在很大程度上重叠，我们指出，以一致的方式结合这两种表述，最简单的方法是将平均算子定义为沿横向（展向）水平方向的空间平均。我们讨论了这一选择所导致的内在二维方法的局限，尤其是该方法不适用于研究界面上微小三维皱纹现象的出现与发展，也不适用于考察界面变形极早期阶段 Phillips 共振机制的重要性。相比之下，Miles 不稳定性机制主要是二维的，因此所设计的建模框架适合用于考察其在广泛的液体黏度和气流条件下的相关性。

由于所选用的雷诺平均形式，得到的动量方程中会出现湍流应力。因此，所提出方法的潜力在很大程度上取决于为这些应力选择合适的湍流闭合模型，其次取决于所选用的湍流模型。尽管早已发现，涡黏度型闭合模型在波状壁面上方边界层外部区域存在缺陷，我们在此仍采用了这类闭合模型，并选用单方程 Spalart–Allmaras 模型来计算整个流场中的涡黏度。该模型除了简单且数值稳健之外，还有一项优点：其输运量——即涡黏度——在界面处趋于零，因为鉴于液体与空气之间极大的密度比，空气中的湍流脉动会将界面视为刚性壁面。更复杂的替代模型，即双方程模型和完整雷诺应力模型，都会求解一个用于确定长度尺度的量（例如耗散率）的输运方程，而该量在近壁区域的行为更为复杂，这一特点使黏性底层的描述更加困难；而黏性底层在当前问题中尤为重要。

所报告的湍流模型在单相受壁面约束流动中的测试揭示了其优势与不足。在前者方面，结果表明，即使黏性层和缓冲层中的网格单元数量较少，该模型仍能在充分发展槽道流中准确地产生近壁面平均速度分布。在与短风浪（即年轻风浪）生成相关的波数范围内，对于波状壁面上未发生分离的流动，它同样能够正确预测壁面压力和剪切应力分布的相位偏移。类似地，对于大振幅波状壁面上的分离流动，它能够相当准确地预测分离点和再附点的位置。主要

该模型在此类流动中的一个缺点似乎是严重低估了壁面压力和剪切应力的最大值，尤其是波峰前方迎风区域中过量表面剪切应力的最大值。显然，可以预期这一缺点会对界面变形的预测增长率产生一定影响，而这正是本研究下一阶段需要详细考察的问题。

在单相流中验证了湍流模型后，我们转而研究两相构型。在所考虑的示例中，假设界面上方的流动为湍流，而液体中的流动为层流，且液体中满足零流量条件。我们特别关注初始化过程，以确保只要界面保持平坦，初始复合速度场就是离散化两相问题的定常解。随后，我们在界面位置引入了一个小的脉冲扰动，其谱成分对应于单色波或白噪声分布。接着，我们简要展示了一组选定结果，包括均方根扰动、流线与界面形态，以及不同黏度液体中波场的能谱随时间的演化。这些结果揭示了液体黏度对所观测到的演化特征和结构的关键影响。显然，在给定气流摩擦速度时，液体黏度越大，增长率越低。反之，对于给定液体，摩擦速度越大，增长率越高。如果气流足够强，能够使液体表面生成波浪——即使该液体的黏度是水的百倍——我们发现，相应的增长率会随时间持续下降，波场基本由一系列射线构成，其主要成分为载波、波数为载波一半的次谐波，以及由这两者组合和非线性相互作用产生的一些高次谐波。相比之下，在水的情况下，随着扰动增长，会发生显著的波数下移，形成两个彼此分离的阶段，在每个阶段中，相应的主导射线都呈指数增长。这种波数下移、增长率以及使扰动衰减的临界风速，都是我们将在后续论文中与实验测量结果进行比较的主要指标。对于所展示的水流模拟，水下流动被人为设定为层流，但在自然条件下实际上会是湍流；水下流动的影响也值得特别关注。事实上，我们观察到，层流假设所导致的较大表面速度会使界面下方出现临界层，而这种特征……

如果水下流动为湍流，则该波并不存在。这种差异可能会影响波浪的增长，甚至影响所选择的优先波数。

本文所提出的数值方法若要改进，主要可能在于引入更准确的湍流模型。然而，究竟哪种模型在确保良好数值稳定性的同时，对目标问题具有最佳预测能力，仍有待确定。特别是，保留单方程模型在界面附近的高效性似乎是合理的；这种高效性得益于该模型所包含的物理因素，以及我们所实现的、用于计算与任意形状界面之间局部距离的灵活技术。然而，要恰当捕捉增长中的波浪对大尺度湍流涡造成变形后所产生的非平衡效应，显然需要在远离界面处采用雷诺应力输运模型。采用分区方法，在对数层中的某个位置匹配这两类模型，或许能实现最佳折衷。尽管如此，仍需进行详细测试，才能对最佳湍流建模策略得出确切结论。

CRediT 作者贡献声明

FlorentBurdairon： 调查、验证、形式分析、撰写- 初稿。 **JacquesMag-naudet：** 概念化、形式分析、撰写 - 审阅与编辑、监督、经费获取。

利益冲突声明

作者声明，他们没有已知的可能被认为会影响本文所报告工作的竞争性经济利益或个人关系。

致谢

论文中所述的具体计算开发工作得益于 P.Elyakime 的持续支持。F. Burdairon 的研究奖学金由法国国家研究署的 ViscousWindWaves 项目授予（项目编号：ANR-18-CE30-0003）。计算工作得以完成，得益于 CALMIP 超级计算中心在 P22032 项目资助下分配的高性能计算资源。

附录 A. 湍流模型的细节

˜在（7）中，生产项中涉及的壁面修正涡量模 Ω 定义为 [92]

$$\tilde{\Omega} = \Omega + \Omega_\ell \quad \text{if} \quad \Omega_\ell/\Omega > -c_{v2}\,, \tag{A.1}$$
$$\tilde{\Omega} = \Omega\left\{1 + \frac{c_{v2}^2\Omega + c_{v3}\Omega_\ell}{(c_{v3} - 2c_{v2})\Omega - \Omega_\ell}\right\} \quad \text{otherwise,}$$

采用近壁修正 Ω_ℓ，使得

$$\Omega_\ell = f_{v2}\frac{\tilde{\nu}_t}{\kappa^2\ell^2}\,. \tag{A.2}$$

阻尼函数 f_{v1}（涉及式 (8) 和 (10)）以及 f_{v2} 规定为

$$f_{v1} = \frac{(\tilde{\nu}_t/\nu)^3}{(\tilde{\nu}_t/\nu)^3 + c_{v1}^3} \quad \text{and} \quad f_{v2} = \frac{1 + (f_{v1} - 1)(\tilde{\nu}_t/\nu)}{1 + f_{v1}(\tilde{\nu}_t/\nu)}\,, \tag{A.3}$$

因此，当 $\tilde{\nu}_t/\nu$ 较大时，$f_{v1} \to 1$ 和 $f_{v2} \to 0$；当 $\tilde{\nu}_t/\nu \to 0$ 时，$f_{v1} \to 0$ 和 $f_{v2} \to 1$。类似地，式 (7) 中壁面破坏项的函数 f_w 要求在壁面处取值为 1，并在远离壁面处趋于 0。其定义为

$$f_w = g\left(\frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6}\right)^{1/6}, \tag{A.4}$$
$$\text{with } g = r[1 + c_{w2}(r^5 - 1)] \quad \text{and } r = \frac{\tilde{\nu}_t}{\kappa^2\tilde{\Omega}\ell^2}\,.$$

最后，模型中涉及的经验常数规定为

$$\begin{aligned} c_{b1} &= 0.1355\,,\ c_{b2} = 0.622\,,\ \sigma = 2/3\,, \\ c_{v1} &= 7.1\,,\ c_{v2} = 0.7\,,\ c_{v3} = 0.9\,, \\ c_{w1} &= \frac{c_{b1}}{\kappa^2} + \frac{1 + c_{b2}}{\sigma} \approx 3.24\,, \\ c_{w2} &= 0.3\,,\ c_{w3} = 2.0\,, \end{aligned} \tag{A.5}$$

冯·卡门常数 κ 设为 0.41。

在模型的原始版本中，式 (7) 中对产生项加权的函数 f_r 为 1。此后，该模型在涉及弯曲流线 [93 的流动中经过了检验； 94] 研究者还提出，可使 f_r 取决于旋转效应和应变效应的相对大小，从而提升模型性能。在 [95] 的双方程湍流模型研究中，有人提出了一种简单的修正形式，其中涉及旋转率张量和应变率张量的范数。其思路是定义一个曲率/旋转理查森数 $\frac{\Omega}{\mathcal{S}}\left(\frac{\Omega}{\mathcal{S}} - 1\right)$，用于比较局部速度梯度中旋转分量和应变分量对应的时间尺度，$\mathcal{S} = (2\langle \mathbf{S}\rangle : \langle \mathbf{S}\rangle)^{1/2}$ 表示应变率张量的范数。该公式被改编用于 Spalart-Allmaras 模型，在[96],中，权重函数定义为

$$f_r = (1 + c_{r1})\frac{2\mathcal{S}}{\mathcal{S} + \Omega}\left\{1 - c_{r3}\tan^{-1}\left[c_{r2}\frac{\Omega}{\mathcal{S}}\left(\frac{\Omega}{\mathcal{S}} - 1\right)\right]\right\} - c_{r1} \tag{A.6}$$

with

$$c_{r1} = 1.0\,,\ c_{r2} = 2.0\,,\ c_{r3} = 1.0\,. \tag{A.7}$$

在薄剪切流中，$\Omega = \mathcal{S}$，因此 $f_r = 1$，这使得式（7）中产生项的大小保持不变。相反，在应变主导区域（例如 $f_r(\Omega/\mathcal{S} = 0.8) \approx 1.91$）中，$f_r$ 大于 1，从而增大产生项的大小，进而增大 ν_t。反之，在涡量主导区域中，f_r 小于 1，且当 $\Omega/\mathcal{S} \approx 1.2$ 后变为负值，使涡核中的湍流消失。由于壁面处 $\Omega/\mathcal{S}$ 为 1，f_r也为 1。因此，在式（A.5）中，将c_{w1} 与 c_{b1}、c_{b2}、σ 和 κ 联系起来的关系保持不变。

附录 B. 剪切界面下方湍-流液层的近似特性

由于黏度比 μ_l/μ_a 始终很大，即使对于水也是如此，因此，受到预设剪切应力作用的气液界面下方的湍流并不遵循无滑移条件，除非表面受到表面活性剂的污染。正因如此，非零的切向速度脉动会一直存在于液体中，直至界面处。相反，只要湍流强度不足以使表面发生变形，法向脉动就会在界面处消失。这些综合行为使湍流剪切应力随着距界面的距离 $z_0 - z$增大而呈线性增长。这种情况不同于更为熟悉的无滑移壁面情形，并且对近表面流动的结构具有直接影响。具体而言，与邻近无滑移壁面的边界层相比，黏性底层几乎薄了两倍，而缓冲层实际上不存在 [97； 98； 99], 因此，平均速度剖面的对数律适用于距表面近得多的区域。这就是为什么在液体中将 (9) 和 (A.3) 中涉及的阻尼函数f_{v1} 设为 1，就足以利用 Spalart-Allmaras 模型对近界面区域进行逼真的描述。这也正是为什么可以推导出一个适用于整个液层的简单近似涡黏度剖面。

对此，我们首先考虑，次表层流由一层具有运动黏度 $\nu_l = \mu_l/\rho_l$的流体组成，该流体层从界面 $z = z_0$ 延伸，在该处剪切

剪切应力 $\rho_l u_l^{*2} \equiv \rho_a u^{*2}$ 作用于下方的平面 $z = \delta_l z_0$，在该平面处剪切应力为零（下标 l 用于表示液体中的量，以避免可能存在的歧义）。由于剪切应力在两个平面之间呈线性变化，控制平均速度 $u_l(z)$ 垂向变化的流向动量方程积分为 $\rho_l(\nu_l + \nu_t)\mathrm{d}_z u_l = G_l(z_0 - z) + \rho_l u_l^{*2}$，其中 $G_l = -[(1-\delta_l)z_0]^{-1}\rho_l u_l^{*2}$。我们引入相关的摩擦雷诺数 $\mathrm{Re}_l^* = (1-\delta_l)z_0 u_l^*/\nu_l$，以及无量纲距离 $Z = (z-\delta_l z_0)/[(1-\delta_l)z_0]$ 和 $\mathcal{Z}^+ = (z_0 - z)u_l^*/\nu_l$。采用这些记号，前述动量平衡写成无量纲形式

$$(1 + \nu_t^+)d_Z U^+ = Re_l^* Z\,, \tag{B.1}$$

其中 $\nu_t^+ = \nu_t/\nu_l$ 和 $U^+ = u_l/u_l^*$。为获得一个真实且简单、适用于整个近表层流动的涡黏度分布，我们从 [100中提出的分布出发； 101]适用于充分发展通道流的情形。该 ν_t剖面最初旨在预测直至壁面的涡黏度，后来证明即使在流动核心区也准确有效 [102]。忽略无滑移壁面特有的黏性贡献后，用本文的符号表示，该涡黏度剖面可简化为

$$\nu_t^+ = \frac{\kappa}{6} Re_l^*(1 - Z^2)(1 + 2Z^2)\,. \tag{B.2}$$

在$Z \to 1$的极限下，此表达式给出 $\nu_t^+ \approx \kappa Re_l^*(1 - Z) \equiv \kappa\mathcal{Z}^+$，其中 κ 为冯·卡门常数。在核心区，该曲线在 $Z = \frac{1}{2}$处达到最大值，此时 $\nu_t^+ = \frac{3}{16}\kappa Re_l^*$；随后在 $Z = 0$处达到略低的最小值 $\nu_t^+ = \frac{1}{6}\kappa Re_l^*$。

假设 $\nu_t^+ \gg 1$ 并将(B.2) 代入 (B.1)，即可对后者进行积分，从而得到速度剖面

$$U^+(Z) = U_0^+ + \frac{1}{\kappa}\log\frac{1 + 2Z^2}{1 - Z^2}\,, \tag{B.3}$$

在 $U_0^+ = U^+(Z = 0)$ 的情况下，预计方程 (B.3) 能够较好地预测直到黏性底层外缘的平均速度分布，该外缘约位于 $\mathcal{Z}^+ = 3$，即 $Z = 1 - 3Re_l^{*-1}$[97; 98； 99]。假设$Re_l^* \gg 1$，(B.3) 预测$U^+(\mathcal{Z}^+ = 3) \approx U_0^+ + \kappa^{-1}\log Re_2^{*}$。在黏性底层内，(B.1) 可化简为 $d_Z U^+ \approx Re_l^*$，因此

$$U^+(Z) = U_0^+ + \kappa^{-1}\log\frac{Re_l^*}{2} + 3 + Re_l^*(Z - 1)\,. \tag{B.4}$$

上述模型预测表面速度 $U^+(1) = U_0^+ + \kappa^{-1}\log Re_2^{*} + 3$。取 $Re_l^* = 150$ 和 $U_0^+ = 0$，可得 $U^+(1) \approx 13.8$，与其相差不到 8% 】【。

DNS 预测 $U^+(1) \approx 14.9$of [99]。类似地，对于 $Re_l^* = 260$，可得到 $U^+(1) - U_0^+ \approx 15.2$，而 [98] 的 DNS结果表明 $U^+(1) - U_0^+ \approx 17.0$。将(B.3) 从$Z = 0$ 积分到 $Z = 1$，得到深度平均速度$U_0^+ + U_{mt}$，其中 $U_{mt} = \kappa^{-1}(\log 3 - 2\log 2 + \sqrt{2}\tan^{-1}\sqrt{2}) \approx 2.66$。仅将 (B.3) 积分至 $\mathcal{Z}^+ = 3$，并考虑黏性底层内的实际速度剖面(B.4)，得到黏性修正 $[\frac{9}{2} - \kappa^{-1}(6\log 3 - 3)]\mathrm{Re}_l^{*-1} \approx -4.5\mathrm{Re}_l^{*-1}$，从而得出略为精确的估计$U_{mt} \approx 2.66 - 4.5\mathrm{Re}_l^{*-1}$。该结果预测$\mathrm{Re}_l^* = 150$时$U_{mt} \approx 2.63$，与 [99] 报告的 2.48 值相差 6%。

上述模型的自由参数 δ_l 和U_0^+ 可用于在适用该约束时近似施加零流量条件。为此，我们认为，在液层的下部——从$z = 0$ （满足无滑移条件的位置）延伸至 $z = \delta_l z_0$（剪切应力为零的位置）——微弱的剩余流动类似于具有中心线速度U_0^+的半通道中的流动。在这种流动中，湍流状态下关于摩擦系数的关联式表明，其近似的高度平均速度，即U_{mb}，接近于 $0.85U_0^+$，而相应壁面处的（无量纲）摩擦速度，即 $\mathcal{U}^*$，约为 $0.05|U_0^+|$。因此，假设尽管预计该底部边界层中的雷诺数较低，这些关联式仍能给出合理估计，则零流量条件近似为

$$(1-\delta_l)(U_0^+ + U_{mt}) + \delta_l U_{mb} \approx (1-\delta_l)U_{mt} + (1 - 0.15\delta_l)U_0^+ = 0\,. \tag{B.5}$$

此外，整个液层中的总剪切应力呈线性分布，这意味着

$$\mathcal{U}^{*2} = \frac{\delta_l}{1-\delta_l}\,, \quad \text{hence} \quad U_0^+ \approx -20\left(\frac{\delta_l}{1-\delta_l}\right)^{1/2}\,. \tag{B.6}$$

用上述对U_{mt}的估算求解 (B.5)–(B.6)，得

$$\delta_l \approx 0.017 - 0.06Re_{l0}^{*-1}\,, \quad U_0^+ \approx 2.62 - 4.6Re_{l0}^{*-1}\,, \tag{B.7}$$

其中，$Re_{l0} = z_0 u_l^*/\nu_l$ 是基于界面处的摩擦速度u_l^*和整个液层的厚度z_0定义的雷诺数。

上述研究结果可直接用于初始化液体中的流场。如果无需对流量施加条件，则假设液层底部无剪切且静止。因此，只需设置 $U_0^+ = 0$ 和 $\delta_l = 0$，使单位体积驱动力为$G_l = -\rho_l u_l^{*2}/z_0$，液体表面的摩擦速度$u_l^*$ 为

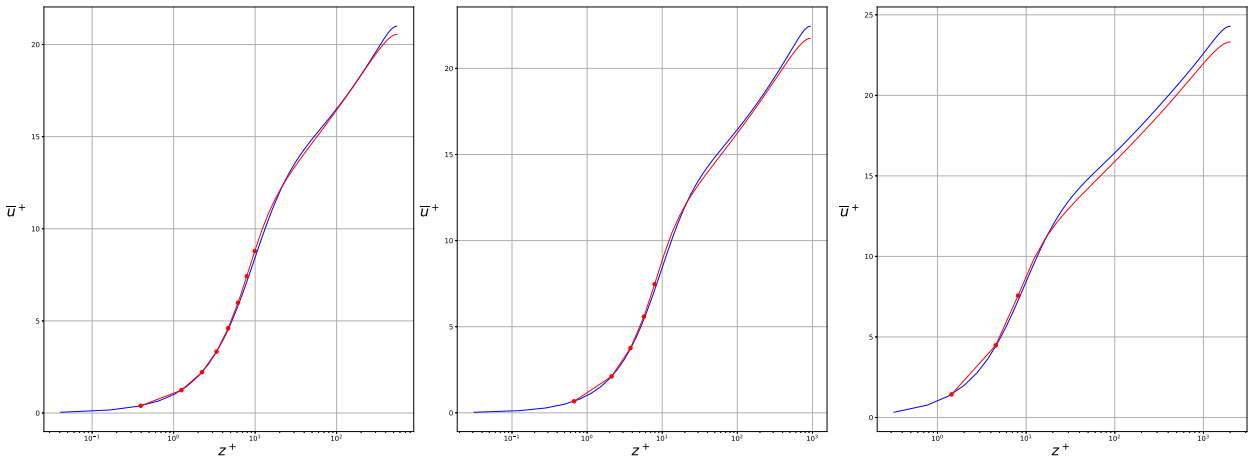
与气流中 $u_l^* = \left(\frac{\rho_a}{\rho_l}\right)^{1/2} u^*$ 的情况相关。该摩擦速度用于将 (B.2) 和 (B.3)- (B.4) 无量纲化，并用相应的估计值初始化涡黏度和速度剖面。在底部壁面，解析速度满足狄利克雷条件 $\langle u \rangle = \mathbf{0}$，而涡黏度满足诺伊曼条件 $n \cdot \nabla \nu_t = 0$，其中 n 为壁面的法向量。如果必须施加零流量条件，则首先利用估计式 (B.7) 求出 δ_l，以确定 $Re_l^* = (1 - \delta_l) Re_{l0}^*$ 和 $G_l = -[(1 - \delta_l) z_0]^{-1} \rho_l u_l^{*2}$。值得注意的是，单位体积驱动力的对应值为 $G_l \approx -1.017 \rho_l u_l^{*2}/z_0$，可与层流区中的 $G_l = -\frac{3}{2} \rho_l u_l^{*2}/z_0$ 相比较。然后，将平面 $z = \delta_l z_0$ 视为以速度 $U_0^+ u_l^*$ 滑动的虚拟底面，其中 U_0^+ 如 (B.7) 所给出。假定法向速度 $\langle u \rangle \cdot n$ 和涡黏度的法向导数 $n \cdot \nabla \nu_t$ 在该虚拟底面上均为零。最后，在整个层 $\delta_l z_0 < z \leq z_0$ 内，按上述方式初始化 $\nu_t(z)$ 和 $u(z)$ 剖面。

附录C. 湍流模型在充分发展槽道流中的表现

我们考虑了平面槽道中的充分发展流动，其特征由摩擦雷诺数 $Re^* = u^* H/\nu$ 表示，其中 h 为槽道半高，u^* 为摩擦速度，与给定的压力梯度 $d\mathcal{P}/dx$ 之间满足关系 $u^* = (-\frac{1}{\rho} d\mathcal{P} dx H)^{1/2}$。我们对该流动进行了模拟，雷诺数最高达到 $Re^* = 2000$，以便将平均速度剖面与 [103] 和 [104] 的直接数值模拟数据进行比较（可在线查阅：https://torroja.dmt.upm.es/channels/）。为此，我们采用从壁面到中心线由 64 个网格单元构成的非均匀网格。该网格通过指定等比数列生成，最小网格尺寸为 $\Delta y_{min} = 4.4 \times 10^{-3} H$，公比为 1.035。根据这些参数，最靠近壁面的网格单元高度从 $Re^* = 550$ 时的 $0.79\delta_\nu$（图 C.7(a)）变化至 $Re^* = 2003$ 时的 $2.88\delta_\nu$（图 C.7(c)），其中 $\delta_\nu = \nu/u^*$ 为近壁长度尺度。我们特意在所有 Re^* 下保持网格不变，以检验模型对黏性底层网格分辨率不足的敏感性。计算初始条件设为与给定压力梯度相对应的泊肃叶速度半剖面，以及均匀的非零湍流黏度 $\tilde{\nu}_t(x, t = 0) = 10\nu$。图 C.7 显示，无论 Re^* 为何，计算得到的 $u(z)$ 剖面均与直接数值模拟数据吻合良好。在最高 Re^* 下，观察到对数层范围内的速度略有低估，此时仅有一个网格点位于黏性底层内。尽管近壁分辨率较低，速度剖面在缓冲层内仍得到了较为准确的近似，例如直到 $z^+ \approx 20$（其中 $z^+ = z/\delta_\nu$），而在整个对数层内，给定 z^+ 处两种预测结果之间的差异不超过 3%。

附录D. 相对波长对波状壁面流动中湍流模型表现的影响

在针对波状壁面上流动的测试案例框架内，我们进行了多次计算，其中改变了波纹的相对波数 $k^+ = k\nu/u^*$，以量化 k^+ 的范围，在该范围内，湍流模型的预测可被认为是准确的。将波状壁面上的垂直位置定义为 $z_w(x) = a \cos kx$，壁面剪切应力（以 ρu^{*2} 归一化）可写成 $\tau_w(x) = \tau_w + \hat{\tau} \cos(kx + \hat{\phi})$ 的形式。图 D.8 展示了相位角 $\hat{\phi}$ 和振幅 $\hat{\tau}$ 随 k^+ 的变化，并将其与 [65] 中汇集的实验数据以及同一参考文献中提出的“松弛”混合长度模型的预测进行了比较。在该模型中，通常用于在非常接近壁面处（例如 $z^+ < 25$）获得准确平均速度剖面的 VanDriest 参数经过了修正，以考虑流向压力梯度的影响。在给定流向位置处的相关压力梯度，被认为相对于实际的局部压力梯度具有非零的相位偏移。这一相位偏移源于壁面波纹对近壁湍流结构施加的周期性强迫所产生的非局部影响，其通过一个描述相应松弛过程的一阶微分方程进行估算。该修正的混合长度模型包含另外两个与 k^+ 无关的参数，这些参数经过调节，以便在整个 k^+ 范围内尽可能地与实验结果吻合。图 D.8 中以实线表示了该松弛模型的预测结果。可以看到，Spalart-Allmaras 模型给出的相位角 $\hat{\phi}$ 与这些预测结果符合得非常好，直至 $k^+ \approx 8 \times 10^{-3}$。相比之下，对于 $k^+ \lesssim 6 \times 10^{-3}$，Spalart-Allmaras 模型预测 $\hat{\phi}$ 随 k^+ 减小，而实验数据和松弛模型的预测表明，随着 k^+ 减小，相位角持续增大，直至 $k^+ \approx 1$。5×10^{-3} 这种缺陷实际上是所有基于涡黏性闭合的湍流模型所共有的，只有采用二阶雷诺应力模型才能消除。事实上，涡黏性概念假定，



图C.7：使用相同网格计算的三个不同雷诺数下平面槽道中的平均速度剖面。（a）：$Re^* = 550$；（b）：$Re^* = 934$；（c）：$Re^* = 2003$。红线：当前结果；蓝线：来自 [103]（$Re^* = 550$ 和 934）以及 [104]（$Re^* = 2003$）的直接数值模拟数据。红色圆点表示近壁区$z^+ \leq 10$ 中的网格点。

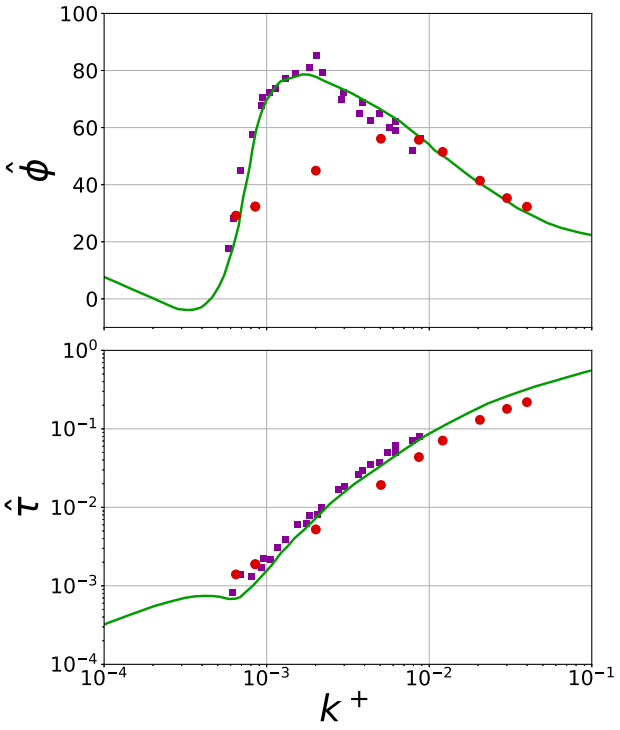


图 D.8：波状壁面上未发生分离的湍流流动中壁面应力的相位角（上）和幅值（下）的变化。●：给出 $ak = 0$的预测。097；■：实验数据来自 [65]，其中 $ak = 0$。035；——：松弛模型 [65]。

雷诺应力张量与平均流的局部应变率成正比。只要壁面引入的畸变不致使局部关系失效，便可继续采用这一关系。

波纹变化的速度足够快，但在超过某一临界波长后便不再有效，此时非局部效应变得显著 [14； 43]。正是这种非局部性，通过 [65]的修正混合长度模型中“松弛”压力梯度的影响被人为引入。幸运的是，本研究所考虑的最大波长对应于$k^+ = 5 \times 10^{-3}$，在此位置，单方程模型对ˆ ϕ 的低估仅为 10°。因此，预计这一缺陷不会显著改变短风成波增长的预测结果，例如第7.3节所研究的波。相比之下，底部子图清楚地表明，该模型始终低估剪切应力变化的幅度，这与第 6 节的观察结果一致。在当前背景下，这大概是其最严重的局限性。

参考文献

[1] G. J. Komen, M. Cavaleri, M. Donelan, K. Hasselmann, S. Hasselmann, P. A. E. M. Janssen，《海洋波浪动力学与建模》，剑桥大学出版社，剑桥，1994年。[2] I. S. F. Jones, Y. Toba（编），《海洋风应力》，剑桥大学出版社，剑桥，2001年。[3] P. Janssen，《海洋波浪与风的相互作用》，剑桥大学出版社，剑桥，2004年。[4] O. M. Phillips，湍流风生成波浪，《流体力学杂志》2（1957）417–445。[5] K. K. Kahma, M. A. Donelan，湍流风生成波浪，《流体力学杂志》192（1988）339–364。[6] J. W. Miles，剪切流生成表面波，《流体力学杂志》3（1957）185–204。[7] J. W. Miles，剪切流生成表面波。第2部分，《流体力学杂志》6（1959）568–582。

[8] J. W. Miles，剪切流生成表面波。第4部分，《流体力学杂志》13（1962）423–448。[9] M. J. Lighthill，风生成波浪数学理论的物理诠释，《流体力学杂志》14（1962）385–398。[10] J. W. Miles，剪切流生成表面波。第5部分，《流体力学杂志》30（1967）163–175。[11] S. J. Jacobs，渐进水波上湍流的渐近理论，《流体力学杂志》174（1987）69–80。[12] C. A. van Duin, P. A. E. M. Janssen，湍流气流生成表面重力波的解析模型，《流体力学杂志》236（1992）197–215。[13] J. W. Miles，重新探讨表面波生成，《流体力学杂志》256（1993）427–441。[14] S. E. Belcher, J. C. R. Hunt，缓慢移动波浪上方的湍流剪切流，《流体力学杂志》251（1993）109–148。[15] J. W. Miles，表面波生成：黏弹性模型，《流体力学杂志》322（1996年）131–145。[16] J. R. D. Francis，波动与自由油面上的气动阻力，《哲学杂志》45（1954）695–702。[17] J. C. Gottifredi, G. J. Jameson，风作用下液体表面短波的增长，《伦敦皇家学会会刊A辑：数学、物理与工程科学》319（1970）373–397。[18] A. Paquier, F. Moisy, M. Rabaud，黏度对风浪生成的影响，《物理评论·流体》1（2016）083901。[19] M. Aulnette, M. Rabaud, F. Moisy，风驱动的黏性孤子，《物理评论·流体》4（2019）084003。[20] M. Aulnette, J. Zhang, M. Rabaud, F. Moisy，高黏度液体上的 Kelvin–Helmholtz 不稳定性与黏性孤子的形成，《物理评论·流体》7（2022）014003。[21] F. Moisy, M. Rabaud, K. Salsac，一种测量液体界面地形的合成纹影法，《实验流体力学》46（2009）1021–1036。[22] M. Fulgosi, D. Lakehal, S. Banerjee, V. De Angelis，具有可变形界面的剪切气水流中湍流的直接数值模拟，《流体力学杂志》482（2003）319–345。[23] S. Komori, R. Kurose, K. Iwano, T. Ukai, N. Suzuki，剪切气液界面处风驱湍流及标量传输的直接数值模拟，《湍流杂志》11（2010）1–20。[24] D. Yang, L. Shen，基于直接模拟研究各种波动边界上方的湍流，《流体力学杂志》650（2010）131–180。[25] F. Zonta, A. Soldati, M. Onorato，逆向气水湍流中重力–毛细波的增长与谱，《流体力学杂志》777（2015）245–259。[26] X. Hao, L. Shen，采用风场大涡模拟和非线性波相位分辨模拟研究风浪耦合，《流体力学杂志》874（2019）391–425。[27] T. Li, L. Shen，风浪生成的主要阶段，《流体力学杂志》934（2022）A41。[28] W. T. Tsai，自由表面下湍流剪切层演变与结构的数值研究，《流体力学杂志》354（1998）239–276。[29] M. Lin, C. Moeng, W. Tsai, P. P. Sullivan, S. E. Belcher，风浪生成过程的直接数值模拟，《流体力学杂志》616（2008）1–30。[30] Z. Yang, B.-Q. Deng, L. Shen，破碎波上方风湍流的直接数值模拟，《流体力学杂志》850（2018）120–155。[31] J. Wu, L. Deike，黏性状态下的风浪增长，《物理评论·流体》6（2021）094801。[32] J. Wu, S. Popinet, L. Deike，利用完全耦合的直接数值模拟重新审视风浪增长，《流体力学杂志》951（2022）A18。[33] P. P. Sullivan, J. B. Edson, , T. Hristov, J. C. McWilliams，非平衡表面波上方大气海洋边界层的大涡模拟与观测，《大气科学杂志》65 (2008) 1225–1245。[34] W.-Y. Zhang, W.-X. Huang, C.-X. Xu，沿流向传播的波状边界上方湍流中的超大尺度运动，《物理评论·流体》4 (2019) 054601。[35] P. P. Sullivan, J. C. McWilliams, E. G. Patton，移动波谱上方海洋大气边界层的大涡模拟，《大气科学杂志》71 (2014) 4001–4027。[36] P. P. Sullivan, M. L. Banner, R. P. Morison, W. L. Peirson，强风驱动下陡峭定常波与非定常波上的湍流流动，《物理海洋学杂志》48 (2018) 3–27。[37] G. Deskos, J. C. Y. Lee, C. Draxl, M. A. Sprague，海洋大气边界层大涡模拟中风浪耦合模型综述，《大气科学杂志》78 (2021) 3025–3045。[38] E. Labourasse, D. Lacanette, A. Toutant, P. Lubin, S. Vincent, O. Lebaigue, J.-P. Caltagirone, P. Sagaut，迈向等温两相流的大涡模拟：控制方程与先验测试，《国际多相流杂志》33 (2007) 1–39。[39] C. Mastenbroek, V. K. Makin, M. H. Garat, J. P. Giovanangeli，水波上方气流中湍流快速畸变的实验证据，《流体力学杂志》318 (1996年) 273–302。[40] J. F. Meirink, V. K. Makin，水波上方湍流气流中低雷诺数效应的建模，《流体力学杂志》415 (2000) 155–174。[41] P. Y. Li, D. Xu, P. A. Taylor，水波上方湍流气流的数值模拟，《边界层气象学》95 (2000) 397–425。[42] P. R. Gent, P. A. Taylor，水波上方气流的数值模型，《流体力学杂志》77 (1976年) 105–128。[43] S. E. Belcher, J. C. R. Hunt，山丘和波浪上的湍流，《流体力学年度评论》30 (1998) 507–538。[44] A. Y. Benilov, B. N. Filyushkin，将线性滤波方法应用于海洋表层波动分析，《苏联科学院院报：大气与海洋物理学》6 (1970) 477–482。[45] L. Thais, J. Magnaudet，实验室风生水波下方脉动运动的三重分解，《地球物理研究杂志》100 (1995) 741–755。[46] T. Hristov, C. Friehe, S. Miller，海洋波浪上方气流中的波相干场：识别湍流中隐藏的协同行为，《物理评论快报》81 (1998) 5245–5248。[47] G. Caulliez, N. Ricci, R. Dupont，第一批可见风浪的生成，《物理流体》10 (1998) 757–759。[48] F. Veron, W. K. Melville，风驱动水面的稳定性与转捩实验，《流体力学杂志》446 (2001) 25–65。[49] T. B. Benjamin，波状边界上的剪切流，《流体力学杂志》6 (1959) 161–205。[50] A. A. Townsend，水波变形表面上方深层湍流边界层中的流动，《流体力学杂志》55 (1972) 719–735。[51] A. Ayet, B. Chapron，风浪与大气湍流的动力耦合：理论与现象学模型综述，《边界层气象学》183 (2022) 1–33。[52] J. Brackbill, D. Kothe, C. Zemach，表面张力建模的连续介质方法，《计算物理学杂志》100 (1992) 335–354。[53] P. R. Spalart, S. Allmaras，适用于空气动力流动的一方程湍流模型，《航空研究》1 (1992) 5–21。 V. W. Nee, L. S. G. Kovaznay，湍流剪切流的简单现象学理论，

论，《物理流体》12 (1969) 473–484。[55] J. Magnaudet, M. Rivero, J. Fabre，刚性球体或球形气泡周围的加速流。第一部分：稳态应变流，《流体力学杂志》284 (1995) 97–135。[56] I. Calmet, J. Magnaudet，湍流槽道流中高施密特数传质的大涡模拟，《物理流体》9 (1997) 438–455。[57] T. Bonometti, J. Magnaudet，不可压缩两相流的界面捕捉方法：验证及其在气泡动力学中的应用，《国际多相流杂志》33 (2007) 109–133。[58] W. F. Noh, P. Woodward，SLIC（简单线界面计算），载于：A. I. van Dooren, P. J. Zandbergen（编），《物理学讲义》，第59卷，施普林格，纽约，1976年，页330–340。[59] D. P. Zilker, G. W. Cook, T. J. Hanratty，固体波状壁面的波幅对湍流的影响。第一部分：未分离流，《流体力学杂志》82 (1977) 29–51。[60] C. Thorsness, P. E. Morrisroe, T. J. Hanratty，线性理论与固体波上剪切应力变化测量结果的比较，《化学工程科学》33 (1978) 579–592。[61] K. A. Frederick, T. J. Hanratty，固体波上湍流未分离流的速度测量，《实验流体力学》6 (1988) 477–486。[62] D. P. Zilker, T. J. Hanratty，固体波状壁面的波幅对湍流的影响。第二部分：分离流，《流体力学杂志》90 (1979) 257–271。[63] J. Buckles, T. J. Hanratty, R. J. Adrian，大振幅波状表面上的湍流，《流体力学杂志》140 (1984) 27–44。[64] J. D. Kuzan, T. J. Hanratty, R. J. Adrian，固体波上出现初始分离的湍流，《实验流体力学》7 (1989) 88–98。[65] J. Abrams, T. J. Hanratty，波状表面上湍流的松弛效应，《流体力学杂志》151 (1985) 443–455。[66] V. M. Segunda, S. J. Ormiston, M. F. Tachie，水平槽道中波状壁面上发展中的湍流的实验与数值研究，《欧洲力学杂志B辑：流体》68 (2018) 128–143。[67] N. Kruse, A. G¨unther, P. R. von Rohr，波状壁面上湍流中大尺度结构的动力学，《流体力学杂志》485 (2003) 87–96。[68] C. Wagner, S. Kuhn, P. R. von Rohr，波状壁面流动中点源的标量输运，《实验流体力学》43 (2007) 261–271。[69] A. M. Hamed, A. Kamdar, L. Castillo, L. P. Chamorro，二维和三维大尺度波状壁面上的湍流边界层，《物理流体》27 (2015) 106601。[70] C. Maass, U. Schumann，波状边界上分离湍流的直接数值模拟，载于：E. H. Hirschel（编），《数值流体力学札记》，第52卷，1996年，页227–241。[71] V. De Angelis, P. Lombardi, S. Banerjee，波状壁面上湍流的直接数值模拟，《物理流体》9 (1997) 2429–2442。[72] P. Cherukat, Y. Na, T. J. Hanratty, J. B. McLaughlin，充分发展湍流在波状壁面上流动的直接数值模拟，《理论与计算流体动力学》11 (1998) 109–134。[73] H. S. Yoon, O. A. El-Samni, A. T. Huynh, H. H. Chun, H. J. Kim, A. H. Pham, I. R. Park，波幅对波状槽道中湍流的影响：直接数值模拟研究，《海洋工程》36 (2009) 697–707。[74] D. S. Henn, R. I. Sykes，波状表面上流动的大涡模拟，《流体力学杂志》383 (1999) 75–112。[75] J. Cui, V. C. Patel, C. L. Lin，利用大涡模拟中的力场预测粗糙表面上的湍流，ASME《流体工程学报》125 (2003) 2–9。[76] Y. S. Chang, A. Scotti，波纹表面上非定常湍流的建模：雷诺平均纳维-斯托克斯方程 (RANS) 与大涡模拟 (LES) 的比较，《地球物理研究杂志：海洋》109 (2004) C09012。[77] C. Wagner, S. Kenjeres, P. R. von Rohr，波状表面上强制对流的动量及壁面热传递动态大涡模拟，《湍流》12 (2011) 1–27。[78] V. M. Segunda, S. Ormiston, M. Tachie，通道内波状壁面上湍流的数值分析，载于：《ASME 2016 流体工程部夏季会议论文集》，第 1A 卷，2016 年，第 FEDSM2016–7712、V01AT03A014 页。[79] V. C. Patel, J. T. Chon, J. Y. Yoon，波状壁面通道内的湍流，《ASME《流体工程学报》》113 (1991) 579–586。[80] S. Knotek, M. Jicha，波状固体表面上流动的模拟：湍流模型比较，载于：《EPJ 网络会议——EFM11》，第 25 卷，2012 年，第 01040 页。[81] K. Chaib, D. Nehari, N. Sad Chemloul，粗糙表面上湍流及热传递的 CFD 模拟，载于：《能源进展》74 卷，2015 年，第 909–918 页。[82] M. Y. Su, M. Bergin, P. Marler, R. Myrick，陡峭重力波列非线性不稳定性及演变的实验，《流体力学杂志》124 (1982) 45–72。[83] B. M. Lake, H. C. Yuen, H. Rungaldier, W. E. Ferguson，陡峭重力波列非线性不稳定性及演变的实验，《流体力学杂志》83 (1977) 49–74。[84] N. E. Huang, S. R. Long, S. Zheng，非线性波演化中频率下移的机制，《应用力学进展》32 (1996) 59–117。[85] W. K. Melville，深水波的不稳定性与破碎，《流体力学杂志》115 (1982) 165–185。[86] K. Trulsen, K. B. Dysthe，深水盆地中三维波列的频率下移，《流体力学杂志》352 (1997) 359–373。[87] F. Dias, C. Kharif，非线性重力波与毛细重力波，《流体力学年评》31 (1999) 301–346。[88] T. Hara, C. C. Mei，风作用下窄频带表面波的频率下移，《流体力学杂志》230 (1991) 429–477。[89] T. Hara, C. C. Mei，风对缓变重力-毛细波非线性演化的影响，《流体力学杂志》267 (1994) 221–250。[90] M. S. Longuet-Higgins，深水中有限振幅重力波的不稳定性。II. 次谐波，《伦敦皇家学会会刊 A 辑：数学、物理与工程科学》360 (1978) 489–505。[91] M. S. Longuet-Higgins，深水中有限振幅重力波的不稳定性。I. 超谐波，《伦敦皇家学会会刊 A 辑：数学、物理与工程科学》360 (1978) 471–488。[92] S. R. Allmaras, F. T. Johnson, P. R. Spalart，Spalart-Allmaras 湍流模型实现的修订与说明，载于：《第七届国际计算流体动力学会议论文集》，2012 年，第 ICCFD7–1902 页。[93] P. R. Spalart, M. Shur，关于使湍流模型对旋转和曲率敏感化，《航空航天科学与技术》5 (1997) 297–302。[94] M. L. Shur, M. K. Strelets, A. K. Travin, P. R. Spalart，旋转和弯曲通道中的湍流建模：评估 Spalart-Shur 修正，《AIAA 杂志》8 (2000) 784–792。[95] A. Hellsten，Menter 的 k-ω SST 湍流模型的若干改进，载于：《第 29 届 AIAA 流体动力学会议论文集》，1998 年，第 A98–32817 页。[96] Q. Zhang, Y. Yang，Spalart-Allmaras 湍流模型的一种更简便的新型旋转/曲率修正方法，《中国航空学报》26 (2013) 326–333。

[97] W. McLeish, G. E. Putland，水面顶部一毫米范围内风驱流剖面的测量，《物理海洋学杂志》5 (1975) 515–518. [98] W.-T. Tsai, S.-M. Chen, C.-H. Moeng，应力驱动自由表面湍流剪切流演化与结构的数值研究，《流体力学杂志》545 (2005) 163–192. [99] L. I. Enstad, R. Nagaosa, G. Alendal，中性和稳定分层条件下应力驱动界面下方的低剪切湍流结构，《物理流体》18 (2006) 055106. [100] R. D. Cess，关于湍流管流热传递的文献综述，技术报告 8-0529-R24，西屋研究公司 (1958). [101] W. C. Reynolds, W. G. Tiederman，湍流通道流的稳定性及其在 Malkus 理论中的应用，《流体力学杂志》27 (1967) 253–272. [102] S. Pirozzoli，重新审视湍流壁层外层中的混合长度假说：平均流与壁面摩擦，《流体力学杂志》745 (2014) 378–397. [103] J. C. Del Alamo, J. Jim´enez，湍流通道中超大各向异性尺度的谱，《物理流体》15 (2003) L41–L44. [104] S. Hoyas, J. Jim´enez，湍流通道中速度脉动的标度关系，直至 Re_τ=2003，《物理流体》18 (2006)。