arXiv:2304.04946v1 [math.DS] 11 Apr 2023

Gierer-Meinhardt模型中的余维3 Bogdanov-Takens分岔

Ranchao Wu*和Lingling Yang安徽大学纯数学中心与数学科学学院，中国合肥 *230601*

摘要。 本文分析了局部Gierer-Meinhardt模型的分岔。研究发现，该模型中存在余维3退化Bogdanov-Takens分岔，以及鞍结分岔和Hopf分岔。这在现有关于该模型的研究结果中尚未报道。本文运用稳定性分析、正规形方法和分岔理论，详细探讨了平衡点的存在性及其稳定性、分岔现象，以及由此产生的复杂而有趣的动力学行为。本文还给出了数值结果，以验证理论结果。

关键词： Gierer-Meinhardt模型，鞍结点，Hopf分岔，Bogdanov-Takens分岔

1 引言

早在 [1], ，图灵便发现了系统中时空对称性破缺，以及新时空结构的自组织、选择和稳定性的共同特性，并提出了斑图是扩散驱动不稳定性结果的观点。此后，越来越多的研究者开始关注图灵斑图，并提出了各种模型来描述扩散驱动不稳定性。其中一个重要模型是Gierer-Meinhardt模型 [2]„ 该模型由Gierer和Meinhardt于1972年提出，其形式如下

$$\begin{cases} \frac{\partial a}{\partial t} = \rho_0\rho + c\rho\frac{a^r}{h^s} - ua + D_a\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial h}{\partial t} = c'\rho'\frac{a^T}{h^u} - vh + D_h\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}. \end{cases}$$

其中， $a(x,\ t)$ 和 $h(x,\ t)$ 分别表示空间位置 x 和时间 $t > 0$ 下激活子和抑制子的浓度。 $\rho_0\rho$ 和 ρ' 分别是 $a(x,\ t)$ 和 $h(x,\ t)$ 的源浓度。激活子和抑制子的一级动力学分别由 u_a 和 v_h 表示。 D_a 和 D_h 分别表示激活子和抑制子的扩散系数。通常需要假设 $\frac{sT}{u+1} > r - 1 > 0$，即 $r \geq 2$ $(r \in \mathbb{Z})$。

*通讯作者。电子邮箱：rcwu@ahu.edu.cn（R. C. Wu）

鉴于图灵关于图样形成的思想，要探索这类模型中的图样，开展稳定性和不稳定性分析十分必要。不稳定性将伴随着模型中的分岔。随后便会产生不同分岔所导致的时空图样。迄今为止，关于Gierer-Meinhardt模型中的分岔及其引发的复杂动力学，已有各种研究成果。当 $r = 2$, $s = 1$, $T = 2$和 $u = 0$时，Song等人 [3]研究了含饱和项的Gierer-Meinhardt模型，并获得了特定参数空间中的图样形成。文献 [4]介绍了Hopf分岔、扩散对稳定性的影响以及随后出现的图灵图样。对于具有时滞的反应扩散Gierer-Meinhardt系统，文献 [5]也进行了分岔分析。对于激活子和抑制子的源不同的情形，文献 [6]研究了Hopf分岔。关于余维为2的分岔，文献 [7] 考虑了不含饱和项的图灵-Hopf分岔。文献 [8], 给出了图灵-图灵分岔，展示了具有不同空间响应的多稳态图样的共存以及图样的叠加。

近期， [9]中关于 Gray-Scott 系统局域图样以及一般 Gierer-Meinhardt模型分岔的一些研究结果已经取得。局部一维 Gierer-Meinhardt模型由下式给出

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a + \frac{u^2}{v} - u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = b + u^2 - dv. \end{cases} \tag{1}$$

其中， a、 b 和 d 均为正数。然而，当 $a = 0$时，该系统仍表现出更复杂的动力学特性，值得进一步研究。本文发现，该模型可能出现鞍结分岔、Hopf分岔以及余维三退化 Bogdanov-Takens 分岔，而 [9]中的系统并不存在这种情况。值得注意的是，高度退化的分岔更难处理，且由此产生的动力学行为更加丰富有趣，因此在数学和应用科学领域日益受到关注。例如，[10–12], 中展示了退化分岔及其引发的复杂动力学，包括三阶幂零尖点奇点和余维3退化 Hopf分岔。在 [13], 中，Huang 等人发现捕食者-猎物模型中存在一个余维3退化 Bogdanov-Takens 奇点（焦点情形）。在 [14], 中，也发现了余维3 Bogdanov-Takens 分岔和余维2 Hopf分岔。

本文将针对含有 $a = 0$ 的系统 (1) 详细阐述这些方面。第 2 节介绍平衡点的存在性及其稳定性。第 4 节讨论各种分岔，例如鞍结分岔、Hopf分岔以及余维三 Bogdanov-Takes 分岔。最后，第 5 节作简要总结。

2 平衡点的存在性与稳定性

现在考虑以下形式的系统

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = c\left(\frac{\beta u^2}{v} - u\right), \\ \frac{dv}{dt} = b + u^2 - dv. \end{cases} \tag{2}$$

令 $f(u,v) = c\left(\frac{\beta u^2}{v} - u\right)$, $g(u,v) = b + u^2 - dv$。求解 $f(u,v) = 0$ 后，我们得到解 $u = 0$ 或 $v = u\beta$。

不难求得系统 (2) 的边界平衡点 $(0, \frac{b}{d})$。接下来，为了确定系统正平衡点的存在性，将 $v = u\beta$ 代入 $g(u, v) = 0$，得到

$$h(u) \triangleq u^2 - d\beta u + b = 0.$$

$h(u)$ 的判别式为

$$\Delta = d^2\beta^2 - 4b.$$

因此

(i) 若 $d^2\beta^2 < 4b$，则 $h(u) > 0$，当 $u > 0$ 时；(ii) 若 $d^2\beta^2 = 4b$，则 $h(u)$ 有一个实根 $u_1 = \frac{d\beta}{2}$；(iii) 若 $d^2\beta^2 > 4b$，则 $h(u)$ 有两个不同的正实根，

$$u_2 = \frac{d\beta + \sqrt{\Delta}}{2}, \qquad u_3 = \frac{d\beta - \sqrt{\Delta}}{2}.$$

因此得到以下结果。

定理1。系统 *(2)* 只有一个边界平衡点 $E_0(0, v_0) = (0, \frac{b}{d})$，并且

(i) 若 $d^2\beta^2 < 4b$，则不存在正平衡点；

(ii) 若 $d^2\beta^2 = 4b$，则存在一个正平衡点 $E_1(u_1, v_1) = \left(\frac{d\beta}{2}, \frac{d\beta^2}{2}\right)$；

(iii) 若 $d^2\beta^2 > 4b$，则存在两个正平衡点 $E_2(u_2, v_2) = \left(\frac{d\beta+\sqrt{\Delta}}{2}, \frac{d\beta^2+\beta\sqrt{\Delta}}{2}\right)$和 $E_3(u_3, v_3) = \left(\frac{d\beta-\sqrt{\Delta}}{2}, \frac{d\beta^2-\beta\sqrt{\Delta}}{2}\right)$。

接下来将考察系统 (2) 的平衡点稳定性。首先考虑边界平衡点 $E_0(0, v_0)$。系统 (2) 在平衡点 E_0 处的雅可比矩阵为

$$J_{E_0} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix},$$

其特征值为 $\lambda_1 = -1 < 0$ 和 $\lambda_2 = -d < 0$。因此，系统 (2) 的平衡点 E_0 是一个稳定结点。

至于平衡点 E_1的稳定性，我们有

定理 2. *(a)* 若 $d = c$，则 E_1 是一个三余维尖点；

(b) 若 $d > c$，则 E_1 是一个具有不稳定抛物扇区的鞍结点；*(b)* 若 $d < c$，则 E_1 是一个具有稳定抛物扇区的鞍结点。

证明。系统 (2) 在平衡点 E_1 处的雅可比矩阵为

$$J_{E_1} = \begin{pmatrix} c & -\frac{c}{\beta} \\ d\beta & -d \end{pmatrix}.$$

由此可得

$$trJ_{E_1} = c - d,\ \ detJ_{E_1} = 0.$$

现在将 $E_1(u_1, v_1) = (\frac{d\beta}{2}, \frac{d\beta^2}{2})$ 平移到原点，通过平移$(u, v) = (U + u_1, V + v_1)$，然后系统 (2) 变为

$$\begin{cases} \dot{U} = a_{10}U + a_{01}V + a_{20}U^2 + a_{11}UV + a_{02}V^2 + a_{21}U^2V \\ \qquad +a_{12}UV^2 + a_{03}V^3 + a_{22}U^2V^2 + a_{13}UV^3 + a_{04}V^4 + M(U, V), \\ \dot{V} = b_{10}U + b_{01}V + b_{20}U^2 + N(U, V), \end{cases} \tag{3}$$

其中

$$\begin{aligned} &a_{10} = c, \qquad a_{01} = -\frac{c}{\beta}, \quad a_{20} = \frac{2c}{d\beta}, \quad a_{11} = -\frac{4c}{d\beta^2}, \quad a_{02} = \frac{2c}{d\beta^3}, \\ &a_{21} = -\frac{4c}{d^2\beta^3}, \quad a_{12} = \frac{8c}{d^2\beta^4}, \quad a_{03} = -\frac{4c}{d^2\beta^5}, \quad a_{22} = \frac{8c}{d^3\beta^5}, \quad a_{13} = -\frac{16c}{d^3\beta^6}, \\ &a_{04} = \frac{8c}{d^3\beta 7}, \quad b_{10} = d\beta, \quad b_{01} = -d, \quad b_{20} = 1, \end{aligned}$$

且 $M(U,\ V)$、$N(U,\ V)$ 是关于 U 和 V 的至少五阶项。

首先，假设 $d = c$。那么，J_{E_1} 的两个特征值均为零。应用变换（$U,\ V$）=（$x,\ \beta$（$x - \frac{y}{c}$））， 我们将系统（3）改写为

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \frac{2y^2}{c^2\beta} - \frac{4xy^2}{c^3\beta^2} + \frac{4y^3}{c^4\beta^2} + \frac{8x^2y^2}{c^4\beta^3} - \frac{16xy^3}{c^5\beta^3} + \frac{8y^4}{c^6\beta^3} + M_2(x, y), \\ \dot{y} = -\frac{c}{\beta}x^2 + \frac{2y^2}{c\beta} - \frac{4xy^2}{c^2\beta^2} + \frac{4y^3}{c^3\beta^2} + \frac{8x^2y^2}{c^3\beta^2} - \frac{16xy^3}{c^4\beta^3} + \frac{8y^4}{c^5\beta^3} + N_2(x, y), \end{cases} \tag{4}$$

且 $M_2(x, y)$、$N_2(x, y)$ 是 x 和 y 中至少五阶的项。进一步，令$(x, y) = (x_1, y_1 + x_1^2 + \frac{2}{c\beta}x_1y_1 - \frac{2}{c^2\beta}y_1^2)$，则 (4) 被变换为以下形式

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1 + x_1^2 + c_{11}x_1y_1 + c_{21}x_1^2y_1 + c_{12}x_1y_1^2 + c_{03}y_1^3 \\ \qquad +c_{40}x_1^4 + c_{22}x_1^2y_1^2 + c_{13}x_1y_1^3 + c_{04}y_1^4 + M_3(x_1, y_1), \\ \dot{y}_1 = d_{20}x_1^2 + d_{11}x_1y_1 + d_{30}x_1^3 + d_{21}x_1^2y_1 + d_{12}x_1y_1^2 + d_{03}y_1^3 \\ \qquad +d_{40}x_1^4 + d_{31}x_1^3y_1 + d_{22}x_1^2y_1^2 + d_{13}x_1y_1^3 + d_{04}y_1^4 + N_3(x_1, y_1), \end{cases} \tag{5}$$

其中

$$\begin{aligned} &c_{11} = \frac{2}{c\beta}, \quad c_{21} = \frac{4}{c^2\beta}, \quad c_{12} = \frac{4}{c^3\beta^2}, \quad c_{03} = -\frac{4}{c^4\beta^2}, \quad c_{40} = \frac{2}{c^2\beta}, \quad c_{22} = \frac{4}{c^4\beta^2}, \\ &c_{13} = \frac{8}{c^5\beta^3}, \quad c_{04} = -\frac{8}{c^6\beta^3}, \quad d_{20} = -\frac{c}{\beta}, \quad d_{11} = -2, \quad d_{30} = -2 + \frac{2}{\beta^2}, \\ &d_{21} = -\frac{4}{c\beta^2} + \frac{2}{c\beta}, \quad d_{12} = -\frac{8}{c^2\beta}, \qquad d_{03} = -\frac{4}{c^3\beta^2}, \quad d_{40} = -\frac{6}{c\beta} - \frac{4}{c\beta^3}, \\ &d_{31} = \frac{4}{c^2\beta^2} + \frac{16}{c^2\beta^3} - \frac{16}{c^2\beta}, \quad d_{22} = \frac{12}{c^3\beta^2} - \frac{16}{c^3\beta^3}, \quad d_{13} = \frac{8}{c^4\beta^3} - \frac{24}{c^4\beta^2}, \quad d_{04} = -\frac{16}{c^5\beta^3}, \end{aligned}$$

并且，$M_3(x_1, y_1)$、$N_3(x_1, y_1)$ 是关于 x_1 和 y_1 的至少五阶项。

令 $(x_2, y_2) = (x_1, y_1 + x_1^2 + \frac{2}{c\beta}x_1y_1 + M_4(x_2, y_2))$，那么 (5) 可写为以下形式

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = y_2, \\ \dot{y}_2 = e_{20}x_2^2 + e_{02}y_2^2 + e_{21}x_2^2y_2 + e_{12}x_2y_2^2 + e_{03}y_2^3 \\ \qquad +e_{40}x_2^4 + e_{31}x_2^3y_2 + e_{22}x_2^2y_2^2 + e_{13}x_2y_2^3 + e_{04}y_2^4 + N_4(x_2, y_2), \end{cases} \tag{6}$$

其中

$$\begin{aligned} &e_{20} = -\frac{c}{\beta}, \quad e_{02} = \frac{2}{c\beta}, \quad e_{21} = -\frac{4}{c\beta^2}, \quad e_{12} = -\frac{4}{c^2\beta^2} - \frac{8}{c^2\beta}, \\ &e_{03} = -\frac{4}{c^3\beta^2}, \quad e_{40} = \frac{4}{c\beta^3}, \quad e_{31} = \frac{8}{c^2\beta^2} + \frac{16}{c^3\beta^3} + \frac{16}{c^2\beta^3}, \quad e_{22} = -\frac{8}{c^3\beta^3} + \frac{40}{c^3\beta^2} - \frac{16}{c^4\beta^4}, \\ &e_{13} = -\frac{24}{c^4\beta^2} + \frac{24}{c^4\beta^3}, \quad e_{04} = -\frac{16}{c^5\beta^3}, \end{aligned}$$

且 $M_4(x_2, y_2)$、$N_4(x_2, y_2)$ 是关于 x_2 和 y_2 的至少五阶项。

为消去 (6) 中的 y_2- 项，对系统 (6) 作如下变换 [14]

$$\begin{cases} x_3 = x_2 - \frac{e_{02}}{2}x_2^2 - \frac{e_{21}}{3e_{20}}x_2y_2 - \frac{e_{12}-e_{02}^2}{6}x_2^3 - \frac{e_{03}e_{20}-e_{02}e_{21}}{2e_{20}}x_2^2y_2 \\ \quad -\frac{9e_{02}^3e_{20}-27e_{12}e_{02}e_{20}+18e_{20}e_{22}-32e_{21}^2}{216e_{20}}x_2^4 - \frac{7e_{02}^2e_{21}-12e_{02}e_{03}e_{20}-4e_{12}e_{21}+3e_{13}e_{20}}{18e_{20}}x_2^3y_2 \\ \quad +\frac{e_{03}e_{21}-e_{04}e_{20}}{2e_{20}}x_2^2y_2^2, \\ y_3 = y_2 - e_{02}x_2y_2 - \frac{e_{21}}{3e_{20}}y_2^2 - \frac{e_{21}}{3}x_2^3 - \frac{e_{12}-e_{02}^2}{2}x_2^2y_2 - \frac{-2e_{02}e_{21}+3e_{03}e_{20}}{3e_{20}}x_2y_2^2 \\ \quad -\frac{-3e_{02}e_{20}e_{21}+3e_{03}e_{20}^2+2e_{21}e_{30}}{6e_{20}}x_2^4 - \frac{9e_{02}^3e_{20}-27e_{02}e_{12}e_{20}+18e_{20}e_{22}-14e_{21}^2}{54e_{20}}x_2^3y_2 \\ \quad -\frac{4e_{20}^2e_{21}-9e_{02}e_{03}e_{20}-2e_{12}e_{21}+3e_{13}e_{20}}{6e_{20}}x_2^2y_2^2 - \frac{-2e_{03}e_{21}+3e_{04}e_{20}}{3e_{20}}x_2y_2^3, \end{cases}$$

于是得到

$$\begin{cases} \dot{x}_3 = y_3, \\ \dot{y}_3 = f_{20}x_3^2 + f_{40}x_3^4 + f_{31}x_3^3y_3 + N_5(x_3, y_3), \end{cases} \tag{7}$$

其中

$$f_{20} = -\frac{c}{\beta}, \quad f_{40} = \frac{11}{3c\beta^3} - \frac{4}{3c\beta^2}, \quad f_{31} = -\frac{4}{c^2\beta^3} + \frac{16}{c^3\beta^3} + \frac{8}{c^2\beta^2},$$

以及 $M_5(x_3, y_3)$、$N_5(x_3, y_3)$ 是关于 x_3 和 y_3 的至少五阶项。

由于 $f_{20} = -\frac{c}{\beta} \neq 0$，通过变量变换 $(x_4, y_4) = \left(-x_3, -\frac{1}{\sqrt{-f_{20}}}y_3\right)$，$\tau = \sqrt{-f_{20}}t$，我们可以将系统 (7) 化为

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x_4}{\mathrm{d}\tau} = y_4, \\ \frac{\mathrm{d}y_4}{\mathrm{d}\tau} = x_4^2 + \left(\frac{4}{3c^2\beta} - \frac{11}{3c^2\beta^2}\right)x_4^3 - \frac{f_{31}}{\sqrt{-f_{20}}}x_4^3y_4 + N_6(x_4, y_4), \end{cases} \tag{8}$$

其中 $N_6(x_4, y_4)$ 是关于 x_4 和 y_4 的至少五阶项。

由 [15], 中的命题 5.3 可知，系统 (6) 等价于系统

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x_4}{\mathrm{d}\tau} = y_4, \\ \frac{\mathrm{d}y_4}{\mathrm{d}\tau} = x_4^2 + Ex_4^3y_4 + N_6(x_4, y_4), \end{cases}$$

4 16 8</style}其中 $E = -\frac{f_{31}}{\sqrt{-f_{20}}} = \frac{c^2\beta^3 - c^3\beta^3 - c^2\beta^2}{\sqrt{-f_{20}}} \neq 0$。因此， E_1 是一个三余维尖点。这证明了 (*a*)。

接下来，假设 $d \neq c$。 J_{E_1} 的特征值为 $\lambda_3 = 0$ 和 $\lambda_4 = c - d$。应用变换

$$U = \frac{u}{\beta} + \frac{v}{\beta d}, V = u + v, \tau = (d - c)\, t,$$

则系统 (3) 变为

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{3}{\beta^2(d-c)^2}u^2 - \frac{4d+2}{\beta^2(d-c)^2 d}uv + \frac{1-4d}{\beta^2 d^2(d-c)^2}v^2 + M_7(u,v), \\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau} = v - \frac{2+d}{(d-c)^2\beta^2}u^2 - \frac{6}{\beta^2(d-c)^2}uv + \frac{2-5d}{\beta^2 d^2(d-c)^2}v^2 + N_7(u,v), \end{cases}$$

而 $M_7(u,\ v)$ $N_7(u,\ v)$ 是关于 u 和 v的至少三阶项。 u^2 的系数为 $-\frac{3}{\beta^2(d-c)_2} < 0$。根据 [16], 中的定理 7.1，原点是一个鞍结点。考虑时间变量 τ，若 $d - c < 0$，则 E_1 是一个具有稳定抛物扇区的鞍结点；若 $d - c > 0$，则E_1 是一个具有不稳定抛物扇区的鞍结点。

□

若 $\Delta > 0$，则 $h(u)$ 有两个平衡点。最后，我们讨论正平衡点E_2 和 E_3的稳定性。

定理 3. 若 $\Delta > 0$，则系统 *(2)* 的正平衡点 E_3 始终是一个鞍点，而正平衡点 E_2 是

(a) 当 $d < c$ 时为源；*(b)* 当 $d = c$ 时为中心或细焦点；*(c)* 当 $d > c$ 时为汇。

证明。 系统 (2) 在平衡点 E_2 和 E_3 处的雅可比矩阵为

$$J_{E_2} = \begin{pmatrix} c & -\frac{c}{\beta} \\ d\beta + \sqrt{\Delta} & -d \end{pmatrix}, \qquad J_{E_3} = \begin{pmatrix} c & -\frac{c}{\beta} \\ d\beta - \sqrt{\Delta} & -d \end{pmatrix}.$$

那么我们可以得到

$$detJ_{E_2} = \frac{c\sqrt{d^2\beta^2 - 4b}}{\beta} > 0$$

and

$$detJ_{E_3} = -\frac{c\sqrt{d^2\beta^2 - 4b}}{\beta} < 0.$$

因此， E_3 始终是一个鞍点。正平衡点 E_2 由迹trJ_{E_2}的符号决定。具体来说，当 $trJ_{E_2} > 0$时，即 $d < c$, E_2 是一个源；当 $trJ_{E_2} < 0$时，即 $d > c$， E_2 是一个汇。当 $trJ_{E_2} = 0$时，即 $d = c$，它是一个中心或细焦点。 □

3 分岔

3.1 鞍结分岔

由定理1可知，系统 (2) 的平衡点随参数 b 的变化而变化。当 $b > \frac{d^2\beta^2}{4}$ 时，不存在正平衡点。当 $b = \frac{d^2\beta^2}{4}$ 时，存在一个正平衡点。当 $b < \frac{d^2\beta^2}{4}$ 时，存在两个正平衡点。这表明 E_1 附近可能发生鞍结分岔。

定理4. 当 $b = b_{SN}$ 时，系统 *(2)* 在 E_1 附近发生鞍结分岔，阈值为 $b_{SN} = \frac{d^2\beta^2}{4}$ 。

证明. 根据Sotomayor定理 [17], ，我们需要验证在 $b \equiv b_{SN}$ 处发生鞍结分岔的横截条件。系统 (2) 在平衡点 E_1 处的雅可比矩阵为

$$J_{E_1} = \begin{pmatrix} c & -\frac{c}{\beta} \\ d\beta & -d \end{pmatrix}.$$

由于 $det(J_{E_1}) = \lambda_5\lambda_6 = 0$， J_{E_1} 有一个零特征值 λ_5。令 V 和 W 分别表示J_{E_1} 和$J_{E_1}^T$ 关于特征值 λ_5的特征向量。

经简单计算可得

$$V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix}$$

and

$$W = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{c}{d\beta} \end{pmatrix}.$$

此外，我们可以得到

$$F_b(E_1, b_{SN}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$D^2F(E_1, b_{SN})(V, V) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}V_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}V_1V_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}V_2^2 \\ \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}V_1^2 + 2\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}V_1V_2 + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}V_2^2 \end{pmatrix}_{(E_1, b_{SN})} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

显然，当 $b \equiv b_{SN}$、 V 和 W 满足横截条件时

$$W^T F_b(E_1, b_{SN}) = -\frac{c}{d\beta} \neq 0$$

and

$$W^T \left[D^2F(E_1, b_{SN})(V, V)\right] = -\frac{2c}{d\beta} \neq 0.$$

因此，当参数 b 从 b_{SN} 的一侧变化到另一侧时，系统 (2) 在平衡点 E_1 处经历鞍结分岔。

□

3.2 Hopf分岔

由定理 3 可知， E_2 的正平衡点的稳定性会随着 $tr(E_2)$的符号变化而改变，这可能会导致 E_2 附近的 Hopf分岔。

根据 Hopf 分岔定理，我们需要验证横截条件。由$\mathrm{d}tr(J_{E_2}\Big|_{d=c}=-1\neq 0)\mathrm{d}$可知，系统 (2) 在 E_2 附近发生 Hopf 分岔。此外，我们需要给出第一 Lyapunov 系数，并确定 E_2 附近极限环的稳定性。

现在将 $E_2(u_2,v_2)$ 通过 $(\hat{}u,\hat{}v)=(u-u_2,v-v_2)$ 变换为 (0,0)，并得到如下形式

$$\begin{cases}\dot{\hat{u}}=c\hat{u}-\frac{c}{\beta}\hat{v}+\frac{c}{u_2}\hat{u}^2-\frac{2c}{\beta u_2}\hat{u}\hat{v}+\frac{c}{\beta^2u_2}\hat{v}^2+\hat{M}(\hat{u},\hat{v}),\\ \dot{\hat{v}}=2u_2\hat{u}-\hat{v}+\hat{u}^2+\hat{N}(\hat{u},\hat{v}),\end{cases}\tag{9}$$

其中， $M(\hat{}u,\hat{}v)$ 和 $N(\hat{}u,\hat{}v)$ 是关于 $\hat{}u$ 和 $\hat{}v$ 的至少三阶项。

通过另一变换 $\hat{}x=-\hat{}u,\hat{}y=-\hat{}u,\hat{}y=\frac{1}{\sqrt{D}}(c\hat{}u-\frac{c}{\beta}\hat{}v)$和 $\mathrm{d}\tau=\sqrt{D}\mathrm{d}t$，其中 $D=\frac{\sqrt{(d\beta)^2-4b}}{\beta}$，系统 (9) 变为

$$\begin{cases}\dot{\hat{x}}=-\dot{\hat{y}}+f(\hat{x},\hat{y}),\\ \dot{\hat{y}}=\dot{\hat{x}}+g(\hat{x},\hat{y}),\end{cases}$$

其中

$$f(\hat{x},\hat{y})=-\frac{\sqrt{D}}{u_2}\hat{y}^2+\hat{M}_1(\hat{u},\hat{v}),\quad g(\hat{x},\hat{y})=-\frac{1}{D\beta}\hat{x}^2+\frac{\hat{y}^2}{u_2}+\hat{N}_1(\hat{u},\hat{v}),$$

其中 $M_1(\hat{}u、\hat{}v)$ 和 $N_1(\hat{}u、\hat{}v)$ 也是关于 $\hat{}u$ 和 $\hat{}v$ 的至少三阶项

利用 [16], 中描述的形式级数方法，我们可以计算出一阶 Lyapunov 数为

$$\sigma=\frac{\sqrt{D}}{4u_2^2}<0.$$

于是可得以下定理。

定理 5. 当 $\Delta>0$ 和 $d=c$时，系统 *(2)* 在该平衡点处经历超临界 *Hopf*分岔，并在 E_2周围出现稳定极限环。

3.3 Bogdanov-Takens分岔

当 $u=\frac{v}{\beta}$ 和 $d=c$ 时，由定理 2(a) 可知，系统 (2) 的唯一正平衡点 E_1 是一个三余维尖点。Bogdanov-Takens分岔可能发生在 E_1 附近。现在我们选取 β、 b 和 d 作为分岔参数，在参数扰动下可能发生 Bogdan-Takens分岔。

定理 6。 当 $u = \frac{v}{\beta}$且 $d = c$ 时，参数 (β, b, d) 在$(\beta_{BT}, b_{BT}, d_{BT})$ 的小邻域内变化，其中 β_{BT}、b_{BT} 和 d_{BT}是 *Bogdanov-Takens*分岔的阈值。然后，系统 *(2)* 在 E_1 的小邻域内经历余维*3*的 *Bogdanov-Takens*分岔。

证明。 当 $u = \frac{v}{\beta}$ 和 $d = c$时，根据定理 2(a)， E_1 是系统 (2)的一个三余维尖点。在 β_{BT}、b_{BT}和 d_{BT}处对参数 β、 b和 d进行扰动，并记 (β, b, d) =$(\beta_{BT}+\epsilon_1, b_{BT}+\epsilon_2, d_{BT}+\epsilon_3)$，其中 ϵ =$(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$是原点 (0,0,0)附近小邻域内的参数向量。于是，系统 (2)变为

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = c(\frac{(\beta+\epsilon_1)u^2}{v} - u), \\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = b + \epsilon_2 + u^2 - (d+\epsilon_3)v. \end{cases} \tag{10}$$

接着，我们通过 (x, y) =$(u - u_1, v - v_1)$将 $E_1(u_1, v_1)$ =$(\frac{c\beta}{2}, \frac{c\beta^2}{2})$平移到原点。系统 (10)变为

$$\begin{cases} \dot{x} = \bar{a}_{00} + \bar{a}_{10}x + \bar{a}_{01}y + \bar{a}_{20}x^2 + \bar{a}_{11}xy + \bar{a}_{02}y^2 + \bar{a}_{21}x^2y + \bar{a}_{12}xy^2 \\ \qquad +\bar{a}_{03}y^3 + \bar{a}_{22}x^2y^2 + \bar{a}_{13}xy^3 + \bar{a}_{04}y^4 + O(|x, y|^4), \\ \dot{y} = \bar{b}_{00} + \bar{b}_{10}x + \bar{b}_{01}y + \bar{b}_{20}x^2 + O(|x, y|^5), \end{cases} \tag{11}$$

其中

$$\begin{aligned} &\bar{a}_{00} = \frac{c^2\epsilon_1}{2}, \quad \bar{a}_{10} = c(\frac{2(\beta+\epsilon_1)}{\beta} - 1), \quad \bar{a}_{01} = -\frac{c(\beta+\epsilon_1)}{\beta^2}, \quad \bar{a}_{20} = \frac{2(\beta+\epsilon_1)}{\beta^2}, \\ &\bar{a}_{11} = -\frac{4(\beta+\epsilon_1)}{\beta^3}, \quad \bar{a}_{02} = \frac{2(\beta+\epsilon_1)}{\beta^4}, \quad \bar{a}_{21} = -\frac{4(\beta+\epsilon_1)}{c\beta^4}, \quad \bar{a}_{12} = \frac{8(\beta+\epsilon_1)}{c\beta^5}, \\ &\bar{a}_{03} = -\frac{4(\beta+\epsilon_1)}{c\beta^6}, \quad \bar{a}_{22} = \frac{8(\beta+\epsilon_1)}{c^2\beta^6}, \quad \bar{a}_{13} = -\frac{16(\beta+\epsilon_1)}{c^2\beta^7}, \quad \bar{a}_{04} = \frac{8(\beta+\epsilon_1)}{c^2\beta^8}, \\ &\bar{b}_{00} = b + \epsilon_2 - \frac{1}{4}c^2\beta^2 - \frac{c\beta^2\epsilon_3}{2}, \quad \bar{b}_{10} = c\beta, \quad \bar{b}_{01} = -d - \epsilon_3, \qquad \bar{b}_{20} = 1. \end{aligned}$$

接着，我们通过变换 (x, y) =$(x_1 - \frac{2}{c\beta^2}x_1y_1, y_1)$将系统 (11)改写为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \bar{c}_{00} + \bar{c}_{10}x_1 + \bar{c}_{01}y_1 + \bar{c}_{20}x_1^2 + \bar{c}_{11}x_1y_1 + O(|x, y|^4), \\ \dot{y}_1 = \bar{d}_{00} + \bar{d}_{10}x_1 + \bar{d}_{01}y_1 + \bar{d}_{20}x_1^2 + \bar{d}_{11}x_1y_1 + O(|x, y|^4), \end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned} &\bar{c}_{00} = \frac{c^2\epsilon_1}{2} \quad \bar{c}_{10} = \frac{2}{c\beta^2}\bar{b}_{00} + c(\frac{2(\beta+\epsilon_1)}{\beta} - 1), \quad \bar{c}_{01} = -\frac{c}{\beta}, \\ &\bar{c}_{20} = \frac{4}{\beta} + \frac{2\epsilon_1}{\beta^2}, \quad \bar{c}_{11} = -\frac{2(c+\epsilon_3)}{c\beta^2} - \frac{4(\beta+\epsilon_1)}{\beta^3}, \quad \bar{d}_{00} = \bar{b}_{00}, \\ &\bar{d}_{10} = c\beta, \quad \bar{d}_{01} = -c - \epsilon_3, \qquad \bar{d}_{20} = 1, \quad \bar{d}_{11} = -\frac{2}{\beta}. \end{aligned}$$

此外，我们执行变换 $(x_2, y_2) = (x_1, \dot{x}_1)$，得到

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = y_2, \\ \dot{y}_2 = \bar{e}_{00} + \bar{e}_{10}x_2 + \bar{e}_{01}y_2 + \bar{e}_{20}x_2^2 + \bar{e}_{11}x_2y_2 + \bar{e}_{02}y_2^2 + \bar{e}_{30}x_2^3 + \bar{e}_{21}x_2^2y_2 + \bar{e}_{12}x_2y_2^2 \\ \quad +\bar{e}_{03}y_2^3 + \bar{e}_{40}x_2^4 + \bar{e}_{31}x_2^3y_2 + \bar{e}_{22}x_2^2y_2^2 + \bar{e}_{13}x_2y_2^3 + \bar{e}_{04}y_2^4 + O(|x,y|^4), \end{cases} \tag{12}$$

其中

$$\bar{e}_{00} = \bar{c}_{01}\bar{d}_{00} - \bar{c}_{00}\bar{d}_{01}, \quad \bar{e}_{10} = \bar{c}_{11}\bar{d}_{00} + \bar{c}_{01}\bar{d}_{10} - \bar{c}_{00}\bar{d}_{11} - \bar{c}_{10}\bar{d}_{01}, \quad \bar{e}_{01} = \bar{c}_{10} + \bar{d}_{01} - \frac{\bar{c}_{00}\bar{c}_{11}}{\bar{c}_{01}},$$

$$\bar{e}_{20} = \bar{c}_{11}\bar{d}_{10} + \bar{c}_{01}\bar{d}_{20} - \bar{c}_{10}\bar{d}_{11} - \bar{c}_{02}\bar{d}_{01}, \qquad \bar{e}_{11} = 2\bar{c}_{20} - \frac{\bar{c}_{10}\bar{c}_{11}}{\bar{c}_{01}} + \frac{\bar{c}_{00}\bar{c}_{11}^2}{\bar{c}_{01}^2} + \bar{d}_{11}, \quad \bar{e}_{02} = \frac{\bar{c}_{11}}{\bar{c}_{01}},$$

$$\bar{e}_{30} = \bar{c}_{11}\bar{d}_{20} - \bar{c}_{02}\bar{d}_{11}, \quad \bar{e}_{21} = -\frac{\bar{c}_{11}\bar{c}_{02}}{\bar{c}_{01}} + \frac{\bar{c}_{11}^2\bar{c}_{10}}{\bar{c}_{01}^2} - \frac{\bar{c}_{00}\bar{c}_{11}^3}{\bar{c}_{01}^3}, \quad \bar{e}_{12} = -\frac{\bar{c}_{11}^2}{\bar{c}_{01}^2}, \quad \bar{e}_{03} = 0,$$

$$\bar{e}_{40} = \frac{\bar{c}_{00}\bar{c}_{11}^4\bar{d}_{01}}{\bar{c}_{01}^4}, \quad \bar{e}_{31} = \frac{\bar{c}_{11}^2\bar{c}_{02}}{\bar{c}_{01}^2} - \frac{\bar{c}_{10}\bar{c}_{11}^3}{\bar{c}_{01}^3} + \frac{\bar{c}_{00}\bar{c}_{11}^4}{\bar{c}_{01}^4}, \quad \bar{e}_{22} = \frac{\bar{c}_{11}^3}{\bar{c}_{01}^3}, \quad \bar{e}_{13} = 0, \quad \bar{e}_{04} = 0.$$

为验证 Bogdanov-Takens分岔发生在平衡点 E_1处，我们需要得到系统(9)的通用开折。因此，我们需要消除 y_2^2、 x^3、 x^2y、 xy^2、 y^3 和 x^4 项。接下来，我们通过与 [18]中类似的过程对系统 (12) 进行变换。

(A) 为消去 y_2^2 项，取变换 $(x_2, y_2) = (u_1 + \frac{c_{02}}{2}u_1^2, v_1 + c_{02}u_1v_1)$，则系统 (12) 具有以下形式

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} = v_1, \\ \frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} = \bar{f}_{00} + \bar{f}_{10}u_1 + \bar{f}_{01}v_1 + \bar{f}_{20}u_1^2 + \bar{f}_{11}u_1v_1 + \bar{f}_{30}u_1^3 + \bar{f}_{21}u_1^2v_1 + \bar{f}_{12}u_1v_1^2 \\ \quad +\bar{f}_{40}u_1^4 + \bar{f}_{31}u_1^3v_1 + \bar{f}_{22}u_1^2v_1^2 + O(|u_1,v_1|^5), \end{cases} \tag{13}$$

其中

$$\bar{f}_{00} = \bar{e}_{00}, \quad \bar{f}_{10} = \bar{e}_{10} - \bar{e}_{00}\bar{e}_{02}, \quad \bar{f}_{01} = \bar{e}_{01}, \quad \bar{f}_{20} = \bar{e}_{20} - \frac{\bar{e}_{10}\bar{e}_{02}}{2} + \bar{e}_{00}\bar{e}_{02}^2,$$

$$\bar{f}_{11} = \bar{e}_{11}, \quad \bar{f}_{30} = \bar{e}_{30} + \frac{\bar{e}_{10}\bar{e}_{02}^2}{2} - \bar{e}_{00}\bar{e}_{02}^3, \quad \bar{f}_{21} = \bar{e}_{21} + \frac{\bar{e}_{11}\bar{e}_{02}}{2},$$

$$\bar{f}_{40} = \frac{\bar{e}_{20}\bar{e}_{02}^2}{4} - \frac{\bar{e}_{10}\bar{e}_{02}^3}{2} + \bar{e}_{00}\bar{e}_{02}^4 + \frac{\bar{e}_{02}\bar{e}_{30}}{2}, \quad \bar{f}_{31} = \bar{e}_{31} + \bar{e}_{02}\bar{e}_{21}, \quad \bar{f}_{22} = \bar{e}_{22} + \frac{3\bar{e}_{02}\bar{e}_{12}}{2} - \bar{e}_{02}^3.$$

(B) 为消去 $u_1v_1^2$ 项，取变换 $(u_1, v_1) = (u_2 + \frac{\bar{f}_{12}}{2}u_2^3, v_2 + \frac{d_{12}}{6}u_2^2v_2)$，则 (13) 约化为

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} = v_2, \\ \frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} = \bar{g}_{00} + \bar{g}_{10}u_2 + \bar{g}_{01}v_2 + \bar{g}_{20}u_2^2 + \bar{g}_{11}u_2v_2 + \bar{g}_{30}u_2^3 + \bar{g}_{21}u_2^2v_2 \\ \quad +\bar{g}_{40}u_2^4 + \bar{g}_{31}u_2^3v_2 + \bar{g}_{22}u_2^2v_2^2 + O(|u_2,v_2|^5), \end{cases} \tag{14}$$

其中

$$\bar{g}_{00}=\bar{f}_{00},\quad \bar{g}_{10}=\bar{f}_{10},\quad \bar{g}_{01}=\bar{f}_{01},\quad \bar{g}_{20}=\bar{f}_{20}-\frac{\bar{f}_{00}\bar{f}_{12}}{2}+\frac{\bar{f}_{10}\bar{f}_{12}}{6},$$
$$\bar{g}_{11}=\bar{f}_{11},\quad \bar{g}_{30}=\bar{f}_{30}-\frac{\bar{f}_{10}\bar{f}_{12}}{2}+\frac{\bar{f}_{20}\bar{f}_{12}}{3},\quad \bar{g}_{21}=\bar{f}_{21}+\frac{\bar{f}_{11}\bar{f}_{12}}{6},$$
$$\bar{g}_{40}=\bar{f}_{40}-\frac{\bar{d}_{20}\bar{d}_{12}}{6}+\frac{\bar{f}_{00}\bar{f}_{12}^2}{4},\quad \bar{g}_{31}=\bar{f}_{31}+\frac{\bar{f}_{11}\bar{f}_{12}}{6},\quad \bar{g}_{22}=\bar{f}_{22}.$$

（C）注意到 $\bar{g}_{20}=-\frac{2b}{c\beta^3}-\frac{9c}{2\beta}+O(\epsilon)\neq 0$。为消除 u_2^3和 u_2^4项，我们通过 $(u_2,\ v_2)=(u_3-\frac{\bar{g}_{30}}{4\bar{g}_{20}}u_3^2+\frac{15\bar{g}_{30}^2-16\bar{g}_{20}\bar{g}_{40}}{80\bar{g}_{20}^2}u_3^3,\ v_3)$ 对系统（14）进行变换，并应用缩放变换 $\mathrm{d}\tau=(1+\frac{\bar{g}_{30}}{2\bar{g}_{20}}u_3+\frac{48\bar{g}_{20}\bar{g}_{40}-25\bar{g}_{30}^2}{80\bar{g}_{20}}u_3^2+\frac{48\bar{g}_{20}\bar{g}_{30}\bar{g}_{40}-35\bar{g}_{30}^3}{80\bar{g}_{20}^3}u_3^3)\mathrm{d}t$，得到以下系统

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}u_3}{\mathrm{d}\tau}=v_3,\\ \frac{\mathrm{d}v_3}{\mathrm{d}\tau}=\bar{i}_{00}+\bar{i}_{10}u_3+\bar{i}_{01}v_3+\bar{i}_{20}u_3^2+\bar{i}_{11}u_3v_2+\bar{i}_{21}u_3^2v_3+\bar{i}_{12}u_3v_3^2\\ \qquad\quad +\bar{i}_{40}u_3^4+\bar{i}_{31}u_3^3v_3+\bar{i}_{22}u_3^2v_3^2+R(u_3,v_3,\epsilon),\end{cases}\tag{15}$$

其中

$$\bar{i}_{00}=\bar{g}_{00},\quad \bar{i}_{10}=\bar{g}_{10}-\frac{\bar{g}_{00}\bar{g}_{30}}{2\bar{g}_{20}},\quad \bar{i}_{01}=\bar{g}_{01},$$
$$\bar{i}_{20}=\bar{g}_{20}+\frac{45\bar{g}_{00}\bar{g}_{30}^2-60\bar{g}_{10}\bar{g}_{20}\bar{g}_{30}-48\bar{g}_{00}\bar{g}_{20}\bar{g}_{40}}{80\bar{g}_{20}^2},$$
$$\bar{i}_{11}=\bar{g}_{11}-\frac{\bar{g}_{01}\bar{g}_{30}}{2\bar{g}_{20}},\quad \bar{i}_{30}=\frac{\bar{g}_{10}(35\bar{g}_{30}^2-32\bar{g}_{20}\bar{g}_{40})}{4\bar{g}_{20}^2},$$
$$\bar{i}_{21}=\bar{g}_{21}-\frac{60\bar{g}_{11}\bar{g}_{20}\bar{g}_{30}-45\bar{g}_{01}\bar{g}_{30}^2+48\bar{g}_{01}\bar{g}_{20}\bar{g}_{40}}{80\bar{g}_{20}^2},$$
$$\bar{i}_{40}=\frac{g10g30g40}{4g20^2}-\frac{15g10g30^3}{64g20^3},\quad \bar{i}_{31}=\bar{g}_{31}+\frac{7\bar{g}_{11}\bar{g}_{30}^2}{8\bar{g}_{20}^2}-\frac{5\bar{g}_{30}\bar{g}_{21}+4\bar{g}_{11}\bar{g}_{40}}{5\bar{g}_{20}},$$
$$R(u_3,v_3,\epsilon)=v_3^2O(|u_3,v_3|^2)+O(|u_3,v_3|^5)+O(\epsilon)(O(v_3^2)+O(|u_3,v_3|^3))+O(\epsilon^2)O(|u_3,v_3|).$$

（D）由于

$$\begin{aligned}\bar{i}_{20}&=-\frac{9c}{2\beta}-\frac{2b}{c\beta^3}+\frac{2527200c^3}{\beta^4(\frac{c^3\beta}{4}-\frac{cb}{\beta})^2}+\frac{62104320b^2}{c\beta^7(\frac{c^3\beta}{4}-\frac{cb}{\beta})^2}\\ &\quad-\frac{23034240cb}{\beta^5(\frac{c^3\beta}{4}-\frac{cb}{\beta})^2}-\frac{416102406b^3}{c^3\beta^9(\frac{c^3\beta}{4}-\frac{cb}{\beta})^2}+O(\epsilon)\neq 0,\end{aligned}$$

通过变换

$$(u_3,v_3)=(u_4,v_4+\frac{\bar{i}_{21}}{3\bar{i}_{20}}v_4^2+\frac{\bar{i}_{21}^2}{36\bar{i}_{20}^2}v_4^3),\mathrm{d}t=(1+\frac{\bar{i}_{21}}{3\bar{i}_{20}}v_4+\frac{\bar{i}_{21}^2}{36\bar{i}_{20}^2}v_4^2)\mathrm{d}\tau,$$

我们可以得到以下形式

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}u_4}{\mathrm{d}\tau}=v_4,\\ \frac{\mathrm{d}v_4}{\mathrm{d}\tau}=\bar{j}_{00}+\bar{j}_{10}u_4+\bar{j}_{01}v_4+\bar{j}_{20}u_4^2+\bar{j}_{11}u_4v_4+\bar{j}_{31}u_4^3v_4+R(u_4,v_4,\epsilon),\end{cases}\tag{16}$$

其中

$$\bar{j}_{00}=\bar{i}_{00},\quad \bar{j}_{10}=\bar{i}_{10},\quad \bar{j}_{01}=\bar{i}_{01}-\frac{\bar{i}_{00}\bar{i}_{21}}{\bar{i}_{20}},$$
$$\bar{j}_{20}=\bar{i}_{20},\quad \bar{j}_{11}=\bar{i}_{11}-\frac{\bar{i}_{10}\bar{i}_{21}}{\bar{i}_{20}},\quad \bar{j}_{31}=\bar{i}_{31}-\frac{\bar{i}_{21}\bar{i}_{30}}{\bar{i}_{20}}.$$

此外，$R(u_4,v_4,\epsilon)$ 与 $R(u_3,v_3,\epsilon)$ 具有相同的性质。

(E) 我们借助 MAPLE 得到 j_{20} 和 j_{31}

$$\bar{j}_{20}=-\frac{2b}{c\beta^3}-\frac{9c}{2\beta}+\frac{2527200c^2}{\beta^3(\frac{\beta c^3}{4}-\frac{cb}{\beta})^2}+\frac{62104320b^2}{c\beta^7(\frac{\beta c^3}{4}-\frac{cb}{\beta})^2}-\frac{23034240cb}{\beta^5(\frac{\beta c^3}{4}-\frac{cb}{\beta})^2}-\frac{41610240b^3}{c^3\beta^9(\frac{\beta c^3}{4}-\frac{cb}{\beta})^2}+O(\epsilon)$$
$$\neq 0,$$
$$\bar{j}_{31}=-\frac{151200b^3}{\beta^{11}c^6\left(\frac{2b\beta^3}{c}+\frac{9\beta c}{2}\right)^2}+\frac{128520b^2}{\beta^9c^4\left(\frac{2b\beta^3}{c}+\frac{9\beta c}{2}\right)^2}+\frac{71136b^2}{5\beta^8c^5\left(\frac{2b}{\beta^3c}+\frac{9c}{2\beta}\right)}-(\frac{57816b^3}{5\beta^{10}c^5\left(\frac{2b\beta^3}{c}+\frac{9\beta c}{2}\right)^2}$$
$$-\frac{109278b^2}{5\beta^8c^3\left(\frac{2b\beta^3}{c}+\frac{9\beta c}{2}\right)^2}+\frac{36b}{\beta^4c^3}+\frac{44361b}{5\beta^6c\left(\frac{2b\beta^3}{c}+\frac{9\beta c}{2}\right)^2}-\frac{4131c}{4\beta^4\left(\frac{2b\beta^3}{c}+\frac{9\beta c}{2}\right)^2}+\frac{27}{\beta^2c})$$
$$\left(\frac{218976b^3}{\beta^{10}c^4\left(\frac{2b\beta^3}{c}+\frac{9\beta c}{2}\right)^2}-\frac{273048b^2}{\beta^8c^2\left(\frac{2b\beta^3}{c}+\frac{9\beta c}{2}\right)^2}+\frac{93456b}{\beta^6\left(\frac{2b\beta^3}{c}+\frac{9\beta c}{2}\right)^2}-\frac{9720c^2}{\beta^4\left(\frac{2b\beta^3}{c}+\frac{9\beta c}{2}\right)^2}\right)$$
$$(-\frac{32508b^3}{5\beta^9c^3\left(\frac{\beta c^3}{4}-\frac{bc}{\beta}\right)^2}+\frac{48519b^2}{5\beta^7c\left(\frac{\beta c^3}{4}-\frac{bc}{\beta}\right)^2}+\frac{32508b}{5\beta^8\left(\frac{\beta c^3}{4}-\frac{bc}{\beta}\right)^3}-\frac{35991bc}{5\beta^5\left(\frac{\beta c^3}{4}-\frac{bc}{\beta}\right)^2}$$
$$+\frac{3159c^3}{8\beta^3\left(\frac{\beta c^3}{4}-\frac{bc}{\beta}\right)^2}-\frac{2b}{\beta^3c}-\frac{9c}{2\beta})-\frac{72b}{\beta^5c^4}-\frac{36288b}{\beta^7c^2\left(\frac{2b\beta^3}{c}+\frac{9\beta c}{2}\right)^2}-\frac{13464b}{5\beta^6c^3\left(\frac{2b}{\beta^3c}+\frac{9c}{2\beta}\right)}$$
$$+\frac{3402}{\beta^5\left(\frac{2b\beta^3}{c}+\frac{9\beta c}{2}\right)^2}-\frac{432}{\beta^4c\left(\frac{2b}{\beta^3c}+\frac{9c}{2\beta}\right)}+\frac{18}{\beta^3c^2}+O(\epsilon)\neq 0.$$

现在，我们希望将 $\bar{j}_{20}$ 和 $\bar{j}_{31}$ 化为1，并注意到，u_5^2 和 $u_5^3v_5$ 的系数符号会随着 j_{20} 和 j_{31}的符号而改变。详情如下。

(i) 如果 $j_{20}>0, j_{31}>0$，则系统 (16) 经变换$(u_4,v_4)=(\bar{j}_{20}^{\frac{5}{2}}\bar{j}_{31}^{-\frac{5}{4}}u_5,\bar{j}_{20}^{\frac{5}{2}}\bar{j}_{31}^{-\frac{5}{4}}v_5)$ 和$\tau=\bar{j}_{20}^{-\frac{5}{2}}\bar{j}_{31}^{\frac{5}{4}}t$ 后变为以下形式。

$$\begin{cases}\dot{u_5}=v_5,\\ \dot{v_5}=\bar{k}_{00}+\bar{k}_{10}u_5+\bar{k}_{01}v_5+u_5^2+\bar{k}_{11}u_5v_5+u_5^3v_5+R(u_5,v_5,\epsilon),\end{cases}$$

其中

$$\bar{k}_{00}=\bar{j}_{00}\bar{j}_{20}^{-\frac{7}{5}}\bar{j}_{31}^{\frac{4}{5}},\quad \bar{k}_{10}=\bar{j}_{10}\bar{j}_{20}^{-\frac{6}{5}}\bar{j}_{31}^{\frac{2}{5}},\quad \bar{k}_{01}=\bar{j}_{01}\bar{j}_{20}^{-\frac{3}{5}}\bar{j}_{31}^{\frac{1}{5}},\quad \bar{k}_{11}=\bar{j}_{11}\bar{j}_{20}^{-\frac{2}{5}}\bar{j}_{31}^{-\frac{1}{5}}.$$

此外，$R(u_5,\ v_5,\ \epsilon)$ 与 $R(u_3,\ v_3,\ \epsilon)$ 具有相同的性质。

(ii) 如果 $j_{20}<0,\ j_{31}>0$ 或 $j_{20}>0,\ j_{31}<0$，则系统 (16) 通过变换 $(u_4,\ v_4)=(\bar{j}_{20}^{\frac{5}{4}}\bar{j}_{31}^{\frac{5}{3}}u_5,\ -\bar{j}_{20}^{\frac{5}{4}}\bar{j}_{31}^{\frac{5}{3}}v_5)$ 和 $\tau=-\bar{j}_{20}^{\frac{5}{4}}\bar{j}_{31}^{\frac{5}{3}}t$ 后变为以下形式。

$$\begin{cases}\dot{u_5}=v_5,\\ \dot{v_5}=\bar{k}_{00}+\bar{k}_{10}u_5+\bar{k}_{01}v_5+u_5^2+\bar{k}_{11}u_5v_5-u_5^3v_5+R(u_5,v_5,\epsilon),\end{cases}$$

其中

$$\bar{k}_{00}=\bar{j}_{00}\bar{j}_{20}^{-\frac{7}{5}}\bar{j}_{31}^{\frac{4}{5}},\quad \bar{k}_{10}=\bar{j}_{10}\bar{j}_{20}^{-\frac{6}{5}}\bar{j}_{31}^{\frac{2}{5}},\quad \bar{k}_{01}=-\bar{j}_{01}\bar{j}_{20}^{-\frac{3}{5}}\bar{j}_{31}^{\frac{1}{5}},\quad \bar{k}_{11}=-\bar{j}_{11}\bar{j}_{20}^{-\frac{2}{5}}\bar{j}_{31}^{-\frac{1}{5}}.$$

(iii) 如果 $j_{20}<0,\ j_{31}<0$，则系统 (16) 通过变换 $(u_4,\ v_4)=(-\bar{j}_{20}^{\frac{5}{4}}\bar{j}_{31}^{\frac{5}{3}}u_5,\ -\bar{j}_{20}^{\frac{5}{4}}\bar{j}_{31}^{\frac{5}{3}}v_5)$ 和 $\tau=\bar{j}_{20}^{\frac{5}{4}}\bar{j}_{31}^{\frac{5}{3}}t$ 后变为以下形式。

$$\begin{cases}\dot{u_5}=v_5,\\ \dot{v_5}=\bar{k}_{00}+\bar{k}_{10}u_5+\bar{k}_{01}v_5-u_5^2+\bar{k}_{11}u_5v_5-u_5^3v_5+R(u_5,v_5,\epsilon),\end{cases}$$

其中

$$\bar{k}_{00}=-\bar{j}_{00}\bar{j}_{20}^{-\frac{7}{5}}\bar{j}_{31}^{\frac{4}{5}},\quad \bar{k}_{10}=\bar{j}_{10}\bar{j}_{20}^{-\frac{6}{5}}\bar{j}_{31}^{\frac{2}{5}},\quad \bar{k}_{01}=\bar{j}_{01}\bar{j}_{20}^{-\frac{3}{5}}\bar{j}_{31}^{\frac{1}{5}},\quad \bar{k}_{11}=-\bar{j}_{11}\bar{j}_{20}^{-\frac{2}{5}}\bar{j}_{31}^{-\frac{1}{5}}.$$

(F) 最后，我们通过变换 $(u_6,v_6)=(u_5-\frac{\bar{k}_{10}}{2},v_5)$ 得到通用开折。

$$\begin{cases}\dot{u_6}=v_6,\\ \dot{v_6}=\bar{l}_1+\bar{l}_2v_6+\bar{l}_3u_6v_6+\bar{l}_4u_6^2+\bar{l}_5u_6^3v_6+R(u_6,v_6,\epsilon),\end{cases}\tag{17}$$

其中，$R(u_6,\ v_6,\ \epsilon)$ 与 $R(u_3,\ v_3,\ \epsilon)$ 具有相同的性质。(E) 中的三种情形分别对应三个结果。

(i)若 $j_{20}>0,\ j_{31}>0$，则系统 (17) 的系数为

$$\bar{l}_1=\bar{k}_{00}-\frac{1}{4}\bar{k}_{10}^2,\qquad \bar{l}_2=\bar{k}_{01}-\frac{1}{8}\bar{k}_{10}^3-\frac{1}{2}\bar{k}_{10}\bar{k}_{11},\qquad \bar{l}_3=\bar{k}_{11}+\frac{3}{4}\bar{k}_{10}^2,\qquad \bar{l}_4=1,\qquad \bar{l}_5=1.$$

(ii)若 $j_{20}<0,j_{31}>0$ 或 $j_{20}>0,j_{31}<0$，则系统 (17) 的系数为

$$\bar{l}_1=\bar{k}_{00}-\frac{1}{4}\bar{k}_{10}^2,\qquad \bar{l}_2=\bar{k}_{01}+\frac{1}{8}\bar{k}_{10}^3-\frac{1}{2}\bar{k}_{10}\bar{k}_{11},\qquad \bar{l}_3=\bar{k}_{11}-\frac{3}{4}\bar{k}_{10}^2,\qquad \bar{l}_4=1,\qquad \bar{l}_5=-1.$$

(iii)如果 $j_{20}<0,j_{31}<0$，那么系统（17）的系数为

$$\bar{l}_1=\bar{k}_{00}+\frac{1}{4}\bar{k}_{10}^2,\qquad \bar{l}_2=\bar{k}_{01}-\frac{1}{8}\bar{k}_{10}^3+\frac{1}{2}\bar{k}_{10}\bar{k}_{11},\qquad \bar{l}_3=\bar{k}_{11}-\frac{3}{4}\bar{k}_{10}^2,\qquad \bar{l}_4=-1,\qquad \bar{l}_5=-1.$$

然后，借助 MATLAB，我们可以得到

$$\left|\frac{\partial(\bar{l}_1,\bar{l}_2,\bar{l}_3)}{\partial(\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3)}\right|_{\epsilon_1=\epsilon_2=\epsilon_3=0}\neq 0$$

对于 (F) 中所有三种可能情况。因此，根据 [19, 20], 中的理论，系统 (2) 在 E_1 的一个小邻域内发生余维3的Bogdanov-Takens分岔。 □

系统 (17) 的分岔图可描述如下。若 $l_1 < 0$，则不存在平衡点；若 $l_1 = 0$，则在原点 (0,0) 的一个小邻域内存在一个鞍结分岔平面；若 $l_1 > 0$，则系统有两个平衡点，一个是鞍点，另一个是非鞍点。分岔图中 $\mathbb{R}^3$ 的其余曲面呈圆锥形，从 (l_1, l_2, l_3) =(0,0,0) 发出，这可以通过绘制其与半球面的交线来证明

$$S = \left\{(l_1, l_2, l_3) | l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = \rho^2, l_1 \geq 0, \rho > 0 \text{ sufficiently small}\right\}.$$

现在，我们将轨迹投影到 $l_2 l_3$平面上，以便清晰地观察。

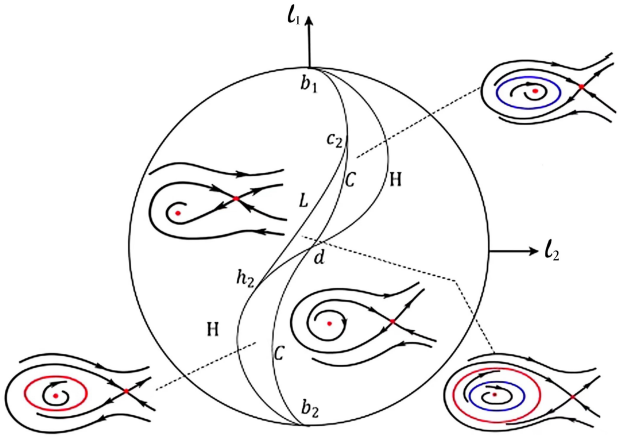


图1：系统（17）在 S上的分岔图。

下面基于上述讨论总结系统（17）中的分岔。图1包含Hopf分岔曲线、同宿分岔曲线和鞍结分岔曲线，分别由 H，C和 ∂S表示，其中 ∂S 是 S的边界。曲线 H 和 C 分别在点 b_1 和 b_2处与 S 的边界具有一阶接触。曲线 L 在点 c_2 处与曲线 C 相切，并在点 h_2处与曲线 H 相切；后者是双极限环的鞍结分岔曲线。系统（17）在 b_1 和 b_2附近是余维2的尖点奇异性展开。

沿着 H，从右向左穿过 H 的弧段 $b_1 h_2$ 时，曲线 H 是具有余维1不稳定极限环曲线的亚临界Hopf分岔。从左向右穿过 H 的弧段 $h_2 b_2$ 时，曲线 H 是具有余维1稳定极限环曲线的超临界Hopf分岔。余维2的Hopf分岔发生在点 h_2。

余维 1 的同宿分岔发生在曲线 C 上。当从左向右穿过 C 的弧段$b_1 c_2$ 时，鞍点的两部分重合，并出现一个不稳定极限环。而从右向左穿过 C 的弧段 $c_2 b_2$ 时，鞍点的两部分重合，并出现一个稳定极限环。余维 2 的同宿分岔发生在点 c_2 处。

然后，我们给出一些关于该系统的数值模拟。在图2中，注意到 E_0 是一个稳定结点，当 $c = 0.1$，$\beta = 0.12$，$b = 0.08$，$d = 0.08$。在图3中，存在一个边界平衡点

E_0 和一个正平衡点 E_1。当 $d = 0.4$、 E_1 是尖点时，当 $c = 0.4$、 $\beta = 0.5477$、 $b = 0.012$；E_1 是具有稳定抛物扇区的鞍结点，当 $c = 0.3$、 $\beta = 0.5$、 $b = 0.01$； E_1 是具有不稳定抛物扇区的鞍结点，当 $c = 0.45$、 $\beta = 0.5$、 $b = 0.01$。图4中存在一个正平衡点 E_2 。取 $\beta = 0.6$，当 $b = 0.0125$、 E_2 是中心时，当 $c = 0.4$、 $d = 0.4$；当 E_2、 $c = 0.45$、 $d = 0.38$时是源；当 E_2、 $c = 0.3$、 $d = 0.5$时是汇。 E_3 是鞍点，当$c = 0.3$、 $\beta = 0.5$、 $b = 0.0075$、 $d = 0.4$，如图5所示。

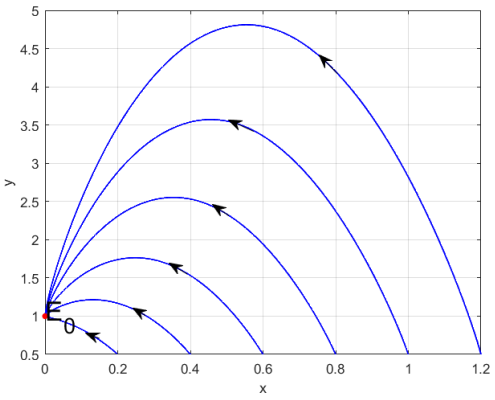


图 2：当 $c = 0.1$、 $\beta = 0.12$、 $b = 0.08$、 $d = 0.08$ 时， E_0 是稳定结点。

4 结论

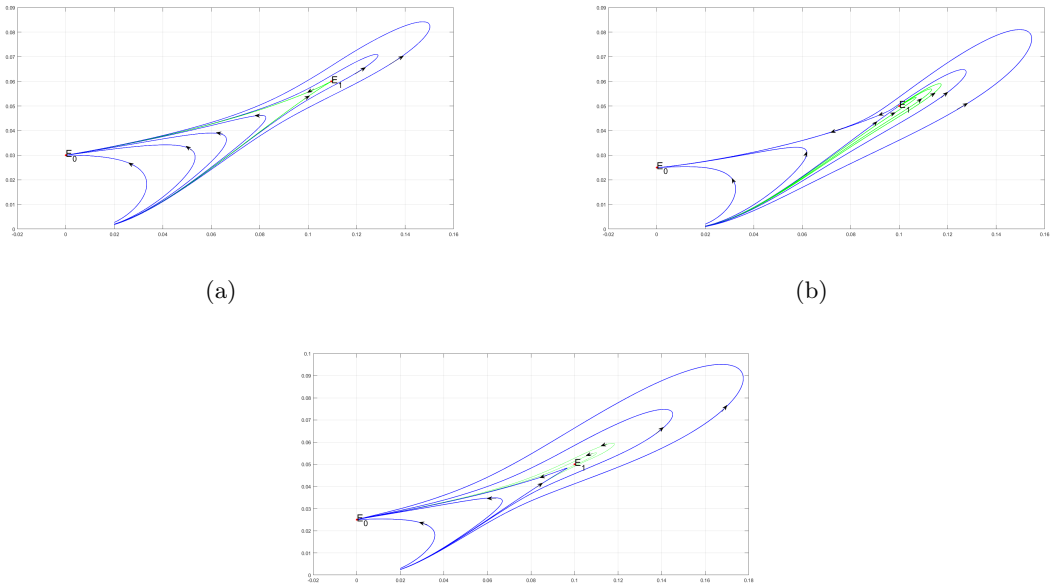
对Gierer-Meinhardt模型进行了分岔分析。除了鞍结点分岔和Hopf分岔外，还发现该模型中存在余维三退化Bogdanov-Takens分岔，这一点此前的研究结果中尚未报道。通过一系列变换，并基于分岔理论（包括Sotomayor定理和正规形方法），本文给出了详细的分岔结果，并揭示了更多有趣的动力学现象。理论发现通过数值模拟得到了验证。该模型还有更多动力学特性值得进一步探索。

致谢

本研究得到国家自然科学基金（项目编号：11971032、62073114）资助。

利益冲突

作者声明不存在利益冲突。



(a) (b)

(c)

图 3： E_1 (a) 当 $c = 0.4, \beta = 0.5477, b = 0.012, d = 0.4$ 时， E_1 为尖点；(b) 当 $c = 0.3, \beta = 0.5, b = 0.01, d = 0.4$ 时， E_1 为具有稳定抛物扇区的鞍结点。(c) 当 $c = 0.45, \beta = 0.5, b = 0.01, d = 0.4$ 时， E_1 为具有不稳定抛物扇区的鞍结点。

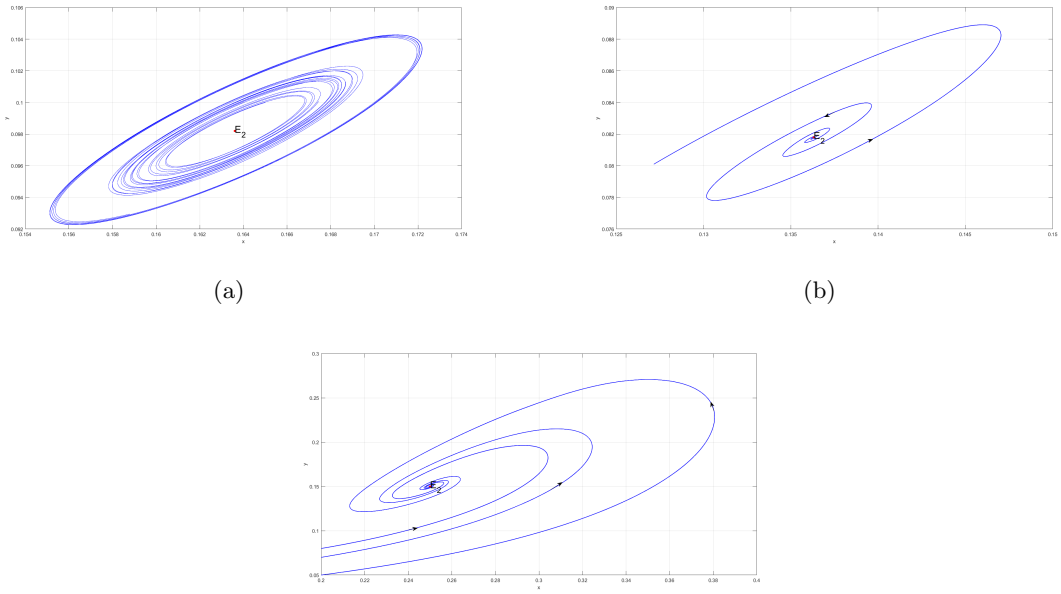
数据可用性声明

本研究期间生成或分析的所有数据均已包含在本文中，或可根据请求提供。

参考文献

[1] A.M. 图灵，形态发生的化学基础，《伦敦皇家学会哲学汇刊 B 辑》237(641) (1952) 1934-1990。

[2] Gierer A，Meinhardt H，生物图案形成理论，《控制论》12（1972年）30-39。[3] Y. Song, R. Yang，G. Sun，含饱和项的 Gierer-Meinhardt模型中的斑图动力学，《应用数学建模》46（2017年）476-491。[4]R. Wu，Y. Zhou，Y. Shao，L. Chen，反应-扩散激活子-抑制子模型的分岔与图灵斑图，《物理学A》482（2017年）597-610。[5] R. Yang，X. Yu，扩散型Gierer-Meinhardt模型中的图灵-Hopf分岔，《国际分岔与混沌杂志》32（04）（2022年）2250046。



(a) (b)

(c)

图4： E_2 的稳定性 (a) E_2 在 $c = 0.4, \beta = 0.6, b = 0.0125, d = 0.4.$ 时是一个中心 (b) E_2 在 $c = 0.45,$ $\beta = 0.6, b = 0.0125, d = 0.38$时是一个源。 (b) E_2 在 $c = 0.3, \beta = 0.6, b = 0.0125, d =$0.5时是一个汇。

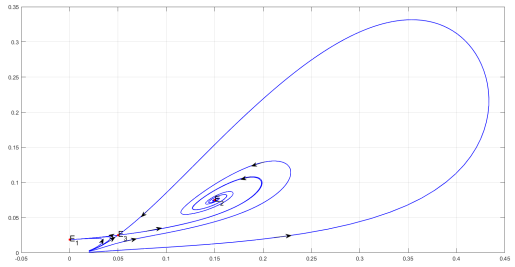


图5： E_3 在 $c = 0.3, \beta = 0.5, b = 0.0075, d = 0.4$时是鞍点。

[6] R. Asheghi，Gierer-Meinhardt激活子-抑制子模型中的Hopf分岔分析，《国际分岔与混沌杂志》32（09）（2022年）2250132。

[7] R. Yang,Y.Song, Gierer-Meinhardt模型中的空间共振与图灵-Hopf分岔，《非线性分析：现实世界应用》31 (2016) 356-387。

[8] S. Zhao, H. Wang, Gierer-Meinhardt系统中的图灵-图灵分岔与多稳态图样，Appl. Math.Model.112 (2022) 632-648.

[9] F. Saadi, A. C Hampneys，反应-扩散系统中局域图样的统一框架 ,

Gray-Scott 和 Gierer-Meinhardt 模型，Phil. Trans. R. Soc. A 379(2213) (2021) 20200277.[10] R.M. Etoua, C. Rousseau，具有猎物捕获和 III 型广义 Holling 响应函数的广义 Gause 模型的分岔分析，J. Differ. Equ. 249(9) (2010) 2316-2356.[11] Z. Shang, Y. Qiao，具有双重 Allee 效应和非线性捕获的修正 Holling-Leslie 型捕食者-猎物系统中的多重分岔，Math. Comput. Simulat. 205 (2023) 745-764.[12] A. Arsie, C. Kottegoda, C. Shan，具有广义 IV 型 Holling 功能响应和猎物 Allee 效应的捕食者-猎物系统，J. Differ. Equ. 309 (2022) 704-740.[13] J. Huang, X. Xia, X. Zhang, S. Ruan，具有简化 IV 型 Holling 功能响应的 Leslie 型捕食者-猎物系统中的余维3分岔，《国际分岔与混沌杂志》26(02) (2016) 1650034.[14] J. Su, M. Lu, J. Huang，先天免疫系统对初始肺部感染响应的动力学模型中的分岔，Qual. Theor. Dyn. Syst. 21(2) (2022) 41.[15] Y. Lamontagne, C. Coutu, C. Rousseau，具有广义 III 型 Holling 功能响应的捕食者-猎物系统的分岔分析，J. Dyn. Differ. Equ. 20(3) (2008) 535-571.[16] Z. Zhang, T. Ding, W. Huang, Z. Dong，《微分方程定性理论》，Amer. Math. Soc., Providence, 2006.[17] L. Perko，《微分方程与动力系统》，第3版，Springer, New York, 2001.[18] C. Li, J. Li, Z. Ma，具有非线性发生率的流行病模型中的余维3 B-T 分岔，Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B 20(4) (2015) 1107-1116.[19] S. Wiggins, M. Golubitsky，《应用非线性动力系统与混沌导论》，Springer, New York (2003).[20] F. Dumortier, R. Roussarie, J. Sotomayor，平面上具有幂零线性部分奇点的向量场的典型三参数族：余维3尖点情形，Ergod. Theor. Dyn. Syst. 7(3) (1987) 375-413.