arXiv:2304.04885v1 [physics.flu-dyn] 10 Apr 2023

Galerkin 系统闭合建模的前向灵敏度分析与模态相关控制

Shady E. Ahmed[a], Omer San[a,*]

[a]*School of Mechanical and Aerospace Engineering, Oklahoma State University*

摘要

基于投影的方法进行模型降阶，往往会损失一些对保留尺度动力学有重要影响的特征。因此，原始系统与截断系统的预测轨迹之间会出现偏差。我们提出一种框架，在降阶模型（ROM）的潜在空间中施加连续时间控制信号，以补偿截断的影响。我们依据能量传递原理，利用参数化模型设置控制输入。我们的方法通过观测系统在物理空间中的行为，并利用投影算子将反馈信号限制在潜在空间中。随后，我们运用前向灵敏度方法（FSM），推导反馈与所需模态相关控制之间的关系。我们 测试在两个测试案例中评估所提方法的性能，分别对应高雷诺数下的黏性 Burgers 方程和涡旋合并问题。结果表明，在数据密集和数据稀疏区间，施加 FSM 控制后的降阶模型轨迹均与目标值高度吻合。

关键词： 降阶模型、前向敏感性、逆问题、潜在控制、

外环应用, 稀疏传感器

*Omer San*Email addresses:* shady.ahmed@okstate.edu (Shady E. Ahmed), osan@okstate.edu (Omer San)

1. 引言

工程师总是倾向于提高增益并降低成本。例如，机翼翼型的设计经过优化，以增加升力、减小阻力并增强稳定性。设计优化过程涉及多次前向运行，用于模拟系统对不同输入、参数和运行条件的响应。这种多查询特性通常被称为外环应用，而单次前向模拟则称为内环计算。对于高维系统（例如流体流动），此类计算所需的墙钟时间与设计周期以及实时控制所要求的周转时间不相容。这种计算负担阻碍了业界常规使用模拟工具。因此，人们通常寻求轻量级替代模型，以近似有效动力学，并在不损害计算流程完整性的情况下，降低内环计算的计算成本。 [9, 6, 33, 8, 7, 54, 55, 72, 27, 59, 32, 48, 29]。

随着数据驱动工具和开源软件库的出现，机器学习（ML）算法已被用于仅凭数据构建计算开销低的仿真器。复杂的输入—输出关系是在一个称为训练的计算密集型过程中，从预先收集的系统动力学记录中学习得到的。近年来，人们越来越关注如何融入现有知识来构建混合式物理信息机器学习框架 [63, 31, 17, 73], ，例如考虑特征增强 [40], ，将简化模型的预测用作偏置 [53, 51, 52],，采用迁移学习机制 [19, 23, 15], ，设计复合网络 [41],，实现物理信息神经网络 [57, 30] 和残差强迫 [21], ，将物理量守恒定律或解析约束施加于神经网络[42, 11, 24], ，以及嵌入张量不变性与等变性 [38, 75, 46, 70]。

或者，也可以将基于投影的降阶模型（PROM）视为一种受物理约束的机器学习方法，用于模拟系统的动力学。具体而言，通过模态分析技术识别有效的低秩子空间，从而选取一组能够代表主要重复结构的基函数或模态。通过将控制方程伽辽金投影到相应的基函数上，施加底层物理约束。为确保计算效率，仅保留少量基函数来构建Galerkin降阶模型（GROM）。模态分解与投影技术相结合，已广泛应用于构建流动控制系统中的轻量级计算模型[45, 13, 49]。然而，要充分描述目标系统，所需的模态数量可能相当多。对于非线性强或参数空间变化极大的系统，这一点尤为明显。对于这类系统，GROM 无法准确表示系统的轨迹。此外，即使原始系统稳定，GROM 也可能产生长期不稳定性

因此，通过引入闭合项、稳定化方案或正则化项来修正 GROM动力学，是将其应用于可靠框架中的关键步骤。

闭合问题已在流体动力学和流动控制领域得到广泛研究。人们通常会假定结构和/或函数关系，然后施加物理和数学论证，以定义所需的参数化形式。或者，我们将闭合建模问题视为在潜在空间中施加控制输入（即潜在控制或潜在作用），以抵消GROM截断所引发的不稳定性和不准确性。具体而言，我们利用连续时间控制信号，通过采用湍流科尔莫戈洛夫能量级联和能量守恒原理推导低秩闭合模型，从而校正并稳定GROM轨迹。我们将预报误差——即GROM预测与采集的传感器数据之间的差异——作为反馈，并采用变分方法更新控制输入。此外，我们利用前向灵敏度方法（FSM）推导反馈与期望控制参数之间关系的一阶估计 [35]。

在处理确定性模型时，无论模型是连续的还是离散的，都可以采用 FSM 方法，有效修正由初始条件、边界条件和模型参数（统称为控制）不准确所导致的预报误差 [36]。具体而言，FSM 框架具有一项显著优势，即无需采用反向伴随公式。相反，它将动态数据同化问题转化为静态的确定性逆问题，从而构成该方法的核心原则。FSM 技术采用线性泰勒级数近似，为控制参数推导灵敏度动力学，随后促进前向意义下递推矩阵方程的转化。尽管对于高维状态问题而言，这些递推关系的计算可能具有较高的计算成本，但基于潜在空间投影的模型使 FSM 方法具有相当大的吸引力。

我们的方法通过采用一种新颖的策略，在降阶模型层面优化控制输入参数，解决欠分辨率区间中的闭合问题，从而能够仅使用少量模态更准确地描述复杂的物理现象。 我们强调，所提出框架的一个关键特点是能够灵活处理存在于不同空间中的状态变量和观测量。例如，原始系统具有定义在物理空间中的高维状态变量。相比之下，降阶系统具有定义在低秩子空间中的潜在状态变量。最后，观测输出可以是与任一空间相关的不同可测量量。从概念上看，这与降阶观测器 [18]和函数

观测器 [34, 60, 44] 有关，这些观测器由控制领域发展而来。我们使用对应于 Bateman–Burgers 系统和大雷诺数下涡合并的半离散高维流动问题，在传感器数据丰富和数据稀疏区间中展示了所提出的框架。

本文结构如下。第 2 节介绍如何结合本征正交分解（第 2.1 节）和伽辽金投影（第 2.2 节）为高维动力系统构建 GROM 的关键要素。第 3 节正式定义闭合问题，第 4 节介绍所提出的基于 FSM 的控制方法。第 5 节给出数值实验及相应讨论。最后，第 6 节总结本研究的主要结论，并展望未来工作。

2. Galerkin 降阶模型

我们考虑如下定义的自治动力系统：

$$\dot{\boldsymbol{u}} = \mathcal{F}(\boldsymbol{u}), \tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^N$ 是状态向量（例如，速度场在离散网格点处的值），$\mathcal{F}\colon \mathbb{R}^N \times \to \mathbb{R}^N$ 表示系统的动力学（例如，纳维–斯托克斯方程的空间离散形式）。值得注意的是，在降阶模型研究中，式（1）通常称为全阶模型（FOM）或高维模型（HDM）。由于求解具有数百万个自由度（DOFs）的大规模系统的式（1）计算复杂度极高，全阶模型不适用于多查询应用（例如，逆问题和模型预测控制）。一种可行的缓解策略是将状态向量 $\boldsymbol{u}$ 替换为低秩近似，即利用少量能够捕捉系统主要特征的基函数来近似该解。

2.1. Proper Orthogonal Decomposition

本征正交分解（POD）是模态分解技术之一，过去几十年来已成功用于为关注量 [66, 5, 10, 26, 16, 37, 71, 72] 定义最优低秩基。本征正交分解过程首先收集系统在不同时间的行为状态（称为流场快照），如下所示：

$$\mathcal{U} := \{\boldsymbol{u}^{(1)}, \boldsymbol{u}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{u}^{(K)}\}, \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{u}^{(i)}$ 表示将 i^{th} 快照重塑为列向量。流场 $\boldsymbol{u}$ 的雷诺分解可写为:

$$\boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{u}', \tag{3}$$

其中， $\bar{\boldsymbol{u}}$ 是通常定义如下的集合平均参考场:

$$\bar{\boldsymbol{u}} = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K} \boldsymbol{u}^{(i)}, \tag{4}$$

因此， $\boldsymbol{u}'$ 表示该场的脉动分量。本征正交分解（使用快照法）旨在为 $\mathcal{U}'$:
$= \{\boldsymbol{u}'^{(1)}, \boldsymbol{u}'^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{u}'^{(K)}\}$ 的张成空间寻找低秩基函数，方法是定义相关矩阵 $\mathbf{C}$
$\in \mathbb{R}^{K\times K}$ 如下:

$$[\mathbf{C}]_{ij} = (\boldsymbol{u}'^{(i)}, \boldsymbol{u}'^{(j)}), \tag{5}$$

其中（$\cdot,\cdot$）表示适当的内积。对$\mathbf{C}$进行特征值分解可得到一组特征向量$\mathbf{V}$ $= [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}2, \ldots$
$\mathbf{v}_K]$ 以及相应的特征值$\mathbf{\Lambda} = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_K]$，如下:

$$\mathbf{CV} = \mathbf{V\Lambda}. \tag{6}$$

为实现最优基函数选择，特征值按绝对值降序存储。（即， $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_K \geq 0$）。
POD基函数 $\mathbf{\Phi} = \{\boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}_2, \ldots \boldsymbol{\phi}_K\}$ 可按如下方式恢复:

$$\boldsymbol{\phi}_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\sum_{j=1}^{K} \mathbf{v}_{i,j}\boldsymbol{u}'^{(j)}, \tag{7}$$

其中 $\mathbf{v}_{i,\ j}$ 是 j^{th} 特征向量的 i^{th} 分量。最后， n^{th} 阶POD近似 $\boldsymbol{u}$ 通过仅考虑前 n 个基函数得到，如下所示:

$$\boldsymbol{u} \approx \bar{\boldsymbol{u}} + \sum_{i=1}^{n} a_i\boldsymbol{\phi}_i. \tag{8}$$

2.2. 伽辽金投影

在式（8）中，平均场 $\bar{\boldsymbol{u}}$ 和基函数 $\mathbf{\Phi}$ 是在离线阶段根据收集到的快照计算得出的。为了估计任意时刻和/或参数下的 $\boldsymbol{u}$ ，需要一个描述系数 $\boldsymbol{a} = [a_1, a_2, \ldots, a_n]^T$变化的模型。通过将式（1）所描述的动力系统中的 $\boldsymbol{u}$ 替换为式（8）中的 n^{th} 阶本征正交分解近似，然后与任意本征正交分解模态取内积，可得到伽辽金降阶模型（GROM），并由此得到以下常微分方程系统。

微分方程:

$$\dot{a}_k = \left(\mathcal{F}(\bar{\boldsymbol{u}} + \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{\phi}_i), \boldsymbol{\phi}_k \right), \quad \text{for } k = 1, 2, \ldots, n. \tag{9}$$

我们注意到，方程（9）左端的简化利用了本征正交分解基函数的正交性（即 $(\boldsymbol{\phi}_i, \boldsymbol{\phi}_j) = \delta_{ij}$ 其中 δ_{ij} 为克罗内克 δ）。不失一般性，我们考虑以下不可压缩纳维–斯托克斯方程（NSE）作为示例:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} &= -\nabla p + \nu \Delta \boldsymbol{u}, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{u} &= 0, \end{aligned} \tag{10}$$

其中 $\boldsymbol{u}$ 是速度矢量场， p 是压力场，而 ν 是运动黏度。这种形式的 NSE 涵盖了大量具有二次非线性和二阶耗散的流动问题的主要特征。在结果部分，我们展示了所提出方法在一维 Burgers 问题以及由涡量输运方程描述的二维涡旋合并流动问题中的适用性。对方程（10）应用 Galerkin 方法，得到的 GROM 如下:

$$\dot{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{N} \boldsymbol{a}, \tag{11}$$

其中， $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$、 $\boldsymbol{L} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和 $\boldsymbol{N} \in \mathbb{R}^{n \times n \times n}$ 分别表示全阶模型算子与本征正交分解基函数内积后得到的常数项、线性项和非线性项。

3. 闭合问题

由于模态截断（即在方程 (8) 中使用 $n \ll K$），方程 (9) 未能捕捉被截断尺度对已解析尺度的影响。因此，得到的 GROM 无法准确表征降阶模型变量 $\boldsymbol{a}$的动力学。以往研究表明，即使实际系统稳定，GROM 也会产生不准确、有时甚至不稳定的行为 [25]。因此，研究工作主要致力于开发修正 GROM 轨迹的技术，包括利用闭合和/或正则化方案修正和/或稳定 GROM 的方法 [67]。如第 1 节所述，我们将调整 GROM 轨迹的过程视为一项控制任务，并在降阶模型的潜在空间中设置一个计算执行器。

为此，我们通过添加控制输入 $\boldsymbol{c}(t) = [c_1, c_2, \ldots, c_n]^T$ 来修改式 (11)，如下

所示:

$$\dot{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{N}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}(t). \tag{12}$$

控制 $\boldsymbol{c}$ 的目标是引导 GROM 的预测趋近于如下定义的目标轨迹:

$$\widehat{a}_k(t) = \Big(\boldsymbol{u}(t) - \bar{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{\phi}_k\Big), \tag{13}$$

$\widehat{\cdot}$其中，上标（$\cdot$）表示目标值。可以验证，使用 POD 基函数 $\boldsymbol{\phi}_k$ 的式 (13) 中给出的轨迹，在所有秩为 n （或更低） [26]的可能重构中，具有最小的近似误差。能够使 $\boldsymbol{a}$ 的值恰好等于式 (13) 中最优值的控制输入可定义如下:

$$c_k(t) = \Big(\mathcal{F}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{\phi}_k\Big) - \Big(\mathcal{F}(\bar{\boldsymbol{u}} + \sum_{i=1}^{n} a_i\boldsymbol{\phi}_i), \boldsymbol{\phi}_k\Big). \tag{14}$$

式 (14) 本质上可得:

$$\dot{a}_k = \Big(\mathcal{F}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{\phi}_k\Big), \tag{15}$$

这是关于 $\boldsymbol{a}$ 动力学的精确方程（即没有截断）。然而需要指出，式 (14) 在实践中并无用处，因为它要求在每个时间步求解全阶模型，以计算 $\boldsymbol{u}$ 。因此，需要寻找其他近似模型，根据降阶模型子空间中的可用信息（即 $\{a_k, \phi_k\}_{k=1}^n$）来估计 $\boldsymbol{c}$。考虑降阶模型截断对降阶尺度自身动力学的影响，通常称为闭合问题。

ROM 闭合模型的发展在很大程度上受到湍流建模，尤其是大涡模拟（LES）研究的影响。例如，类比 POD 模态与傅里叶模态，人们通常假设高阶模态（即 $\{\phi_k\}_{k>n}$）负责耗散能量。反过来，截断这些模态会导致能量在系统中累积并引发不稳定性。在这方面，通过涡黏性引入人工耗散，在提高 ROM 精度方面取得了显著成效 [12, 3, 74, 61]。尽管如此，涡黏性项的确定一直是一项重大挑战。一些研究通过穷举搜索选择最优值，另一些研究则借鉴了先进的 LES 模型[1], ，例如 Smagorinksy 模型 [3, 62] 或其动态变体 [74, 56]。Noack 等人 [45] 采用有限时间热力学方法，通过匹配模态能量传递效应来量化非线性涡黏性。在 [14]中提出了一种显著不同的闭合模型，即在 ROM 方程中加入线性阻尼项。该模型

通过能量守恒分析，利用收集到的快照集合预先确定。

本研究借鉴科尔莫戈洛夫能量级联和能量守恒原理的概念，定义模态截断对降阶模型动力学的影响。为了推导闭合模型的形式，我们向方程（10）中添加线性摩擦项和扩散项的组合，如下所示：

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = -\nabla p + \nu \Delta \boldsymbol{u} + \gamma \boldsymbol{u} + \beta \Delta \boldsymbol{u}, \tag{16}$$

其中， γ 和 β 分别为摩擦参数和扩散参数。将式（16）投影到 POD 子空间上，得到 $\boldsymbol{c}$ 的模型如下：

$$\boldsymbol{c}(t) = \gamma \boldsymbol{e} + \gamma \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{q} + \beta \boldsymbol{D}\boldsymbol{a} \tag{17}$$

其中：
$$[\boldsymbol{e}]_k = \big(\bar{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{\phi}_k\big), \quad [\boldsymbol{q}]_k = \big(\Delta \bar{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{\phi}_k\big), \quad [\boldsymbol{D}]_{k,i} = \big(\Delta \boldsymbol{\phi}_i, \boldsymbol{\phi}_k\big). \tag{18}$$

因此，我们旨在通过估计以下参数的最优值来校正 GROM 轨迹 γ 和β ，并将其称为控制参数，或简称控制。不过，我们要强调的是，即使假设校正项可以通过式（17）近似，这种近似也绝非精确。相反，我们关注的是能够使误差最小的 α 和 β 的取值（相对于一组参考数据点而言）。此外，此处还应注意，引入任意闭合模型可能会导致全阶模型与降阶模型之间出现不一致性问题。感兴趣的读者可参阅 [47, 22, 68, 69]。在本研究中，我们设置 $\gamma = [\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n]^T \in \mathbb{R}^n$ 和 $\beta = [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n]^T \in \mathbb{R}^n$，以允许闭合模型随不同模态而变化。研究表明，采用模态相关校正能够提供更好的闭合模型，例如，通过匹配全阶模型与降阶模型之间的能级 [58], 、引入谱核 [65, 61], 或利用变分多尺度框架 [74, 28, 20]。

4. 前向灵敏度方法

我们利用前向灵敏度方法（FSM） [35, 36] 来估计参数γ 和 β，依据的是底层动力学模型与收集到的观测数据。为简化符号，我们将式（12）改写如下，其中 $\boldsymbol{c}(t)$由式（17）定义：

$$\dot{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{\theta}), \tag{19}$$

其中

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{N}\boldsymbol{a} + \gamma \boldsymbol{e} + \gamma \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{q} + \beta \boldsymbol{D}\boldsymbol{a} \tag{20}$$

and

$$\boldsymbol{\theta} = [\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n]^T \in \mathbb{R}^{2n} \tag{21}$$

表示控制参数。下文中，我们使用一组收集到的、可能稀疏且含噪的测量值，来近似 方程（19） 的预测与其目标值之间的偏差。此外，我们将在第 4.2 节中说明这些预测如何依赖于控制参数 $\boldsymbol{\theta}$ 。最后，我们将这两类信息结合起来，在第 4.3 节中推导模型预测、时间测量值与校正后参数值之间的关系。

4.1. 预报误差与反馈

我们通过收集一组测量值 $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^m$ 来监测模型行为：

$$\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{h}(\widehat{\boldsymbol{a}(t)}) + \eta(t), \tag{22}$$

其中 $\boldsymbol{h}(\cdot)$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 表示观测算子， $\widehat{\boldsymbol{a}}$ 表示模型状态的真实值 $\boldsymbol{a}$，而 η 表示传感器测量噪声。需要指出的是，测量值 $\boldsymbol{z}$是实际状态的函数，观测算子可能涉及采样操作、插值，甚至不同空间之间的映射。因此，观测值的维数 m $\boldsymbol{z}$ 不一定等于状态的维数 n $\boldsymbol{a}$。

对于测量噪声，我们考虑白高斯扰动（即 $\eta(t) \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R}(t))$, 其中 $\mathbf{R}(t)$ 表示测量噪声协方差矩阵）。在大多数情况下，$\mathbf{R}(t)$ 是一个对角矩阵，这意味着来自不同传感器的测量噪声彼此不相关。为简单起见，我们假设 $\mathbf{R}(t) = \sigma^2 \mathbf{I}_m$，其中 σ 是测量噪声的标准差，而 $\mathbf{I}_m$ 是 $m \times m$ 单位矩阵。由于目标轨迹（对应于方程（13））与 GROM 解之间存在偏差，由此产生的预报误差可写为：

$$\boldsymbol{\epsilon}(t) = \boldsymbol{z}(t) - \boldsymbol{h}(\boldsymbol{a}(t)). \tag{23}$$

算子的定义 $\boldsymbol{h}(\cdot)$是整个设置的重要组成部分。一种选择是遵循测量值通常在物理空间中采集这一事实，从而在该空间中定义预报误差。考虑具有速度场 $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^N$ 的 Burgers问题，我们或许只能收集关于 $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^M$ 的数据，而该数据与 $\boldsymbol{u}$ 的关系为 $\boldsymbol{v} = \mathcal{H}(\boldsymbol{u})$，其中 $\mathcal{H}(\boldsymbol{u})$ 是 $\mathbf{u}$ 的物理空间中的观测算子，相比之下， $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{a})$ 应用于 $\boldsymbol{a}$ 的潜在空间。因此，通过设置 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{v}$ (即，$m = M$)，我们有 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{a}) = \mathcal{H}\big(\bar{\boldsymbol{u}} + \sum_{i=1}^{n} a_i \phi_i\big)$。另一个计算上颇具吸引力的选项

是将预报误差定义在如下所定义的潜在空间中：

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{m} z_i \boldsymbol{\psi}_i, \tag{24}$$

其中，$\{\boldsymbol{\psi}_i\}_{i=1}^{m}$ 是 $\boldsymbol{v}$ [50]的一组低秩基。考虑一组本征正交分解基 $\boldsymbol{\psi}$，可以通过将场 $\boldsymbol{v}$ 投影到相应的基函数上来计算 $\boldsymbol{z}$ 的分量，即 $z_i(t) = (\boldsymbol{v}(t)\ \boldsymbol{\psi}_i)$。因此，观测算子 $\boldsymbol{h}(\cdot)$ 可以定义如下：

$$[\boldsymbol{h}(\boldsymbol{a})]_k = \left(\mathcal{H}(\bar{\boldsymbol{u}} + \sum_{i=1}^{n} a_i \phi_i), \boldsymbol{\psi}_k\right). \tag{25}$$

4.2. 灵敏度动力学

由于我们的目标是将反馈 $\boldsymbol{\epsilon}$ 与期望的控制参数 $\boldsymbol{\theta}$关联起来，我们首先需要定义这些参数如何影响模型预测。因此，我们使用$\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n\times 2n}$ 来定义模型预测 $\boldsymbol{a}$ 在任意时刻 t 对模型参数 $\boldsymbol{\theta}$ 的敏感度，如下所示，

$$[\mathbf{V}(t)]_{ij} = \left[\frac{\partial a_i(t)}{\partial \theta_j}\right]. \tag{26}$$

对动力学模型（即公式（19））关于其参数求导 $\boldsymbol{\theta}$并应用链式法则，可验证$\mathbf{V}(t)$ 遵循以下线性系统演化：

$$\dot{\mathbf{V}}(t) = \mathbf{D}_{\boldsymbol{f}}(t)\mathbf{V}(t) + \mathbf{D}_{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{\theta}}(t), \tag{27}$$

其中，$\mathbf{D}\boldsymbol{f}$ 和$\mathbf{D}_{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{\theta}}$ 分别表示模型 $\boldsymbol{f}$ 关于状态 $\boldsymbol{a}$和参数 $\boldsymbol{\theta}$的雅可比矩阵，如下所示：

$$\mathbf{D}_{\boldsymbol{f}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial a_1} & \frac{\partial f_1}{\partial a_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial a_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial a_1} & \frac{\partial f_2}{\partial a_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial a_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial a_1} & \frac{\partial f_n}{\partial a_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial a_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

$$\mathbf{D}_{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \gamma_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \gamma_n} & \frac{\partial f_1}{\partial \beta_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \beta_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \beta_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \gamma_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial \gamma_n} & \frac{\partial f_2}{\partial \beta_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \beta_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial \beta_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial f_n}{\partial \gamma_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial \gamma_n} & \frac{\partial f_n}{\partial \beta_1} & \frac{\partial f_n}{\partial \beta_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial \beta_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 2n} \tag{28}$$

由于模型状态的初始条件（即 $\boldsymbol{a}(0)$）与模型参数无关，因此可设 $\mathbf{V}(0) = 0$。因此，可将式 (27) 与式 (19) 联立求解，从而计算任意时刻模型的预测，以及这些预测对模型参数的敏感性。

4.3. 参数估计

GROM 轨迹和闭合模型参数化的偏差$\widehat{\ }$ 分别记为 $\delta\boldsymbol{a} = \widehat{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{a}$ 和 $\delta\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}$，其中上标 $(\cdot)$ 表示 它们的目标值。因此，可利用式 (26) 将 $\delta\boldsymbol{a}$ 与 $\delta\boldsymbol{\theta}$ 联系起来：

$$\delta\boldsymbol{a}(t) = \mathbf{V}(t)\delta\boldsymbol{\theta}. \tag{29}$$

$\boldsymbol{h}(\cdot)$ 在 $\boldsymbol{a}$ 附近的一阶泰勒展开可写为 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{a}_T) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{a}) + \mathbf{D}_{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{a})\delta\boldsymbol{a}$，其中 $\mathbf{D}_{\boldsymbol{h}}$ 是观测算子 $\boldsymbol{h}$ 的雅可比矩阵。因此，预报

式（23）中的误差 $\boldsymbol{\epsilon}(t)$ 可改写如下：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\epsilon}(t) &= \boldsymbol{z}(t) - \boldsymbol{h}(\boldsymbol{a}(t)) \\ &= \boldsymbol{h}(\widehat{\boldsymbol{a}}(t)) + \eta(t) - \boldsymbol{h}(\boldsymbol{a}(t)) \\ &= \cancel{\boldsymbol{h}(\boldsymbol{a}(t))} + \mathbf{D}_{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{a}(t))\delta\boldsymbol{a}(t) + \eta(t) - \cancel{\boldsymbol{h}(\boldsymbol{a}(t))} \\ &= \mathbf{D}_{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{a}(t))\delta\boldsymbol{a}(t) + \eta(t).\end{aligned} \tag{30}$$

因此，预报误差的确定性分量 $\boldsymbol{\epsilon}$ 通过以下关系与修正量 $\delta\boldsymbol{\theta}$相关联：

$$\boldsymbol{\epsilon}(t) = \mathbf{D}_{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{a})\mathbf{V}(t)\delta\boldsymbol{\theta}. \tag{31}$$

方程（31）是一个线性系统，采用 $\mathbf{Ax}$ $=$b的标准形式。它可以针对所有有观测数据可用的时刻写出。例如，假设在 $t_1, t_2, \ldots, t_T$收集测量值，我们可以构建以下线性系统：

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\boldsymbol{z}(t_1) - \boldsymbol{h}(\boldsymbol{a}(t_1)) \\ \boldsymbol{z}(t_2) - \boldsymbol{h}(\boldsymbol{a}(t_2)) \\ \vdots \\ \boldsymbol{z}(t_T) - \boldsymbol{h}(\boldsymbol{a}(t_T))\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^{Tm\times 1}} = \underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{D}_{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{a})\mathbf{V}(t_1) \\ \mathbf{D}_{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{a})\mathbf{V}(t_2) \\ \vdots \\ \mathbf{D}_{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{a})\mathbf{V}(t_T)\end{bmatrix}}_{\mathbf{H}\in\mathbb{R}^{Tm\times 2n}} \begin{bmatrix}\delta\boldsymbol{\theta}\end{bmatrix} \tag{32}$$

并且可以利用线性系统求解器来计算参数$\boldsymbol{\theta}$的最优值。此外，为考虑到测量值（因此预报误差）存在不确定性，我们采用加权最小二乘法，其中$\mathbf{R}^{-1}$为权重矩阵，$\mathbf{R}$ 是按如下方式构造的分块对角矩阵，

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix}\mathbf{R}(t_1) & & & \\ & \mathbf{R}(t_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{R}(t_T)\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{Tm\times Tm}. \tag{33}$$

特别地，所得线性系统的解可写为如下形式：

$$\delta\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{2n\times 1} = \begin{cases}\left(\mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}\boldsymbol{\xi}, & \text{over-determined: } Tm > 2n, \\ \mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^T\left(\mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^T\right)^{-1}\boldsymbol{\xi}, & \text{under-determined: } Tm < 2n.\end{cases} \tag{34}$$

重复求解方程（34），直至收敛（即不再需要对 $\boldsymbol{\theta}$ 进行更新，如算法1给出的伪代码所示）。

算法1 用于参数估计的正向灵敏度方法伪代码。1：从控制 $\boldsymbol{\theta}$ 的初始值开始，并计算模型轨迹 $\boldsymbol{a}(t)$2：计算灵敏度动力学 $\mathbf{V}(t)$3：组装$\mathbf{H}$4：使用权重$\mathbf{R}^{-1}$，通过加权线性最小二乘求解$\mathbf{H}\delta\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\xi}$ 5：设置 $\boldsymbol{\theta} \leftarrow \boldsymbol{\theta} + \delta\boldsymbol{\theta}$

图1展示了为高维系统识别低阶模型的过程，以及如何利用前向灵敏度框架对闭合模型进行参数化，以修正截断 GROM 的预测。值得注意的是，一旦将测量数据纳入以估计参数 $\boldsymbol{\theta}$，模型方程（19）便可用于在任意时刻进行预测（即，不限于有测量数据可用的时刻）。

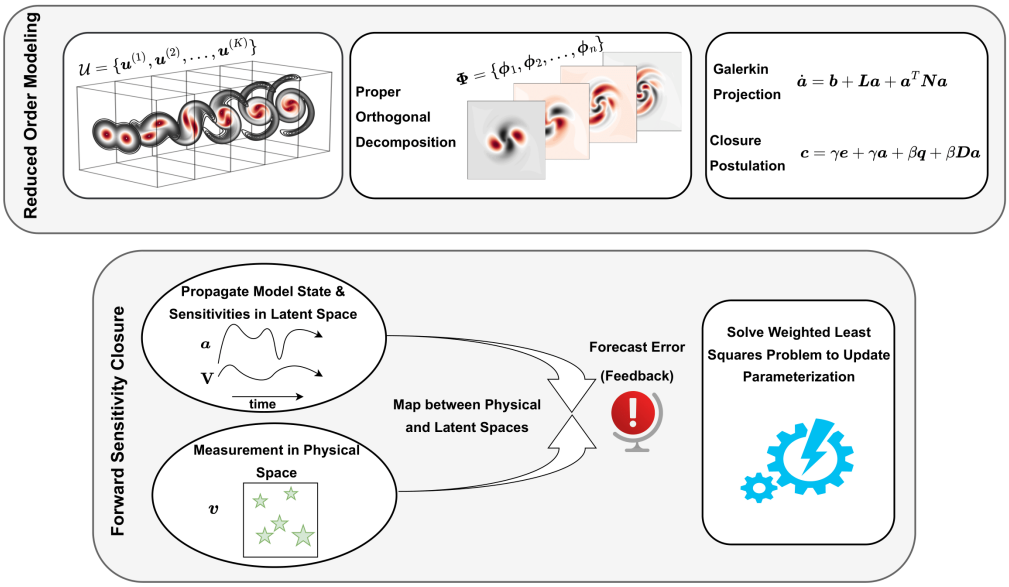


图1：示意图展示了推导 Galerkin降阶模型（上）以及利用前向灵敏度分析，以潜在控制输入的形式进行闭合建模（下）所需的算法步骤。

5. 结果与讨论

我们通过两个复杂程度不同的典型测试问题展示 FSM闭合框架。第一个问题涉及一个由粘性 Burgers 方程支配的一维非线性对流扩散系统，该方程被视为

纳维–斯托克斯方程（NSE）的一维形式（见式 (10)）。在第二个示例中，我们研究由涡量输运方程（即二维 NSE 的旋度）支配的二维涡合并问题。我们研究全场测量的情形，以及更具实际意义的仅能获取极为稀疏传感器数据的情形。

5.1. 黏性 *Burgers* 方程问题

一维黏性 Burgers问题可写为：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{35}$$

我们在雷诺数 Re $= 10,000$ 下进行数值实验，这相当于在式（35）中设定 $\nu = 10^{-4}$。对于全阶模型解，我们采用一组紧致有限差分格式进行空间离散，并使用三阶总变差递减 Runge-Kutta（TVD-RK3）格式进行时间积分 [61]。我们假设初始条件为如下单位阶跃函数：

$$\boldsymbol{u}(x,0) = \begin{cases} 1, & \text{if} \quad x \in [0, 0.5], \\ 0, & \text{if} \quad x \in (0.5, 1]. \end{cases} \tag{36}$$

我们将空间区域划分为 4096 个等距区间，并对全阶模型解采用时间步长 $\Delta t_{FOM} = 10^{-4}$。我们每隔 100 个时间步存储速度场快照，以进行本征正交分解分析。对于 GROM，我们保留 $n = 6$ 个模态来近似速度场。特征值分析表明，6 个模态可捕获约 92% 的系统总湍动能，其定义为 $\frac{1}{2}\langle u_i u_i \rangle$，其中 $\langle \cdot \rangle$ 表示平均运算。 具体而言，我们采用图 2 所示并定义如下的相对信息含量（RIC）指标：

$$\mathrm{RIC}(n) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i} \times 100. \tag{37}$$

式（35）与 POD基函数 的内积导出式（11）中的 GROM，其中相应的系数可定义如下：

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{b}]_k &= \left(\nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} - \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, \boldsymbol{\phi}_k \right), \\ [\boldsymbol{L}]_{k,i} &= \left(\nu \frac{\partial^2 \boldsymbol{\phi}_i}{\partial x^2} - \bar{u}\frac{\partial \boldsymbol{\phi}_i}{\partial x} - \boldsymbol{\phi}_i \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, \boldsymbol{\phi}_k \right), \\ [\boldsymbol{N}]_{k,i,j} &= \left(-\boldsymbol{\phi}_i \frac{\partial \boldsymbol{\phi}_j}{\partial x}, \boldsymbol{\phi}_k \right). \end{aligned} \tag{38}$$

GROM模型的时间积分采用 $\Delta t_{ROM} = 0.01$ 的时间步长，该时间步长是 Δt_{FOM} 的100倍。尽管 6 个POD模态代表了系统总能量的 92%以上，但 GROM 无法正确捕捉它们的时间动力学，正如我们将在后续讨论中看到的那样。这说明了需要一种修正GROM 预测的机制。可容纳闭合模型的修正 Burgers 方程可写为如下形式：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \gamma u + \beta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{39}$$

而式 (17) 中得到的闭合模型项为

$$[\boldsymbol{e}]_k = \big(\bar{u}, \boldsymbol{\phi}_k\big), \qquad [\boldsymbol{q}]_k = \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}, \boldsymbol{\phi}_k\right), \qquad [\boldsymbol{D}]_{k,i} = \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{\phi}_i}{\partial x^2}, \boldsymbol{\phi}_k\right). \tag{40}$$

在第 5.1.1 节中，我们使用全场测量数据对该模型进行参数化；在第 5.1.2 节中，我们讨论稀疏数据情形。

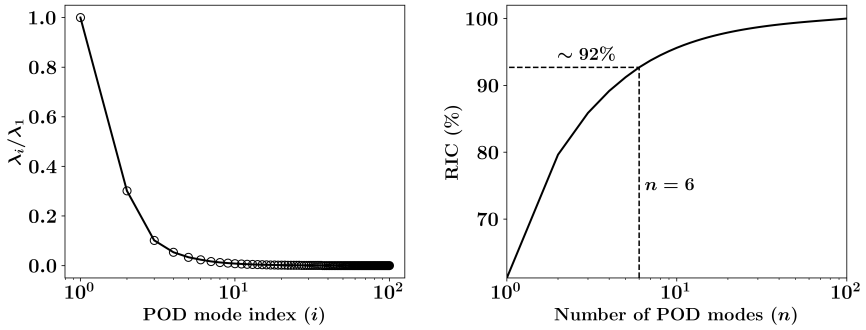


图 2：一维 Burgers 问题在 Re $= 10^4$ 时特征值的衰减情况（左）和相对信息含量的变化情况（右）。

5.1.1. 全场观测

我们假设传感器信号受到均值为零、标准差为 0.1 的白高斯噪声污染，该噪声相当于峰值速度的 10%。换言之，我们定义 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \eta$，其中 $\eta \sim \mathcal{N}(0, 0.01\mathbf{I})$，因此 $[\boldsymbol{z}(t)]_i = (\boldsymbol{v}(t) - \bar{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{\phi}_i)$（见第 4.1 节）。我们每对 GROM 进行 10 次时间积分后采集一次测量值（即 $\Delta t_{Obs} = 0.1$）。

我们将具有目标轨迹（由式（13）给出）的解称为采用“真实闭合”概念的预测。另一方面，未受控制的 GROM 的解（即式（11））称为“无闭合”解。最后，采用 FSM 对假定闭合模型进行参数化的受控 GROM（即式（12））的解

在式（17）中标记为“FSM闭合”。

图3展示了使用所考虑的不同方法在潜在降阶模型空间中的预测动力学。我们观察到，GROM会产生不准确的结果，并显著放大预测系数的幅值，尤其是最后一个模态的系数。这种行为很可能导致解出现长期不稳定性，即使实际系统是稳定的。另一方面，FSM能够有效控制GROM 轨迹，使其保持在更接近目标轨迹的位置。我们强调，我们采用了模态依赖控制，以遵循定义循环流动结构的已解析模态各自不同的特征。

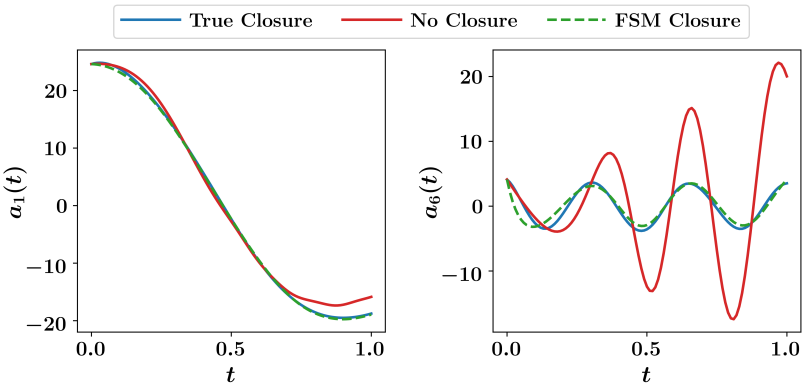


图3：使用全场测量进行FSM闭合时，第一个和最后一个模态系数的动力学。

在图4中，我们通过使用公式（8）计算重构流场，并将其与全阶模型流场进行比较，从而评估物理空间中的性能。此外，图5展示了预测本征正交分解系数的相对误差，以及重构速度场随时间的变化。我们可以看到，FSM闭合的结果接近真实闭合；在使用6个模态时，真实闭合代表了所能获得的最小重构误差。另一方面，不带闭合的基础型广义降阶模型会在时空域中产生不准确甚至非物理解。

5.1.2. 稀疏场观测

我们扩展数值实验，以探索不完整场测量场景。具体而言，我们考虑如下可观测场 $\boldsymbol{v}$ 的稀疏信号 $\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^S$：

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{v}, \tag{41}$$

其中，$\boldsymbol{\Theta} \in \mathbb{R}^{S\times M}$ 是一个采样矩阵，通过选取 $M \times M$单位矩阵的 S 行构造（即，如果 i^{th} 传感器位于 j^{th} 位置且 $[\boldsymbol{\Theta}]_{ij} = 0$,

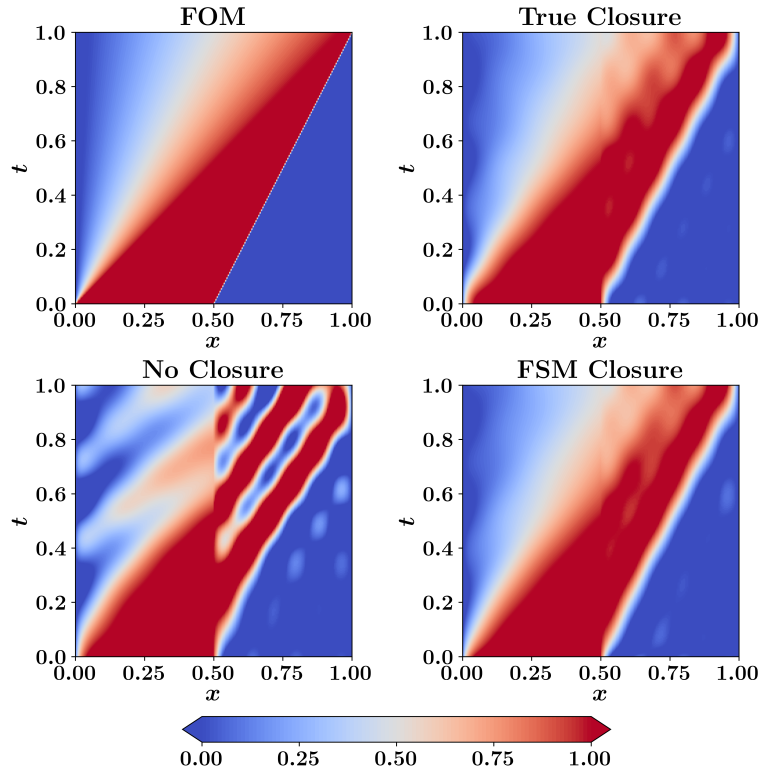


图 4：使用全阶模型和 GROM 方法对 Burgers问题进行时空场预测。FSM闭合采用全场测量。

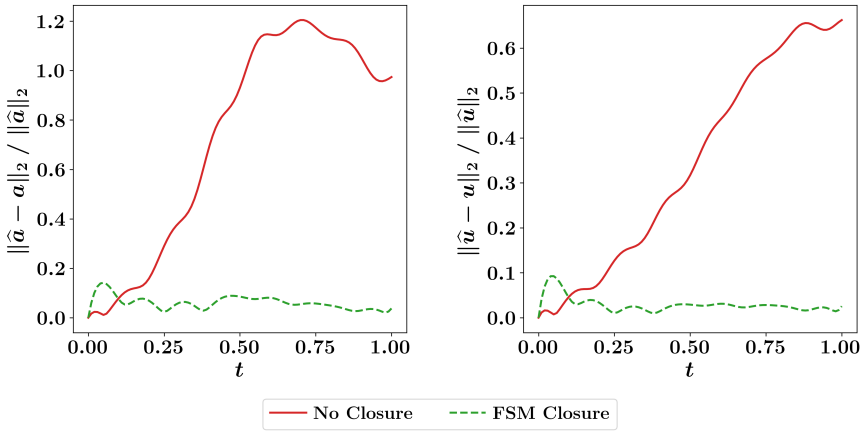


图 5： POD模态系数预测值（左）和重构速度场（右）与其目标值之间的相对误差（一维 Burgers 问题）。FSM闭合采用全场测量。

否则）。传感器可以布置在等间距位置、随机位置或经过精心挑选的位置。

最优传感器布置是一个活跃的研究领域，也称为最优实验设计（OED）。我们请参阅 [4] 及其中引用的文献，以了解更多信息。在这方面，我们采用一种基于列主元 QR 分解的贪心压缩感知算法，按如下方式构建近似最优的传感器布置策略：

$$\mathbf{\Psi}^T\mathbf{P} := \mathbf{QR}, \tag{42}$$

其中，$\mathbf{\Psi} = [\boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2, \ldots, \boldsymbol{\psi}_S] \in \mathbb{R}^{M\times S}$ 包含针对 $\boldsymbol{v}$ 的前 S 个 POD基函数，而$\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{M\times M}$ 是置换矩阵。Manohar 等人 [39] 表明，使用$\mathbf{P}$ 的前 S 行来定义采样矩阵 $\mathbf{\Theta}$，即可获得近似最优的传感器布置，其与 OED 研究中的 A-最优和 D-最优准则相似。最后，场 $\boldsymbol{v}$ 可重构为 $\boldsymbol{v} \approx \mathbf{\Psi}(\mathbf{\Theta}\mathbf{\Psi})^{-1}\boldsymbol{s}$。同样，若假设可观测量 $\boldsymbol{v}$ 就是速度场 $\boldsymbol{u}$ 本身，则潜在测量值 $\boldsymbol{z}$ 可计算为$[\boldsymbol{z}(t)]_i = (\mathbf{\Psi}(\mathbf{\Theta}\mathbf{\Psi})^{-1}\boldsymbol{s}(t) - \bar{\boldsymbol{u}}, \ \boldsymbol{\phi}_i)$。

图 6 展示了在稀疏测量情况下，采用 FSM 闭合方法得到的第一个和第六个模态系数随时间的演化。具体而言，我们使用所述的基于 QR 的算法选取了 25 个位置（约占网格点总数的 0.5%），以确定传感器数据。可以看到，即使测量数据稀疏，FSM 闭合仍能得到非常准确的结果，且与目标轨迹十分接近。图 7 也展示了重构精度的提升：与未采用控制的 GROM 预测相比，结果有了显著改善。图 8 给出了预测的本征正交分解系数和重构速度场相对于目标值的相对误差，目标值代表采用 6 个模态时的最小重构误差；其中也可以观察到类似的结果。

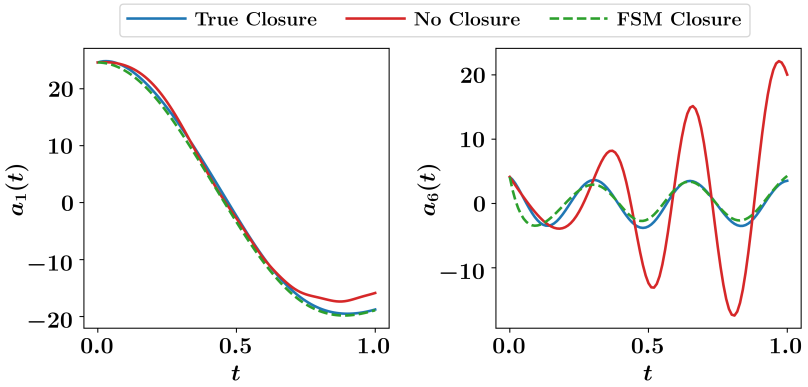


图 6：FSM闭合中稀疏场测量条件下首个和最后一个模态系数的动力学。

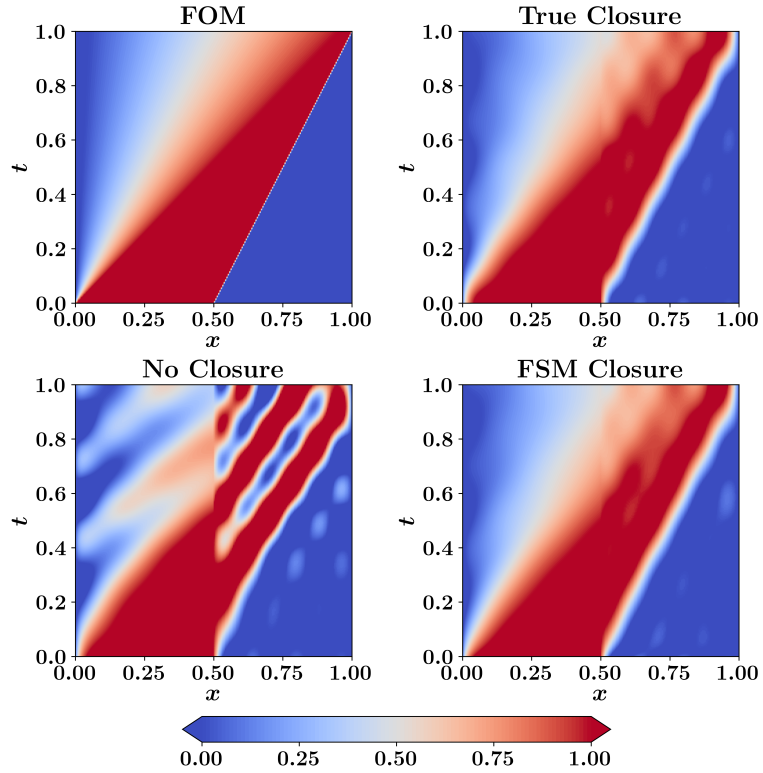


图 7：采用全阶模型和 GROM 方法对 Burgers问题进行的时空场预测。FSM闭合中考虑了稀疏场测量。

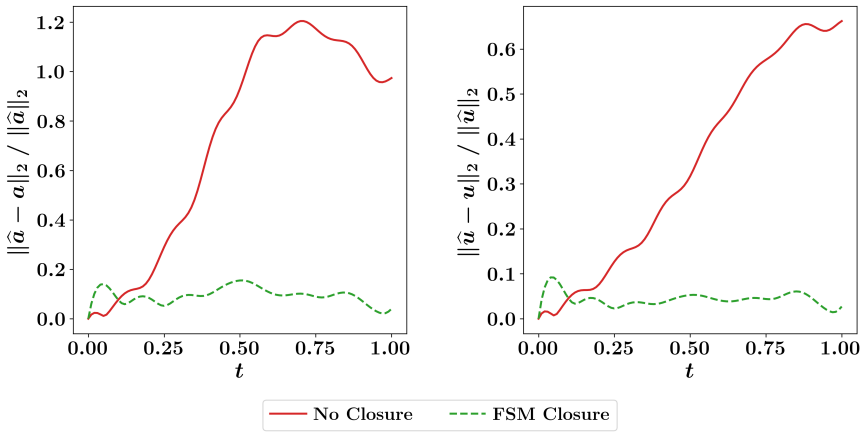


图 8: 一维 Burgers 问题中，POD模态系数（左）和重构速度场（右）的预测值与其目标值之间的相对误差。FSM闭合采用稀疏场测量。

5.2. 涡旋合并问题

所提出的 FSM闭合框架 的一项关键优势在于，它处理的是问题的降阶模型，而非完整的高维模型。因此，计算复杂度取决于所采用的 POD 模态数量，而非问题的空间维数。为了突出这一特点，我们考虑由以下涡量输运方程支配的二维（2D）涡合并问题 [64], :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\omega, \psi) = \frac{1}{\mathrm{Re}} \Delta \omega, \qquad \text{in } \Omega \times [0, T]. \tag{43}$$

其中 ω 和 ψ 分别表示涡量场和 流函数 场，且（$J(\cdot,\ \cdot)$ 是定义如下的雅可比算子:

$$J(\omega, \psi) = \frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{44}$$

涡量和流函数通过运动学关系相联系:

$$\Delta \psi = -\omega. \tag{45}$$

我们考虑一个维度为（$2\pi \times 2\pi$）的空间区域，并在 x 和 y 方向上施加周期性边界条件。流场由一对强度相等、同向旋转的高斯涡旋启动，其中心分别位于（$x_1,\ y_1$）$=$（$5\pi/4,\ \pi$）和（$x_2,\ y_2$）$=$（$3\pi/4,\ \pi$），具体如下:

$$\omega(x, y, 0) = \exp\left(-\rho\left[(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2\right]\right) + \exp\left(-\rho\left[(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2\right]\right), \tag{46}$$

其中，ρ 是控制两个涡旋运动之间相互作用的参数。在本研究中，我们考虑雷诺数 $= 5000$，并设定 $\rho = \pi$。对于全阶模型模拟，我们定义了分辨率为 256×256（即 $\Delta x = \Delta y = 2\pi/256$）的规则笛卡尔网格。对于全阶模型的时间积分，我们采用时间步长为 10^{-3}的TVD-RK3 格式。对于 $t \in [0, 50]$，每隔100个时间步收集一次涡量快照，共得到500 个快照。涡旋合并问题的演化过程如图 9 所示，该图展示了影响两个涡旋输运和发展的对流机制与相互作用机制。这使其成为标准降阶模型方法所面临的一个具有挑战性的问题，也是检验所提出 FSM 框架的良好测试平台。

在本征正交分解分析中，我们使用 $n = 6$ 来定义解析尺度的总数，从而确定 GROM 系统的维数。本征正交分解特征值的衰减

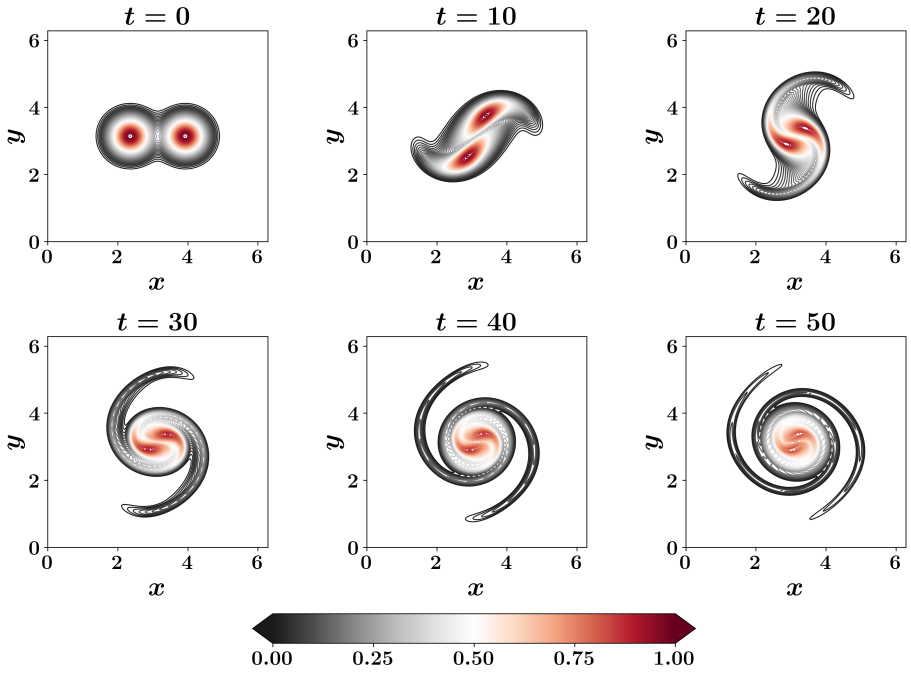


图9：涡旋合并问题在雷诺数 $= 5000$ 下的涡量场时间快照示例。

当前设置下的 RIC 值如图 10 所示。最后，涡合并问题的 GROM 项可写为：

$$
\begin{aligned}
[\boldsymbol{b}]_k &= \Big(- J(\bar{\omega}, \bar{\psi}) + \frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla^2 \bar{\omega}, \boldsymbol{\phi}_k^{\omega} \Big), \\
[\boldsymbol{L}]_{k,i} &= \Big(- J(\bar{\omega}, \boldsymbol{\phi}_i^{\psi}) - J(\boldsymbol{\phi}_i^{\omega}, \bar{\psi}) + \frac{1}{\mathrm{Re}} \Delta \phi_i^{\omega}, \boldsymbol{\phi}_k^{\omega} \Big), \\
[\boldsymbol{N}]_{k,i,j} &= \Big(- J(\boldsymbol{\phi}_i^{\omega}, \boldsymbol{\phi}_j^{\psi}); \boldsymbol{\phi}_k^{\omega} \Big).
\end{aligned} \tag{47}
$$

类似于公式（39），我们对公式（43）进行修改，以推导如下闭合模型：

$$
\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\omega, \psi) = \frac{1}{\mathrm{Re}} \Delta \omega + \gamma \omega + \beta \Delta \omega, \tag{48}
$$

这就得到了方程（17）中闭合模型的以下各项：

$$
[\boldsymbol{e}]_k = \big(\bar{\omega}, \boldsymbol{\phi}_k \big), \qquad [\boldsymbol{q}]_k = \big(\Delta \bar{\omega}, \boldsymbol{\phi}_k \big), \qquad [\boldsymbol{D}]_{k,i} = \big(\Delta \boldsymbol{\phi}_i, \boldsymbol{\phi}_k \big). \tag{49}
$$

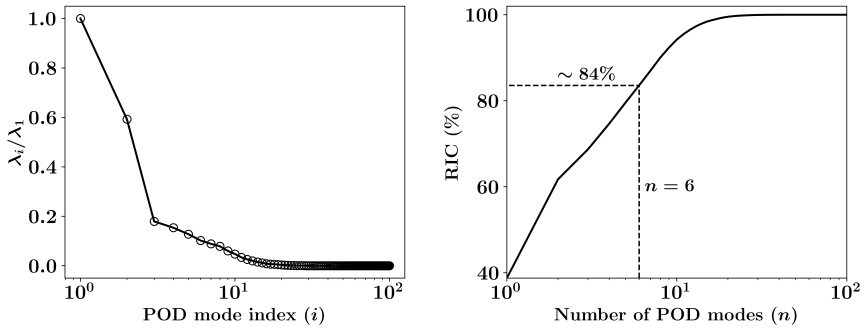


图10：二维涡旋合并问题在雷诺数 = 5000时的特征值衰减（左）和相对信息含量变化（右）。

5.2.1. 全场观测值

我们首先研究收集涡量场全场测量值的理想化情形。我们还考虑均值为零、标准差为 0.1 的加性高斯噪声。我们每隔 5 个时间单位记录一次数据，共对应 10 个测量时刻。我们应用第 4 节介绍的方法，计算 γ_i 和 β_i 对于 $i = 1, 2, \ldots, n$ 的依赖于模态的参数。随后，将估计得到的参数值代入方程（17）以定义闭合模型。POD模态系数的相应预测结果如图 11 所示。可以看到，较大振幅的振荡得到了阻尼，且降阶模型轨迹逐渐接近目标值。

此外，图12展示了两个不同时刻的涡量场重构结果。可以看到，未采用闭合的GROM模型所得到的流场预测遗漏了重要的流动特征。另一方面，FSM闭合框架能够对潜在控制模型进行参数化，从而降低重构误差。图13还展示了预测的本征正交分解系数以及重构的涡量场的相对误差随时间的变化。

5.2.2. 稀疏场观测

在本节中，我们研究仅有稀疏空间观测时，所提出的用于模态依赖控制的前向灵敏度方法的性能。具体而言，我们考虑数据相对稀缺的情形，仅有 25 个空间位置（即少于网格点总数的 0.04%）。我们还加入了与第 5.2.1 节类似的加性高斯噪声。虽然通常可以通过考察数据的频谱对数据进行一定程度的清理，但我们有意省略这一步，以评估 FSM 框架对数据噪声和稀疏性的鲁棒性。图 14 展示了系统动力学在潜在空间中的预测结果。正如预期，采用 GROM 的预测结果与

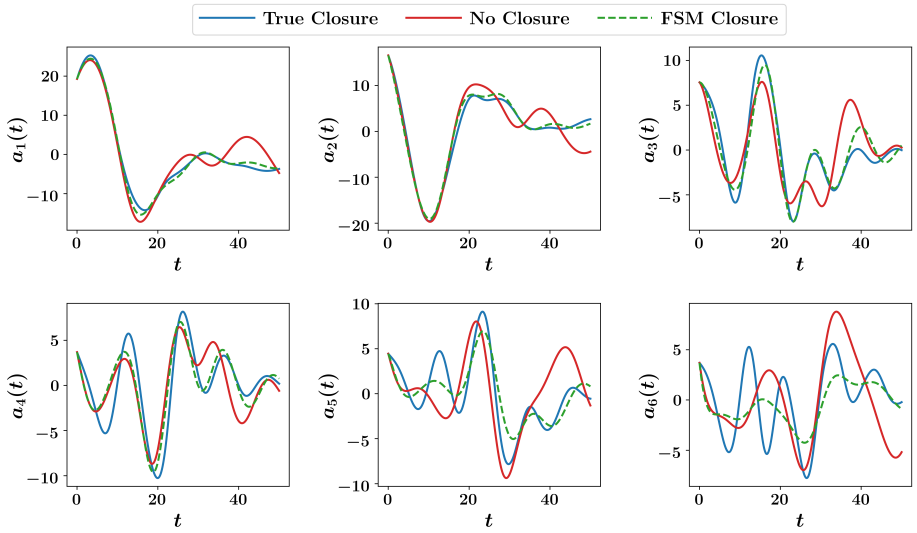


图11：当每隔5个时间单位收集全场测量值时，涡旋合并问题前6个模态的时间演化。

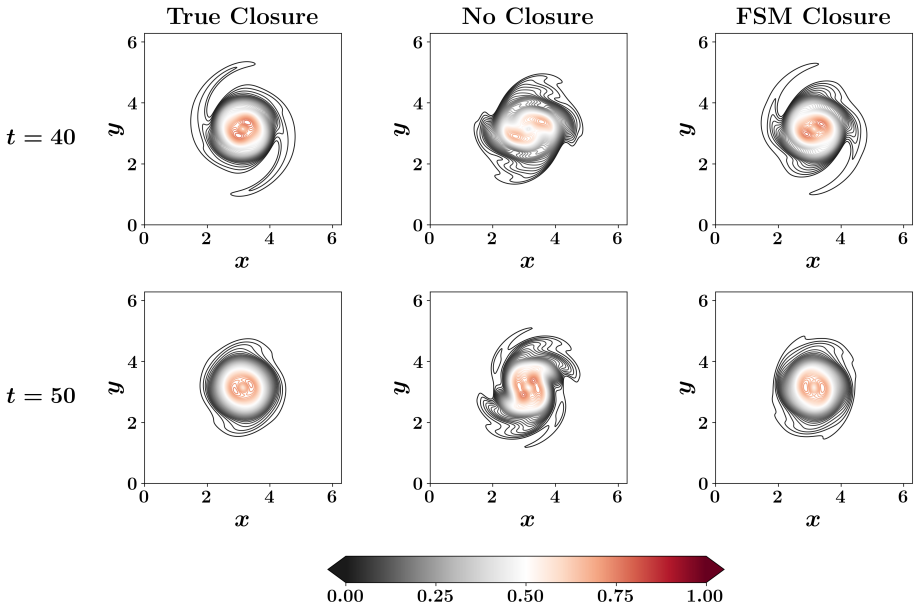


图12： $t = 40$ （上）和 $t = 50$ （下）处涡量场的比较，分别采用真实闭合（来自 FOM 数据的真实值）、无闭合（标准 GROM）以及所提出的基于全场测量的 FSM 闭合方法。

FSM闭合的准确度远低于采用全场测量值的情形（即图 11），尤其是在较晚的时刻。然而，与无控制 GROM 模型相比，我们看到

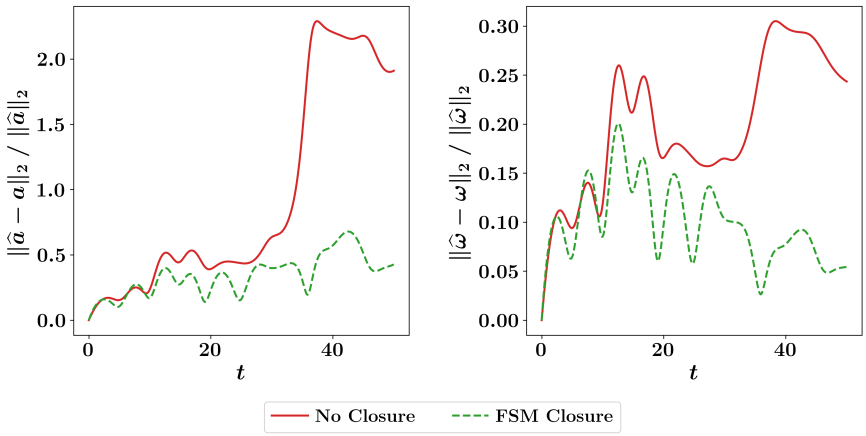


图13：二维涡旋合并问题中，POD模态系数（左）和重构涡量场（右）的预测值与其目标值之间的相对误差。FSM闭合采用全场测量。

FSM闭合带来了显著改进。

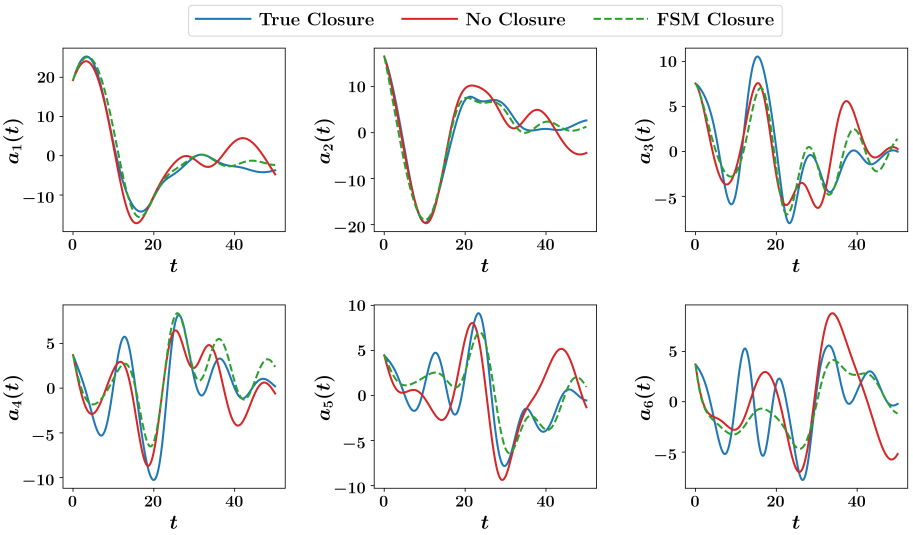


图14：仅有稀疏场测量时涡旋合并问题前6个模态的时间演化。

我们还观察到，前几个模态的预测比最后几个模态（例如， a_5 和 a_6）的预测更接近目标值。这可以用变分多尺度方法 [43, 2] 中能量传递（及模态相互作用）的局部性原理来解释。该原理意味着，POD 截断会导致模型对接近截断边界的模态（例如，最后几个

模态）的信息远少于对远离截断边界的模态（例如，前几个模态）的信息。此外，由于前几个模态对数据构建的贡献较大，FSM 算法在最小化相对于测量值的误差时，往往会赋予这些模态更高的重要性。解决这一问题的一种方法是采用不同的缩放方式，以确保所有模态系数的重要性相同。 我们还展示了图 15 中无闭合的 GROM 以及采用 FSM 闭合的 GROM 在 $t = 40$ 和 $t = 50$ 下重构得到的涡量场。我们观察到，与目标值（标记为真实闭合）相比，FSM 闭合能更准确地恢复流场的基本特征。 最后，图 16 展示了预测的本征正交分解系数以及重构涡量场的相对误差随时间的变化。

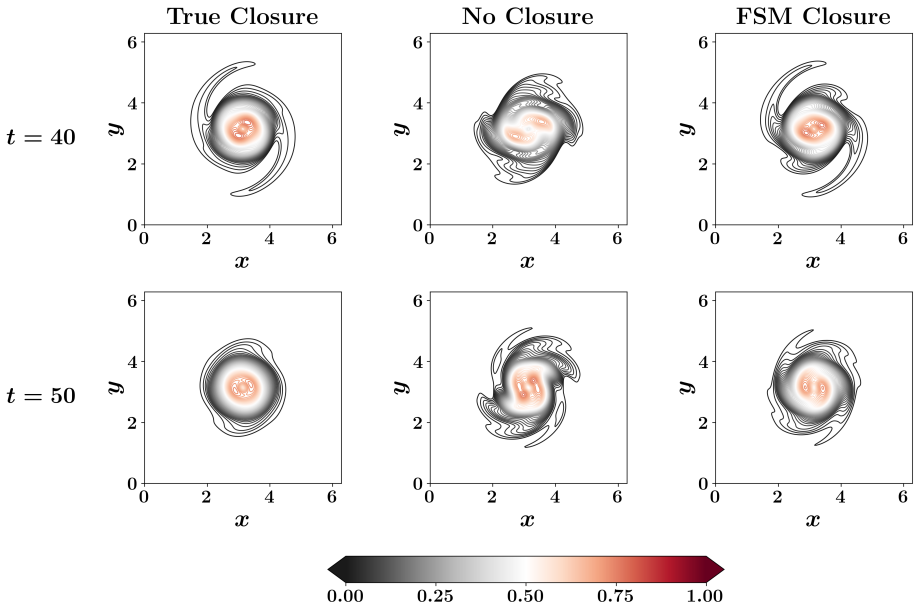


图15：比较采用真实闭合（来自 FOM 数据的真实值）、无闭合（标准 GROM）以及所提出的基于稀疏场测量值的 FSM 闭合方法时， $t = 40$ （上）和 $t = 50$ （下）的涡量场。

6. 结论

我们提出一种变分方法，利用前向灵敏度方法（FSM）校正非线性降阶模型（ROM）。我们将闭合项视为降阶模型潜在空间中的控制输入，并利用物理原理构建包含阻尼和耗散项的参数化模型。我们借助 FSM，将降阶模型的预测与现有的稀疏且含噪观测相结合，以估计未知的

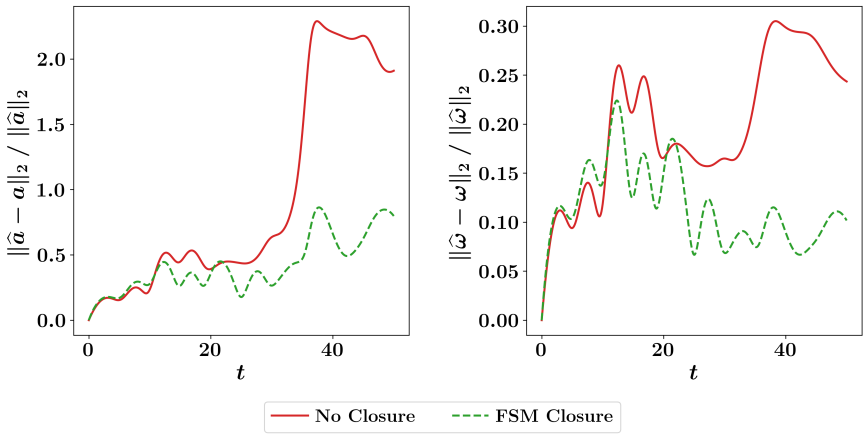


图16：二维涡旋合并问题中，POD模态系数（左）和重构涡量场（右）的预测值与目标值之间的相对误差。FSM闭合采用稀疏场测量。

模型参数。我们将该方法应用于基于投影的降阶模型，针对两个复杂度不同的测试问题进行研究：一维粘性 Burgers 方程和二维涡旋合并问题。这些问题通常被视为由非线性偏微分方程支配的广泛输运现象的典型测试平台。我们研究该方法在不限制不同模态间能量传递方向的情况下，近似模态相关参数最优值的能力。结果表明，采用基于 FSM 的控制来增强 GROM，可显著提高降阶模型的精度。预测轨迹更接近能够实现最小重构误差的数值。所提出的框架可有效增强数字孪生技术，适用于需要计算开销低的模型且持续采集传感器数据的场景。

致谢

作者感谢 Sivaramakrishnan Lakshmivarahan所付出的努力，这些努力极大地帮助我们理解了 FSM 方法的机制。Omer San 谨此感谢美国能源部高级科学计算研究项目（拨款编号DE-SC0019290）以及美国国家科学基金会计算数学项目（拨款编号 DMS-2012255）所提供的支持。

免责声明：本报告是作为美国政府某机构资助的工作报告编制的。美国政府及其任何机构或其任何雇员，均不对任何明示或默示的保证作出承诺，也不对以下事项承担任何法律责任或义务：任何内容的准确性、完整性或有用性。

所披露的信息、设备、产品或工艺，或声明其使用不会侵犯他人依法享有的权利。本文提及任何特定商业产品、工艺或服务时所使用的商品名称、商标、制造商名称或其他名称，并不必然构成或暗示美国政府或其任何机构对该产品、工艺或服务的认可、推荐或偏爱。作者所表达的观点和意见不一定代表或反映美国政府或其任何机构的观点和意见。

数据可用性

支持本研究结论的合成数据可在本文中获取。 本研究所用 Python 脚本的完整列表可在 GitHub 页面中找到：https://github.com/Shady-Ahmed/fsm-rom-control。

参考文献

[1] Ahmed, S.E., Pawar, S., San, O., Rasheed, A., Iliescu, T., Noack, B.R., 2021年。关于降阶模型的闭合——从第一性原理到机器学习方法的谱系。《流体物理》33，091301。[2] Ahmed, S.E., San, O., Rasheed, A., Iliescu, T., Veneziani, A., 2022。用于变分多尺度降阶建模的物理引导机器学习。arXiv预印本 arXiv:2205.12419。[3] Akhtar, I., Wang, Z., Borggaard, J., Iliescu, T., 2012。一种用于本征正交分解降阶模型的新型闭合策略。《计算与非线性动力学杂志》7。[4] Alexanderian, A., 2021年。由偏微分方程支配的无限维贝叶斯反问题的最优实验设计：综述。《反问题》37，043001。[5] Aubry, N., 1991年。论本征正交分解隐含的美。《理论与计算流体力学》2，339–352。[6] Balajewicz, M., Tezaur, I., Dowell, E., 2016年。针对可压缩纳维–斯托克斯方程的基于投影的降阶模型，在Stiefel流形上进行最小子空间旋转以实现稳定化和性能提升。《计算物理学杂志》321，224–241。[7] Benosman, M., 2018年。基于模型的自适应控制与数据驱动自适应控制：综述。《自适应控制与信号处理国际期刊》32，753–776。[8] Benosman, M., Borggaard, J., San, O., Kramer, B., 2017年。二维和三维布辛涅斯克方程降阶模型的基于学习的鲁棒稳定化。《应用数学建模》49，162–181。[9] Bergmann, M., Bruneau, C.H., Iollo, A., 2009年。实现鲁棒本征正交分解模型的关键因素。《计算物理学杂志》228，516–538。[10] Berkooz, G., Holmes, P., Lumley, J.L., 1993年。本征正交分解在湍流分析中的应用。《流体力学年度评论》25，539–575。[11] Beucler, T., Pritchard, M., Rasp, S., Ott, J., Baldi, P., Gentine, P., 2021年。在模拟物理系统的神经网络中施加解析约束。《物理评论快报》126，098302。[12] Borggaard, J., Iliescu, T., Wang, Z., 2011。人工黏性本征正交分解。《数学与计算机建模》53，269–279。

[13] Brunton, S.L., Noack, B.R., 2015。闭环湍流控制：进展与挑战。《应用力学评论》67。[14] Cazemier, W., Verstappen, R., Veldman, A., 1998。本征正交分解与驱动腔流的低维模型。《流体物理》10，1685–1699。[15] Chakraborty, S., 2021。基于迁移学习的多保真物理信息深度神经网络。《计算物理学杂志》426，109942。[16] Cordier, L., Noack, B.R., Tissot, G., Lehnasch, G., Delville, J., Balajewicz, M., Daviller, G., Niven, R.K., 2013。基于模型的控制的辨识策略。《流体实验》54，1–21。[17] Cuomo, S., Di Cola, V.S., Giampaolo, F., Rozza, G., Raissi, M., Piccialli, F., 2022。通过物理信息神经网络实现科学机器学习：现状与未来方向。arXiv预印本 arXiv:2201.05624。[18] Dada, G.P., Armaou, A., 2020。非线性系统的广义奇异值分解降阶观测器，载于：2020年美国控制会议（ACC），IEEE。第3473–3478页。[19] De, S., Britton, J., Reynolds, M., Skinner, R., Jansen, K., Doostan, A., 2020。利用双保真数据进行神经网络迁移学习以传播不确定性。《不确定性量化国际期刊》10。[20] Eroglu, F.G., Kaya, S., Rebholz, L.G., 2017。用于不可压缩流动的模块化正则化变分多尺度本征正交分解。《计算方法与应用力学工程》325，350–368。[21] Garg, S., Chakraborty, S., Hazra, B., 2022。用于非线性动力系统模型形式误差辨识的物理集成混合框架。《机械系统与信号处理》173，109039。[22] Giere, S., Iliescu, T., John, V., Wells, D., 2015。用于对流主导型对流–扩散–反应方程的SUPG降阶模型。《计算方法与应用力学工程》289，454–474。[23] Goswami, S., Anitescu, C., Chakraborty, S., Rabczuk, T., 2020。通过迁移学习增强的物理信息神经网络，用于断裂相场建模。《理论与应用断裂力学》106，102447。[24] Greydanus, S., Dzamba, M., Yosinski, J., 2019。哈密顿神经网络。arXiv预印本 arXiv:1906.01563。[25] Grimberg, S., Farhat, C., Youkilis, N., 2020。对流主导层流和湍流中基于投影的模型降阶的稳定性。《计算物理学杂志》419，109681。[26] Holmes, P., Lumley, J.L., Berkooz, G., Rowley, C.W., 2012。湍流、相干结构、动力系统与对称性。剑桥大学出版社。[27] Huang, Y., Kramer, B., 2020。用于大型系统迭代非线性控制的平衡降阶模型。《IEEE控制系统快报》5，1699–1704。[28] Iliescu, T., Wang, Z., 2014。变分多尺度本征正交分解：纳维–斯托克斯方程。《偏微分方程数值方法》30，641–663。[29] Ivagnes, A., Demo, N., Rozza, G., 2022。迈向用于逆问题降阶建模的机器学习流程：用于边界参数化、降维和解流形逼近的神经网络。arXiv预印本 arXiv:2210.14764。[30] Karniadakis, G.E., Kevrekidis, I.G., Lu, L., Perdikaris, P., Wang, S., Yang, L., 2021。物理信息机器学习。《自然综述：物理学》3，422–440。[31] Kashinath, K., Mustafa, M., Albert, A., Wu, J., Jiang, C., Esmaeilzadeh, S., Azizzadenesheli, K., Wang, R., Chattopadhyay, A., Singh, A., 等，2021年。物理信息机器学习：天气与气候建模案例研究。《英国皇家学会哲学汇刊A辑》379，20200093。

[32] Koc, B., Mou, C., Liu, H., Wang, Z., Rozza, G., Iliescu, T., 2022年. 数据驱动变分多尺度降阶模型的可验证性. 《科学计算杂志》93, 1–26.[33] Kramer, B., Grover, P., Boufounos, P., Nabi, S., Benosman, M., 2017年. 复杂流动中流动状态与分岔的稀疏传感及基于 DMD 的识别. 《SIAM 应用动力系统杂志》16, 1164–1196.[34] Kravaris, C., 2016年. 非线性系统的泛函观测器. 《IFAC 论文集在线》49, 505–510.[35] Lakshmivarahan, S., Lewis, J.M., 2010. 动态数据同化的前向灵敏度方法. 《气象学进展》2010.[36] Lakshmivarahan, S., Lewis, J.M., Jabrzemski, R., 2017年. 使用动态数据同化进行预报误差校正. Springer, 纽约.[37] Lassila, T., Manzoni, A., Quarteroni, A., Rozza, G., 2014. 流体动力学中的模型降阶：挑战与展望. 《用于建模与计算降阶的降阶方法》, 235–273.[38] Ling, J., Kurzawski, A., Templeton, J., 2016年. 利用嵌入不变性的深度神经网络进行雷诺平均湍流建模 . 《流体力学杂志》 807, 155–166.[39] Manohar, K., Brunton, B.W., Kutz, J.N., Brunton, S.L., 2018年. 用于重构的数据驱动稀疏传感器布置：展示利用已知模式的优势. 《IEEE 控制系统杂志》38, 63–86.[40] Maulik, R., San, O., Rasheed, A., Vedula, P., 2019. 使用神经网络进行二维湍流的亚网格建模. 《流体力学杂志》858, 122–144.[41] Meng, X., Karniadakis, G.E., 2020. 从多保真度数据中学习的复合神经网络：在函数逼近和偏微分方程逆问题中的应用. 《计算物理学杂志》401, 109020.[42] Mohan, A.T., Lubbers, N., Livescu, D., Chertkov, M., 2020. 在三维湍流神经网络粗粒化中嵌入严格的物理约束. arXiv 预印本 arXiv:2002.00021 .[43] Mou, C., Koc, B., San, O., Rebholz, L.G., Iliescu, T., 2021年. 数据驱动的变分多尺度降阶模型. 《计算力学与工程方法》373, 113470.[44] Niazi, M.U.B., Deplano, D., Canudas-de Wit, C., Kibangou, A.Y., 2019. 大规模系统中平均状态的无尺度估计. 《IEEE 控制系统快报》4, 211–216.[45] Noack, B.R., Morzynski, M., Tadmor, G., 2011. 流动控制的降阶建模. 第528卷. Springer-Verlag, 柏林.[46] Novati, G., de Laroussilhe, H.L., Koumoutsakos, P., 2021年. 通过多智能体强化学习实现湍流建模自动化. 《自然机器智能》3, 87–96.[47] Pacciarini, P., Rozza, G., 2014. 参数化对流–扩散偏微分方程的稳定化降阶基方法. 《计算力学与工程方法》274, 1–18.[48] Papapicco, D., Demo, N., Girfoglio, M., Stabile, G., Rozza, G., 2022年. 神经网络移位本征正交分解：一种用于双曲方程非线性降阶的机器学习方法. 《计算力学与工程方法》392, 114687.[49] Pastoor, M., Henning, L., Noack, B.R., King, R., Tadmor, G., 2008. 钝体减阻的反馈剪切层控制. 《流体力学杂志》608, 161–196.[50] Pawar, S., San, O., 2022年. 机器学习与数据同化交汇处的地球物理流动无方程代理建模. arXiv 预印本 arXiv:2205.13410 .[51] Pawar, S., San, O., Aksoylu, B., Rasheed, A., Kvamsdal, T., 2021a. 利用简化理论开展物理引导机器学习. 《流体物理》33, 011701.[52] Pawar, S., San, O., Nair, A., Rasheed, A., Kvamsdal, T., 2021b. 物理引导机器学习的模型融合：基于投影的降阶建模. 《流体物理》33, 067123.[53] Pawar, S., San, O., Vedula, P., Rasheed, A., Kvamsdal, T., 2022年. 多保真度信息融合

与串联神经网络. 《科学报告》12, 1–13.[54] Peherstorfer, B., Willcox, K., Gunzburger, M., 2018年. 不确定性传播、推断与优化中的多保真度方法综述. 《SIAM 综述》60, 550–591.[55] Poveda, J.I., Benosman, M., Teel, A.R., 2019. 网络化多智能体系统中的混合在线学习控制：综述. 《自适应控制与信号处理国际期刊》33, 228–261.[56] Rahman, S.M., Ahmed, S.E., San, O., 2019. 地球物理流动模型降阶的动态闭合建模框架. 《流体物理》31, 046602.[57] Raissi, M., Perdikaris, P., Karniadakis, G.E., 2019. 物理信息神经网络：求解涉及非线性偏微分方程的正问题与逆问题的深度学习框架. 《计算物理学杂志》378, 686–707.[58] Rempfer, D., Fasel, H., 1993年. 平板边界层中相干结构的动力学，载于：《湍流进展 IV》. Springer, 柏林, 第73–77页.[59] Riffaud, S., Bergmann, M., Farhat, C., Grimberg, S., Iollo, A., 2021年. 守恒律降阶建模的 DGDD 方法. 《计算物理学杂志》437, 110336.[60] Sadamoto, T., Ishizaki, T., Imura, J.i., 2013. 通过观测器降阶方法设计线性系统的低维泛函观测器，载于：第52届 IEEE 决策与控制会议，IEEE. 第776–781页.[61] San, O., Iliescu, T., 2014. 流动的本征正交分解闭合模型：Burgers 方程. 《国际数值分析与建模杂志 B 系列》5, 285–305.[62] San, O., Iliescu, T., 2015. 大尺度准地转海洋环流的稳定化本征正交分解降阶模型. 《计算数学进展》41, 1289–1319.[63] San, O., Rasheed, A., Kvamsdal, T., 2021年. 面向数字孪生革命的混合分析与建模、兼收并蓄及多保真度计算. 《GAMM 通讯》44, e202100007.[64] San, O., Staples, A.E., 2013. 加速不可压流动计算的粗网格投影方法. 《计算物理学杂志》233, 480–508.[65] Sirisup, S., Karniadakis, G.E., 2004. 用于校正本征正交分解模型长期行为的谱黏性方法. 《计算物理学杂志》194, 92–116.[66] Sirovich, L., 1987. 湍流与相干结构的动力学. I. 相干结构. 《应用数学季刊》45, 561–571.[67] Snyder, W., Mou, C., Liu, H., San, O., DeVita, R., Iliescu, T., 2022年. 降阶模型闭合：简要教程，载于：《力学与流固耦合及其应用的最新进展：Bong Jae Chung 纪念文集》. Springer, 第167–193页.[68] Stabile, G., Ballarin, F., Zuccarino, G., Rozza, G., 2019. 湍流的降阶变分多尺度方法. 《计算数学进展》45, 2349–2368.[69] Strazzullo, M., Girfoglio, M., Ballarin, F., Iliescu, T., Rozza, G., 2022年. 对流占优、边际分辨流动的演化–滤波–松弛正则化中完整模型与降阶模型的一致性. 《国际工程数值方法杂志》123, 3148–3178.[70] Tai, K.S., Bailis, P., Valiant, G., 2019. 等变 Transformer 网络，载于：国际机器学习会议，PMLR. 第6086–6095页.[71] Taira, K., Brunton, S.L., Dawson, S.T., Rowley, C.W., Colonius, T., McKeon, B.J., Schmidt, O.T., Gordeyev, S., Theofilis, V., Ukeiley, L.S., 2017年. 流动的模态分析：综述. 《AIAA 杂志》55, 4013–4041.[72] Taira, K., Hemati, M.S., Brunton, S.L., Sun, Y., Duraisamy, K., Bagheri, S., Dawson, S.T., Yeh, C.A., 2020. 流动的模态分析：应用与展望. 《AIAA 杂志》58, 998–1022.[73] Vlachas, P.R., Arampatzis, G., Uhler, C., Koumoutsakos, P., 2022年. 通过学习复杂系统的有效动力学进行多尺度模拟 . 《自然机器智能》 , 1–8。

[74] Wang, Z., Akhtar, I., Borggaard, J., Iliescu, T., 2012. 湍流的正交分解闭合模型：数值比较。《计算方法与应用力学工程》237-240, 10–26.[75] Zanna, L., Bolton, T., 2020. 海洋中尺度闭合的数据驱动方程发现。《地球物理研究快报》47, e2020GL088376.