arXiv:2304.04942v2 [math.CV] 8 Feb 2024

$L^{\vec{p}}$ – $L^{\vec{q}}$ 多参数 Forelli-Rudin 型算子在 $\mathbb{C}^n$ 单位球乘积上的有界性

Long Huang、Xiaofeng Wang*和 Zhicheng Zeng

摘要 本文完整刻画了两类多参数 Forelli-Rudin 型算子从一个混合范数 Lebesgue 空间 $L^{\vec{p}}$ 到另一个空间 $L^{\vec{q}}$的有界性，其中 $1 \leq \vec{p} \leq \vec{q} < \infty$，并且这两个空间配备了可能不同的权。利用这些刻画，我们建立了加权多参数 Berezin 变换的 $L^{\vec{p}}$–$L^{\vec{q}}$ 有界性以及加权多参数 Bergman 投影的 $L^{\vec{p}}$–$A^{\vec{q}}$有界性的充要条件，其中 $A^{\vec{q}}$ 表示混合范数 Bergman 空间。我们的方法具有若干创新之处。首先，我们对 $\mathbb{C}^n$ 单位球上全纯函数的积分进行了精细估计。其次，我们将经典的 Schur 判别法推广到不同的加权混合范数 Lebesgue 空间。这些改进对于我们的证明至关重要，使我们能够建立所需的刻画和精确条件。

1 引言

作为经典 Lebesgue 空间 L^p 的一种自然推广，混合范数 Lebesgue 空间$L^{\vec{p}}$ 首先由 Benedek和Panzone [4] 于 1961年引入并进行了研究。此后，许多其他具有混合范数的函数空间相继被引入和研究。例如，Chen-Sun[5] 研究了混合范数（迭代）弱 Lebesgue空间；Cleanthous-Georgiadis [8, 9] 研-究了混合范数调制空间和乘积调制空间；Cleanthous 等人[10] 引入了各向异性混合范数Hardy空间，随后第一作者及其合作者在 [20, 21, 22, 26]中进一步考察了这些混合范数 Hardy空间的各种实变量刻画及其应用；Cleanthous 等人 [11, 12], 、Georgiadis等人 [18, 19] 以及第一作者及其合作者 [23] 则重点研究了混合范数 Triebel-Lizorkin 空间或 Besov 空间。此外，由于混合范数Lebesgue空间比经典Lebesgue空间具有更精细的结构，并且混合范数函数空间在调和分析背景下具有更广泛的用途,

2020年数学主题分类。主要分类 42B35；次要分类 42B99、47B38、32A36。关键词和短语。混合范数 Lebesgue 空间、 $L^{\vec{p}}$–$L^{\vec{q}}$ 有界性、 Schur 判别法、 Forelli-Rudin 型算子、 Bergman 投影、 Berezin 变换。第一作者谨向DachunYang 教授致以谢意，感谢其对本文提出的一些有益建议。作者谨向 Ruhan Zhao 教授和 Kehe Zhu 教授致以谢意，感谢他们对Schur检验提出的若干意见以及一些很好的建议。作者还要感谢审稿人提出的若干富有洞见的意见。L. Huang 得到中国国家自然科学基金（项目编号：12201139）和广东省基础与应用基础研究基金（项目编号：2021年A1515110905）的资助。X. Wang得到中国国家自然科学基金（项目编号：11971125）的资助。*通讯作者，电子邮箱：wxf@gzhu.edu.cn

分析、偏微分方程和几何不等式，他们对此给予了相当大的关注（例如参见 [1, 2, 3, 6, 7, 13, 25, 39]）。

本文研究两类多参数 Forelli-Rudin 型算子在加权混合范数 Lebesgue 空间上的作用。这些算子是 Forelli 和 Rudin 于 1974年最初引入的著名 Forelli-Rudin 型算子的自然推广。此外，我们还给出了临界点处多参数 Forelli-Rudin 型算子有界性的刻画。我们的证明有几处创新之处。首先，我们对 $\mathbb{C}^n$ 中单位球上的全纯函数进行了精细的积分估计。其次，我们将经典的 Schur 判别法推广至不同的加权混合范数 Lebesgue 空间。这些改进对我们的证明至关重要，并使我们能够建立所需的刻画。作为应用，我们还给出了加权多参数 Berezin 变换的 $L^{\vec{p}}$ –$L^{\vec{q}}$ 有界性以及加权多参数 Bergman 投影的 $L^{\vec{p}}$ –$A^{\vec{q}}$ 有界性的必要充分条件，其中 $A^{\vec{q}}$ 表示混合范数 Bergman 空间。我们的研究动机源于该领域的以下经典结果。

设 \(n\) 为固定正整数，\(\mathbb{C}^n \) 是由所有复数的有序 \(n\) 元组 \(z := (z_1, \ldots, z_n)\) 构成的向量空间，其内积为 \(\langle z, \omega\rangle := z_1\overline{\omega}_1 + \cdots + z_n\omega_n \)，范数为 \(|z| := \langle z, z\rangle^{\frac{1}{2}} \)。令$\mathbb{B}_n := \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$ 为 $\mathbb{C}^n$ 中的开单位球，并令 $\mathbb{S}_n := \{z \in \mathbb{C}^n : |z| = 1\}$ 表示其边界。对于给定的 \(a, b, c \in \mathbb{R}\)，以下由 Kurens-Zhu [29],引入的一般 Forelli-Rudin 型算子定义为

$$T_{a,b,c}f(z) = (1-|z|^2)^a \int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1-|u|^2)^b}{(1-\langle z,u\rangle)^c} f(u)\, d\upsilon(u)$$

and

$$S_{a,b,c}f(z) = (1-|z|^2)^a \int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1-|u|^2)^b}{|1-\langle z,u\rangle|^c} f(u)\, d\upsilon(u),$$

其中，$d\upsilon$ 是 $\mathbb{B}_n$ 上的归一化体积测度，满足 $\upsilon(\mathbb{B}_n) = 1$。回顾一下，这类算子的特殊情形的研究历史可以追溯到 Stein [38], 的工作，Stein 在其中证明，当 $1 < p < \infty$时，算子 $T_{0,0,n+1}$ 在 $L^p(\mathbb{B}_n)$ 上有界。1974年，Forelli-Rudin [16]随后证明，算子 $T_{0,\sigma+it,n+1+\sigma+it}$ 在 $L^p(\mathbb{B}_n)$ 上有界，当且仅当

$$(\sigma+1)p > 1,$$

其中 $1 \le p < \infty, \sigma > -1$，$t \in \mathbb{R}$，以及 $i = \sqrt{-1}$。后来，Kolaski [28]进一步研究了算子 $T_{0,\sigma+it,n+1+\sigma+其}$，从Bergman 投影视角出发。1991年，Zhu [43] 表明，在 $L^p(dA_\lambda)$ 上一般算子$T_{a,b,c}$ 的有界性的必要且充分条件，其中 $c = n+1+a+b$ 当 $n = 1$时，是

$$-pa < \lambda + 1 < p(b+1),$$

其中 $1 \le p < \infty$，且$dA_\lambda(z) := (1-|z|^2)^\lambda dA(z)$，其中 $\lambda \in \mathbb{R}$，dA 是 $\mathbb{C}$的开单位圆盘上的归一化面积测度。如今，Kures-Zhu [29] 已将这一结果推广到高维情形，适用于所有正数 c。另一方面，文献[40, 41]进一步确定了算子 $T_{0,b,c}$和 $S_{0,b,c}$从 L^p 空间到 L^q空间的有界性。

具有 $1 \le p \le q < \infty$ 的空间。关于这一方向的更多结果，请参阅 [24, 27, 33, 34, 42]。关于 Forelli-Rudin 型算子的紧性，请参阅 [14], ，其中 Ding 和 Wang 给出了算子 $T_{0,0,c}$ 和 $S_{0,0,c}$ 的一些紧性刻画。最近，Zhu [47] 利用 Bergman 空间的嵌入和分数阶径向微分算子，推广了算子 $T_{a,b,c}$ 的一些已有有界性结果，并进一步刻画了一个加权 Bergman 空间嵌入另一个加权 Bergman 空间何时是紧的。

这两个算子因其与分析和算子理论中的一些重要算子之间的联系而备受关注。例如，$\mathbb{B}_n$ 上的全纯 Bergman 投影是 Forelli-Rudin 型算子 $T_{a,b,c}$ 的一个特例，其中 $a = b = 0$ 且 $c = n + 1$。$\mathbb{B}_n$ 上的 Berezin 变换是 Forelli-Rudin 型算子 $S_{a,b,c}$ 的一个特例，其中 $a = n + 1$、$b = 0$，且 $c = 2(n+1)$。众所周知，Bergman 投影和 Berezin 变换在全纯函数空间理论中发挥着基础性作用，并已在 Toeplitz 算子和 Hankel 算子以及其他相关领域中得到广泛研究（见 [44, 45, 46]）。

另一方面，多参数算子也是分析学和算子理论中的重要研究领域。过去几十年来，许多作者研究了多参数函数空间上乘子和奇异积分算子的有界性。例如，Ricci-Stein 关于多参数奇异积分和极大函数的研究 [35], M¨uller-Ricci-Stein 对 Marcinkiewicz 乘子及 Heisenberg 群上的多参数结构的研究[30, 31], ，以及 Fefferman-Pipher 关于多参数算子和尖锐加权不等式的结果 [15]。基于这些研究成果以及前文关于经典 Forelli-Rudin 型算子的结论，本文将 $T_{a,b,c}$ 和 $S_{a,b,c}$ 推广到多参数情形。具体而言，我们关注以下两类多参数算子。

$$T_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}} f(z,w) = (1-|z|^2)^{a_1}(1-|w|^2)^{a_2} \int_{\mathbb{B}_n}\int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1-|u|^2)^{b_1}(1-|\eta|^2)^{b_2}}{(1-\langle z,u\rangle)^{c_1}(1-\langle w,\eta\rangle)^{c_2}} f(u,\eta)\, d\upsilon(u)\, d\upsilon(\eta)$$

and

$$S_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}} f(z,w) = (1-|z|^2)^{a_1}(1-|w|^2)^{a_2} \int_{\mathbb{B}_n}\int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1-|u|^2)^{b_1}(1-|\eta|^2)^{b_2}}{|1-\langle z,u\rangle|^{c_1}|1-\langle w,\eta\rangle|^{c_2}} f(u,\eta)\, d\upsilon(u)\, d\upsilon(\eta),$$

在此及下文中，向量 $\vec{a} := (a_1, a_2)$、$\vec{b} := (b_1, b_2)$、$\vec{c} := (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$。显然，这两个积分算子是算子 $T_{a,\ b,\ c}$ 和 $S_{a,\ b,\ c}$ 的自然推广。此外，我们想说明，本文仅关注参数 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 和 $\vec{c}$ 的二维情形。然而，高维情形也可以用类似的方法处理。对于这些多参数 Forelli-Rudin 型算子，我们关注以下问题:

问题1.1。这些算子在哪些空间上有界？是否存在两个不同的空间 X 和 Y，使得算子 $T_{\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}}$ 和 $S_{\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}}$ 从 X 到 Y 有界?

问题1.2。如果存在这样的空间 X 和 Y，那么确保 $T_{\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}}$ 和 $S_{\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}}$ 有界的必要且充分条件是什么?

在本文中，我们不仅回答问题 1.1 和 1.2，还精确确定算子 $T_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}}$ 和 $S_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}}$ 有界的条件。具体而言，我们证明，加权混合范数 Lebesgue 空间为分析 Forelli-Rudin 型算子 $T_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}}$ 和 $S_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}}$ 的行为提供了恰当的框架。注意,

对于任意给定的 $\vec{p}:=(p_1,p_2) \in [1,\infty]^2$ 以及 $\vec{\alpha}:=(\alpha_1,\alpha_2) \in (-1,\infty)^2$,，加权混合范数勒贝格空间$L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}:=L^{\vec{p}}(\mathbb{B}_n\times\mathbb{B}_n, dv_{\alpha_1}dv_{\alpha_2})$ 定义为所有满足以下条件的可测函数 f 的集合

$$\|f\|_{L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}} := \left\{\int_{\mathbb{B}_n}\left[\int_{\mathbb{B}_n}|f(z,w)|^{p_1}\,dv_{\alpha_1}(z)\right]^{\frac{p_2}{p_1}}dv_{\alpha_2}(w)\right\}^{\frac{1}{p_2}} < \infty$$

当某个 i 满足 $p_i = \infty$ 时，作通常的相应修改（关于非加权混合范数勒贝格空间及其应用，参见 [4, 6, 8, 9, 21, 22] ）。此后，对于任意$\theta \in (-1,\infty)$，$dv_\theta(z) := c_\theta(1-|z|^2)^\theta\, dv(z)$，并且

$$c_\theta := \frac{\Gamma(n+\theta+1)}{n!\Gamma(\theta+1)}$$

是满足 $v_\theta(\mathbb{B}_n) = 1$ 的归一化常数，其中 Γ 表示伽马函数。显然，当 $p_1 = p_2 = p$ 且 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ 时，空间 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$ 就退化为加权勒贝格空间 L^p_α。

借助混合范数 Lebesgue 空间的概念，我们将主要结果陈述如下。在本文余下部分，我们始终假设 $\vec{\alpha}:=(\alpha_1,\alpha_2) \in (-1,\infty)^2$ 且 $\vec{\beta}:=(\beta_1,\beta_2) \in (-1,\infty)^2$。

定理 1.3. 设 $\vec{p} := (p_1, p_2)$ 和 $\vec{q} := (q_1,q_2)$ 满足 $1 < p_- \le p_+ \le q_- < \infty$，其中 $p_+ := \max\{p_1, p_2\}$，$p_- := \min\{p_1, p_2\}$，且 $q_- := \min\{q_1,q_2\}$。那么，下列陈述等价。

(i) 算子 $S_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}}$ 是从 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$ 到 $L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 的有界算子。

(ii) 算子 $T_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}}$ 是从 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$ 到 $L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 的有界算子。

(iii) 参数满足：对任意 $i \in \{1,2\}$,

$$\begin{cases} -q_ia_i < \beta_i + 1, \ \ \alpha_i + 1 < p_i(b_i+1), \\ c_i \le n+1+a_i+b_i+\dfrac{n+1+\beta_i}{q_i} - \dfrac{n+1+\alpha_i}{p_i}. \end{cases}$$

我们还分别针对指数端点 $\vec{p} := (1, p_2)$、$\vec{p} := (p_1, 1)$ 和 $\vec{p} := (1, 1)$，建立了以下三个 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$ –$L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 有界性刻画，其中 $1 < p_1, p_2 < \infty$。

定理 1.4. 设 $\vec{p} := (1, p_2)$ 和 $\vec{q} := (q_1,q_2)$ 满足 $1 < p_2 \le q_- < \infty$，其中 $q_- := \min\{q_1,q_2\}$。则以下陈述等价。

(i) 算子 $S_{\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}}$ 从 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$ 到 $L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 有界。(ii) 算子 $T_{\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}}$ 从 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$ 到 $L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 有界。

(iii) 参数满足：对于任意 $i \in \{1,2\}$,

$$\begin{cases} -q_ia_i < \beta_i + 1, \ \ \alpha_1 = b_1, \ \ c_1 < a_1 + \dfrac{n+1+\beta_1}{q_1}, \\ \alpha_2 + 1 < p_2(b_2+1), \ \ c_2 \le n+1+a_2+b_2+\dfrac{n+1+\beta_2}{q_2} - \dfrac{n+1+\alpha_2}{p_2}. \end{cases}$$

定理 1.5. 设 $\vec{p} := (p_1, 1)$ 和 $\vec{q} := (q_1, q_2)$ 满足 $1 < p_1 \le q_- < \infty$，其中 $q_- := \min\{q_1, q_2\}$。那么以下陈述等价。

(i) 算子 $S_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}}$ 从 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$ 到 $L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 是有界的。

(ii) 算子 $T_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}}$ 从 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$ 到 $L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 是有界的。

(iii) 参数满足，对于任意 $i \in \{1, 2\}$,

$$\begin{cases} \alpha_1 + 1 < p_1(b_1 + 1), \ \ c_1 \le n + 1 + a_1 + b_1 + \dfrac{n + 1 + \beta_1}{q_1} - \dfrac{n + 1 + \alpha_1}{p_1}, \\ -q_i a_i < \beta_i + 1, \ \ \alpha_2 = b_2, \ \ c_2 < a_2 + \dfrac{n + 1 + \beta_2}{q_2}. \end{cases}$$

定理 1.6. 设 $\vec{p} := (1, 1)$ 且 $\vec{q} := (q_1, q_2) \in [1, \infty)^2$。则以下陈述等价。

(i) 算子 $S_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}}$ 从 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$ 到 $L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 是有界的。(ii)
算子 $T_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}}$ 从 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$ 到 $L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 是有界的。

（iii）参数满足：对于任意 $i \in \{1, 2\}$,

$$\begin{cases} -q_i a_i < \beta_i + 1, \ \ \alpha_i < b_i, \\ c_i \le a_i + b_i - \alpha_i + \dfrac{n + 1 + \beta_i}{q_i}, \end{cases} \tag{1.1}$$

or

$$\begin{cases} -q_i a_i < \beta_i + 1, \ \ \alpha_i = b_i, \\ c_i < a_i + \dfrac{n + 1 + \beta_i}{q_i}, \end{cases} \tag{1.2}$$

or

$$\begin{cases} -q_i a_i < \beta_i + 1, \ \ \alpha_1 = b_1, \ \ c_1 < a_1 + \dfrac{n + 1 + \beta_1}{q_1}, \\ \alpha_2 < b_2, \ \ c_2 \le a_2 + b_2 - \alpha_2 + \dfrac{n + 1 + \beta_2}{q_2}, \end{cases} \tag{1.3}$$

or

$$\begin{cases} -q_i a_i < \beta_i + 1, \ \ \alpha_1 < b_1, \ \ c_1 \le a_1 + b_1 - \alpha_1 + \dfrac{n + 1 + \beta_1}{q_1}, \\ \alpha_2 = b_2, \ \ c_2 < a_2 + \dfrac{n + 1 + \beta_2}{q_2}. \end{cases} \tag{1.4}$$

本文其余部分的安排如下。

在第 2 节中，我们给出算子 $T_{0,\vec{b},\vec{c}}$ 有界性必要条件的证明。为此，我们首先运用一个关键引理（引理 2.7），然后结合 $T_{0,\vec{b},\vec{c}}$ 的有界性及其伴随算子的有界性，证明定理 1.3 的必要性。然而，对于临界情形（定理 1.4、1.5 和 1.6），由于这些情形下引理 2.7 中的函数 $f_{\xi,\zeta}$ 不属于空间 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$，因此无法采用这种方法。为克服这一困难，我们注意到，尽管这些情形下引理 2.7 不适用，但其背后的思路仍然有效。具体而言，我们充分利用 $T_{0,\vec{b},\vec{c}}$ 及其伴随算子的有界性，并运用引理 2.7 的证明方法，得出所考虑临界情形下指数的一些必要条件，这些条件略强于所需条件。此外，通过在引理 2.13 中构造适当的函数 g_ζ 并运用反证法，我们证明指数的必要条件恰好就是所需条件。因此，运用这一方法，我们最终证明了所有临界情形下算子 $T_{0,\vec{b},\vec{c}}$ 有界性的必要性。

第 3 节着重于在混合范数 Lebesgue 空间中建立新的 Schur 检验，并证明 $S_{0,\vec{b},\vec{c}}$ 有界性的充分性。Schur 判别法为 L^p 空间上的积分算子的有界性提供了充分条件，是证明积分算子有界性最有用的工具之一。Schur 最初于 [37] 以离散形式提出这一判据，此后许多作者对其进行了推广。例如，1965 年，文献 [17]，给出了一个积分算子 T 从 L^p 到 L^q 的有界性 Schur 判别法，其中 $1 < q \le p < \infty$；而文献 [32, 40] 则推广了 T 从 L^p 到 L^q 的有界性 Schur 判别法，其中 $1 \le p \le q < \infty$。通过构造适当的测试函数并使用这些改进的 Schur 检验，我们能够证明 $S_{0,\vec{b},\vec{c}}$ 有界性的充分性。

在第 4 节中，我们结合第 2 节和第 3 节证明的结论，作出两个关键观察，并将所得结果整合起来，从而完成主要结果的证明。在最后一节中，我们将主要定理应用于加权多参数 Bergman 投影和加权多参数 Berezin 变换。我们分别得到了加权多参数 Berezin 变换的 $L^{\vec{p}} - L^{\vec{q}}$ 有界性以及加权多参数 Bergman 投影的 $L^{\vec{p}} - A^{\vec{q}}$ 有界性的必要且充分条件，其中 $A^{\vec{q}}$ 表示混合范数 Bergman 空间。

最后，我们对记号作一些约定。我们始终用 C 表示一个与主要参数无关的正常数，但它可能在不同的推导步骤中取不同的值。记号 $f \lesssim g$ 表示 $f \le Cg$；若 $f \lesssim g \lesssim f$，则记作 $f \sim g$。若 $f \le Cg$ 且 $g = h$ 或 $g \le h$，则记作 $f \lesssim g \sim h$ 或 $f \lesssim g \lesssim h$，而不记作 $f \lesssim g = h$ 或 $f \lesssim g \le h$。对于任意 $q \in [1,\infty]$，我们用 q' 表示其 Hölder 共轭指数，即 $1/q + 1/q' = 1$。类似地，对于任意 $\vec{q} := (q_1, q_2) \in [1,\infty]^2$，我们用 $\vec{q}' := (q_1', q_2')$ 表示其 Hölder 共轭指数，即 $1/q_1 + 1/q_1' = 1$ 和 $1/q_2 + 1/q_2' = 1$。

2 有界性的必要性证明：$T_{0,\vec{b},\vec{c}}$

本节将证明主要定理的必要性。为此，我们首先给出以下两个有用的引理。

引理2.1。令 $t > -1$、$c \in \mathbb{R}$ 和 $z \in \mathbb{B}_n$。对于任意 $w \in \mathbb{B}_n$，定义 $f_z(w) = \frac{1}{(1-\overline{(z,w)})^c}$ 则

$\int_{\mathbb{B}_n} f_z(w)\,dv_t(w) = n\,B(n, t+1)$，其中，对于任意 P、$Q > 0$，$B(P, Q) := \int_0^1 x^{P-1}(1-x)^{Q-1}\,dx$ 表示 Beta 函数。

证明。若 $c = 0$ 或 $z = 0$，此引理显然成立。因此，我们假设 $c \neq 0$ 且 $z \neq 0$。注意，对于固定的 $z \in \mathbb{B}_n$, $1 - \langle z, w\rangle$ 关于 w 是反解析的。因此，若扩展其定义域，则 f_z 在 $\mathbb{B}_n$ 的闭包上也反解析且调和。令 $w = r\xi$，其中 $\xi \in \mathbb{S}_n$。由平均值性质可得 $1 = f_z(0) = \int_{\mathbb{S}_n} f_z(r\xi)\,d\sigma(\xi)$。由此进一步得到

$$\int_{\mathbb{B}_n} f_z(w)\,dv_t(w) = 2n\int_0^1 r^{2n-1}(1-r^2)^t \int_{\mathbb{S}_n} f_z(r\xi)\,d\sigma(\xi)\,dr = n\,B(n, t+1),$$

至此证明完毕。 □

引理 2.2。设 $t > -1$、$c \in \mathbb{R}$，且 $w \in \mathbb{B}_n$。对于任意 $z \in \mathbb{B}_n$，令 $g_w(z) = \frac{1}{(1-\langle z, w\rangle)^c}$。那么，对于任意$\xi \in \mathbb{B}_n$,

$$g_w(\xi) = \int_{\mathbb{B}_n} \frac{g_w(u)\,dv_t(u)}{(1-\langle \xi, u\rangle)^{n+1+t}}.$$

证明. 如果$c = 0$ 或 $w = 0$，则根据 [44, 定理 2.2]，结论显然成立。因此，下面我们设 $c \neq 0$ 且 $w \neq 0$。通过类似于引理2.1的论证，我们知道，对于固定的 $w \in \mathbb{B}_n$，函数 $g_w(z)$ 关于z 是解析的。此外，由于 $2 \geq |1 - \langle w, z\rangle| \geq 1 - |\langle w,z\rangle| \geq 1 - |w|$，我们推断，对于固定的 $w \in \mathbb{B}_n$，$g_w \in L^\infty(\mathbb{B}_n,dv) \subset L^1(\mathbb{B}_n,dv_t)$。因此，通过使用 [44,定理 2.2], 我们得出，对于任意 $\xi \in \mathbb{B}_n$,

$$g_w(\xi) = \int_{\mathbb{B}_n} \frac{g_w(u)dv_t(u)}{(1-\langle \xi, u\rangle)^{n+1+t}},$$

这就完成了证明。 □

以下引理正是 [44, 定理 1.12] （另见 [36, 命题1.4.10]），在证明主要结果的有界性必要性和充分性时需要用到。

引理 2.3。设 $z \in \mathbb{B}_n$、$t > -1$ 和 $c \in \mathbb{R}$。该积分

$$I_{c,t}(z) = \int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1-|w|^2)^t}{|1-\langle z, w\rangle|^c} dv(w)$$

当 $|z| \to 1^-$ 时具有以下渐近行为。

(i) 若 $n + 1 + t - c > 0$，则 $I_{c,t}(z) \sim 1$。(ii) 若 $n + 1 + t - c = 0$，则 $I_{c,t}(z) \sim \log\frac{1}{1-|z|^2}$。(iii) 若 $n + 1 + t - c < 0$，则 $I_{c,t}(z) \sim (1-|z|^2)^{n+1+t-c}$。

由引理 2.3 可得以下引理，它在充分性和必要性的证明中都很有用。

引理 2.4. 设 z ∈ $\mathbb{B}_n$、t > −1，且 c ∈ ℝ。积分

$$I_{c,t}(z) = \int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1-|w|^2)^t}{|1-\langle z,w\rangle|^c} dv(w)$$

满足以下性质

(i) 若 n + 1 +t −c > 0，则 $I_{c,t}$(z) . 1 对任意 z ∈ $\mathbb{B}_n$。

(ii) 如果 n < + 1 + t − c < 0，则 $I_{c,\ t}$(z) . $(1-|z|^2)^{n+1+t-c}$ 对于任意 z ∈ $\mathbb{B}_n$。

证明。令 n + 1 +t − c > 0。由引理 2.3(i)，我们推得存在正常数 C 和常数 R ∈ (0, 1)，使得对于任意 R < |z| < 1，$I_{c,t}$(z) ≤ C。如果 |z| ≤ R，注意到1 − R ≤ 1 − |z||w| ≤ |1 − ⟨z, w⟩| ≤ 1 + |z||w| ≤ 2。因此，对于任意 |z| ≤ R，我们有

$$I_{c,t}(z) \sim \int_{\mathbb{B}_n} (1-|w|^2)^t dv(w) \sim 1. \tag{2.1}$$

因此，(i) 成立。

此外，当 n + 1 + t − c < 0 时，由引理 2.3(iii)，我们可得存在常数 R ∈ (0, 1)，使得 $I_{c,t}$(z) . $(1-|z|^2)^{n+1+t-c}$，对任意 R < |z| < 1 均成立。另一方面，对任意 |z| ≤ R，由 (2.1) 以及 n + 1 + t − c < 0 这一事实，我们进一步得到 $I_{c,t}$(z) ∼ 1 ≲ $(1-|z|^2)^{n+1+t-c}$。因此，(ii) 得证。□

为了证明 $T_{0,\vec{b},\vec{c}}$ 有界性的必要条件，我们还需要以下结果 .

引理 2.5. 设 $\vec{p} := (p_1, p_2) \in [1,\infty]^2$ 及 $\vec{q} := (q_1, q_2) \in [1,\infty]^2$。若积分算子 $T_{0,\vec{b},\vec{c}}$从 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$ 到 $L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$有界，则其伴随算子 $T^*_{0,\vec{b},\vec{c}}$ 定义如下:

$$T^*_{0,\vec{b},\vec{c}} g(z,w) := (1-|z|^2)^{b_1-\alpha_1}(1-|w|^2)^{b_2-\alpha_2} \int_{\mathbb{B}_n}\int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1-|u|^2)^{\beta_1}(1-|\eta|^2)^{\beta_2}}{(1-\langle z,u\rangle)^{c_1}(1-\langle w,\eta\rangle)^{c_2}} g(u,\eta)\, dv(u)\, dv(\eta)$$

从 $L^{\vec{q}'}_{\vec{\beta}}$ 到 $L^{\vec{p}'}_{\vec{\alpha}}$ 有界。

证明.令$g \in L^{\vec{q}'}_{\vec{\beta}}$。由 [4, p.304，定理 2], 可推得

$$\begin{aligned}
\|T^*_{0,\vec{b},\vec{c}} g\|_{L^{\vec{p}'}_{\vec{\alpha}}} &= \sup_{\|f\|_{L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}}=1} \left| \int_{\mathbb{B}_n}\int_{\mathbb{B}_n} \overline{f(z,w)} T^*_{0,\vec{b},\vec{c}} g(z,w)\, dv_{\alpha_1}(z)\, dv_{\alpha_2}(w) \right| \\
&= \sup_{\|f\|_{L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}}=1} \left| \int_{\mathbb{B}_n}\int_{\mathbb{B}_n} \overline{f(z,w)} (1-|z|^2)^{b_1-\alpha_1}(1-|w|^2)^{b_2-\alpha_2} \right. \\
&\qquad \left. \times \int_{\mathbb{B}_n}\int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1-|u|^2)^{\beta_1}(1-|\eta|^2)^{\beta_2}}{(1-\langle z,u\rangle)^{c_1}(1-\langle w,\eta\rangle)^{c_2}} g(u,\eta)\, dv(u)\, dv(\eta)\, dv_{\alpha_1}(z)\, dv_{\alpha_2}(w) \right|.
\end{aligned}$$

由 Fubini 定理、混合范数的 Hölder 不等式（例如，参见 [21, 注 2.8(iv)]），以及 $T_{0,\vec{b},\vec{c}}$ 从 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$ 到 $L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 的有界性，我们得出

$$\begin{aligned}\|T^*_{0,\vec{b},\vec{c}}g\|_{L^{\vec{p}'}_{\vec{\alpha}}} &= \sup_{\|f\|_{L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}}=1}\left|\int_{\mathbb{B}_n}\int_{\mathbb{B}_n} g(u,\eta)\overline{T_{0,\vec{b},\vec{c}}f(u,\eta)}\,dv_{\beta_1}(u)\,dv_{\beta_2}(\eta)\right| \\ &\le \sup_{\|f\|_{L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}}=1}\left\|T_{0,\vec{b},\vec{c}}f\right\|_{L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}}\|g\|_{L^{\vec{q}'}_{\vec{\beta}}} \lesssim \|g\|_{L^{\vec{q}'}_{\vec{\beta}}}.\end{aligned}$$

这就完成了证明。 □

T以下两个引理很重要，并且在必要性证明中经常用到 y.

引理 2.6. 设 $\vec{q}:=(q_1,q_2)\in[1,\infty)^2$, N_1 和 N_2 是两个正常数，使得 $N_1+\beta_1>-1$和 $N_2+\beta_2>-1$。对于任意 $z\in\mathbb{B}_n$和 $w\in\mathbb{B}_n$，定义 $f_{N_1,N_2}(z,w):=(1-|z|^2)^{N_1}(1-|w|^2)^{N_2}$。则 $f_{N_1,N_2}\in L^{\vec{q}'}_{\vec{\beta}}$，并且存在两个正常数 $C_{(N_1,\beta_1)}$和 $C_{(N_2,\beta_2)}$，使得

$$T^*_{0,\vec{b},\vec{c}}f_{N_1,N_2}(z,w)=C_{(N_1,\beta_1)}C_{(N_2,\beta_2)}(1-|z|^2)^{b_1-\alpha_1}(1-|w|^2)^{b_2-\alpha_2}. \tag{2.2}$$

证明。容易证明 $f_{N_1,N_2}\in L^{\vec{q}'}_{\vec{\beta}}$。接下来证明 (2.2)。根据算子 $T^*_{0,\vec{b},\vec{c}}$ 的定义，我们知道

$$\begin{aligned}&T^*_{0,\vec{b},\vec{c}}f_{N_1,N_2}(z,w)\\ &\quad=(1-|z|^2)^{b_1-\alpha_1}(1-|w|^2)^{b_2-\alpha_2}\int_{\mathbb{B}_n}\frac{(1-|u|^2)^{\beta_1+N_1}}{(1-\langle z,u\rangle)^{c_1}}\,dv(u)\int_{\mathbb{B}_n}\frac{(1-|\eta|^2)^{\beta_2+N_2}}{(1-\langle w,\eta\rangle)^{c_2}}\,dv(\eta)\\ &\quad=(1-|z|^2)^{b_1-\alpha_1}(1-|w|^2)^{b_2-\alpha_2}\int_{\mathbb{B}_n}\frac{1}{(1-\langle z,u\rangle)^{c_1}}\,dv_{\beta_1+N_1}(u)\int_{\mathbb{B}_n}\frac{1}{(1-\langle w,\eta\rangle)^{c_2}}\,dv_{\beta_2+N_2}(\eta).\end{aligned} \tag{2.3}$$

由于$N_1+\beta_1>-1$，我们应用引理 2.1，其中 $f_z(u):=\frac{1}{(1-\langle z,u\rangle)^{c_1}}$。因此，存在一个正常数 $C_{(N_1,\beta_1)}$，其取决于 N_1 和 β_1，使得

$$\int_{\mathbb{B}_n}\frac{1}{(1-\langle z,u\rangle)^{c_1}}\,dv_{\beta_1+N_1}(u)=C_{(N_1,\beta_1)}. \tag{2.4}$$

注意到 $N_2+\beta_2>-1$。然后，通过将引理 2.1 用于 $f_w(\eta):=\frac{1}{(1-\langle w,\eta\rangle)^{c_2}}$，我们得出存在一个正常数 $C_{(N_2,\beta_2)}$，它依赖于 N_2 和 β_2，使得 $\int_{\mathbb{B}_n}\frac{1}{(1-\langle w,\eta\rangle)^{c_2}}\,dv_{\beta_2+N_2}(\eta)=C_{(N_2,\beta_2)}$。结合这一点、(2.3) 和 (2.4)，我们进一步推得

$$T^*_{0,\vec{b},\vec{c}}f_{N_1,N_2}(z,w)=C_{(N_1,\beta_1)}C_{(N_2,\beta_2)}(1-|z|^2)^{b_1-\alpha_1}(1-|w|^2)^{b_2-\alpha_2}.$$

因此，(2.2)成立，从而完成引理 2.6 的证明。 □

引理 2.7。设 $\vec{p} := (p_1, p_2) \in [1,\infty)^2$, $\vec{q} := (q_1, q_2) \in [1,\infty)^2$, $\alpha_i + 1 \le p_i(b_i + 1)$ 当 $p_i > 1$，且 $\alpha_i < b_i$ 当 $p_i = 1$ 对于 $i \in \{1,2\}$。对于任意给定的 $\xi, \zeta \in \mathbb{B}_n$，令

$$f_{\xi,\zeta}(z,w) := \frac{(1-|\xi|^2)^{n+1+b_1-(n+1+\alpha_1)/p_1}}{(1-\langle z,\xi\rangle)^{n+1+b_1}} \frac{(1-|\zeta|^2)^{n+1+b_2-(n+1+\alpha_2)/p_2}}{(1-\langle w,\zeta\rangle)^{n+1+b_2}}.$$

那么 $f_{\xi,\zeta} \in L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$，并且如果算子 $T_{0,\vec{b},\vec{c}}$ 从 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$ 到 $L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 有界，则存在两个正常数 C_1 和 C_2，使得对于任意 $\xi \in \mathbb{B}_n$,

$$(1-|\xi|^2)^{(n+1+b_1)q_1-(n+1+\alpha_1)q_1/p_1} \int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1-|z|^2)^{\beta_1}}{|1-\langle \xi,z\rangle|^{c_1 q_1}}\, dv(z) \le C_1 \tag{2.5}$$

并且对于任意 $\zeta \in \mathbb{B}_n$,

$$(1-|\zeta|^2)^{(n+1+b_2)q_2-(n+1+\alpha_2)q_2/p_2} \int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1-|w|^2)^{\beta_2}}{|1-\langle \zeta,w\rangle|^{c_2 q_2}}\, dv(w) \le C_2. \tag{2.6}$$

证明。我们首先断言 $f_{\xi,\zeta} \in L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$，并且存在一个与 ξ 和 ζ 无关的常数 M，使得 $\|f_{\xi,\zeta}\|_{L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}} \le M$。为此，注意到

$$\begin{aligned}\|f_{\xi,\zeta}\|_{L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}} = {} & (1-|\xi|^2)^{n+1+b_1-(n+1+\alpha_1)/p_1} \left[\int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1-|z|^2)^{\alpha_1}}{|1-\langle z,\xi\rangle|^{(n+1+b_1)p_1}}\, dv(z)\right]^{1/p_1} \\ & \times (1-|\zeta|^2)^{n+1+b_2-(n+1+\alpha_2)/p_2} \left[\int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1-|w|^2)^{\alpha_2}}{|1-\langle w,\zeta\rangle|^{(n+1+b_2)p_2}}\, dv(w)\right]^{1/p_2}\end{aligned} \tag{2.7}$$

并且对于 $i \in \{1,2\}$，$n + 1 + \alpha_i - (n + 1 + b_i)p_i = n(1-p_i) + [\alpha_i + 1 - p_i(b_i + 1)] < 0$。因此，由此以及引理 2.4(ii)，我们得出，对于任意给定的 $\xi \in \mathbb{B}_n$,

$$\int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1-|z|^2)^{\alpha_1}}{|1-\langle z,\xi\rangle|^{(n+1+b_1)p_1}}\, dv(z) \lesssim (1-|\xi|^2)^{n+1+\alpha_1-(n+1+b_1)p_1}$$

并且，对于任意给定的 $\zeta \in \mathbb{B}_n$,

$$\int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1-|w|^2)^{\alpha_2}}{|1-\langle w,\zeta\rangle|^{(n+1+b_2)p_2}}\, dv(w) \lesssim (1-|\zeta|^2)^{n+1+\alpha_2-(n+1+b_2)p_2}.$$

由此及 (2.7) 可推得 $\|f_{\xi,\zeta}\|_{L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}}$ 。1，因此 $f_{\xi,\zeta} \in L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$。

接下来证明 (2.5) 和 (2.6)。为此，由于 $p_i(b_i + 1) \ge \alpha_i + 1 > 0$ for $i \in \{1,2\}$，我们有 $b_1 > -1$ and $b_2 > -1$。对于任意给定的 $z \in \mathbb{B}_n$ and any $u \in \mathbb{B}_n$，注意到 $2 \ge |1-\langle u,z\rangle| \ge 1-|\langle u,z\rangle| \ge 1-|z|$。因此，$f_z(u) := \frac{1}{(1-\langle u,z\rangle)^{c_1}} \in L^\infty(\mathbb{B}_n, dv) \subset L^1(\mathbb{B}_n, dv^{b_1})$。类似地，对于任意给定的 $w \in \mathbb{B}_n$，我们有 $g_w(\eta) := \frac{1}{(1-\langle \eta,w\rangle)^{c_2}} \in L^\infty(\mathbb{B}_n, dv) \subset L^1(\mathbb{B}_n, dv^{b_2})$。然后，将引理 2.2 应用于 $f_z(u)$ 和 $g_z(\eta)$，可得

$$\frac{1}{(1-\langle \xi,z\rangle)^{c_1}} = \int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1-|u|^2)^{b_1}\, dv(u)}{(1-\langle u,z\rangle)^{c_1}(1-\langle \xi,u\rangle)^{n+1+b_1}} \tag{2.8}$$

and

$$\frac{1}{(1-\langle\zeta,w\rangle)^{c_2}}=\int_{\mathbb{B}_n}\frac{(1-|\eta|^2)^{b_2}\,dv(\eta)}{(1-\langle\eta,w\rangle)^{c_2}(1-\langle\zeta,\eta\rangle)^{n+1+b_2}}.$$

由此以及 (2.8) 和 $T_{0,\vec{b},\vec{c}}$ 的定义，可得

$$\overline{T_{0,\vec{b},\vec{c}}f_{\xi,\zeta}(z,w)}=\frac{(1-|\xi|^2)^{(n+1+b_1)-(n+1+\alpha_1)/p_1}}{(1-\langle\xi,z\rangle)^{c_1}}\frac{(1-|\zeta|^2)^{(n+1+b_2)-(n+1+\alpha_2)/p_2}}{(1-\langle\zeta,w\rangle)^{c_2}}.$$

此外，由于 $T_{0,\vec{b},\vec{c}}$ 是从 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$ 到 $L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 的有界算子，并利用上述结论，我们知道存在一个与 ξ 和 ζ 无关的常数 M，使得

$$\begin{aligned}\|\overline{T_{0,\vec{b},\vec{c}}f_{\xi,\zeta}}\|_{L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}}&=(1-|\xi|^2)^{(n+1+b_1)-(n+1+\alpha_1)/p_1}\left[\int_{\mathbb{B}_n}\frac{(1-|z|^2)^{\beta_1}}{|1-\langle\xi,z\rangle|^{c_1q_1}}\,dv(z)\right]^{1/q_1}\\&\quad\times(1-|\zeta|^2)^{(n+1+b_2)-(n+1+\alpha_2)/p_2}\left[\int_{\mathbb{B}_n}\frac{(1-|w|^2)^{\beta_2}}{|1-\langle\zeta,w\rangle|^{c_2q_2}}\,dv(w)\right]^{1/q_2}\\&\lesssim M.\end{aligned}$$

这意味着 (2.5) 和 (2.6) 成立，从而完成证明。 □

借助上述引理，我们接下来证明主定理的必要性如下。

引理 2.8. 设 $1<p_1\le q_1<\infty$ 和 $1<p_2\le q_2<\infty$。若算子 $T_{0,\vec{b},\vec{c}}$ 是从 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$ 到 $L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 的有界算子，则 $\alpha_1+1<p_1(b_1+1)$ 和 $\alpha_2+1<p_2(b_2+1)$。

证明. 设 N_1 和 N_2 为满足 $N_1+\beta_1>-1$ 和 $N_2+\beta_2>-1$的正数。定义 $f_{N_1,N_2}(z,w):=(1-|z|^2)^{N_1}(1-|w|^2)^{N_2}$，其中任意 $z\in\mathbb{B}_n$ 和 $w\in\mathbb{B}_n$。由引理 2.5 可知，$T^*_{0,\vec{b},\vec{c}}$ 是从 $L^{\vec{q}'}_{\vec{\beta}}$ 到 $L^{\vec{p}'}_{\vec{\alpha}}$ 的有界算子。由引理 2.6 可得，$T^*_{0,\vec{b},\vec{c}}f_{N_1,N_2}\in L^{\vec{p}'}_{\vec{\alpha}}$ 和 $T^*_{0,\vec{b},\vec{c}}f_{N_1,N_2}(z,w)=C_{(N_1,\beta_1)}C_{(N_2,\beta_2)}(1-|z|^2)^{b_1-\alpha_1}(1-|w|^2)^{b_2-\alpha_2}$。因此

$$\begin{aligned}\left\|T^*_{0,\vec{b},\vec{c}}f_{N_1,N_2}\right\|_{L^{\vec{p}'}_{\vec{\alpha}}}&=C_{(N_1,\beta_1)}C_{(N_2,\beta_2)}\left[\int_{\mathbb{B}_n}(1-|z|^2)^{p_1'(b_1-\alpha_1)+\alpha_1}\,dv(u)\right]^{1/p_1'}\\&\quad\times\left[\int_{\mathbb{B}_n}(1-|w|^2)^{p_2'(b_2-\alpha_2)+\alpha_2}\,dv(\eta)\right]^{1/p_2'}\\&<\infty,\end{aligned}$$

这意味着 $\alpha_1+1<p_1(b_1+1)$ 和 $\alpha_2+1<p_2(b_2+1)$。 □

根据引理 2.5 和 2.6，以及类似于引理 2.8 证明中所使用的论证，我们得到以下三个结果；细节略去。

引理 2.9. 设 $1<p_1\le q_1<\infty$ 和 $1=p_2\le q_2<\infty$。若算子 $T_{0,\vec{b},\vec{c}}$ 从 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$ 到 $L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 有界，则 $\alpha_1+1<p_1(b_1+1)$ 且 $\alpha_2\le b_2$。

引理 2.10. 设 $1 = p_1 \le q_1 < \infty$ 和 $1 < p_2 \le q_2 < \infty$。若算子 $T_{0,\vec{b},\vec{c}}$ 从 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$ 到 $L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 有界，则 $\alpha_1 \le b_1$ 且 $\alpha_2 + 1 < p_2(b_2 + 1)$。

引理 2.11. 设 $1 = p_1 \le q_1 < \infty$ 和 $1 = p_2 \le q_2 < \infty$。如果算子 $T_{0,\vec{b},\vec{c}}$ 从 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$ 到 $L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 有界，则 $\alpha_1 \le b_1$ 和 $\alpha_2 \le b_2$。

引理2.12.设 $1 \le p_1 \le q_1 < \infty$、$1 \le p_2 \le q_2 < \infty$、$\alpha_1 + 1 < p(b_1 + 1)$ 以及 $\alpha_2 + 1 < p(b_2 + 1)$。如果算子 $T_{0,\vec{b},\vec{c}}$ 从 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$ 到 $L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 是有界的，那么

$$\begin{cases} c_1 \le n + 1 + b_1 + \dfrac{n + 1 + \beta_1}{q_1} - \dfrac{n + 1 + \alpha_1}{p_1}, \\ c_2 \le n + 1 + b_2 + \dfrac{n + 1 + \beta_2}{q_2} - \dfrac{n + 1 + \alpha_2}{p_2}. \end{cases}$$

证明。我们首先证明关于 c_1 的不等式。为此，注意到

$$(n + 1 + b_1) - (n + 1 + \alpha_1)/p_1 = [n(p_1 - 1) + p_1(b_1 + 1) - (\alpha_1 + 1)]/p_1 > 0. \tag{2.9}$$

如果 $n + 1 + \beta_1 - c_1 q_1 > 0$，或等价地，$c_1 < \frac{n+1+\beta_1}{q_1}$，那么，利用引理 2.4(i)和(2.9)，我们知道

$$\begin{aligned} &(1 - |\xi|^2)^{(n+1+b_1)q_1 - (n+1+\alpha_1)q_1/p_1} \int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1 - |z|^2)^{\beta_1}}{|1 - \langle \xi, z\rangle|^{c_1 q_1}} \, dv(z) \\ &\quad \lesssim (1 - |\xi|^2)^{(n+1+b_1)q_1 - (n+1+\alpha_1)q_1/p_1} \le C. \end{aligned}$$

若 $n + 1 + \beta_1 - c_1 q_1 = 0$，或者等价地，$c_1 = \frac{n+1+\beta_1}{q_1}$，那么根据引理 2.3(ii)、(2.9)以及当 $x \to 0$ 趋于 $\varepsilon > 0$时 $x^\varepsilon \log x \to 0$ 的事实，我们可以得出存在正常数 R，使得对任意 $R < |\xi| < 1$,

$$\begin{aligned} &(1 - |\xi|^2)^{(n+1+b_1)q_1 - (n+1+\alpha_1)q_1/p_1} \int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1 - |z|^2)^{\beta_1}}{|1 - \langle \xi, z\rangle|^{c_1 q_1}} \, dv(z) \\ &\quad \lesssim -(1 - |\xi|^2)^{(n+1+b_1)q_1 - (n+1+\alpha_1)q_1/p_1} \log(1 - |\xi|^2) \le C. \end{aligned}$$

对于 $|\xi| \le R$，显然有

$$(1 - |\xi|^2)^{(n+1+b_1)q_1 - (n+1+\alpha_1)q_1/p_1} \int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1 - |z|^2)^{\beta_1}}{|1 - \langle \xi, z\rangle|^{c_1 q_1}} \, dv(z) \le C.$$

如果 $n + 1 + \beta_1 - c_1 q_1 < 0$，或者等价地，$c_1 > \frac{n+1+\beta_1}{q_1}$，那么，应用引理 2.3(iii)，我们可以得到存在一个常数 R，使得对于 $R < |\xi| < 1$,

$$\begin{aligned} &(1 - |\xi|^2)^{(n+1+b_1)q_1 - (n+1+\alpha_1)q_1/p_1} \int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1 - |z|^2)^{\beta_1}}{|1 - \langle \xi, z\rangle|^{c_1 q_1}} \, dv(z) \\ &\quad \sim (1 - |\xi|^2)^{(n+1+b_1)q_1 - (n+1+\alpha_1)q_1/p_1 + n + 1 + \beta_1 - c_1 q_1}, \end{aligned}$$

这与引理 2.7 的 (2.5) 式一起，意味着

$$\begin{cases} n+1+\beta_1-c_1q_1<0, \\ (n+1+b_1)q_1-(n+1+\alpha_1)q_1/p_1+n+1+\beta_1-c_1q_1\geq 0. \end{cases}$$

这等价于 $\frac{n+1+\beta_1}{q_1} \leq c_1 \leq n+1+b_1+\frac{n+1+\beta_1}{q_1}-\frac{n+1+\alpha_1}{p_1}$。因此，由此及上述论证，我们得出结论:

$$c_1 \leq n+1+b_1+\frac{n+1+\beta_1}{q_1}-\frac{n+1+\alpha_1}{p_1}.$$

现在我们证明关于 c_2 的不等式。注意,

$$(n+1+b_2)-(n+1+\alpha_2)/p_2=[n(p_2-1)+p_2(b_2+1)-(\alpha_2+1)]/p_2>0. \tag{2.10}$$

当 $n+1+\beta_2-c_2q_2>0$，或者等价地，$c_2<\frac{n+1+\beta_2}{q_2}$，根据引理 2.4(i)和(2.10)，我们进而推得,

$$\begin{aligned} &(1-|\zeta|^2)^{(n+1+b_2)q_2-(n+1+\alpha_2)q_2/p_2}\int_{\mathbb{B}_n}\frac{(1-|w|^2)^{\beta_2}}{|1-\langle\zeta,w\rangle|^{c_2q_2}}\,dv(w) \\ &\lesssim (1-|\zeta|^2)^{(n+1+b_2)q_2-(n+1+\alpha_2)q_2/p_2}\leq C. \end{aligned}$$

当 $n+1+\beta_2-c_2q_2=0$ 时，或者等价地，$c_2=\frac{n+1+\beta_2}{q_2}$，由引理 2.3(ii) 和 (2.10) 再次可知，存在一个正常数 R，使得对于任意 $R<|\zeta|<1$,

$$\begin{aligned} &(1-|\zeta|^2)^{(n+1+b_2)q_2-(n+1+\alpha_2)q_2/p_2}\int_{\mathbb{B}_n}\frac{(1-|w|^2)^{\beta_2}}{|1-\langle\zeta,w\rangle|^{c_2q_2}}\,dv(w) \\ &\lesssim -(1-|\zeta|^2)^{(n+1+b_2)q_2-(n+1+\alpha_2)q_2/p_2}\log(1-|\zeta|^2)\leq C. \end{aligned}$$

对于 $|\zeta|\leq R$ 的情形，有

$$(1-|\zeta|^2)^{(n+1+b_2)q_2-(n+1+\alpha_2)q_2/p_2}\int_{\mathbb{B}_n}\frac{(1-|w|^2)^{\beta_2}}{|1-\langle\zeta,w\rangle|^{c_2q_2}}\,dv(w)\leq C.$$

当 $n+1+\beta_2-c_2q_2<0$，或等价地，$c_2>\frac{n+1+\beta_2}{q_2}$，根据引理 2.3(iii)，可得存在常数 R，使得对于 $R<|\zeta|<1$,

$$\begin{aligned} &(1-|\zeta|^2)^{(n+1+b_2)q_2-(n+1+\alpha_2)q_2/p_2}\int_{\mathbb{B}_n}\frac{(1-|w|^2)^{\beta_2}}{|1-\langle\zeta,w\rangle|^{c_2q_2}}\,dv(w) \\ &\sim (1-|\zeta|^2)^{(n+1+b_2)q_2-(n+1+\alpha_2)q_2/p_2+n+1+\beta_2-c_2q_2}, \end{aligned}$$

结合引理 2.7 中的 (2.6)，进一步可得

$$\begin{cases} n+1+\beta_2-c_2q_2<0, \\ (n+1+b_2)q_2-(n+1+\alpha_2)q_2/p_2+n+1+\beta_2-c_2q_2\geq 0. \end{cases}$$

这等价于 $\frac{n+1+\beta_2}{q_2}\leq c_2\leq n+1+b_2+\frac{n+1+\beta_2}{q_2}-\frac{n+1+\alpha_2}{p_2}$。由此及上述论证可推得

$$c_2\leq n+1+b_2+\frac{n+1+\beta_2}{q_2}-\frac{n+1+\alpha_2}{p_2},$$

从而完成了整个证明。 □

引理 2.13. 设 $1 \le p_1 \le q_1 < \infty$、 $1 = p_2 \le q_2 < \infty$、 $\alpha_1 + 1 < p_1(b_1 + 1)$ 和 $\alpha_2 = b_2$。如果算子 $T_{0,\vec{b},\vec{c}}$ 从 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$ 到 $L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 有界，则

$$\begin{cases} c_1 \le n + 1 + b_1 + \dfrac{n + 1 + \beta_1}{q_1} - \dfrac{n + 1 + \alpha_1}{p_1}, \\ c_2 < \dfrac{n + 1 + \beta_2}{q_2}. \end{cases}$$

证明。对于任意给定的 $\xi, \zeta \in \mathbb{B}_n$，令

$$f_{\xi,\zeta}(z, w) = \frac{(1 - |\xi|^2)^{n+1+b_1-(n+1+\alpha_1)/p_1}}{(1 - \langle z, \xi\rangle)^{n+1+b_1}} \frac{1}{(1 - \langle w, \zeta\rangle)^{n+1+b_2}}.$$

注意到 $n+1+\alpha_1-(n+1+b_1)p_1 = n(1-p_1)+[\alpha_1+1-p_1(b_1+1)] < 0$且 $n+1+\alpha_2-(n+1+b_2) = 0$。然后，根据引理 2.7 和引理 2.3(ii) 的证明，我们发现当 $|\zeta| \to 1^-$ 时，

$$\|f_{\xi,\zeta}\|_{L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}} \sim \int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1 - |w|^2)^{\alpha_2}}{|1 - \langle w, \zeta\rangle|^{n+1+b_2}} \, dv(w) \sim \log \frac{1}{1 - |\zeta|^2}$$

and

$$\|T_{0,\vec{b},\vec{c}} f_{\xi,\zeta}\|_{L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}} = (1 - |\xi|^2)^{(n+1+b_1)-(n+1+\alpha_1)/p_1} \left[\int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1 - |z|^2)^{\beta_1}}{|1 - \langle \xi, z\rangle|^{c_1 q_1}} \, dv(z)\right]^{1/q_1} \times \left[\int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1 - |w|^2)^{\beta_2}}{|1 - \langle \zeta, w\rangle|^{c_2 q_2}} dv(w)\right]^{1/q_2}.$$

由 $T_{0,\vec{b},\vec{c}}$ 从 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$ 到 $L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 有界这一假设可知，存在一个正常数 M，与 ξ 和 ζ 无关，使得当 $|\zeta| \to 1^-$, 时，$T_{0,\vec{b},\vec{c}} f_{\xi,\zeta}\|_{L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}} \le M\| f_{\xi,\zeta}\|_{L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}}$，即

$$(1 - |\xi|^2)^{(n+1+b_1)-(n+1+\alpha_1)/p_1} \left[\int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1 - |z|^2)^{\beta_1}}{|1 - \langle \xi, z\rangle|^{c_1 q_1}} \, dv(z)\right]^{1/q_1} \left[\int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1 - |w|^2)^{\beta_2}}{|1 - \langle \zeta, w\rangle|^{c_2 q_2}} dv(w)\right]^{1/q_2} \lesssim M \log \frac{1}{1 - |\zeta|^2}.$$

由引理 2.3 可知，当且仅当 $n + 1 + \beta_2 - c_2 q_2 \ge 0$，且存在一个与 ξ 无关的正常数 C，使得

$$(1 - |\xi|^2)^{(n+1+b_1)-(n+1+\alpha_1)/p_1} \left[\int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1 - |z|^2)^{\beta_1}}{|1 - \langle \xi, z\rangle|^{c_1 q_1}} \, dv(z)\right]^{1/q_1} \le C. \tag{2.11}$$

我们首先证明由 (2.11) 得出的关于 c_1 的断言。为此，注意到

$$(n + 1 + b_1) - (n + 1 + \alpha_1)/p_1 = [n(p_1 - 1) + p_1(b_1 + 1) - (\alpha_1 + 1)]/p_1 > 0. \tag{2.12}$$

如果 $n + 1 + \beta_1 - c_1 q_1 > 0$，或者等价地，$c_1 < \frac{n+1+\beta_1}{q_1}$，那么，根据引理 2.4(i) 和 (2.12)，我们有

$$(1 - |\xi|^2)^{(n+1+b_1)q_1-(n+1+\alpha_1)q_1/p_1} \int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1 - |z|^2)^{\beta_1}}{|1 - \langle \xi, z\rangle|^{c_1 q_1}} \, dv(z)$$

$$\lesssim (1-|\xi|^2)^{(n+1+b_1)q_1-(n+1+\alpha_1)q_1/p_1} \le C.$$

如果 $n+1+\beta_1-c_1q_1=0$，或者等价地，$c_1=\frac{n+1+\beta_1}{q_1}$，那么根据引理 2.3(ii)、(2.12)，以及对任意 $\varepsilon>0$，当 $x\to 0$ 时 $x^{\varepsilon}\log x\to 0$ 这一事实，我们再次推得存在正常数 R，使得对任意 $R<|\xi|<1$,

$$\begin{aligned}&(1-|\xi|^2)^{(n+1+b_1)q_1-(n+1+\alpha_1)q_1/p_1}\int_{\mathbb{B}_n}\frac{(1-|z|^2)^{\beta_1}}{|1-\langle\xi,z\rangle|^{c_1q_1}}\,dv(z)\\ &\lesssim -(1-|\xi|^2)^{(n+1+b_1)q_1-(n+1+\alpha_1)q_1/p_1}\log(1-|\xi|^2)\le C.\end{aligned}$$

对于 $|\xi|\le R$，我们还有

$$(1-|\xi|^2)^{(n+1+b_1)q_1-(n+1+\alpha_1)q_1/p_1}\int_{\mathbb{B}_n}\frac{(1-|z|^2)^{\beta_1}}{|1-\langle\xi,z\rangle|^{c_1q_1}}\,dv(z)\le C.$$

若 $n+1+\beta_1-c_1q_1<0$，或者等价地，$c_1>\frac{n+1+\beta_1}{q_1}$，那么由引理 2.3(iii)可知，存在常数 R，使得对于任意 $R<|\xi|<1$,

$$\begin{aligned}&(1-|\xi|^2)^{(n+1+b_1)q_1-(n+1+\alpha_1)q_1/p_1}\int_{\mathbb{B}_n}\frac{(1-|z|^2)^{\beta_1}}{|1-\langle\xi,z\rangle|^{c_1q_1}}\,dv(z)\\ &\sim (1-|\xi|^2)^{(n+1+b_1)q_1-(n+1+\alpha_1)q_1/p_1+n+1+\beta_1-c_1q_1},\end{aligned}$$

结合 (2.11)，可知

$$\begin{cases}n+1+\beta_1-c_1q_1<0,\\ (n+1+b_1)q_1-(n+1+\alpha_1)q_1/p_1+n+1+\beta_1-c_1q_1\ge 0.\end{cases}$$

这等价于 $\frac{n+1+\beta_1}{q_1}<c_1\le n+1+b_1+\frac{n+1+\beta_1}{q_1}-\frac{n+1+\alpha_1}{p_1}$。这与上述论证一起表明

$$c_1\le n+1+b_1+\frac{n+1+\beta_1}{q_1}-\frac{n+1+\alpha_1}{p_1}.$$

因此，关于 c_1 的断言得证。

现在我们证明关于 c_2 的不等式。为此，反设 $n+1+\beta_2-c_2q_2=0$，并且对于任意给定的 $\zeta\in\mathbb{B}_n$，令

$$g_\zeta(z,w)=\frac{(1-\langle\zeta,w\rangle)^{(n+1+\beta_2)/q_2}}{|1-\langle\zeta,w\rangle|^{n+1+\beta_2}}.$$

然后，由引理 2.1 可知

$$\begin{aligned}T^*_{0,\vec{b},\vec{c}}g_\zeta(z,w)&=(1-|z|^2)^{b_1-\alpha_1}\int_{\mathbb{B}_n}\frac{(1-|u|^2)^{\beta_1}}{(1-\langle z,u\rangle)^{c_1}}\,dv(u)\int_{\mathbb{B}_n}\frac{(1-|\eta|^2)^{\beta_2}(1-\langle\zeta,\eta\rangle)^{(n+1+\beta_2)/q_2}}{(1-\langle w,\eta\rangle)^{c_2}|1-\langle\zeta,\eta\rangle|^{n+1+\beta_2}}\,dv(\eta)\\ &\sim(1-|z|^2)^{b_1-\alpha_1}\int_{\mathbb{B}_n}\frac{(1-|\eta|^2)^{\beta_2}(1-\langle\zeta,\eta\rangle)^{(n+1+\beta_2)/q_2}}{(1-\langle w,\eta\rangle)^{c_2}|1-\langle\zeta,\eta\rangle|^{n+1+\beta_2}}\,dv(\eta).\end{aligned}$$

接下来我们考虑以下六种情况。

情形 1) $1 < p_1 \le q_1 < \infty$ 且 $1 = p_2 < q_2 < \infty$。在此情形下，由引理 2.3(ii)，我们发现，当$|\zeta| \to 1^-$时，

$$\|g_\zeta\|_{L^{\vec{q}'}_{\vec{\beta}}} \sim \left[\int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1-|w|^2)^{\beta_2}}{|1-\langle \zeta, w\rangle|^{n+1+\beta_2}}\, dv(w)\right]^{1/q_2'} \sim \left(\log \frac{1}{1-|\zeta|^2}\right)^{1/q_2'}$$

并且，再次应用假设 $n + 1 + \beta_2 - c_2 q_2 = 0$ 和引理 2.3(ii)，我们有

$$\begin{aligned}\|T^*_{0,\vec{b},\vec{c}} g_\zeta\|_{L^{\vec{p}'}_{\vec{\alpha}}} &\ge \|T^*_{0,\vec{b},\vec{c}} g_\zeta\|_{L^{p_1'}_{\alpha_1}}(\zeta) \\ &\sim \left[\int_{\mathbb{B}_n} (1-|z|^2)^{(b_1-\alpha_1)p_1'+\alpha_1}\, dv(z)\right]^{1/p_1'} \int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1-|\eta|^2)^{\beta_2}}{|1-\langle \zeta, \eta\rangle|^{n+1+\beta_2}}\, dv(\eta) \sim \log \frac{1}{1-|\zeta|^2}\end{aligned}$$

当 $|\zeta| \to 1^-$。这与引理 2.5 结合起来，推出积分算子 $T^*_{0,\vec{b},\vec{c}}$ 从 $L^{\vec{q}'}_{\vec{\beta}}$ 到 $L^{\vec{p}'}_{\vec{\alpha}}$ 有界。也就是说，存在一个与 ζ 无关的正常数 L，使得当 $|\zeta| \to 1^-$ 时，

$$\log \frac{1}{1-|\zeta|^2} \lesssim \|T^*_{0,\vec{b},\vec{c}} g_\zeta\|_{L^{\vec{p}'}_{\vec{\alpha}}} \le L\|g_\zeta\|_{L^{\vec{q}'}_{\vec{\beta}}} \sim L\left(\log \frac{1}{1-|\zeta|^2}\right)^{1/q_2'},$$

这是不可能的。因此，$n + 1 + \beta_2 - c_2 q_2 \ne 0$，故在此情形下~~$c_2 < n+1+\beta_2 q_2$~~。

情形2) $1 < p_1 \le q_1 < \infty$ 和 $1 = p_2 = q_2$。在此情形下，我们有 $\|g_\zeta\|_{L^{\vec{q}'}_{\vec{\beta}}} \sim 1$，并且由情形 1) 可知，当 $|\zeta| \to 1^-$, $\|T^*_{0,\vec{b},\vec{c}} g_\zeta\|_{L^{\vec{p}'}_{\vec{\alpha}}} \gtrsim \log \frac{1}{1-|\zeta|^2}$，结合引理2.5，这意味着存在一个与 ζ 无关的正常数 L，使得当 $|\zeta| \to 1^-$，

$$\log \frac{1}{1-|\zeta|^2} \lesssim \|T^*_{0,\vec{b},\vec{c}} g_\zeta\|_{L^{\vec{p}'}_{\vec{\alpha}}} \le L\|g_\zeta\|_{L^{\vec{q}'}_{\vec{\beta}}} \sim L,$$

这是不可能的。因此，在这种情~~况下，$c_2 < n+1+\beta_2 q_2$~~。

情形 3) $1 = p_1 < q_1 < \infty$ 且 $1 = p_2 < q_2 < \infty$。在这种情形下，由引理 2.3(ii)，我们发现当 $|\zeta| \to 1^-$ 时，

$$\|g_\zeta\|_{L^{\vec{q}'}_{\vec{\beta}}} \sim \left[\int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1-|w|^2)^{\beta_2}}{|1-\langle \zeta, w\rangle|^{n+1+\beta_2}}\, dv(w)\right]^{1/q_2'} \sim \left(\log \frac{1}{1-|\zeta|^2}\right)^{1/q_2'}$$

并再次应用假设 $n + 1 + \beta_2 - c_2 q_2 = 0$ 和引理 2.3(ii)，可得

$$\|T^*_{0,\vec{b},\vec{c}} g_\zeta\|_{L^{\vec{p}'}_{\vec{\alpha}}} \ge T^*_{0,\vec{b},\vec{c}} g_\zeta(0,\zeta) \sim \int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1-|\eta|^2)^{\beta_2}}{|1-\langle \zeta, \eta\rangle|^{n+1+\beta_2}}\, dv(\eta) \sim \log \frac{1}{1-|\zeta|^2}$$

当 $|\zeta| \to 1^-$ 时。结合引理 2.5，进一步可知存在一个与 ζ 无关的正常数 L，使得当 $|\zeta| \to 1^-$ 时，

$$\log \frac{1}{1-|\zeta|^2} \lesssim \|T^*_{0,\vec{b},\vec{c}} g_\zeta\|_{L^{\vec{p}'}_{\vec{\alpha}}} \le L\|g_\zeta\|_{L^{\vec{q}'}_{\vec{\beta}}} \sim L\left(\log \frac{1}{1-|\zeta|^2}\right)^{1/q_2'},$$

这是不可能的。因此，$n+1+\beta_2-c_2q_2\neq 0$，从而在这种情况下 ~~$c_2<$~~ $\frac{n+1+\beta_2}{q_2}$。

情形 4) $1=p_1=q_1$ 且 $1=p_2<q_2<\infty$。在此情形下，由引理 2.3(ii)，我们得到当$|\zeta|\to 1^-$时，

$$\|g_\zeta\|_{L^{\vec{q}'}_{\vec{\beta}}}\sim\left[\int_{\mathbb{B}_n}\frac{(1-|w|^2)^{\beta_2}}{|1-\langle\zeta,w\rangle|^{n+1+\beta_2}}\,dv(w)\right]^{1/q_2'}\sim\left(\log\frac{1}{1-|\zeta|^2}\right)^{1/q_2'}$$

并且，由情形 3)，我们推知 $\|T^*_{0,\vec{b},\vec{c}}g_\zeta\|_{L^{\vec{p}'}_{\vec{\alpha}}}\gtrsim\log\frac{1}{1-|\zeta|^2}$as $|\zeta|\to 1^-$。结合引理 2.5，这意味着存在一个与 ζ 无关的正常数 L，使得当$|\zeta|\to 1^-$时，

$$\log\frac{1}{1-|\zeta|^2}\lesssim\|T^*_{0,\vec{b},\vec{c}}g_\zeta\|_{L^{\vec{p}'}_{\vec{\alpha}}}\le L\|g_\zeta\|_{L^{\vec{q}'}_{\vec{\beta}}}\sim L\left(\log\frac{1}{1-|\zeta|^2}\right)^{1/q_2'},$$

这不可能。因此，在此情形下，~~$c_2<$~~ $\frac{n+1+\beta_2}{q_2}$。

情形 5) $1=p_1<q_1<\infty$ 且 $1=p_2=q_2$。在此情形下，我们有 $\|g_\zeta\|_{L^{\vec{q}'}_{\vec{\beta}}}\sim 1$，并且由情形 3) 可知 $\|T^*_{0,\vec{b},\vec{c}}g_\zeta\|_{L^{\vec{p}'}_{\vec{\alpha}}}\gtrsim\log\frac{1}{1-|\zeta|^2}$as $|\zeta|\to 1^-$。由此以及引理 2.5 可知，存在一个与 ζ 无关的正常数 L，使得当 $|\zeta|\to 1^-$时，

$$\log\frac{1}{1-|\zeta|^2}\lesssim\|T^*_{0,\vec{b},\vec{c}}g_\zeta\|_{L^{\vec{p}'}_{\vec{\alpha}}}\le L\|g_\zeta\|_{L^{\vec{q}'}_{\vec{\beta}}}\sim L,$$

这是不可能的。因此，在这种情况下，~~$c_2<$~~ $\frac{n+1+\beta_2}{q_2}$。

情形6) $1=p_1=q_1$且 $1=p_2=q_2$。在此情形下，注意到 $\|g_\zeta\|_{L^{\vec{q}'}_{\vec{\beta}}}=1$且 $\|T^*_{0,\vec{b},\vec{c}}g_\zeta\|_{L^{\vec{p}'}_{\vec{\alpha}}}\gtrsim\log\frac{1}{1-|\zeta|^2}$ as $|\zeta|\to 1^-$。结合引理2.5，这意味着存在一个与 ζ 无关的正常数 L，使得当$|\zeta|\to 1^-$时，

$$\log\frac{1}{1-|\zeta|^2}\lesssim\|T^*_{0,\vec{b},\vec{c}}g_\zeta\|_{L^{\vec{p}'}_{\vec{\alpha}}}\le L\|g_\zeta\|_{L^{\vec{q}'}_{\vec{\beta}}}=L.$$

这是不可能的。因此，在这种~~情况下~~，$c_2<\frac{n+1+\beta_2}{q_2}$。综合这六种情况，我们完成了证明。□

引理2.14。设 $1=p_1\le q_1<\infty$、$1\le p_2\le q_2<\infty$、$\alpha_1=b_1$, 以及 $\alpha_2+1<p_2(b_2+1)$。如果算子 $T_{0,\vec{b},\vec{c}}$ 从 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$ 到 $L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 是有界的，则

$$\begin{cases}c_1<\dfrac{n+1+\beta_1}{q_1},\\[2mm] c_2\le n+1+b_2+\dfrac{n+1+\beta_2}{q_2}-\dfrac{n+1+\alpha_2}{p_2}.\end{cases}$$

证明。此引理是引理2.13 的对称情形。因此，其证明与引理 2.13 的证明类似，

$$f_{\xi,\zeta}(z,w)=\frac{1}{(1-\langle z,\xi\rangle)^{n+1+b_1}}\frac{(1-|\zeta|^2)^{n+1+b_2-(n+1+\alpha_2)/p_2}}{(1-\langle w,\zeta\rangle)^{n+1+b_2}}$$

对于任意给定的 ξ、 $\zeta \in \mathbb{B}_n$，以及

$$g_\xi(z,w) = \frac{(1-\langle \xi, z\rangle)^{(n+1+\beta_1)/q_1}}{|1-\langle \xi, z\rangle|^{n+1+\beta_1}}$$

对于任意给定的 $\xi \in \mathbb{B}_n$。因此，我们省略证明。 □

引理 2.15. 设 $1 = p_1 \le q_1 < \infty, 1 = p_2 \le q_2 < \infty, \alpha_1 = b_1$，和 $\alpha_2 = b_2$。若算子 $T_{0,\vec{b},\vec{c}}$ 从 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$ 到 $L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 有界，则

$$\begin{cases} c_1 < \dfrac{n+1+\beta_1}{q_1}, \\ c_2 < \dfrac{n+1+\beta_2}{q_2}. \end{cases}$$

证明. 对于任意给定的 $\xi, \zeta \in \mathbb{B}_n$，令

$$f_{\xi,\zeta}(z,w) = \frac{1}{(1-\langle z,\xi\rangle)^{n+1+b_1}} \frac{1}{(1-\langle w,\zeta\rangle)^{n+1+b_2}}.$$

注意到 $n+1+\alpha_1-(n+1+b_1) = 0$ 且 $n+1+\alpha_2-(n+1+b_2) = 0$。于是，由引理 2.3(ii)，我们得出，当 $|\xi| \to 1^-$ 和 $|\zeta| \to 1^-$ 时，

$$\|f_{\xi,\zeta}\|_{L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}} \sim \int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1-|z|^2)^{\alpha_1}}{|1-\langle z,\xi\rangle|^{n+1+b_1}}\, dv(z) \int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1-|w|^2)^{\alpha_2}}{|1-\langle w,\zeta\rangle|^{n+1+b_2}}\, dv(w) \sim \log\frac{1}{1-|\xi|^2} \log\frac{1}{1-|\zeta|^2}$$

并且，通过引理 2.7 的证明，我们发现

$$\|T_{0,\vec{b},\vec{c}} f_{\xi,\zeta}\|_{L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}} = \left[\int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1-|z|^2)^{\beta_1}}{|1-\langle \xi, z\rangle|^{c_1 q_1}}\, dv(z)\right]^{1/q_1} \left[\int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1-|w|^2)^{\beta_2}}{|1-\langle \zeta, w\rangle|^{c_2 q_2}}\, dv(w)\right]^{1/q_2}.$$

应用 $T_{0,\vec{b},\vec{c}}$ 从 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$ 到 $L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 有界这一假设，可推出存在一个与 ξ 和 ζ 无关的正常数 M，使得当 $|\xi| \to 1^-$ 和 $|\zeta| \to 1^-$ 时，$\|T_{0,\vec{b},\vec{c}} f_{\xi,\zeta}\|_{L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}} \le M \|f_{\xi,\zeta}\|_{L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}}$，即，

$$\left[\int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1-|z|^2)^{\beta_1}}{|1-\langle \xi, z\rangle|^{c_1 q_1}}\, dv(z)\right]^{1/q_1} \left[\int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1-|w|^2)^{\beta_2}}{|1-\langle \zeta, w\rangle|^{c_2 q_2}}\, dv(w)\right]^{1/q_2} \le M \log\frac{1}{1-|\xi|^2} \log\frac{1}{1-|\zeta|^2}.$$

根据引理 2.3，我们知道，当且仅当$n+1+\beta_1-c_1q_1 \ge 0$ 并且 $n+1+\beta_2-c_2q_2 \ge 0$时，这种情况才会发生。为了完成证明，只需证明$n+1+\beta_1-c_1q_1 \ne 0$ 并且 $n+1+\beta_2-c_2q_2 \ne 0$。

事实上，如果我们假设 $n+1+\beta_1-c_1q_1 = 0$，对于任意给定的 $\xi \in \mathbb{B}_n$，令

$$g_\xi(z,w) = \frac{(1-\langle \xi, z\rangle)^{(n+1+\beta_1)/q_1}}{|1-\langle \xi, z\rangle|^{n+1+\beta_1}}.$$

于是，由引理 2.1 可得

$$T^*_{0,\vec{b},\vec{c}} g_\xi(z,w) = \int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1-|u|^2)^{\beta_1}(1-\langle \xi, u\rangle)^{(n+1+\beta_1)/q_1}}{(1-\langle z,u\rangle)^{c_1}|1-\langle \xi,u\rangle|^{n+1+\beta_1}}\, dv(u).$$

接下来，我们考虑以下四种情形。

情况1) $1 = p_1 < q_1 < \infty$ 和 $1 = p_2 < q_2 < \infty$。在此情况下，根据引理 2.3(ii)，我们发现，当$|\xi| \to 1^-$时，

$$\|g_\xi\|_{L^{\vec{q}'}_{\vec{\beta}}} \sim \left[\int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1-|z|^2)^{\beta_1}}{|1-\langle \xi, z\rangle|^{n+1+\beta_1}}\, dv(z)\right]^{1/q_1'} \sim \left(\log \frac{1}{1-|\xi|^2}\right)^{1/q_1'}$$

并且再次应用假设 $n + 1 + \beta_1 - c_1 q_1 = 0$ 和引理 2.3(ii)，我们得到

$$\|T^*_{0,\vec{b},\vec{c}} g_\xi\|_{L^{\vec{p}'}_{\vec{\alpha}}} \geq T^*_{0,\vec{b},\vec{c}} g_\xi(\xi, 0) \sim \int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1-|u|^2)^{\beta_1}}{|1-\langle \xi, u\rangle|^{n+1+\beta_1}}\, dv(u) \sim \log \frac{1}{1-|\xi|^2}$$

当 $|\xi| \to 1^-$ 时。结合引理 2.5 可进一步推出，存在一个与 ξ 无关的正常数 L，使得当 $|\xi| \to 1^-$ 时，

$$\log \frac{1}{1-|\xi|^2} \lesssim \|T^*_{0,\vec{b},\vec{c}} g_\xi\|_{L^{\vec{p}'}_{\vec{\alpha}}} \leq L\|g_\xi\|_{L^{\vec{q}'}_{\vec{\beta}}} \sim L\left(\log \frac{1}{1-|\xi|^2}\right)^{1/q_1'},$$

这是不可能的。因此，$n + 1 + \beta_1 - c_1 q_1 \neq 0$，从而 $c_1 < \frac{n+1+\beta_1}{q_1}$。~~在这~~种情况下。

情形 2) $1 = p_1 < q_1 < \infty$ 且 $1 = p_2 = q_2$。在这种情况下，由引理 2.3(ii)，我们得到当$|\xi| \to 1^-$时，

$$\|g_\xi\|_{L^{\vec{q}'}_{\vec{\beta}}} = \left[\int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1-|z|^2)^{\beta_1}}{|1-\langle \xi, z\rangle|^{n+1+\beta_1}}\, dv(z)\right]^{1/q_1'} \sim \left(\log \frac{1}{1-|\xi|^2}\right)^{1/q_1'}$$

并且，由情形 1），我们推得 $\|T^*_{0,\vec{b},\vec{c}} g_\xi\|_{L^{\vec{p}'}_{\vec{\alpha}}} \gtrsim \log \frac{1}{1-|\xi|^2}$ as $|\xi| \to 1^-$。结合引理 2.5，可知存在一个与 ξ 无关的正常数 L，使得当 $|\xi| \to 1^-$ 时，

$$\log \frac{1}{1-|\xi|^2} \lesssim \|T^*_{0,\vec{b},\vec{c}} g_\xi\|_{L^{\vec{p}'}_{\vec{\alpha}}} \leq L\|g_\xi\|_{L^{\vec{q}'}_{\vec{\beta}}} \sim L\left(\log \frac{1}{1-|\xi|^2}\right)^{1/q_1'},$$

这不可能。因此，在此情形下，~~$c_1 <$~~ $\frac{n+1+\beta_1}{q_1}$。

情形 3） $1 = p_1 = q_1$ 且 $1 = p_2 < q_2 < \infty$。在此情形下，我们有 $\|g_\xi\|_{L^{\vec{q}'}_{\vec{\beta}}} \sim 1$，并且由情形 1）可知，$\|T^*_{0,\vec{b},\vec{c}} g_\xi\|_{L^{\vec{p}'}_{\vec{\alpha}}} \gtrsim \log \frac{1}{1-|\xi|^2}$ as $|\xi| \to 1^-$。由此以及引理 2.5 可知，存在一个与 ξ 无关的正常数 L，使得当 $|\xi| \to 1^-$ 时，$\log \frac{1}{1-|\xi|^2} \lesssim \|T^*_{0,\vec{b},\vec{c}} g_\xi\|_{L^{\vec{p}'}_{\vec{\alpha}}} \leq L\|g_\xi\|_{L^{\vec{q}'}_{\vec{\beta}}} \sim L$，这不可能。因此，在此情形下，$c_1 < \frac{n+1+\beta_1}{q_1}$。

情形 4） $1 = p_1 = q_1$ 且 $1 = p_2 = q_2$。在此情形下，注意到 $\|g_\xi\|_{L^{\vec{q}'}_{\vec{\beta}}} = 1$ 且 $\|T^*_{0,\vec{b},\vec{c}} g_\xi\|_{L^{\vec{p}'}_{\vec{\alpha}}} \gtrsim \log \frac{1}{1-|\xi|^2}$ as $|\xi| \to 1^-$。结合引理 2.5可知，存在一个与 ξ无关的正常数 L，使得当 $|\xi| \to 1^-$时，$\log \frac{1}{1-|\xi|^2} \lesssim \|T^*_{0,\vec{b},\vec{c}} g_\xi\|_{L^{\vec{p}'}_{\vec{\alpha}}} \leq L\|g_\xi\|_{L^{\vec{q}'}_{\vec{\beta}}} = L$。这是不可能的。因此，此情形下 $c_1 < \frac{n+1+\beta_1}{q_1}$。综合这四种情形，关于 c_1 的断言得证。

同样地，对于任意给定的 $\zeta \in \mathbb{B}_n$，令 $g_\zeta(z, w) = \left(\frac{1-\langle \zeta, w\rangle}{|1-\langle \zeta, z\rangle|^{n+1+\beta_2}}\right)^{(n+1+\beta_2)/q_2}, w$。然后，通过与引理 2.13 的证明类似的论证，我们也可得$c_2 < \frac{n+1+\beta_2}{q_2}$。由此，证明完成。 □

3 有界性的充分性证明 SS0, ⃗b, ⃗c

本节旨在说明多参数 Forelli-Rudin 型算子 T$_{\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}}$和 S$_{\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}}$的有界性的充分性。为此，我们首先需要将Schur 判别法推广到如下加权混合范数勒贝格空间，这推广了 [40, 定理 1]的结果。

命题 3.1. 设 $\vec{\mu} := \mu_1 \times \mu_2$ 和 $\vec{\nu} := \nu_1 \times \nu_2$ 是空间 X × X 上的正测度，并且对于 i ∈ {1, 2}，K_i 是 X × X 上的非负函数。设 T 是一个核为 K := $K_1 \cdot K_2$ 的积分算子，其定义为对任意 (x, y) ∈ X × X,

$$Tf(x,y) := \int_X \int_X K_1(x,s)K_2(y,t)f(s,t)\,d\mu_1(s)\,d\mu_2(t).$$

设 $\vec{p} := (p_1, p_2)$, $\vec{q} := (q_1, q_2) \in (1,\infty)^2$ 满足 $1 < p_- \le p_+ \le q_- < \infty$，其中 $p_+ := \max\{p_1, p_2\}$, $p_- := \min\{p_1, p_2\}$，且 $q_- := \min\{q_1, q_2\}$。设 γ_i 和 δ_i 为实数，使得对 i ∈ {1, 2} 有 $\gamma_i + \delta_i = 1$。若存在定义在 X × X 上的两个正函数 h_1 和 h_2，以及两个正常数 C_1 和 C_2，使得对于几乎所有 (x, y) ∈ X × X,

$$\int_X \left[\int_X [K_1(x,s)]^{\gamma_1 p_1'}[K_2(y,t)]^{\gamma_2 p_1'}[h_1(s,t)]^{p_1'}\,d\mu_1(s)\right]^{p_2'/p_1'} d\mu_2(t) \le C_1[h_2(x,y)]^{p_2'} \tag{3.1}$$

且对于几乎所有 (s, t) ∈ ∈ × ×，

$$\int_X \left[\int_X [K_1(x,s)]^{\delta_1 q_1}[K_2(y,t)]^{\delta_2 q_1}[h_2(x,y)]^{q_1}\,d\nu_1(x)\right]^{q_2/q_1} d\nu_2(y) \le C_2[h_1(s,t)]^{q_2}, \tag{3.2}$$

则 T: $L^{\vec{p}}_{\vec{}}\mu \to L^{\vec{q}}_{\vec{\nu}}$ 是有界的，且 $\|T\|_{L^{\vec{p}}_{\vec{}}\mu \to L^{\vec{q}}_{\vec{\nu}}} \le C_1^{1/p_2'} C_2^{1/q_2}$。

证明。如果 f ∈ $L^{\vec{p}}_{\vec{}}\mu$，那么对于几乎处处的 (x, y) ∈ X × X，我们有

$$|Tf(x,y)| \le \int_X \int_X K_1(x,s)K_2(y,t)[h_1(s,t)]^{-1}h_1(s,t)|f(s,t)|\,d\mu_1(s)\,d\mu_2(t).$$

利用 H¨older 不等式，我们有

$$\begin{aligned}
|Tf(x,y)| \le{}& \int_X \left[\int_X [K_1(x,s)]^{\gamma_1 p_1'}[K_2(y,t)]^{\gamma_2 p_1'}[h_1(s,t)]^{p_1'}\,d\mu_1(s)\right]^{1/p_1'} \\
&\times \left[\int_X [K_1(x,s)]^{\delta_1 p_1}[K_2(y,t)]^{\delta_2 p_1}[h_1(s,t)]^{-p_1}|f(s,t)|^{p_1}\,d\mu_1(s)\right]^{1/p_1} d\mu_2(t) \\
\le{}& \left\{\int_X \left[\int_X [K_1(x,s)]^{\gamma_1 p_1'}[K_2(y,t)]^{\gamma_2 p_1'}[h_1(s,t)]^{p_1'}\,d\mu_1(s)\right]^{p_2'/p_1'} d\mu_2(t)\right\}^{1/p_2'} \\
&\times \left\{\int_X \left[\int_X [K_1(x,s)]^{\delta_1 p_1}[K_2(y,t)]^{\delta_2 p_1}[h_1(s,t)]^{-p_1}|f(s,t)|^{p_1}\,d\mu_1(s)\right]^{p_2/p_1} d\mu_2(t)\right\}^{1/p_2},
\end{aligned}$$

这与 (3.1) 一起进一步表明,

|T f (x, y)|

$$\leq C_1^{1/p_2'} h_2(x,y) \left\{ \int_X \left[\int_X [K_1(x,s)]^{\delta_1 p_1} [K_2(y,t)]^{\delta_2 p_1} [h_1(s,t)]^{-p_1} |f(s,t)|^{p_1} \, d\mu_1(s) \right]^{p_2/p_1} d\mu_2(t) \right\}^{1/p_2}.$$

此外，由假设 $1 < p_- \leq p_+ \leq q_- < \infty$ 可知$q_1 \geq p_2, q_1 \geq p_1, q_2 \geq p_2$ 以及 $q_2 \geq p_1$。因此，结合上述不等式和 Minkowski 不等式，我们得到

$$\begin{aligned}
&\|Tf\|_{L_{\vec{\nu}}^{\vec{q}}} \\
&\leq C_1^{1/p_2'} \left\{ \int_X \left[\int_X \left(\int_X \left[\int_X [K_1(x,s)]^{\delta_1 q_1} [K_2(y,t)]^{\delta_2 q_1} [h_2(x,y)]^{q_1} |f(s,t)|^{q_1} [h_1(s,t)]^{-q_1} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. \times d\nu_1(x) \right]^{\frac{q_2}{q_1}} d\nu_2(y) \right)^{\frac{p_1}{q_2}} d\mu_1(s) \right]^{\frac{p_2}{p_1}} d\mu_2(t) \Bigg\}^{\frac{1}{p_2}} \\
&= C_1^{1/p_2'} \left\{ \int_X \left[\int_X |f(s,t)|^{p_1} [h_1(s,t)]^{-p_1} \left(\int_X \left[\int_X [K_1(x,s)]^{\delta_1 q_1} [K_2(y,t)]^{\delta_2 q_1} [h_2(x,y)]^{q_1} \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. \left. \times d\nu_1(x) \right]^{\frac{q_2}{q_1}} d\nu_2(y) \right)^{\frac{p_1}{q_2}} d\mu_1(s) \right]^{\frac{p_2}{p_1}} d\mu_2(t) \Bigg\}^{\frac{1}{p_2}}.
\end{aligned}$$

现在应用 (3.2)，得到

$$\|Tf\|_{L_{\vec{\nu}}^{\vec{q}}} \leq C_1^{1/p_2'} C_2^{1/q_2} \left\{ \int_X \left[\int_X |f(s,t)|^{p_1} \, d\mu_1(s) \right]^{\frac{p_2}{p_1}} d\mu_2(t) \right\}^{\frac{1}{p_2}} = C_1^{1/p_2'} C_2^{1/q_2} \|f\|_{L_{\vec{\mu}}^{\vec{p}}}.$$

这就完成了命题 3.1 的证明。 □

我们还为端点情形 $\vec{p} := (p_1, p_2) \equiv (1,1) =: \vec{1}$, $1 = p_1 < p_2 < \infty$ 和 $1 = p_2 < p_1 < \infty$ 得到了以下三个 Schur 检验，它们是 [40,定理 2] 的推广。

命题3.2. 设 $\vec{\mu}$、$\vec{\nu}$、核 K和算子T如命题 3.1所述。假设$\vec{q} := (q_1, q_2) \in [1,\infty)^2$。令 γ_i和 δ_i为两个实数，使得 $\gamma_i + \delta_i = 1$ 对 $i \in \{1,2\}$。如果存在定义在$X \times X$ 上的两个正函数 h_1 和h_2，以及两个正常数 C_1 和C_2，使得对于几乎所有 $(x,y) \in X \times X$,

$$\operatorname*{ess\,sup}_{(s,t)\in X\times X} [K_1(x,s)]^{\gamma_1} [K_2(y,t)]^{\gamma_2} h_1(s,t) \leq C_1 h_2(x,y) \tag{3.3}$$

并且，对于几乎所有的 $(s,t) \in X \times X$,

$$\int_X \left[\int_X [K_1(x,s)]^{\delta_1 q_1} [K_2(y,t)]^{\delta_2 q_1} [h_2(x,y)]^{q_1} \, d\nu_1(x) \right]^{q_2/q_1} d\nu_2(y) \leq C_2 [h_1(s,t)]^{q_2}, \tag{3.4}$$

then $T : L^{\vec{1}}_{\vec{\mu}} \to L^{\vec{q}}_{\vec{\nu}}$ *is bounded with* $\|T\|_{L^{\vec{1}}_{\vec{\mu}} \to L^{\vec{q}}_{\vec{\nu}}} \le C_1 C_2^{1/q_2}$.

证明。设 $f \in L^{\vec{1}}_{\vec{\mu}}$。那么，由 (3.3) 可得，对于几乎所有的 $(x, y) \in X \times X$,

$$\begin{aligned}
|Tf(x,y)| &\le \int_X \int_X K_1(x,s) K_2(y,t) [h_1(s,t)]^{-1} h_1(s,t) |f(s,t)| \, d\mu_1(s) \, d\mu_2(t) \\
&\le \operatorname*{ess\,sup}_{(s,t)\in X\times X} [K_1(x,s)]^{\gamma_1} [K_2(y,t)]^{\gamma_2} h_1(s,t) \\
&\quad \times \int_X \int_X [K_1(x,s)]^{\delta_1} [K_2(y,t)]^{\delta_2} [h_1(s,t)]^{-1} |f(s,t)| \, d\mu_1(s) \, d\mu_2(t) \\
&\le C_1 h_2(x,y) \int_X \int_X [K_1(x,s)]^{\delta_1} [K_2(y,t)]^{\delta_2} [h_1(s,t)]^{-1} |f(s,t)| \, d\mu_1(s) \, d\mu_2(t).
\end{aligned}$$

现在我们先证明 $\vec{q} \in (1,\infty)^2$ 的情形下的命题 3.2。在这种情况下，应用 Minkowski 不等式，我们可得

$$\begin{aligned}
&\|Tf\|_{L^{\vec{q}}_{\vec{\nu}}} \\
&\le C_1 \int_X \int_X \left(\int_X \left[\int_X [K_1(x,s)]^{\delta_1 q_1} [K_2(y,t)]^{\delta_2 q_1} [h_2(x,y)]^{q_1} [h_1(s,t)]^{-q_1} |f(s,t)|^{q_1} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times d\nu_1(x) \right]^{\frac{q_2}{q_1}} d\nu_2(y) \right)^{\frac{1}{q_2}} d\mu_1(s) \, d\mu_2(t) \\
&= C_1 \int_X \int_X |f(s,t)| [h_1(s,t)]^{-1} \\
&\quad \times \left(\int_X \left[\int_X [K_1(x,s)]^{\delta_1 q_1} [K_2(y,t)]^{\delta_2 q_1} [h_2(x,y)]^{q_1} \, d\nu_1(x) \right]^{\frac{q_2}{q_1}} d\nu_2(y) \right)^{\frac{1}{q_2}} d\mu_1(s) \, d\mu_2(t),
\end{aligned}$$

结合 (3.4)，进一步可得

$$\|Tf\|_{L^{\vec{q}}_{\vec{\nu}}} \le C_1 C_2^{1/q_2} \int_X \int_X |f(s,t)| \, d\mu_1(s) \, d\mu_2(t) = C_1 C_2^{1/q_2} \|f\|_{L^{\vec{1}}_{\vec{\mu}}}.$$

这就完成了这种情形下的证明。对于 $q_i = 1$ for some $i \in \{1,2\}$ 的情形，不使用 Minkowski 不等式，而应用 Fubini 定理也可以得到所需结果。我们省略这种情形下的细节，从而完成证明。□

命题 3.3. 设 $\vec{\mu}$、$\vec{\nu}$、核 K 和算子 T 与命题 3.1 中的相同。假设 $\vec{p} := (1, p_2)$，其中 $p_2 \in (1,\infty)$，且 $\vec{q} := (q_1, q_2) \in (1,\infty)^2$ 满足 $1 < p_2 \le q_- < \infty$，其中 $q_- := \min\{q_1, q_2\}$。设 γ_i 和 δ_i 为两个实数，满足 $\gamma_i + \delta_i = 1$ 对 $i \in \{1,2\}$。若存在定义在 $X \times X$ 上的两个正函数 h_1 和 h_2，以及两个正常数 C_1 和 C_2，使得对几乎所有 $(x, y) \in X \times X$,

$$\int_X \left[\operatorname*{ess\,sup}_{s\in X} [K_1(x,s)]^{\gamma_1} [K_2(y,t)]^{\gamma_2} h_1(s,t) \right]^{p_2'} d\mu_2(t) \le C_1 [h_2(x,y)]^{p_2'} \tag{3.5}$$

并且，对几乎所有 (s, t) $\in X \times X$,

$$\int_X \left[\int_X [K_1(x,s)]^{\delta_1 q_1} [K_2(y,t)]^{\delta_2 q_1} [h_2(x,y)]^{q_1} \, d\nu_1(x) \right]^{q_2/q_1} d\nu_2(y) \le C_2 [h_1(s,t)]^{q_2}, \tag{3.6}$$

则 T: $L^{\vec{p}}_{\vec{\mu}} \to L^{\vec{q}}_{\vec{\nu}}$ 有界，且 $\|T\|_{L^{\vec{p}}_{\vec{\mu}} \to L^{\vec{q}}_{\vec{\nu}}} \le C_1^{1/p_2'} C_2^{1/q_2}$。

证明。令 $f \in L^{\vec{p}}_{\vec{\mu}}$。由（3.5）和 H¨older不等式，我们推得，对于几乎处处的 (x, y) $\in X \times X$,

$$\begin{aligned}
|Tf(x,y)| &\le \int_X \int_X K_1(x,s) K_2(y,t) [h_1(s,t)]^{-1} h_1(s,t) |f(s,t)| \, d\mu_1(s) \, d\mu_2(t) \\
&\le \int_X \operatorname*{ess\,sup}_{s \in X} \{ [K_1(x,s)]^{\gamma_1} [K_2(y,t)]^{\gamma_2} h_1(s,t) \} \\
&\quad \times \int_X [K_1(x,s)]^{\delta_1} [K_2(y,t)]^{\delta_2} [h_1(s,t)]^{-1} |f(s,t)| \, d\mu_1(s) \, d\mu_2(t) \\
&\le \left\{ \int_X \left[\operatorname*{ess\,sup}_{s \in X} \{ [K_1(x,s)]^{\gamma_1} [K_2(y,t)]^{\gamma_2} h_1(s,t) \} \right]^{p_2'} d\mu_2(t) \right\}^{1/p_2'} \\
&\quad \times \left\{ \int_X \left[\int_X [K_1(x,s)]^{\delta_1} [K_2(y,t)]^{\delta_2} [h_1(s,t)]^{-1} |f(s,t)| \, d\mu_1(s) \right]^{p_2} d\mu_2(t) \right\}^{1/p_2} \\
&\le C_1^{1/p_2'} h_2(x,y) \left\{ \int_X \left[\int_X [K_1(x,s)]^{\delta_1} [K_2(y,t)]^{\delta_2} [h_1(s,t)]^{-1} |f(s,t)| \, d\mu_1(s) \right]^{p_2} d\mu_2(t) \right\}^{1/p_2}.
\end{aligned}$$

然后，由假设 $q_1 \ge p_2$ 和 $q_2 \ge p_2$,, 以及 Minkowski 不等式，我们得出】【。

$$\begin{aligned}
&\|Tf\|_{L^{\vec{q}}_{\vec{\nu}}} \\
&\le C_1^{1/p_2'} \left\{ \int_X \left[\int_X \left(\int_X \left[\int_X [K_1(x,s)]^{\delta_1 q_1} [K_2(y,t)]^{\delta_2 q_1} [h_2(x,y)]^{q_1} |f(s,t)|^{q_1} [h_1(s,t)]^{-q_1} \right. \right. \right. \\
&\qquad \left. \left. \left. \times d\nu_1(x) \right]^{\frac{q_2}{q_1}} d\nu_2(y) \right)^{\frac{1}{q_2}} d\mu_1(s) \right]^{p_2} d\mu_2(t) \Bigg\}^{\frac{1}{p_2}} \\
&= C_1^{1/p_2'} \left\{ \int_X \left[\int_X |f(s,t)| [h_1(s,t)]^{-1} \left(\int_X \left[\int_X [K_1(x,s)]^{\delta_1 q_1} [K_2(y,t)]^{\delta_2 q_1} [h_2(x,y)]^{q_1} \right. \right. \right. \right. \\
&\qquad \left. \left. \left. \left. \times d\nu_1(x) \right]^{\frac{q_2}{q_1}} d\nu_2(y) \right)^{\frac{1}{q_2}} d\mu_1(s) \right]^{p_2} d\mu_2(t) \Bigg\}^{\frac{1}{p_2}},
\end{aligned}$$

结合 (3.6)，进一步可得 that

$$\|Tf\|_{L^{\vec{q}}_{\vec{\nu}}} \le C_1^{1/p_2'} C_2^{1/q_2} \left\{ \int_X \left[\int_X |f(s,t)| \, d\mu_1(s) \right]^{p_2} d\mu_2(t) \right\}^{\frac{1}{p_2}} = C_1^{1/p_2'} C_2^{1/q_2} \|f\|_{L^{\vec{p}}_{\vec{\mu}}}.$$

这就完成了命题 3.3 的证明。 □

命题 3.4. 设 $\vec{\mu}$、$\vec{\nu}$、核 K 和算子 T 与命题 3.1 中的相同。假设 $\vec{p} := (p_1, 1)$，其中 $p_1 \in (1, \infty)$，且 $\vec{q} := (q_1, q_2) \in (1, \infty)^2$ 满足 $1 < p_1 \le q_- < \infty$，其中 $q_- := \min\{q_1, q_2\}$。设 γ_i 和 δ_i 是两个实数，使得 $\gamma_i + \delta_i = 1$ 对 $i \in \{1, 2\}$成立。若存在定义在 $X \times X$ 上的两个正函数 h_1 和 h_2，以及两个正常数 C_1 和 C_2，使得对几乎所有 $(x, y) \in X \times X$,

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in X} \int_X [K_1(x,s)]^{\gamma_1 p_1'} [K_2(y,t)]^{\gamma_2 p_1'} [h_1(s,t)]^{p_1'} \, d\mu_1(s) \le C_1 [h_2(x,y)]^{p_1'} \tag{3.7}$$

并且，对于几乎所有的 $(s, t) \in X \times X$,

$$\int_X \left[\int_X [K_1(x,s)]^{\delta_1 q_1} [K_2(y,t)]^{\delta_2 q_1} [h_2(x,y)]^{q_1} \, d\nu_1(x) \right]^{q_2/q_1} d\nu_2(y) \le C_2 [h_1(s,t)]^{q_2}, \tag{3.8}$$

则 T：$L^{\vec{p}}_{\vec{\mu}} \to L^{\vec{q}}_{\vec{\nu}}$ 是有界的，且 $\|T\|_{L^{\vec{p}}_{\vec{\mu}} \to L^{\vec{q}}_{\vec{\nu}}} \le C_1^{1/p_1'} C_2^{1/q_2}$。

证明。该命题是命题 3.3 的非对称情形。因此，证明过程类似，故在此省略。□

借助这些 Schur 检验，我们接下来证明主要定理的充分性。

引理 3.5。设 $1 = p_+ \le q_- < \infty$ or $1 < p_- \le p_+ \le q_- < \infty$。若参数满足对任意 $i \in \{1, 2\}$,

$$\begin{cases} \alpha_i + 1 < p_i(b_i + 1), \\ c_i \le n + 1 + b_i + \dfrac{n+1+\beta_i}{q_i} - \dfrac{n+1+\alpha_i}{p_i}, \end{cases}$$

则算子 $S_{0,\vec{b},\vec{c}}$ 从 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$ 到 $L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 是有界的。

证明。对于任意 $i \in \{1, 2\}$，定义

$$\lambda_i := \frac{n+1+\beta_i}{q_i} - \frac{n+1+\alpha_i}{p_i}, \quad c_i := n + 1 + b_i + \lambda_i, \quad \text{and} \quad \tau_i := c_i - b_i + \alpha_i.$$

由事实 $-(1+\beta_i)/q_i < 0$，我们知道存在两个负数 r_1 和 r_2，使得对任意 $i \in \{1, 2\}$，$-\frac{1+\beta_i}{q_i} < r_i < 0$。此外，由 $\alpha_i + 1 < p_i(b_i + 1)$ 可知，对任意 $i \in \{1, 2\}$,

$$b_i - \alpha_i + \frac{\alpha_i + 1}{p_i'} > 0. \tag{3.9}$$

注意，对于任意 $i \in \{1, 2\}$, $\tau_i = \frac{n+1+\alpha_i p_i'}{p_i'} + \frac{n+1+\beta_i q_i}{q_i} > 0$，这与 (3.9) 结合进一步意味着

$$-\frac{\tau_i(1+\alpha_i)}{p_i'} - \frac{(b_i - \alpha_i)(n+1+\alpha_i)}{p_i'} < \frac{(b_i - \alpha_i)(n+1+\beta_i)}{q_i}.$$

那么存在 s_1 和 s_2，使得对于任意 $i \in \{1,2\}$,

$$-\frac{\tau_i(1+\alpha_i)}{p_i'} - \frac{(b_i-\alpha_i)(n+1+\alpha_i)}{p_i'} < \tau_i s_i + (b_i-\alpha_i)(s_i-r_i) < \frac{(b_i-\alpha_i)(n+1+\beta_i)}{q_i},$$

这等价于

$$-\frac{1+\alpha_i}{p_i'} - (b_i-\alpha_i)\gamma_i < s_i < (b_i-\alpha_i)\delta_i, \tag{3.10}$$

其中，对于任意的 $i \in \{1,2\}$, ~~$\gamma_i := (n+1+\alpha_i)/p_i' + s\tau_i$~~ $i-i$ ~~r~~ 以及 ~~$\delta_i := (n+1+\beta_i)/q_i + r\tau_i$~~ $i-i$ s。显然，$\gamma_i + \delta_i = 1$。现在定义 $h_1(u,\eta) := (1-|u|^2)^{s_1}(1-|\eta|^2)^{s_2}$，$h_2(z,w) := (1-|z|^2)^{r_1}(1-|w|^2)^{r_2}$,

$$K_1(z,u) := \frac{(1-|u|^2)^{b_1-\alpha_1}}{|1-\langle z,u\rangle|^{c_1}}, \text{ and } K_2(w,\eta) = \frac{(1-|\eta|^2)^{b_2-\alpha_2}}{|1-\langle w,\eta\rangle|^{c_2}}.$$

因此,

$$S_{0,\vec{b},\vec{c}} f(z,w) = \int_{\mathbb{B}_n}\int_{\mathbb{B}_n} K_1(z,u)K_2(w,\eta)f(u,\eta)\,dv_{\alpha_1}(u)\,dv_{\alpha_2}(\eta).$$

接下来，我们通过考虑以下两种情形来证明这个引理。

情形1) $p_- > 1$。在这种情况下，为了使用命题 3.1 证明 $S_{0,\vec{b},\vec{c}}$ 的有界性，我们现在考虑

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{B}_n} [K_1(z,u)]^{\gamma_1 p_1'}[K_2(w,\eta)]^{\gamma_2 p_1'}[h_1(u,\eta)]^{p_1'} dv_{\alpha_1}(u)\\ &= \frac{(1-|\eta|^2)^{(b_2-\alpha_2)\gamma_2 p_1' + s_2 p_1'}}{|1-\langle w,\eta\rangle|^{c_2\gamma_2 p_1'}} \int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1-|u|^2)^{(b_1-\alpha_1)\gamma_1 p_1' + s_1 p_1' + \alpha_1}}{|1-\langle z,u\rangle|^{c_1\gamma_1 p_1'}} dv(u).\end{aligned} \tag{3.11}$$

由（3.10）中的左侧不等式可得

$$(b_i-\alpha_i)\gamma_i p_i' + s_i p_i' + \alpha_i > -1. \tag{3.12}$$

此外，由于 $(c_i - b_i + \alpha_i)\gamma_i = \tau_i\gamma_i = n+1+\alpha_i p_i'$ $+ s_i$ ~~$- r_i,$~~ 可知，对于任意 $i \in \{1,2\}$,

$$n+1+(b_i-\alpha_i)\gamma_i p_i' + s_i p_i' + \alpha_i - c_i\gamma_i p_i' = r_i p_i' < 0. \tag{3.13}$$

由此，结合（3.12）和引理 2.4(ii)，我们得到，对于任意给定的 $z \in \mathbb{B}_n$,

$$\int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1-|u|^2)^{(b_1-\alpha_1)\gamma_1 p_1' + s_1 p_1' + \alpha_1}}{|1-\langle z,u\rangle|^{c_1\gamma_1 p_1'}} dv(u) \lesssim (1-|z|^2)^{r_1 p_1'},$$

这与 (3.11)、(3.12)、(3.13) 以及引理 2.4(ii) 一起再次进一步推出

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{B}_n}\left[\int_{\mathbb{B}_n} [K_1(z,u)]^{\gamma_1 p_1'}[K_2(w,\eta)]^{\gamma_2 p_1'}[h_1(u,\eta)]^{p_1'} dv_{\alpha_1}(u)\right]^{p_2'/p_1'} dv_{\alpha_2}(\eta)\\ &\lesssim (1-|z|^2)^{r_1 p_2'} \int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1-|\eta|^2)^{(b_2-\alpha_2)\gamma_2 p_2' + s_2 p_2' + \alpha_2}}{|1-\langle w,\eta\rangle|^{c_2\gamma_2 p_2'}}\, dv(\eta)\end{aligned}$$

$$\lesssim (1-|z|^2)^{r_1p_2'}(1-|w|^2)^{r_2p_2'} \sim [h_2(z,w)]^{p_2'}.$$

因此，条件 (3.1) 对算子 S_0 成立。

接下来我们检验第二个条件（3.2）。注意到

$$\int_{\mathbb{B}_n} [K_1(z,u)]^{\delta_1 q_1}[K_2(w,\eta)]^{\delta_2 q_1}[h_2(z,w)]^{q_1}\, dv_{\beta_1}(z)$$
$$= \frac{(1-|\eta|^2)^{(b_2-\alpha_2)\delta_2 q_1}(1-|w|^2)^{r_2 q_1}}{|1-\langle w,\eta\rangle|^{c_2\delta_2 q_1}} \int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1-|u|^2)^{(b_1-\alpha_1)\delta_1 q_1}(1-|z|^2)^{r_1 q_1+\beta_1}}{|1-\langle z,u\rangle|^{c_1\delta_1 q_1}}\, dv(z).$$

根据 r_i 的定义，我们显然有

$$r_i q_i + \beta_i > -1. \tag{3.14}$$

此外，根据 δ_i的选取可知，对于任意 $i \in \{1,2\}$，$(c_i - b_i + \alpha_i)\delta_i = \tau_i\delta_i = n+1+\beta_i q_i + r_i - s_i$，这与 (3.10) 的右侧不等式结合可推出

$$n+1+r_i q_i+\beta_i - c_i\delta q_i = s_i q_i - (b_i-\alpha_i)\delta_i q_i < 0. \tag{3.15}$$

由此，根据（3.14）和引理 2.4(ii)，我们推得

$$\int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1-|z|^2)^{r_1 q_1+\beta_1}}{|1-\langle z,u\rangle|^{c_1\delta q_1}}\, dv(z) \lesssim (1-|u|^2)^{s_1 q_1-(b_1-\alpha_1)\delta_1 q_1}.$$

这与 (3.14)、(3.15) 以及引理 2.4(ii) 一起再次进一步推出

$$\int_{\mathbb{B}_n}\left[\int_{\mathbb{B}_n} [K_1(z,u)]^{\delta_1 q_1}[K_2(w,\eta)]^{\delta_2 q_1}[h_2(z,w)]^{q_1}\, dv_{\beta_1}(z)\right]^{q_2/q_1} dv_{\beta_2}(w)$$
$$\lesssim (1-|u|^2)^{s_1 q_2}(1-|\eta|^2)^{(b_2-\alpha_2)\delta_2 q_2} \int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1-|w|^2)^{r_2 q_2+\beta_2}}{|1-\langle w,\eta\rangle|^{c_2\delta_2 q_2}}\, dv(\eta)$$
$$\lesssim (1-|u|^2)^{s_1 q_2}(1-|\eta|^2)^{s_2 q_2} \sim [h_1(u,\eta)]^{q_2}.$$

这正是不等式 (3.2) 对于 $S_{0,\vec{b},\vec{c}}$ 的表述。因此，算子 $S_{0,\vec{b},\vec{c}}$ 满足命题3.1的所有条件。然后，应用命题3.1，我们得到，当在本情形下 $c_i = n+1+b_i+\lambda_i$ for $i \in \{1,2\}$ 时，$S_{0,\vec{b},\vec{c}}$ 从 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$ 到 $L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 是有界的。

如果$c_i < n+1+b_i+\lambda_i$其中 $i \in \{1,2\}$，令 $\sigma_i = n+1+b_i+\lambda_i - c_i$和 $\vec{\sigma} := (\sigma_1,\sigma_2)$。那么，对于任意 $i \in \{1,2\}$，根据上述证明可知，$S_{0,\vec{b},\vec{c}+\vec{\sigma}}$ 从 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$到 $L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$有界。

x

$$\frac{1}{|1-\langle z,u\rangle|^{c_1}} = \frac{|1-\langle z,u\rangle|^{\sigma_1}}{|1-\langle z,u\rangle|^{n+1+b_1+\lambda_1}} \le \frac{2^{\sigma_1}}{|1-\langle z,u\rangle|^{n+1+b_1+\lambda_1}}$$

and

$$\frac{1}{|1-\langle w,\eta\rangle|^{c_2}} = \frac{|1-\langle w,\eta\rangle|^{\sigma_2}}{|1-\langle w,\eta\rangle|^{n+1+b_2+\lambda_2}} \le \frac{2^{\sigma_2}}{|1-\langle w,\eta\rangle|^{n+1+b_2+\lambda_2}}.$$

因此，对于任意 $f \in L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$，我们有 $|S_{0,\vec{b},\vec{c}} f(z,w)| \le 2^{\sigma_1+\sigma_2} S_{0,\vec{b},\vec{c}+\vec{\sigma}}|f|(z,w)$，这意味着当 $c_i < n+1+b_i+\lambda_i$时，算子 $S_{0,\vec{b},\vec{c}}$从 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$到 $L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$也是有界的（对于 $i \in \{1,2\}$），从而完成了此情形下引理 3.5 的证明。

情形 2) $p_+ = 1$。在此情形下，对于任意 $i \in \{1,2\}$，注意到 $\gamma_i := \frac{s_i - r_i}{\tau_i}$, $\delta_i := \frac{(n+1+\beta_i)/q_i + r_i - s_i}{\tau_i}$, 并且

$$-(b_i - \alpha_i)\gamma_i < s_i < (b_i - \alpha_i)\delta_i. \tag{3.16}$$

为了通过应用命题 3.2 证明 $S0, \vec{b}, \vec{c}$ 的有界性，我们接下来考虑

$$[K_1(z,u)]^{\gamma_1}[K_2(w,\eta)]^{\gamma_2}h_1(u,\eta) = \frac{(1-|u|^2)^{\gamma_1(b_1-\alpha_1)+s_1}(1-|\eta|^2)^{\gamma_2(b_2-\alpha_2)+s_2}}{|1-\langle z,u\rangle|^{c_1\gamma_1}|1-\langle w,\eta\rangle|^{c_2\gamma_2}}.$$

由柯西-施瓦茨不等式可知，对于任意 $z \in \mathbb{B}_n$ 和 $u \in \mathbb{B}_n$,

$$|1-\langle z,u\rangle| \geq 1-|\langle z,u\rangle| \geq 1-|z| = \frac{1-|z|^2}{1+|z|} \geq \frac{1-|z|^2}{2} \tag{3.17}$$

and

$$|1-\langle z,u\rangle| \geq \frac{1-|u|^2}{2}, \tag{3.18}$$

由于 $\tau_i = c_i - b_i + \alpha_i$ 且 $\gamma_i = (s_i - r_i)/\tau_i$，我们得到

$$c_i\gamma_i = (b_i - \alpha_i)\gamma_i + s_i - r_i. \tag{3.19}$$

由 (3.16) 中的左侧不等式可知，对于任意 $i \in \{1,2\}$，$\gamma_i(b_i - \alpha_i) + s_i > 0$。结合 (3.17)、(3.18)、(3.19) 以及 $-r_i > 0$ 这一事实可推出，对于任意给定的 $z \in \mathbb{B}_n$ 和任意 $u \in \mathbb{B}_n$,

$$\frac{(1-|u|^2)^{\gamma_1(b_1-\alpha_1)+s_1}(1-|z|^2)^{-r_1}}{|1-\langle z,u\rangle|^{c_1\gamma_1}} = \left(\frac{1-|u|^2)}{|1-\langle z,u\rangle|}\right)^{\gamma_1(b_1-\alpha_1)+s_1}\left(\frac{1-|z|^2}{|1-\langle z,u\rangle|}\right)^{-r_1} \leq C \tag{3.20}$$

类似地，对于任意给定的 $w \in \mathbb{B}_n$ 和任意 $\eta \in \mathbb{B}_n$,

$$\frac{(1-|\eta|^2)^{\gamma_2(b_2-\alpha_2)+s_2}(1-|w|^2)^{-r_2}}{|1-\langle w,\eta\rangle|^{c_2\gamma}} \leq C.$$

结合 (3.20)，进一步可得，对于任意给定的 $(z, w) \in \mathbb{B}_n \times \mathbb{B}_n$,

$$\operatorname*{ess\,sup}_{(u,\eta)\in\mathbb{B}_n\times\mathbb{B}_n} [K_1(z,u)]^{\gamma_1}[K_2(w,\eta)]^{\gamma_2}h_1(u,\eta) \leq Ch_2(z,w).$$

因此，条件 (3.3) 对算子 $S0, \vec{b}, \vec{c}$ 成立。注意，在此情形下，(3.4) 就是 (3.2)，因为该不等式中没有出现 p_i。因此，根据情形 1) 中 (3.2) 的证明，我们推知算子 $S0, \vec{b}, \vec{c}$ 在当前情形下也满足 (3.4)，故命题 3.2 的所有条件对 $S0, \vec{b}, \vec{c}$ 均成立。

因此，应用命题 3.2，我们得到 $S0, \vec{b}, \vec{c}$ 从 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$ 到 $L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 是有界的，当 $c_i = n + 1 + b_i + \lambda_i$ 对 $i \in \{1,2\}$ 成立时。此外，通过一个类似于证明情形1)中所采用的论证，我们得到算子 $S0, \vec{b}, \vec{c}$ 在 $c_i < n + 1 + b_i + \lambda_i$ 对 $i \in \{1,2\}$ 成立时同样从 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$ 到 $L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 是有界的，从而完成了引理 3.5 的全部证明。□

引理 3.6。设 $1 = p_2 < p_1 \le q_- < \infty$。如果参数满足

$$\begin{cases} \alpha_1 + 1 < p_1(b_1+1), \ \ c_1 \le n+1+b_1 + \dfrac{n+1+\beta_1}{q_1} - \dfrac{n+1+\alpha_1}{p_1}, \\ \alpha_2 = b_2, \ \ c_2 < \dfrac{n+1+\beta_2}{q_2}, \end{cases}$$

那么，算子 $S_{0,\vec{b},\vec{c}}$ 从 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$ 到 $L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 是有界的。

证明。假设

$$\lambda_1 := \frac{n+1+\beta_1}{q_1} - \frac{n+1+\alpha_1}{p_1}, \ \ c_1 := n+1+b_1+\lambda_1, \ \ \tau_1 := c_1 - b_1 + \alpha_1,$$

且 $c_2 \neq 0$。根据事实 $-(1+\beta_i)/q_i < 0$（其中 $i \in \{1,2\}$），我们知道存在两个负数 r_1 和 r_2，使得对于任意 $i \in \{1,2\}$，$-\frac{1+\beta_i}{q_i} < r_i < 0$。此外，对于任意 $i \in \{1,2\}$，有 $\tau_1 = \frac{n+1+\alpha_1}{p_1'} + \frac{n+1+\beta_1}{q_1} > 0$。结合 $b_1 - \alpha_1 + \frac{\alpha_1+1}{p_1'} > 0$这一事实，进一步可得，

$$-\frac{\tau_1(1+\alpha_1)}{p_1'} - \frac{(b_1-\alpha_1)(n+1+\alpha_1)}{p_1'} < \frac{(b_1-\alpha_1)(n+1+\beta_1)}{q_1}.$$

因此，存在 s_1 使得

$$-\frac{\tau_1(1+\alpha_1)}{p_1'} - \frac{(b_1-\alpha_1)(n+1+\alpha_1)}{p_1'} < \tau_1 s_1 + (b_1-\alpha_1)(s_1-r_1) < \frac{(b_1-\alpha_1)(n+1+\beta_1)}{q_1}.$$

即

$$-\frac{1+\alpha_1}{p_1'} - (b_1-\alpha_1)\gamma_1 < s_1 < (b_1-\alpha_1)\delta_1, \tag{3.21}$$

其中 $\gamma_1 := \frac{n+1+\alpha_1}{p_1' s_{\tau_1}}{}^{1-1} r$，$\delta_1 := \frac{n+1+\beta_1}{q_1 r_{\tau_1}}{}^{1-1} s$。显然，$\gamma_1 + \delta_1 = 1$。现在定义$\gamma_2 := -\frac{r_2}{c_2}$和 $\delta_2 := 1 + r_2 c_2$。显然，$\gamma_2 + \delta_2 = 1$。令 $h_1(u,\eta) := (1-|u|^2)^{s_1}$，$h_2(z,w) := (1-|z|^2)^{r_1}(1-|w|^2)^{r_2}$，

$$K_1(z,u) := \frac{(1-|u|^2)^{b_1-\alpha_1}}{|1-\langle z,u\rangle|^{c_1}}, \text{ and } K_2(w,\eta) = \frac{1}{|1-\langle w,\eta\rangle|^{c_2}}.$$

因此，

$$S_{0,\vec{b},\vec{c}} f(z,w) = \int_{\mathbb{B}_n}\int_{\mathbb{B}_n} K_1(z,u)K_2(w,\eta)f(u,\eta)\,dv_{\alpha_1}(u)\,dv_{\alpha_2}(\eta).$$

为了利用命题 3.4证明 $S_{0,\vec{b},\vec{c}}$的有界性，我们接下来考虑

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{B}_n} [K_1(z,u)]^{\gamma_1 p_1'} [K_2(w,\eta)]^{\gamma_2 p_1'} [h_1(u,\eta)]^{p_1'} dv_{\alpha_1}(u) \\ &\quad = \frac{1}{|1-\langle w,\eta\rangle|^{c_2\gamma_2 p_1'}} \int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1-|u|^2)^{(b_1-\alpha_1)\gamma_1 p_1' + s_1 p_1' + \alpha_1}}{|1-\langle z,u\rangle|^{c_1\gamma_1 p_1'}} dv(u). \end{aligned} \tag{3.22}$$

事实上，由 (3.17) 以及 $c_2\gamma_2 = -r_2 > 0$ 这一事实可知，对于任意 $w \in \mathbb{B}_n$ 和 $\eta \in \mathbb{B}_n$,

$$\frac{(1-|w|^2)^{-r_2}}{|1-\langle w,\eta\rangle|^{c_2\gamma_2}} \le C. \tag{3.23}$$

由 (3.21) 的左侧不等式可知

$$(b_1-\alpha_1)\gamma_1 p_1' + s_1 p_1' + \alpha_1 > -1. \tag{3.24}$$

此外，由于 $(c_1 - b_1 + \alpha_1)\gamma_1 = \tau_1\gamma_1 = n+1+\alpha_1 p_1'$ $+ s_1 - r_1$，因此 $n + 1 + (b_1 - \alpha_1)\gamma_1 p_1' + s_1 p_1' + \alpha_1 - c_1\gamma_1 p_1' = r_1 p_1' < 0$。由此以及 (3.24) 和引理 2.4(ii)，我们得出，对于任意给定的 $z \in \mathbb{B}_n$,

$$\int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1-|u|^2)^{(b_1-\alpha_1)\gamma_1 p_1' + s_1 p_1' + \alpha_1}}{|1-\langle z,u\rangle|^{c_1\gamma_1 p_1'}} dv(u) \lesssim (1-|z|^2)^{r_1 p_1'},$$

这与 (3.22) 和 (3.23) 一起进一步推出

$$\begin{aligned}&\operatorname*{ess\,sup}_{\eta\in\mathbb{B}_n} \int_{\mathbb{B}_n} [K_1(z,u)]^{\gamma_1 p_1'} [K_2(w,\eta)]^{\gamma_2 p_1'} [h_1(u,\eta)]^{p_1'} dv_{\alpha_1}(u)\\ &\lesssim (1-|z|^2)^{r_1 p_1'} (1-|w|^2)^{r_2 p_1'} \lesssim [h_2(z,w)]^{p_1'}.\end{aligned}$$

因此，算子 $S_{0,\vec{b},\vec{c}}$ 满足条件 (3.7)。

接下来我们验证命题 3.4 的第二个条件 (3.8)。注意到

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{B}_n} [K_1(z,u)]^{\delta_1 q_1} [K_2(w,\eta)]^{\delta_2 q_1} [h_2(z,w)]^{q_1}\, dv_{\beta_1}(z)\\ &= \frac{(1-|w|^2)^{r_2 q_1}(1-|u|^2)^{(b_1-\alpha_1)\delta_1 q_1}}{|1-\langle w,\eta\rangle|^{c_2\delta_2 q_1}} \int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1-|z|^2)^{r_1 q_1+\beta_1}}{|1-\langle z,u\rangle|^{c_1\delta_1 q_1}}\, dv(z).\end{aligned} \tag{3.25}$$

根据 r_i 的定义，显然有

$$r_i q_i + \beta_i > -1 \tag{3.26}$$

对于任意 $i \in \{1,2\}$。由于 $\delta_2 = 1 + r_2/c_2$ 且 $c_2 < (n + 1 + \beta_2)/q_2$, , 因此可得

$$n + 1 + r_2 q_2 + \beta_2 - c_2\delta_2 q_2 = q_2\left(\frac{n+1+\beta_2}{q_2} - c_2\right) > 0.$$

由此、(3.26)以及引理 2.4(i)，我们推得，对于任意给定的 $u \in \mathbb{B}_n$,

$$\int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1-|w|^2)^{r_2 q_2+\beta_2}}{|1-\langle w,\eta\rangle|^{c_2\delta_2 q_2}} dv(w) \le C. \tag{3.27}$$

此外，根据 δ_1 的选取，我们知道 $(c_1 - b_1 + \alpha_1)\delta_1 = \tau_1\delta_1 = n+1+\beta_1 q_1$ $+ r_1 - s_1$，结合 (3.21) 的右侧不等式可得 $n + 1 + r_1 q_1 + \beta_1 - c_1\delta_1 q_1 =$

$s_1q_1 - (b_1 - \alpha_1)\delta_1 q_1 < 0$。应用这一点、(3.26) 和引理 2.4(ii)，我们知道，对于任意给定的 $\eta \in \mathbb{B}_n$,

$$\int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1-|z|^2)^{r_1 q_1+\beta_1}}{|1-\langle z,u\rangle|^{c_1\delta_1 q_1}}\, dv(z) \lesssim (1-|u|^2)^{s_1 q_1-(b_1-\alpha_1)\delta_1 q_1}.$$

这与 (3.25) 和 (3.27) 一起进一步意味着

$$\int_{\mathbb{B}_n}\left[\int_{\mathbb{B}_n} [K_1(z,u)]^{\delta_1 q_1}[K_2(w,\eta)]^{\delta_2 q_1}[h_2(z,w)]^{q_1}\, dv_{\beta_1}(z)\right]^{q_2/q_1} dv_{\beta_2}(w)$$
$$\lesssim (1-|u|^2)^{s_1 q_2}\int_{\mathbb{B}_n}\frac{(1-|w|^2)^{r_2 q_2+\beta_2}}{|1-\langle w,\eta\rangle|^{c_2\delta_2 q_2}}\, dv(\eta) \lesssim [h_1(u,\eta)]^{q_2}.$$

这正是 $S_{0,\vec{b},\vec{c}}$ 的不等式 (3.8)。因此，算子 $S_{0,\vec{b},\vec{c}}$ 满足命题 3.4 的所有条件。然后，应用命题 3.4，我们发现，在 $c_1 = n + 1 + b_2 + \lambda_1$ 且 $c_2 \neq 0$ 的情况下，$S_{0,\vec{b},\vec{c}}$ 从 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$ 到 $L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 有界。当 $c_1 = n + 1 + b_2 + \lambda_1$ 且 $c_2 = 0$时，注意存在一个正数 c_0，使得 $0 < c_0 < (n + 1 + \beta_2)/q_2$。显然，对于任意 $w \in \mathbb{B}_n$和 $\eta \in \mathbb{B}_n$，都有 $|1-\langle w,\eta\rangle| \lesssim 1$。因此，$1 \lesssim \frac{1}{|1-\langle w,\eta\rangle|^{c_0}}$，从而 $|S_{0,\vec{b},(c_1,0)} f(z,w)| \lesssim S_{0,\vec{b},(c_1,c_0)}|f|(z,w)$。因此，由上述证明可得，在 $c_1 = n + 1 + b_1 + \lambda_1$的情况下，算子 $S_{0,\vec{b},(c_1,0)}$ 也从 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$到 $L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$有界。

若$c_1 < n+1+b_1+\lambda_1$，令 $\sigma_1 = n+1+b_1+\lambda_1-c_1$ 和 $\vec{\sigma} := (\sigma_1+c_1, c_2)$。那么 $\sigma_1+c_1 = n+1+b_1+\lambda_1$，并且，根据上述证明，可知 $S_{0,\vec{b},\vec{\sigma}}$ 从 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$ 到 $L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 是有界的。注意，

$$\frac{1}{|1-\langle w,\eta\rangle|^{c_1}} = \frac{|1-\langle w,\eta\rangle|^{\sigma_1}}{|1-\langle w,\eta\rangle|^{c_1+\sigma_1}} \leq \frac{2^{\sigma_1}}{|1-\langle w,\eta\rangle|^{\sigma_1+c_1}}.$$

因此，对于任意 $f \in L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$，我们有 $|S_{0,\vec{b},\vec{c}} f(z,w)| \leq 2^{\sigma_1} S_{0,\vec{b},\vec{c}}$，这意味着算子 $S_{0,\vec{b},\vec{c}}$ 在 $c_1 < n + 1 + b_1 + \lambda_1$的情况下也从 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$ 到 $L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 是有界的。这就完成了引理 3.6 的证明。 □

引理 3.7. 设 $1 = p_1 < p_2 \leq q_- < \infty$。如果参数满足

$$\begin{cases} \alpha_1 = b_1, \ \ c_1 < \dfrac{n+1+\beta_1}{q_1}, \\ \alpha_2 + 1 < p_2(b_2+1), \ \ c_2 \leq n+1+b_2+\dfrac{n+1+\beta_2}{q_2} - \dfrac{n+1+\alpha_2}{p_2}, \end{cases}$$

那么算子 $S_{0,\vec{b},\vec{c}}$ 从 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$ 到 $L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 是有界的。

证明。此引理是引理 3.6 的对称情形。因此，其证明与引理 3.6 的证明类似，只需将核替换为

$$K_1(z,u) := \frac{1}{|1-\langle z,u\rangle|^{c_1}}, \text{ and } K_2(w,\eta) = \frac{(1-|\eta|^2)^{b_2-\alpha_2}}{|1-\langle w,\eta\rangle|^{c_2}},$$

因此我们省略证明。 □

引理 3.8. 设 $1 = p_+ \le q_- < \infty$。如果参数满足对任意 $i \in \{1,2\}$,

$$\begin{cases} \alpha_i = b_i, \\ c_i < \dfrac{n+1+\beta_i}{q_i}, \end{cases}$$

那么算子 $S_{0,\vec{b},\vec{c}}$ 从 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$ 到 $L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 是有界的。

证明。假设 $c_i, 0$ 对于 $i \in \{1,2\}$。根据 $-(1+\beta_i)/q_i < 0$ 对于 $i \in \{1,2\}$这一事实，我们推得存在两个负数 r_1 和 r_2，使得对于任意 $i \in \{1,2\}$，$-\frac{1+\beta_i}{q_i} < r_i < 0$。对于任意 $i \in \{1,2\}$，令 $\gamma_i := -\frac{r_i}{c_i}$，且 $\delta_i := 1 + r_i c_i$。显然，$\gamma_i + \delta_i = 1$。现在我们定义$h_1(u,\eta) := 1$，$h_2(z,w) := (1-|z|^2)^{r_1}(1-|w|^2)^{r_2}$,

$$K_1(z,u) := \frac{1}{|1-\langle z,u\rangle|^{c_1}}, \text{ and } K_2(w,\eta) := \frac{1}{|1-\langle w,\eta\rangle|^{c_2}}.$$

因此,

$$S_{0,\vec{b},\vec{c}} f(z,w) = \int_{\mathbb{B}_n}\int_{\mathbb{B}_n} K_1(z,u)K_2(w,\eta)f(u,\eta)\,dv_{\alpha_1}(u)\,dv_{\alpha_2}(\eta).$$

为了使用命题 3.2 证明 $S_{0,\vec{b},\vec{c}}$ 的有界性，我们接下来考虑

$$[K_1(z,u)]^{\gamma_1}[K_2(w,\eta)]^{\gamma_2}h_1(u,\eta) = \frac{1}{|1-\langle z,u\rangle|^{c_1\gamma_1}|1-\langle w,\eta\rangle|^{c_2\gamma_2}}.$$

根据（3.17）以及对 i 有 $c_i\gamma = -r_i > 0 \in \{1,2\}$，我们知道，对于任意 $z \in \mathbb{B}_n$ 和 $u \in \mathbb{B}_n$，$\left(\frac{1-|\ |^2\ -r_1\ z}{|1-\langle}\right)_{z,u\rangle|^{c_1\gamma_1}} \le C$；对于任意 $w \in \mathbb{B}_n$ 和 $\eta \in \mathbb{B}_n$，$\left(\frac{1-|\ |^2\ -r_2\ w}{|1-\langle}\right)_{w,\eta\rangle|^{c_2\gamma_2}} \le C$。因此,

$$\operatorname*{ess\,sup}_{(u,\eta)\in\mathbb{B}_n\times\mathbb{B}_n} [K_1(z,u)]^{\gamma_1}[K_2(w,\eta)]^{\gamma_2}h_1(u,\eta) \lesssim h_2(z,w).$$

因此，算子 $S_{0,\ \vec{b},\ \vec{c}}$ 满足条件 (3.3)。接下来我们检验命题 3.2 的第二个条件 (3.4)。注意,

$$\int_{\mathbb{B}_n}[K_1(z,u)]^{\delta_1 q_1}[K_2(w,\eta)]^{\delta_2 q_1}[h_2(z,w)]^{q_1}\,dv_{\beta_1}(z) = \frac{(1-|w|^2)^{r_2 q_1}}{|1-\langle w,\eta\rangle|^{c_2\delta_2 q_1}}\int_{\mathbb{B}_n}\frac{(1-|z|^2)^{r_1 q_1+\beta_1}}{|1-\langle z,u\rangle|^{c_1\delta_1 q_1}}dv(z).$$

根据 r_i 的定义，我们知道，对于任意 $i \in \{1,2\}$,

$$r_i q_i + \beta_i > -1. \tag{3.28}$$

根据 δ_i 的选择以及$c_i < (n+1+\beta_i)/q_i$这一事实，我们推得，对于任意 $i \in \{1,2\}$,

$$n+1+r_i q_i+\beta_i - c_i\delta_i q_i = q_i\left(\frac{n+1+\beta_i}{q_i} - c_i\right) > 0. \tag{3.29}$$

利用这一点、(3.28) 和引理 2.4(i)，我们推得，对于任意给定的 $u \in \mathbb{B}_n$,

$$\int_{\mathbb{B}_n}\frac{(1-|z|^2)^{r_1 q_1+\beta_1}}{|1-\langle z,u\rangle|^{c_1\delta q_1}}dv(z) \le C,$$

这与 (3.28)、(3.29) 以及引理 2.4(i) 一起再次进一步表明娱乐主管

$$\int_{\mathbb{B}_n}\left[\int_{\mathbb{B}_n}[K_1(z,u)]^{\delta_1 q_1}[K_2(w,\eta)]^{\delta_2 q_1}[h_2(z,w)]^{q_1}\,dv_{\beta_1}(z)\right]^{q_2/q_1}dv_{\beta_2}(w)$$
$$\lesssim\int_{\mathbb{B}_n}\frac{(1-|w|^2)^{r_2q_2+\beta_2}}{|1-\langle w,\eta\rangle|^{c_2\delta_2q_2}}\,dv(\eta)\lesssim[h_1(u,\eta)]^{q_2}.$$

这正是 $S0_{,\vec{b},\vec{c}}$ 的不等式 (3.4)。因此，算子 $S0_{,\vec{b},\vec{c}}$ 满足命题 3.2 的所有条件。然后，应用命题 3.2，我们得出在 c_i , 0 且任意 $i\in\{1,2\}$ 的情况下，$S0_{,\vec{b},\vec{c}}$ 是从 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$ 到 $L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 的有界算子。

若$c_1=0$ 和$c_2\neq0,$ ，注意到存在一个正数c_0 使得 $0<c_0<(n+1+\beta_1)/q_1$。显然，对于任意 $z\in\mathbb{B}_n$ 和 $u\in\mathbb{B}_n$，$|1-\langle z,u\rangle|\lesssim1$。因此，$1\lesssim\frac{1}{|1-\langle z,u\rangle|^{c_0}}$，从而 $|S0,\vec{b},(0,c_2)f(z,w)|\lesssim S0,\vec{b},(c_0,c_2)|f|(z,w)$。因此，根据上述证明，我们得出算子 $S0,\vec{b},(0,c_2)$从 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$到 $L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 也是有界的。类似地，若$c_1\neq0$和$c_2=0$，则存在一个正数d_0使得 $0<d_0<(n+1+\beta_2)/q_2$。显然，对于任意$w\in\mathbb{B}_n$ 和$\eta\in\mathbb{B}_n$，$|1-\langle w,\eta\rangle|\lesssim1$。因此，$1\lesssim\frac{1}{|1-\langle w,\eta\rangle|^{d_0}}$，从而 $|S0,\vec{b},(c_1,0)f(z,w)|\lesssim S0,\vec{b},(c_1,d_0)|f|(z,w)$。因此，在这种情况下，我们同样得到算子$S0,\vec{b},(c_1,0)$ 从$L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$ 到$L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 是有界的。此外，当 $c_1=c_2=0$ 时，存在如上的两个正数 c_0和 d_0，使得 $|S0,\vec{b},(0,0)f(z,w)|\lesssim S0,\vec{b},(c_0,d_0)|f|(z,w)$，结合上述证明，这表明算子 $S0,\vec{b},(0,0)$ 从 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$到 $L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 是有界的，从而完成了引理 3.8 的全部证明。□

引理 3.9。设 $1=p_+\le q_-<\infty$。如果参数满足

$$\begin{cases}\alpha_1=b_1,\ \ c_1<\dfrac{n+1+\beta_1}{q_1},\\ \alpha_2<b_2,\ \ c_2\le b_2-\alpha_2+\dfrac{n+1+\beta_2}{q_2},\end{cases}$$

则算子 $S_{0,\vec{b},\vec{c}}$ 从 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$ 到 $L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 是有界的。

证明。假设 $c_1\neq0$。根据 $-(1+\beta_i)/q_i<0$，我们知道存在两个负数 r_1 和 r_2，使得对于任意 $i\in\{1,2\}$，$-\frac{1+\beta_i}{q_i}<r_i<0$。令 $\gamma_1:=-r_1c_1$ 和 $\delta_1:=1+r_1c_1$。显然，$\gamma_1+\delta_1=1$。定义

$$\lambda_2:=\frac{n+1+\beta_2}{q_2}-(n+1+\alpha_2),\ \ c_2:=n+1+b_2+\lambda_2,\ \text{ and }\ \tau_2:=c_2-b_2+\alpha_2.$$

然后，$\tau_2=\frac{n+1+\beta_2}{q_2}>0$。设 $\gamma_2:=-\frac{r_2}{\tau_2}$和 $\delta_2:=1+\frac{r_2}{\tau_2}$。显然，$\gamma_2+\delta_2=1$。现在定义 $h_1(u,\eta):=1$，$h_2(z,w):=(1-|z|^2)^{r_1}(1-|w|^2)^{r_2}$，

$$K_1(z,u):=\frac{1}{|1-\langle z,u\rangle|^{c_1}},\ \text{ and }\ K_2(w,\eta):=\frac{(1-|\eta|^2)^{b_2-\alpha_2}}{|1-\langle w,\eta\rangle|^{c_2}}.$$

因此,

$$S_{0,\vec{b},\vec{c}}f(z,w)=\int_{\mathbb{B}_n}\int_{\mathbb{B}_n}K_1(z,u)K_2(w,\eta)f(u,\eta)\,dv_{\alpha_1}(u)\,dv_{\alpha_2}(\eta).$$

为了利用命题 3.2 证明 $S_{0,\vec{b},\vec{c}}$ 的有界性，接下来我们考虑

$$[K_1(z,u)]^{\gamma_1}[K_2(w,\eta)]^{\gamma_2}h_1(u,\eta)=\frac{1}{|1-\langle z,u\rangle|^{c_1\gamma_1}}\frac{(1-|\eta|^2)^{(b_2-\alpha_2)\gamma_2}}{|1-\langle w,\eta\rangle|^{c_2\gamma_2}}.$$

由 (3.17) 及 $c_1\gamma_1=-r_1>0$ 可得，对于任意 $z\in\mathbb{B}_n$ 和 $u\in\mathbb{B}_n$,

$$\frac{(1-|z|^2)^{-r_1}}{|1-\langle z,u\rangle|^{c_1\gamma}}\le C. \tag{3.30}$$

由于 $\tau_2=c_2-b_2+\alpha_2$ 且 $\gamma_2=-r_2/\tau_2$，显然有 $c_2\gamma_2=(b_2-\alpha_2)\gamma_2-r_2$。由此，结合 (3.17)、(3.18) 以及 $(b_2-\alpha_2)\gamma_2>0$，可知对于任意 $w\in\mathbb{B}_n$ 和 $\eta\in\mathbb{B}_n$,

$$\frac{(1-|\eta|^2)^{(b_2-\alpha_2)\gamma_2}(1-|w|^2)^{-r_2}}{|1-\langle w,\eta\rangle|^{c_2\gamma_2}}=\frac{(1-|\eta|^2)^{(b_2-\alpha_2)\gamma_2}}{|1-\langle w,\eta\rangle|^{(b_2-\alpha_2)\gamma_2}}\frac{(1-|w|^2)^{-r_2}}{|1-\langle w,\eta\rangle|^{-r_2}}\le C,$$

结合 (3.30)，进一步可得

$$\operatorname*{ess\,sup}_{(u,\eta)\in\mathbb{B}_n\times\mathbb{B}_n}[K_1(z,u)]^{\gamma_1}[K_2(w,\eta)]^{\gamma_2}h_1(u,\eta)\lesssim h_2(z,w).$$

因此，算子 $S_{0,\vec{b},\vec{c}}$ 满足条件 (3.3)。接下来我们检验第二个条件 (3.4)。注意到

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{B}_n}[K_1(z,u)]^{\delta_1q_1}[K_2(w,\eta)]^{\delta_2q_1}[h_2(z,w)]^{q_1}\,dv_{\beta_1}(z)\\&\quad=\frac{(1-|\eta|^2)^{(b_2-\alpha_2)\delta_2q_1}(1-|w|^2)^{r_2q_1}}{|1-\langle w,\eta\rangle|^{c_2\delta_2q_1}}\int_{\mathbb{B}_n}\frac{(1-|z|^2)^{r_1q_1+\beta_1}}{|1-\langle z,u\rangle|^{c_1\delta_1q_1}}\,dv(z).\end{aligned} \tag{3.31}$$

根据 r_i 的定义，我们显然有

$$r_iq_i+\beta_i>-1. \tag{3.32}$$

此外，由于 $\delta_1=1+r_1/c_1$ 且 $c_1<(n+1+\beta_1)/q_1$,，因此可得

$$n+1+r_1q_1+\beta_1-c_1\delta_1q_1=q_1\left(\frac{n+1+\beta_1}{q_1}-c_1\right)>0.$$

由此以及 (3.32) 和引理 2.4(i)，我们推得，对于任意给定的 $u\in\mathbb{B}_n$,

$$\int_{\mathbb{B}_n}\frac{(1-|z|^2)^{r_1q_1+\beta_1}}{|1-\langle z,u\rangle|^{c_1\delta q_1}}\,dv(z)\le C. \tag{3.33}$$

另一方面，δ_2 的选择意味着$(c_2-b_2+\alpha_2)\delta_2=\tau_2\delta_2=n+1+\beta_2q_2\quad+r_2,$，结合事实~~$\delta_2>0$~~，进一步可得 $n+1+r_2q_2+\beta_2-c_2\delta_2q_2=-(b_2-\alpha_2)\delta_2q_2<0$。因此，应用这一结果、(3.31)、(3.32)、(3.33)以及引理 2.4(ii)，我们得出

$$\int_{\mathbb{B}_n}\left[\int_{\mathbb{B}_n}[K_1(z,u)]^{\delta_1q_1}[K_2(w,\eta)]^{\delta_2q_1}[h_2(z,w)]^{q_1}\,dv_{\beta_1}(z)\right]^{q_2/q_1}dv_{\beta_2}(w)$$

$$\lesssim (1-|\eta|^2)^{(b_2-\alpha_2)\delta_2 q_2}\int_{\mathbb{B}_n}\frac{(1-|w|^2)^{r_2q_2+\beta_2}}{|1-\langle w,\eta\rangle|^{c_2\delta_2q_2}}\,dv(\eta)\lesssim [h_1(u,\eta)]^{q_2}.$$

这正是 $S0_{\vec{b},\vec{c}}$ 的不等式 (3.4)。因此，算子 $S0_{\vec{b},\vec{c}}$ 满足命题 3.2 的所有条件。然后，应用命题 3.2，我们发现，在 $c_1\neq 0$ 且 $c_2=n+1+b_2+\lambda_2$ 的情况下，$S0_{\vec{b},\vec{c}}$ 是从 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$ 到 $L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 的有界算子。

此外，通过类似于引理 3.7 的证明中所用的论证，我们发现，当 $c_1<(n+1+\beta_1)/q_1$ 且 $c_2\le b_2-\alpha_2+(n+1+\beta_2)/q_2$，时，算子 $S0_{\vec{b},\vec{c}}$ 也从 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$ 到 $L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 有界，从而完成证明。□

引理 3.10. 设 $1=p_+\le q_-<\infty$。如果参数满足

$$\begin{cases}\alpha_1<b_1,\ \ c_1\le b_1-\alpha_1+\dfrac{n+1+\beta_1}{q_1},\\ \alpha_2=b_2,\ \ c_2<\dfrac{n+1+\beta_2}{q_2},\end{cases}$$

那么算子 $S_{0,\vec{b},\vec{c}}$ 从 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$ 到 $L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 是有界的。

证明。该引理是引理3.9的对称情形。因此，其证明类似于引理 3.9 的证明，只需将核替换为

$$K_1(z,u):=\frac{(1-|u|^2)^{b_1-\alpha_1}}{|1-\langle z,u\rangle|^{c_1}}\ \text{and}\ \ K_2(w,\eta):=\frac{1}{|1-\langle w,\eta\rangle|^{c_2}},$$

因此我们省略证明。□

4 完成定理1.3、1.4、1.5和1.6的证明

在本节中，我们通过两个关键观察并将各部分结合起来，完成主要结果的证明。首先，我们将这两个关键观察陈述如下。

观察 4.1。$S_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}}$ 的有界性蕴含 $T_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}}$ 的有界性。

观察 4.2. 算子 $S_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}}$（分别地，$T_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}}$）从 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$ 到 $L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 有界，当且仅当 $S_{0,\vec{b},\vec{c}}$（分别地，$T_{0,\vec{b},\vec{c}}$）从 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$ 到 $L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}+\vec{a}q}$ 有界，其中 $\vec{\beta}+\vec{a}q:=(\beta_1+a_1q_1,\beta_2+a_2q_2)$.

现在我们分别证明定理 1.3、1.4、1.5 和 1.6。

定理 1.3 的证明。显然，由观察 4.1 可知，(i) 蕴含 (ii)。结合引理 3.5 和观察 4.2，我们得出 $S_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}}$ 的 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$–$L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 有界性的充分条件为

$$\begin{cases}-q_ia_i<\beta_i+1,\ \ \alpha_i+1<p_i(b_i+1),\\ c_i\le n+1+a_i+b_i+\dfrac{n+1+\beta_i}{q_i}-\dfrac{n+1+\alpha_i}{p_i},\end{cases}\tag{4.1}$$

这意味着 (iii) 蕴含 (i)。另一方面，由观察 4.2 以及引理 2.8 和 2.12，我们推知 (4.1) 也是 $T_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}}$ 的 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}} – L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 有界性的必要条件。因此，(ii) 蕴含 (iii)，故定理 1.3 成立。□

定理 1.4 的证明。从观察 4.1 可知，(i) 蕴含 (ii)。应用引理 3.7 和观察 4.2，我们发现，$S_{\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}}$ 具有 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}} – L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 有界性的充分条件是

$$\begin{cases} -q_i a_i < \beta_i + 1,\ \ \alpha_1 = b_1,\ \ c_1 < a_1 + \dfrac{n+1+\beta_1}{q_1}, \\ \alpha_2 + 1 < p_2(b_2+1),\ \ c_2 \le n+1+a_2+b_2+\dfrac{n+1+\beta_2}{q_2} - \dfrac{n+1+\alpha_2}{p_2}. \end{cases} \tag{4.2}$$

因此，(iii)蕴含 (i)。此外，利用观察4.2 以及引理 2.10 和 2.14，我们得出 (4.2) 也是 $T_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}}$ 的 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}} – L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 有界性的必要条件。因此，(ii) 蕴含 (iii)，从而定理 1.3 的证明完成。

□

定理1.5 的证明。作为观察4.1 的推论，我们得到 (i)蕴含(ii)。根据引理 3.6和观察4.2，我们知道 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}} –L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 有界性的充分条件是 $S_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}}$ 是

$$\begin{cases} -q_i a_i < \beta_i + 1,\ \ \alpha_1 + 1 < p_1(b_1+1),\ \ c_1 \le n+1+a_1+b_1+\dfrac{n+1+\beta_1}{q_1} - \dfrac{n+1+\alpha_1}{p_1}, \\ \alpha_2 = b_2,\ \ c_2 < a_2 + \dfrac{n+1+\beta_2}{q_2}. \end{cases} \tag{4.3}$$

这意味着 (iii) 推出 (i)。另一方面，根据观察 4.2 和引理 2.9 和 2.13，我们推得 (4.3) 也是算子 $T_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}}$ 的 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}} – L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 有界性的必要条件。因此，(ii) 推出 (iii)，从而定理 1.5 成立。□

定理 1.6 的证明。根据观察 4.1，我们发现 (i) 推出 (ii)。将引理 3.5 应用于 $p_+ = 1$，并结合观察 4.2，我们知道，如果

$$\begin{cases} -q_i a_i < \beta_i + 1,\ \ \alpha_i < b_i, \\ c_i \le a_i + b_i - \alpha_i + \dfrac{n+1+\beta_i}{q_i} \end{cases}$$

对于任意 $i \in \{1,2\}$，则算子 $S_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}}$ 从 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$ 到 $L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 是有界的。此外，根据引理 3.8和观察 4.2，可知（1.2）是 $S_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}}$ 具有 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}} –L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 有界性的充分条件之一。利用引理 3.9和观察 4.2，我们得出（1.3）是算子 $S_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}}$ 具有 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}} – L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 有界性的充分条件之一。由引理 3.10和观察 4.2，我们推断（1.4）也是 $S_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}}$ 具有 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}} –L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 有界性的充分条件之一。因此，（iii）蕴含（i）。

另一方面，利用观察 4.2以及引理 2.11和2.12，我们得出（1.1）是 $T_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}}$具有 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}} - L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 有界性的必要条件之一。应用观察 4.2以及引理 2.11和2.15，我们知道（1.2）是 $T_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}}$ 具有 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}} - L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 有界性的必要条件之一。根据观察 4.2以及引理 2.11和2.14，我们发现（1.3）是 $T_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}}$具有 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}} - L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 有界性的必要条件之一。结合观察 4.2以及引理 2.11和2.13，我们得出（1.4）是 $T_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}}$具有 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}} - L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 有界性的必要条件之一。因此，（ii）蕴含（iii），从而定理 1.6的证明完成。□

5 多参数 Bergman 投影与 Berezin 变换

本节旨在说明我们主要定理的两个重要特例。更具体地说，我们将主要结果应用于以下加权多参数 Bergman 投影和加权多参数 Berezin 变换。设 $\vec{\gamma} := (\gamma_1, \gamma_2) \in (-1, \infty)^2$，加权多参数 Bergman 投影 $P_{\vec{\gamma}}$ 定义为

$$P_{\vec{\gamma}} f(z, w) := \int_{\mathbb{B}_n} \int_{\mathbb{B}_n} \frac{f(u, \eta)}{(1 - \langle z, u\rangle)^{n+1+\gamma_1} (1 - \langle w, \eta\rangle)^{n+1+\gamma_2}} \, d\upsilon_{\gamma_1}(u) \, d\upsilon_{\gamma_2}(\eta)$$

加权多参数 Berezin 变换 $B_{\vec{\gamma}}$ 定义为

$$B_{\vec{\gamma}} f(z, w) = \int_{\mathbb{B}_n} \int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1 - |z|^2)^{n+1+\gamma_1} (1 - |w|^2)^{n+1+\gamma_2}}{|1 - \langle z, u\rangle|^{2(n+1+\gamma_1)} |1 - \langle w, \eta\rangle|^{2(n+1+\gamma_2)}} f(u, \eta) \, d\upsilon_{\gamma_1}(u) \, d\upsilon_{\gamma_2}(\eta).$$

对于任意给定的 $\vec{p} := (p_1, p_2) \in (0, \infty)^2$ 和 $\vec{\alpha} := (\alpha_1, \alpha_2) \in (-1, \infty)^2$, 加权混合范数 Bergman 空间 $A^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}} := A^{\vec{p}}(\mathbb{B}_n \times \mathbb{B}_n, d\upsilon_{\alpha_1} \times d\upsilon_{\alpha_2})$与 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$具有相同的范数，由 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$ 中的全纯函数 f 组成，即

$$A^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}} := H(\mathbb{B}_n \times \mathbb{B}_n) \bigcap L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}},$$

其中$H(\mathbb{B}_n \times \mathbb{B}_n)$表示 $\mathbb{B}_n \times \mathbb{B}_n$ 中的所有全纯函数。显然，$A^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$ 是 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$ 的线性子空间，并且我们可以如下证明 $P_{\vec{\gamma}} f \in H(\mathbb{B}_n \times \mathbb{B}_n)$。

命题 5.1。设 $\vec{\gamma} := (\gamma_1, \gamma_2) \in (-1, \infty)^2$ 且 $f \in L^{\vec{1}}_{\vec{\gamma}}$。则加权多参数 Bergman 投影 $P_{\vec{\gamma}} f$ 是全纯的。

证明。我们首先回顾定义域 $\mathbb{B}_n \times \mathbb{B}_n \subset \mathbb{C}^{2n}$ 上全纯函数的定义。事实上，如果对于任意 $j \in \{1, \ldots, 2n\}$，以及任意固定的 $z_1, \ldots, z_{j-1}, z_{j+1}, \ldots, z_{2n}$，函数 $\zeta \mapsto g(z_1, \ldots, z_{j-1}, \zeta, z_{j+1}, \ldots, z_{2n})$ 在集合 $\{\zeta \in \mathbb{C} : (z_1, \ldots, z_{j-1}, \zeta, z_{j+1}, \ldots, z_{2n}) \in \mathbb{B}_n \times \mathbb{B}_n\}$ 上按经典单变量意义是解析的，则函数 $g : \mathbb{B}_n \times \mathbb{B}_n \to \mathbb{C}$ 是全纯函数。换句话说，我们需要证明 g 分别对每个变量都是全纯的。不失一般性，接下来假设 $j \in \{1, \ldots, n\}$。那么，给定任意 z、w、u、$\eta \in \mathbb{B}_n$ 和 $\zeta, \xi \in \mathbb{C}$，简记为，令

$$z^{(j)}(\zeta) := (z_1, \ldots, z_{j-1}, \zeta, z_{j+1}, \cdots, z_n)$$

and

$$G_1(z,u) := \frac{1}{(1-\langle z,u\rangle)^{\gamma_1}}, \quad G_2(w,\eta) := \frac{1}{(1-\langle w,\eta\rangle)^{\gamma_2}}.$$

对于任意 $j \in \in \{1,\dots,n\}$ 以及任意固定的 $z_1,\dots,z^{j-1}, z_{j+1},\dots,z_n, w_1,\dots,w_n$，我们知道，

$$\begin{aligned}&\frac{P_{\vec{\gamma}}f(z^{(j)}(\xi),w)-P_{\vec{\gamma}}f(z^{(j)}(\zeta),w)}{\xi-\zeta}\\&\quad=\int_{\mathbb{B}_n}\int_{\mathbb{B}_n} f(u,\eta)G_2(w,\eta)\frac{G_1(z^{(j)}(\xi),u)-G_1(z^{(j)}(\zeta),u)}{\xi-\zeta}\,dv_{\gamma_1}(u)\,dv_{\gamma_2}(\eta).\end{aligned} \tag{5.1}$$

由于 $G_1(\cdot, u)$ 是全纯的，我们有

$$\begin{aligned}&\lim_{\xi\to\zeta}\left|\frac{G_1(z^{(j)}(\xi),u)-G_1(z^{(j)}(\zeta),u)}{\xi-\zeta}\right|\\&\quad=\left|\frac{\partial G_1(z^{(j)}(\cdot),u)}{\partial z_j}(z^{(j)}(\zeta),u)\right|=\left|\frac{\gamma_1\overline{u_j}}{(1-\langle z^{(j)}(\zeta),u\rangle)^{\gamma_1+1}}\right|\le\frac{\gamma_1}{(1-|z^{(j)}(\zeta)|)^{\gamma_1+1}}.\end{aligned}$$

由此可知，对于充分小的 $\varepsilon>0$，存在正常数 $C = C(z^{(j)}(\zeta))$，使得对于任意满足 $|\xi-\zeta|<\varepsilon$ 的 ξ 以及任意 $u \in \mathbb{B}_n$,

$$\left|\frac{G_1(z^{(j)}(\xi),u)-G_1(z^{(j)}(\zeta),u)}{\xi-\zeta}\right|\le C. \tag{5.2}$$

容易看出，存在常数 $C = C(w)$，使得对于任意 $\eta\in\mathbb{B}_n$，$|G_2(w,\eta)|\le C$。由此以及 (5.2)，我们推得存在常数 $C = C(z^{(j)}(\zeta))C(w)$，使得对于任意满足 $|\xi-\zeta|<\varepsilon$ 的 ξ 以及任意 u，$\eta\in\mathbb{B}_n$,

$$\left|f(u,\eta)G_2(w,\eta)\frac{G_1(z^{(j)}(\xi),u)-G_1(z^{(j)}(\zeta),u)}{\xi-\zeta}\right|\le C|f(u,\eta)|\in L^1(\mathbb{B}_n\times\mathbb{B}_n,dv_{\gamma_1}dv_{\gamma_2}).$$

结合 (5.1) 和控制收敛定理，进一步可得

$$\begin{aligned}&\lim_{\xi\to\zeta}\frac{P_{\vec{\gamma}}f(z^{(j)}(\xi),w)-P_{\vec{\gamma}}f(z^{(j)}(\zeta),w)}{\xi-\zeta}\\&=\int_{\mathbb{B}_n}\int_{\mathbb{B}_n} f(u,\eta)G_2(w,\eta)\lim_{\xi\to\zeta}\frac{G_1(z^{(j)}(\xi),u)-G_1(z^{(j)}(\zeta),u)}{\xi-\zeta}\,dv_{\gamma_1}(u)\,dv_{\gamma_2}(\eta)\\&=\int_{\mathbb{B}_n}\int_{\mathbb{B}_n} f(u,\eta)G_2(w,\eta)\frac{\partial G_1(z^{(j)}(\cdot),u)}{\partial z_j}(z^{(j)}(\zeta),u)\,dv_{\gamma_1}(u)\,dv_{\gamma_2}(\eta),\end{aligned}$$

这意味着函数 $\zeta\mapsto P_{\vec{\gamma}}f(z^{(j)}(\zeta),w)$ 是解析的，从而完成证明。 □

通过加权多参数 Bergman投影，我们得到$A^1_{\vec{\gamma}}$ 中函数的如下积分表示，它是 [44,定理 2.2] 的扩展。

命题 5.2. 若 $\vec{\gamma} := (\gamma_1, \gamma_2) \in (-1, \infty)^2$ 且 $f \in A^{\vec{1}}_{\vec{\gamma}}$，则

$$f(z,w) = \int_{\mathbb{B}_n}\int_{\mathbb{B}_n} \frac{f(u,\eta)}{(1-\langle z,u\rangle)^{n+1+\gamma_1}(1-\langle w,\eta\rangle)^{n+1+\gamma_2}}\, dv_{\gamma_1}(u)\, dv_{\gamma_2}(\eta)$$

对于所有 $z \in \mathbb{B}_n$ 和 $w \in \mathbb{B}_n$。

证明。由富比尼定理可知，对于几乎处处的 $\eta \in \mathbb{B}_n$，$f(\cdot,\eta) \in L^1(\mathbb{B}_n, dv_{\gamma_1})$。由此可得，对于几乎处处的 $\eta \in \mathbb{B}_n$，$f(\cdot,\eta) \in A^1_{\gamma_1}$。根据 [44, 定理 2.2],，我们推得，对于 $z \in \mathbb{B}_n$ 以及几乎处处的 $\eta \in \mathbb{B}_n$,

$$\int_{\mathbb{B}_n} \frac{f(u,\eta)}{(1-\langle z,u\rangle)^{n+1+\gamma_1}}\, dv_{\gamma_1}(u) = f(z,\eta). \tag{5.3}$$

同样地，根据富比尼定理，我们知道，对于几乎所有的$z \in \mathbb{B}_n$，$f(z,\cdot) \in L^1(\mathbb{B}_n, dv_{\gamma_2})$。由此可知，对于几乎所有的 $z \in \mathbb{B}_n$，$f(z,\cdot) \in A^1_{\gamma_2}$。应用 [44, 定理 2.2], 我们得出，对于 $w \in \mathbb{B}_n$ 以及几乎所有的 $z \in \mathbb{B}_n$,

$$\int_{\mathbb{B}_n} \frac{f(z,\eta)}{(1-\langle w,\eta\rangle)^{n+1+\gamma_2}}\, dv_{\gamma_2}(\eta) = f(z,w). \tag{5.4}$$

容易看出，存在一个常数 $C = C(z,w)$，使得

$$\left|\frac{f(u,\eta)}{(1-\langle z,u\rangle)^{n+1+\gamma_1}(1-\langle w,\eta\rangle)^{n+1+\gamma_2}}\right| \le C|f(u,\eta)| \in L^1(\mathbb{B}_n\times\mathbb{B}_n, dv_{\gamma_1}dv_{\gamma_2}),$$

其中，共同与 Fubini定理、(5.3)和 (5.4) 一起，这意味着，对于几乎处处的 z、$w \in \mathbb{B}_n$,

$$f(z,w) = \int_{\mathbb{B}_n}\int_{\mathbb{B}_n} \frac{f(u,\eta)}{(1-\langle z,u\rangle)^{n+1+\gamma_1}(1-\langle w,\eta\rangle)^{n+1+\gamma_2}}\, dv_{\gamma_1}(u)\, dv_{\gamma_2}(\eta). \tag{5.5}$$

根据命题 5.1，我们知道 (5.5) 的积分是一个全纯函数。因此，(5.5) 对任意 z、$w \in \mathbb{B}_n$ 都成立，至此证明完成。□

此外，显然 $P_{\vec{\gamma}} = T_{(0,0),\ (\gamma_1,\gamma_2),\ (n+1+\gamma_1,\ n+1+\gamma_2)}$ 且

$$B_{\vec{\gamma}} = S_{(n+1+\gamma_1, n+1+\gamma_2),\,(\gamma_1,\gamma_2),\,2(n+1+\gamma_1, n+1+\gamma_2)}.$$

因此，作为定理 1.3、1.4、1.5 和 1.6 的特例，我们立即得到 Berezin 变换 $B_{\vec{\gamma}}$ 的 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$–$L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 有界性的以下刻画。

命题 5.3。设 $\vec{p} := (p_1, p_2)$，$\vec{q} := (q_1, q_2) \in [1,\infty)^2$，$p_+ := \max\{p_1, p_2\}$，$p_- := \min\{p_1, p_2\}$，且 $q_- := \min\{q_1, q_2\}$。

当 $1 < p_- \le p_+ \le q_- < \infty$ 时，$B_{\vec{\gamma}}$ 从 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$ 到 $L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 是有界的，当且仅当，对于任意 $i \in \{1,2\}$,

$$\begin{cases} \alpha_i + 1 < p_i(\gamma_i + 1), \\ \dfrac{n+1+\alpha_i}{p_i} \le \dfrac{n+1+\beta_i}{q_i}. \end{cases}$$

(ii) 当 $\vec{p}:=(1,p_2)$和 $\vec{q}:=(q_1,q_2)$满足 $1<p_2\le q_-<\infty$ 时，$B^{\vec{\gamma}}$ 从 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$ 到 $L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 有界当且仅当

$$\begin{cases}\alpha_1=\gamma_1,\ \ n+1+\gamma_1<\dfrac{n+1+\beta_1}{q_1},\\ \alpha_2+1<p_2(\gamma_2+1),\ \ \dfrac{n+1+\alpha_2}{p_2}\le\dfrac{n+1+\beta_2}{q_2}.\end{cases}$$

(iii) 当 $\vec{p}:=(p_1,1)$ 且 $\vec{q}:=(q_1,q_2)$ 满足 $1<p_1\le q_-<\infty$ 时，$B^{\vec{\gamma}}$ 从 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$ 到 $L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 有界，当且仅当

$$\begin{cases}\alpha_1+1<p_1(\gamma_1+1),\ \ \dfrac{n+1+\alpha_1}{p_1}\le\dfrac{n+1+\beta_1}{q_1},\\ \alpha_2=\gamma_2,\ \ n+1+\gamma_2<\dfrac{n+1+\beta_2}{q_2}.\end{cases}$$

(iv) 当 $\vec{p}:=(1,1)$ 且 $\vec{q}:=(q_1,q_2)\in[1,\infty)^2$, 时，$B^{\vec{\gamma}}$ 从 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$ 到 $L^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 有界，当且仅当对任意 $i\in\{1,2\}$,

$$\begin{cases}\alpha_i<\gamma_i,\\ n+1+\alpha_i\le\dfrac{n+1+\beta_i}{q_i},\end{cases}$$

or

$$\begin{cases}\alpha_i=\gamma_i,\\ n+1+\gamma_i<\dfrac{n+1+\beta_i}{q_i},\end{cases}$$

or

$$\begin{cases}\alpha_1=\gamma_1,\ \ n+1+\gamma_1<\dfrac{n+1+\beta_1}{q_1},\\ \alpha_2<\gamma_2,\ \ n+1+\alpha_2\le\dfrac{n+1+\beta_2}{q_2},\end{cases}$$

or

$$\begin{cases}\alpha_1<\gamma_1,\ \ n+1+\alpha_1\le\dfrac{n+1+\beta_1}{q_1},\\ \alpha_2=\gamma_2,\ \ n+1+\gamma_2<\dfrac{n+1+\beta_2}{q_2}.\end{cases}$$

此外，根据命题 5.1，并利用定理1.3、1.4、1.5 和1.6，我们进一步得出以下关于贝格曼投影 $P^{\vec{\gamma}}$ 的 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$ –$A^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 有界性的刻画。

命题 5.4。假设 $\vec{p} := (p_1, p_2)$, $\vec{q} := (q_1,q_2) \in [1,\infty)^2$, $p_+ := \max\{p_1, p_2\}$, $p_- :=\min\{p_1, p_2\}$, and $q_- := \min\{q_1,q_2\}$.

(i) 当 $1 < p_- \le p_+ \le q_- < \infty$ 时，$P_{\vec{\gamma}}$ 从 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$ 到 $A^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 是有界的，当且仅当对于任意 $i \in \{1, 2\}$,

$$\begin{cases} \alpha_i + 1 < p_i(\gamma_i + 1), \\ \dfrac{n + 1 + \alpha_i}{p_i} \le \dfrac{n + 1 + \beta_i}{q_i}. \end{cases}$$

(ii) 当 $\vec{p}:= (1, p_2)$和 $\vec{q}:= (q_1,q_2)$满足 $1 < p_2 \le q_- < \infty$ 时，$P_{\vec{\gamma}}$ 从 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$ 到 $A^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 有界，当且仅当

$$\begin{cases} \alpha_1 = \gamma_1, \ \ n + 1 + \gamma_1 < \dfrac{n + 1 + \beta_1}{q_1}, \\ \alpha_2 + 1 < p_2(\gamma_2 + 1), \ \ \dfrac{n + 1 + \alpha_2}{p_2} \le \dfrac{n + 1 + \beta_2}{q_2}. \end{cases}$$

(iii)当 $\vec{p}:= (p_1, 1)$和 $\vec{q}:= (q_1,q_2)$ 满足 $1 < p_1 \le q_- < \infty$ 时，则$P_{\vec{\gamma}}$ 从 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$ 到 $A^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$ 有界，当且仅当

$$\begin{cases} \alpha_1 + 1 < p_1(\gamma_1 + 1), \ \ \dfrac{n + 1 + \alpha_1}{p_1} \le \dfrac{n + 1 + \beta_1}{q_1}, \\ \alpha_2 = \gamma_2, \ \ n + 1 + \gamma_2 < \dfrac{n + 1 + \beta_2}{q_2}. \end{cases}$$

(iv)当 $\vec{p}:= (1,1)$且 $\vec{q}:= (q_1, q_2) \in [1,\infty)^2$, 时，$P_{\vec{\gamma}}$从 $L^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$到 $A^{\vec{q}}_{\vec{\beta}}$是有界的，当且仅当，对于任意 $i \in \{1, 2\}$,

$$\begin{cases} \alpha_i < \gamma_i, \\ n + 1 + \alpha_i \le \dfrac{n + 1 + \beta_i}{q_i}, \end{cases}$$

or

$$\begin{cases} \alpha_i = \gamma_i, \\ n + 1 + \gamma_i < \dfrac{n + 1 + \beta_i}{q_i}, \end{cases}$$

or

$$\begin{cases} \alpha_1 = \gamma_1, \ \ n + 1 + \gamma_1 < \dfrac{n + 1 + \beta_1}{q_1}, \\ \alpha_2 < \gamma_2, \ \ n + 1 + \alpha_2 \le \dfrac{n + 1 + \beta_2}{q_2}, \end{cases}$$

or

$$\begin{cases} \alpha_1 < \gamma_1, \ n+1+\alpha_1 \le \dfrac{n+1+\beta_1}{q_1}, \\ \alpha_2 = \gamma_2, \ n+1+\gamma_2 < \dfrac{n+1+\beta_2}{q_2}. \end{cases}$$

声明与披露

利益冲突： 作者声明不存在需要披露的相关财务或非财务利益。

数据可用性： 数据共享不适用于本文，因为当前研究期间未生成或分析任何数据集。

参考文献

[1] C.Benea 和 C. Muscalu，通过螺旋方法得到的多重向量值不等式，Anal. PDE 9（2016），1931-1988。[2] C. Benea 和C.Muscalu，通过螺旋方法得到的拟Banach 值不等式，J.Funct.Anal. 273（2017），1295-1353。[3] C. Benea和 C.Muscalu，Littlewood-Paley 平方函数的多重向量值混合范数估计，Publ. Mat. 66（2022年），631-681。[4] A.Benedek 和 R. Panzone，带混合范数的空间 L^p，DukeMath. J. 28（1961），301-324。[5] T.Chen 和 W. Sun，迭代弱范数与混合弱范数及其在几何不等式中的应用，《几何分析杂志》30（2020），4268-4323。[6] T. Chen 和 W.Sun，将多线性分数阶积分算子扩展为混合范数 Lebesgue 空间上的线性算子，Math. Ann. 379（2021年），1089-1172。[7] T.Chen 和 W. Sun，混合范数 Lebesgue空间上的 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式，《几何分析杂志》32（2022年），论文第 101 号，共 43 页。[8] G.Cleanthous和 A. G. Georgiadis，混合范数 α-调制空间，Trans.Amer.Math.Soc. 373（2020），3323-3356。[9] G.Cleanthous 和 A.G.Georgiadis，乘积（α_1， α_2）-调制空间，Sci.ChinaMath. 65（2022年），1599-1640。[10] G.Cleanthous、A.G.Georgiadis 和M.Nielsen，各向异性混合范数 Hardy空间，《几何分析杂志》27（2017），2758-2787。[11] G.Cleanthous、A.G.Georgiadis和M.Nielsen，各向异性齐次混合范数空间的分子分解及其在算子有界性中的应用，Appl. Comput.Harmon. Anal. 47（2019），447-480。[12] G.Cleanthous、A.G.Georgiadis 和 M.Nielsen，分布的各向异性混合范数空间上的 Fourier 乘子，Math.Scand. 124（2019），289-304。[13] G.Cleanthous、A. G. Georgiadis 和 M. Nielsen，全纯Besov 空间和 Triebel-Lizorkin 空间的分子分解与 Fourier 乘子，《数学月刊》188（2019），467-493。

[14] L.Ding和K.Wang, 《Bergman 型算子的 L^p –L^q 有界性与紧性》, 《台湾数学期刊》26（2022年）, 713-740。[15] R.Fefferman 和J. Pipher, 《多参数算子与尖锐加权不等式》, 《美国数学杂志》119（1997年）, 337-369。[16] F.Forelli 和 W.Rudin, 《球上全纯函数空间上的投影》, 《印第安纳大学数学杂志》24（1974年）, 593-602。[17] E.Gagliardo, 《关于具有正核的积分变换》, 《美国数学会会刊》16（1965年）, 429-434。[18] A.G. Georgiadis 和 M. Nielsen, 《混合范数Besov 空间和Triebel-Lizorkin空间上的伪微分算子》, 《数学新闻》289（2016年）, 2019-2036。[19] A. G. Georgiadis、J. Johnsen 和 M. Nielsen, 《齐次混合范数Triebel-Lizorkin 空间的小波变换》, 《数学月刊》183（2017年）, 587-624。[20] L.Huang、D.-C. Chang和D.Yang, 《各向异性混合范数Hardy 空间的傅里叶变换》, 《中国数学前沿》16（2021年）, 119-139。[21] L. Huang、J. Liu、D. Yang 和 W. Yuan, 《各向异性混合范数 Hardy 空间的原子分解与 Littlewood-Paley 刻画及其应用》, 《几何分析杂志》29（2019年）, 1991-2067。[22] L. Huang、J. Liu、D. Yang 和 W. Yuan, 《各向异性混合范数 Hardy 空间的对偶空间》, 《美国数学会会刊》147（2019年）, 1201-1215。[23] L. Huang、J. Liu、D. Yang 和 W. Yuan, 《各向异性混合范数 Hardy 空间与某些齐次 Triebel-Lizorkin 空间的识别》, 《逼近理论杂志》258（2020年）, 105459, 27页。[24] L. Huang 和 X. Wang, 《径向-角向混合空间上的 Schur 判别法、Bergman 型算子与 Gleason 问题》, 《电子研究档案》31（2023年）, 6027-6044。[25] L. Huang、F. Weisz、D. Yang 和 W. Yuan, 《通过相关 Herz 空间研究混合范数 Lebesgue 空间上傅里叶变换的可和性》, 《分析与应用》（新加坡）21（2023年）, 279-328。[26] L. Huang、D. Yang 和 W. Yuan, 《各向异性混合范数 Campanato 型空间及其在各向异性混合范数 Hardy 空间对偶空间中的应用》, 《Banach 数学分析杂志》15（2021年）, 论文编号62, 36页。.[27] H. T. Kaptanoˇglu 和 A. E. Ureyen, 《球上的具有 Bergman-Besov 核的奇异积分算子》, Integral Equations Operator Theory 91（2019年）, 论文编号30, 30页。[28] C.J. Kolaski, 《重新审视 Forelli 和 Rudin 定理》, 《印第安纳大学数学杂志》28（1979年）, 495-499。[29] O. Kures 和 K. Zhu, 《$\mathbb{C}^n$的单位球上的一类积分算子》, Integral Equations Operator Theory 56（2006年）, 71-82。[30] D. M¨uller、F. Ricci 和 E. M. Stein, 《Heisenberg（型）群上的 Marcinkiewicz 乘子与多参数结构。I》, 《数学发明》119（1995年）, 199-233。[31] D. M¨uller、F. Ricci 和 E. M. Stein, 《Heisenberg（型）群上的 Marcinkiewicz 乘子与多参数结构。II》, 《数学杂志》221（1996年）, 267-291。[32] G. O. Okikiolu, 《关于积分算子的不等式》, 《格拉斯哥数学杂志》11（1970年）, 126-133。[33] C. Qin、M. Wang 和 X. Guo, 《Hartogs 三角形上 Forelli-Rudin 型算子的加权估计》, 《Banach 数学分析杂志》17（2023年）, 论文编号11, 33页。[34] C. Qin、H. Wu 和 X. Guo, 《Hartogs 三角形上 Forelli-Rudin 型算子的 L^p 有界性》, 《数学分析及其应用杂志》 528 （ 2023 年）, 论文编号127480, 21页。

[35] F. Ricci 和 E. M. Stein，多参数奇异积分与极大函数，Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 42（1992），637-670。[36] W. Rudin，$\mathbb{C}^n$单位球中的函数论，Springer-Verlag，纽约-柏林，1980，xiii+436 页。[37] J. Schur，关于具有无限多个变量的有界双线性型理论的评注，J. Reine Angew. Math. 140（1911年），1-28。[38] E. M. Stein，奇异积分与柯西-黎曼方程的估计，Bull. Amer. Math. Soc. 79（1973年），440-445。[39] R. S. Strichartz，分数阶 Sobolev 空间上的乘子，J. Math. Mech. 16（1967年），1031-1060。[40] R. Zhao，Schur 判别法的推广及其在 $\mathbb{C}^n$单位球上一类积分算子中的应用，Integral Equations Operator Theory 82（2015年），519-532。[41] R. Zhao，《Schur 判别法的推广及其在 $\mathbb{C}^n$单位球上一类积分算子中的应用》的更正，Integral Equations Operator Theory 95（2023年），论文编号 18，共 4 页。[42] R. Zhao 和 L. Zhou，^pL-^{q} L$\mathbb{C}^n$单位球上 Forelli-Rudin 型算子的有界性，J. Funct. Anal. 282（2022年），论文编号 109345，共 26 页。[43] K. Zhu，一种 Forelli-Rudin 型定理及其应用，Complex Variables Theory Appl. 16（1991年），107-113。[44] K. Zhu，单位球中的全纯函数空间，Graduate Texts in Mathematics，226。Springer-Verlag，纽约，2005年，x+271 页。[45] K. Zhu，函数空间中的算子理论，第二版。Mathematical Surveys and Monographs，138。美国数学学会，普罗维登斯，罗德岛州，2007年。xvi+348 页。[46] K. Zhu，Berezin 变换及其应用，Acta Math. Sci. Ser. B (Engl. Ed.) 41（2021年），1839-1858。[47] K. Zhu，加权 Bergman 空间的嵌入与紧嵌入，Illinois J. Math. 66（2022年），435-448。

Long Huang、Xiaofeng Wang 和 Zhicheng Zeng

中国广州市大学城广州大学数学与信息科学学院，广东省高等学校数学与交叉科学重点实验室，邮编：510006，中华人民共和国

电子邮箱：longhuang@gzhu.edu.cn（L. Huang）
wxf@gzhu.edu.cn（X. Wang）
zhichengzeng@e.gzhu.edu.cn（Z. Zeng）