arXiv:2304.04953v1 [math.AC] 11 Apr 2023

$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 中点的希尔伯特–伯奇虚拟分解

CAITLYN BOOMS-PEOT

摘要。基于 Harada、Nowroozi 和VanTuyl的工作——他们为 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 中的有限点集提供了若干特定的长度为二虚拟分解——我们证明，在这一情形下，多重分次正则性的极小元素对的绝大多数虚拟分解都属于希尔伯特–伯奇型。我们给出了这些短虚拟分解的显式描述，而其形式仅取决于点的数量。此外，尽管初步证据似乎表明情况并非如此，我们证明这些虚拟分解并不总是短的，并给出了它们长度为三时的充分条件。

1. 引言

虚拟分解由 Berkesch、Erman 和 Smith [BES20] 定义，是光滑射影环面簇情形下最小自由分解的自然类比，近年来已成为大量研究的主题 [DM19, ABLS20,DS20,KLM+20, GLLM21,Lop21, BKLY21, Yan21, HNV22, BPC22, BE23]。虚拟分解最显著的性质之一是长度短于最小自由分解，同时仍能捕捉重要的几何信息，因此许多研究都在寻找较短的虚拟分解。具体而言，给定一个带有 Cox 环 S 的光滑射影环面簇 X，希尔伯特合冲定理的虚拟类比将保证 S-模存在长度至多为 $\dim X$ 的虚拟分解（而其最小自由分解的长度最长可达 $\dim S = \dim X + \operatorname{rank} \operatorname{Pic}(X)$）。对于 X 的某些特例，这一结果已得到证明；对于更一般的 X，则在 [BES20, Yan21, BS22] 中提出了猜想。最近，Hanlon-Hicks-Lazarev 的工作通过证明当 X 为任意光滑射影环面簇 [HHL23] 时，存在长度至多为 $\dim X$ 的短虚拟分解，从而解决了这些猜想（另见 [BE23]）。然而，尽管已知短虚拟分解存在，关于此类分解的结构仍有更精细的问题有待研究，包括理解哪些分解最能捕捉几何或代数数据。

本文着重于研究最简单的非平凡几何情形下的虚拟分解：设 X 是 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$中的有限点集，我们分析$S/I_X$的虚拟分解，其中 $S = \operatorname{Cox}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$，且 I_X 是这些点的定义理想。在 $\mathbb{P}^2$中的点这一经典情形下，每个最小自由分解都是**希尔伯特–伯奇型**的，即该分解具有如下形式 $S \leftarrow S^{n+1} \leftarrow S^n \leftarrow 0$，且定义理想由 syzygy 矩阵的极大子式给出 [BH93，定理 1.4。17]在我们的情形中，我们希望理解 S/I_X的最小自由分解、 S/I_X的多重分次正则性，以及属于希尔伯特–伯奇型的虚拟分解之间的关系。下面的例子将有助于说明主要思想。

日期：2023年4月12日。2020 数学主题分类。13D02, 14M25。关键词和短语。虚拟分解，点，多重射影空间，最小分解猜想。Booms-Peot 获得 NSFGRFP 奖学金 DGE-1747503 的支持，并得到威斯康星大学麦迪逊分校研究生院和 OVCRGE 的资助，资金来自威斯康星校友研究基金会。

例 1.1。令 X 为 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$中的以下四个点集：

$$X = \{([1:0],[0:1]),([0:1],[1:0]),([1:1],[1:1]),([1:2],[3:1])\}.$$

S/I_X 的最小自由分解是 [1]

$$\mathcal{F}: \quad 0 \leftarrow S \leftarrow \begin{matrix} S(0,-4) \\ \oplus \\ S(-1,-2)^2 \\ \oplus \\ S(-2,-1)^2 \\ \oplus \\ S(-4,0) \end{matrix} \leftarrow \begin{matrix} S(-1,-4)^2 \\ \oplus \\ S(-2,-2)^3 \\ \oplus \\ S(-4,-1)^2 \end{matrix} \leftarrow \begin{matrix} S(-2,-4) \\ \oplus \\ S(-4,-2) \end{matrix} \leftarrow 0.$$

S/I_X 的多重分次正则性最终被证明是 $\mathbb{Z}^2$ 中的区域，由满足 $(i+1)\ (i'+1) \geq 4$ 的点 $(i,\ i')$ 组成（见命题2.6）。正则性的三个极小元素——(0,3)、(1, 1)和(3, 0)——分别给出了 S/I_X 的一对的虚拟分解（见定义2.3）。例如，一对 $(S/I_X,$ (0, 3)）的虚拟分解，即 $\mathcal{F}$ 的由所有次数至多为(1, 4)生成的直和项组成的子复形，为

$$(S/I_X,(0,3)): \quad 0 \leftarrow S \xleftarrow{A} \begin{matrix} S(0,-4) \\ \oplus \\ S(-1,-2)^2 \end{matrix} \xleftarrow{B} S(-1,-4)^2 \leftarrow 0$$

$$\text{其中 } A = \begin{bmatrix} y_0^3y_1 - 4y_0^2y_1^2 + 3y_0y_1^3 & 4x_0y_0^2 - 7x_1y_0y_1 + 3x_1y_1^2 & 4x_0y_0y_1 - x_1y_0y_1 - 3x_1y_1^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{and } B = \begin{bmatrix} 4x_0 & x_1 \\ -y_0y_1 - 3y_1^2 & -y_0y_1 \\ 7y_0y_1 - 3y_1^2 & y_0^2 \end{bmatrix}.$$

请注意，这是一个希尔伯特–伯奇分解，其中 2×2 的 B 子式生成的理想与 A中的条目相同。类似地，可以验证，一对$(S/I_X,$(1, 1))和$(S/I_X,$(3, 0))的虚拟分解也是长度为二的，并且属于希尔伯特–伯奇型。

在例 1.1中，的多重分次正则性中的每个极小元 S/I_X 都给出了一对的一个简短虚拟分解，且该分解属于希尔伯特–伯奇型。本文的主要目的是分析一对 $(S/I_X,\ (i,\ i')$ 的这类虚拟分解（见定义 2.3），其中的参数取遍多重分次正则性的极小元素（见命题 2.6）。受前述例子以及 Harada、Nowroozi 和 Van Tuyl 的近期工作启发 [HNV22], 我们提出以下问题。

问题 1.2. 如果 X 是 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ （见第 2节）中的一个处于充分一般位置的有限点集，且 (i,i') 是 S/I_X的多重分次正则性的一个极小元，那么它是否是希尔伯特–伯奇型一对 $(S/I_X,(i,i'))$ 的虚拟分解？

最初的证据表明答案是肯定的。具体而言， [HNV22]中的定理 3.1 对满足 (i,i')条件 $(i+1)(i'+1) = |X|$的正则性极小元给出了肯定的回答。此外，在 [HNV22的注 3.8], 中，作者表示，计算机实验表明，问题 1.2对于更多、甚至可能是所有正则性极小元，答案都可能是肯定的。我们自己的实验也证实了这一发现，即使对于较小的点集也是如此。

我们的主要结果表明，问题 1.2 颇为微妙。从积极的方面来看，定理 1.3表明，这类虚拟分解大多属于希尔伯特–伯奇型；更具体地说，除去某些特定的数值不等式外，情况确实如此。不过，在

[1]这与四个充分一般点的最小自由分解相同（如第2节所定义），对于这个例子，我们假设底域的特征不是 2 或 3。

消极的方面，定理1.4表明，当满足某些数值标准时，问题 1.2 确实可以且确实会得到否定的答案。

定理 1.3 (定理 3.3)。 设 X 是由 $n \geq 2$ 个处于充分一般位置的点组成的集合，位于 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$中，并设 (i, i') 是 正则性(S/I_X)的一个极小元。由对称性，不失一般性，假设 $i \leq i'$。那么一对 $(S/I_X, (i, i'))$ 的虚拟分解在以下任一条件成立时长度为二：

(a) $i(i'+2) \leq n$, *or*
(b) $i(i'+2) > n$, $-3n + 3ii' + 4i + i' \leq 0$, *and* $3n - 3ii' - 2i - 2i' \geq 0$.

更完整的表述见定理 3.3，其中还包括这些希尔伯特–伯奇虚拟分解如何由 X的希尔伯特函数确定。对于 $n \leq 10$ 个点，Macaulay2[M2] 给出，正则性的极小元素中近89.1% 满足定理1.3 中的条件(a)或(b)。因此，该定理表明，对于 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 中的一般点，正则性的极小元素所对应的成对虚拟分解绝大多数都是希尔伯特–伯奇型的。由于满足条件 (a) 的元素(i, i') 使得$(i+1)(i'+1) = n$，定理 1.3 大大扩展了Harada、Nowroozi 和Van Tuyl 的工作（见注 3.4），如下方例 1.5 所示。

我们的第二个结果给出了一个条件，保证一对的虚拟分解不是长度为二，从而为定理 1.3提供了部分逆命题。

定理 1.4。 假设定理 *1.3*的假设成立。如果 $i(i'+2) > n$ 和$3n - 3ii' - 2i - 2i' < 0$，则一对的虚拟分解 $(S/I_X, (i, i'))$ 的长度为三。

对于 $n \leq 10000$ 个点，Macaulay2 [M2] 表明，正则性的极小元素中，略低于 5.3% 满足定理 1.4。这为问题 1.2 的否定答案提供了首个证据。特别是，结合定理 1.3 和定理 1.4 中的条件（并直接检查它们未涵盖的三种情形）可以看出，对于 $n \leq 20$ 个点，正则性的所有极小元素都会给出一对点的希尔伯特–伯奇虚拟分解。请参见例 3.6，其中展示了 $n = 21$ 时这一结论首次不成立的情形。综合来看，定理 1.3 和定理 1.4 表明，问题 1.2 在大多数情形下答案为是，但并非所有情形如此，这暗示了要彻底回答这个问题颇为微妙。定理 1.3 和定理 1.4 未涵盖的唯一情形是 $i(i'+2) > n$, $-3n + 3ii' + 4i + i' > 0$，且 $3n - 3ii' - 2i - 2i' \geq 0$。对于$n \leq 10000$ 个点，这些条件仅对正则性的极小元素中约 5.6% 的元素成立；基于计算证据，我们推测这些剩余的虚拟分解也都是长度为二。

我们的方法建立在以下工作的基础之上 [HNV22], 而后者又以 Giuffrida、Maggioni 和 Ragusa 在以下文献中的工作为基础 [GMR92、GMR94、GMR96], 并利用以下对象的双分次希尔伯特函数的二阶差分函数 S/I_X 来预测一般点集的最小自由分解（见第2节）。虽然 [GMR96，定理 4。3]（下文表述为定理2.8）证明了希尔伯特函数决定了以下对象的最小生成元 I_X，但对我们而言，技术上的挑战在于确定它何时能够正确预测缠结和二阶缠结。具体而言，我们需要排除这样的可能性：存在并非由希尔伯特函数必然决定的 Betti数；这相当于理解以下对象的最小分解猜想 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$。

最初由 Lorenzini针对一般点集在 $\mathbb{P}^n$ 由 Lorenzini [Lor93], 最小分辨率猜想预测不存在冗余的（或幽灵）Betti数。这一猜想已针对各种 n（参见 [BG86、Wal95、EPSW00]，其中详细介绍了它成立和不成立的情形），并已由 Mustat˘a 推广到位于任意

射影簇 [Mus98]。这促成了关于曲线上最小分解猜想的多项研究 [FMP03、FL22] 以及不同曲面上的研究 [Cas06、MP11、MRPL12b、MRPL12a]。关于我们的工作与 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 中点的最小分解猜想之间的关系，以及在我们的设定下证明这一猜想如何弥合定理 1.3 与 1.4之间的差距，从而完整回答问题 1.2，详见备注 3.5。

为了证明我们的定理，我们使用了两个引理。在引理 3.1中，我们深入分析了 S/I_X 的希尔伯特函数的二阶差分函数，以了解一般点集可能出现的所有情形。接下来，我们的关键创新使我们能够将 [HNV22，定理 3.1] 推广到大多数可能情形；这就是引理 3.2，它证明希尔伯特函数决定了某些一阶缠结。最后，在定理 1.3的证明中，我们基本上证明，只要给定条件之一成立，最小分解猜想对所讨论的次数就成立。一旦我们知道 Betti数不会发生“连续消去”，便可利用引理3.1明确描述配对 $(S/I_X, (i, i'))$的虚拟分解。在定理 1.3 和 1.4均未涵盖的唯一情形中，证明的障碍在于，我们的方法不足以证明最小分解猜想成立。

例 1.5. 本例说明如何利用定理1.3 和1.4 来理解正则性极小元对应的一对虚拟分解的结构。设 X是一个包含 $n = 502$ 个点的集合，这些点在 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$中处于充分一般位置，并令 $I_X \subseteq S$ 为其定义理想。则$\operatorname{reg}(S/I_X) = \{(i, i') \in \mathbb{Z}^2 | (i+1)(i'+1) \geq 502\}$ 有 22 个极小元素，其中 $i \leq i'$列于下方，并在图1中展示。

{(0, 501),(1, 250),(2, 167),(3, 125),(4, 100), (5, 83), (6, 71),(7, 62),(8, 55), (9, 50), (10, 45), (11, 41), (12, 38), (13, 35), (14, 33), (15, 31), (16, 29), (17, 27), (18, 26),(19, 25), (20, 23), (21, 22)}.

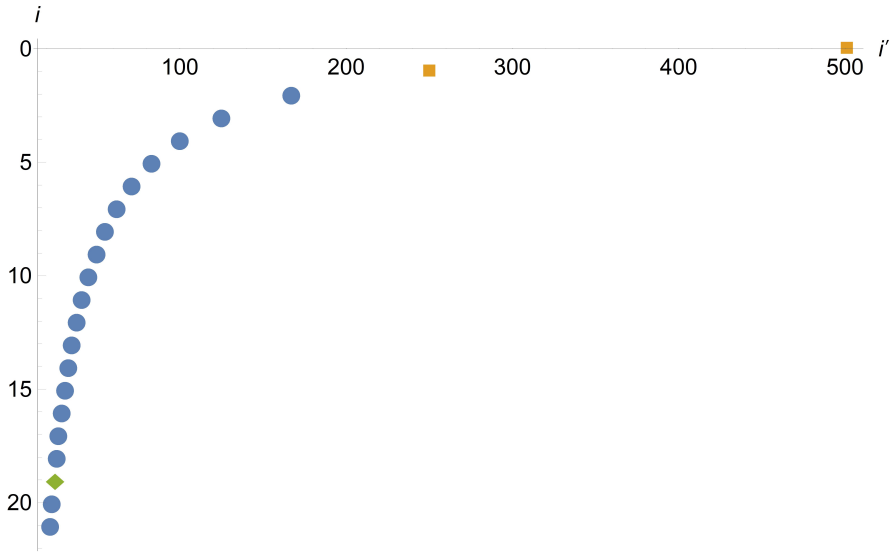


图 1. $i \leq i'$ 时 502 个点的 reg(S/I_X) 的极小元素 (i, i')。

橙色方块 (0、501) 和 (1、250) 满足 $(i + 1)(i' + 1) = 502$，因此根据 [HNV22，定理 3。1]（以及定理 1.3），这些元素给出一对点的希尔伯特–伯奇虚拟分解。19 个蓝色圆圈表示 $(i + 1)(i' + 1) > 502$ （因此它们不在.....的涵盖范围内）

Harada、Nowroozi 和 Van Tuyl 的工作）满足 (a) 或 (b) 定理 1.3 中的条件，因此给出一对的希尔伯特–伯奇虚拟分解。绿色菱形 $(19{,}25)$ 不满足条件 (b)，因为 $-3n+3ii'+4i+i'=20$ 且 $3n-3ii'-2i-2i'=-7$；相反，定理 1.4 表明，一对 $(S/I_X,(19,25))$ 的虚拟分解长度为三。因此，定理 1.3 和 1.4 为问题 1.2 中关于 502 个点的情形提供了完整答案。

致谢。 作者谨此感谢Daniel Erman 在整个项目过程中给予的宝贵指导。同时也感谢 Adam Van Tuyl、John Cobb 和 Mahrud Sayrafi 所进行的有益交流。计算机代数系统 Macaulay2 [M2] 被广泛用于实验，尤其是`VirtualResolutions` 软件包 [ABLS20]。

2. 背景

我们现在回顾在 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 的特定情形下有关虚拟分解和多重分次正则性的必要背景。$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 的 Cox 环是 $\mathbb{Z}^2$-分次多项式环$S = k[x_0,x_1,y_0,y_1]$，其系数域为特征任意的代数闭域 k，其中 $\deg(x_i)=(1,0)$，$\deg(y_i)=(0,1)$。 S 的无关理想为 $B=\langle x_0,x_1\rangle \cap \langle y_0,y_1\rangle$，若理想 $I \subseteq S$ 的生成元相对于 $\mathbb{Z}^2$-分次都是齐次元素，则称其为齐次理想。我们将使用 $\mathbb{Z}^2$ 上的逐分量偏序，记作 $\preceq$，其中 $(i,i') \preceq (j,j')$ 当且仅当 $i \le j$ 且 $i' \le j'$；而 $(i,i') \prec (j,j')$ 当且仅当 $(i,i') \preceq (j,j')$，并且 $i<j$ 或 $i'<j'$。据此，我们可以在此情形下定义虚拟分解如下。

定义 2.1 ([BES20])。 若复形 $\mathcal{C}\colon F_0 \leftarrow F_1 \leftarrow F_2 \leftarrow \cdots$ 由 $\mathbb{Z}^2$-分次自由 S-模$\widetilde{\ }$组成，则称其为 **虚拟分解**，它是 $\mathbb{Z}^2$-分次 S-模 M 的虚拟分解，当且仅当相应的复形 $\widetilde{\mathcal{C}}$ 是 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上的向量丛复形，并且是层 M的局部自由分解。

从代数角度看， $\mathcal{C}$ 是虚拟分解，如果所有高阶同调群都被无关理想的某个幂所湮灭；也就是说，对每个 $i \ge 1$, $B^n H_i(\mathcal{C}) = 0$，存在某个 n。注意，所有正合复形都是虚拟分解，但并非所有虚拟分解都是正合的，因为它们允许存在“无关”的同调。

本文将重点关注一种特定类型的虚拟分解，称为一对的虚拟分解，它由 [BES20] 引入。这类虚拟分解由一个模 M 及其多重分次正则性中的一个元素 正则性(M)所确定；下文将对 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 进行定义，该定义涉及若干局部上同调群的消失。

定义 2.2 ([MS04，定义 1。1])。 对于 $\boldsymbol{r} \in \mathbb{Z}^2$，我们称 $\mathbb{Z}^2$-分次 S-模 M是 $\boldsymbol{r}$-正则的，如果满足以下条件：

(1) $H^i_B(M)_{\boldsymbol{p}} = 0$ 对所有 $i \ge 1$ 以及所有 $\boldsymbol{p} \in \bigcup(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\lambda}+\mathbb{N}^2)$，其中并集遍历所有$\boldsymbol{\lambda}=(\lambda,\lambda')$ $\in \mathbb{N}^2$ 使得 $\lambda+\lambda'=i-1$。 (2) $H^0_B(M)_{\boldsymbol{p}}=0$ 对所有 $\boldsymbol{p} \in (\boldsymbol{r}+(1,0)+\mathbb{N}^2) \cup (\boldsymbol{r}+(0,1)+\mathbb{N}^2)$。

我们规定正则性$(M)\colon = \{\boldsymbol{r} \in \mathbb{Z}^2 \mid M \text{ 是 } \boldsymbol{r}\text{-正则的}\}$。

一旦我们知道元素 $\boldsymbol{r} \in \mathbb{Z}^2$ 位于 M的多重分次正则区域中，就可以计算一对 $(M,\boldsymbol{r})$ 的虚拟分解。这是通过使用 $\boldsymbol{r}$ 以特定方式“截短” M 的最小自由分解来完成的。在 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$的情形下，定义如下。参见示例 1.1 ，其中展示了如何求一对的虚拟分解。

定义 2.3 ([BES20，定理 1。3])。 设 M 是一个有限生成 $\mathbb{Z}^2$-分次的、 B-饱和的 S-模，并且是 $\boldsymbol{r}$-正则的。其最小自由分解的自由子复形为

M 由次数不超过 $\boldsymbol{r}+(1,1)$ 的次数生成的所有直和项组成，是 M 所称的**配对虚拟分解** $(M,\boldsymbol{r})$ 的虚拟分解。

我们关注于理解满足以下条件时的一对虚拟分解 $M=S/I_X$，其中I_X 是定义一个有限点集的理想 $X\subseteq\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$，而 $\boldsymbol{r}$ 是相对于 的一个 极小元$\operatorname{reg}(S/I_X)$，其取值于 $\preceq$。注意，由于 $\operatorname{reg}(S/I_X)$是 $\mathbb{Z}^2$中的一个区域，因此可能存在多个极小元。尽管计算 $\operatorname{reg}(M)$ 通常颇具挑战，但事实证明，当 $\operatorname{reg}(S/I_X)$ 具有一般希尔伯特函数时，其定义可简化。为陈述这一简化后的定义，我们先回顾 S/I的希尔伯特函数及其一阶和二阶差分函数；它们将在第 3 节中发挥关键作用。

定义 2.4。对于任意齐次理想 $I\subseteq S$，S/I 的**希尔伯特函数** 是函数 $H_{S/I}\colon\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$，其在次数 (i,i') 处的值为

$$H_{S/I}(i,i'):=\dim_k(S/I)_{(i,i')}=\dim_k S_{(i,i')}-\dim_k I_{(i,i')}.$$

为简化记号，当 $I=I_X$ 是子概形 $X\subseteq\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ 的定义理想时，我们将 H_{S/I_X} 记作 H_X。注意，我们可以通过令 $m_{i,i'}:=H_X(i,i')$，将 H_X 视为一个无限矩阵（$m_{i,i'}$），其行和列分别由（i,i'）索引。于是，H_X,$\Delta H_X\colon\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$ 的**一阶差分函数** 是另一个无限矩阵 $\Delta H_X=(c_{i,i'})$，定义如下

$$\Delta H_X(i,i'):=c_{i,i'}=m_{i,i'}+m_{i-1,i'-1}-m_{i,i'-1}-m_{i-1,i'},$$

其中，按惯例，若 $i<0$ 或 $i'<0$，则 $m_{i,i'}=0$。重复此操作，我们将 H_X, $\Delta^2H_X\colon\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$ 的二**阶差分函数** 定义为无限矩阵 $\Delta^2H_X=(d_{i,i'})$，其中

$$\Delta^2H_X(i,i')=\Delta(\Delta H_X(i,i')):=d_{i,i'}=c_{i,i'}+c_{i-1,i'-1}-c_{i,i'-1}-c_{i-1,i'}.$$

例 2.5。设 X 与例1.1中的相同。则 H_X 及其差分函数由下列无限矩阵给出，其中行和列的索引为 0、1、2、.....:

$$H_X=\begin{bmatrix}1&2&3&4&4&4&\\2&4&4&4&4&4&\\3&4&4&4&4&4&\\4&4&4&4&4&4&\cdots\\4&4&4&4&4&4&\\4&4&4&4&4&4&\\&&&\vdots&&&\end{bmatrix}\quad\Delta H_X=\begin{bmatrix}1&1&1&1&0&0&\\1&1&-1&-1&0&0&\\1&-1&0&0&0&0&\\1&-1&0&0&0&0&\cdots\\0&0&0&0&0&0&\\0&0&0&0&0&0&\\&&&\vdots&&&\end{bmatrix}\quad\Delta^2H_X=\begin{bmatrix}1&0&0&0&-1&0&\\0&0&-2&0&2&0&\\0&-2&3&0&-1&0&\\0&0&0&0&0&0&\cdots\\-1&2&-1&0&0&0&\\0&0&0&0&0&0&\\&&&\vdots&&&\end{bmatrix}$$

正如 [GMR92、GMR94、GMR96、HNV22], 所研究的，当 X 是 $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$中的有限点集时，函数 H_X、ΔH_X和 Δ^2H_X揭示了 X的各种代数和几何性质。一个特别有趣的情形是，当 X 具有 **一般希尔伯特函数**时，这意味着

$$H_X(i,i')=\min\{|X|,(i+1)(i'+1)\}\text{ for all }(i,i')\in\mathbb{N}^2.$$

注意，如果 X 具有一般希尔伯特函数，那么 H_X 及其差分函数都是对称矩阵，因此只需研究满足 $i\le i'$的条目。注意到，例 2.5 中正是这种情形。因此，在定理 1.4 和 3.3 中交换 i 和 i' 的角色，即可得到 $i>i'$时的相应结论。此外，I_X 是一个齐次理想，并且由于每个点的理想都是 B-饱和的，I_X 是一个 B-饱和理想，即 $I_X=\bigcup_{n=1}^{\infty}(I_X:B^n)$。这意味着，对于 $M=S/I_X$，定义 2.2 的条件（2）得以满足。

此外，如果 X 具有一般希尔伯特函数，那么我们可以利用 [MS04，命题 6。7], 该命题指出，$\boldsymbol{r}\in\operatorname{reg}(S/I_X)$ 当且仅当在 X 上消失的形式空间具有

余维数为 $|X|$，且所在形式空间的次数为 $\boldsymbol{r}$。由于这恰好发生在希尔伯特函数 H_X 与 S/I_X的希尔伯特多项式一致时，我们看到定义 2.2可简化如下。

命题2.6。 设 $X \subseteq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 是具有一般希尔伯特函数的有限点集。

$$\operatorname{reg}(S/I_X) = \{(i,i') \mid H_X(i,i') = |X|\} = \{(i,i') \mid (i+1)(i'+1) \geq |X|\}.$$

现在我们已经知道如何轻松计算 S/I_X 的多重分次正则性，接下来我们将讨论 S/I_X 的最小自由分解，它将被“裁剪”以构造一对对象的虚拟分解。正如 [GMR92] 和 [HNV 22], 中的最小自由分解 $\mathcal{F}$ S/I_X由下式给出：

$$(1) \qquad \mathcal{F}: \quad 0 \leftarrow S \leftarrow \bigoplus_{\ell=1}^{m} S(-\boldsymbol{a}_{1,\ell}) \leftarrow \bigoplus_{\ell=1}^{n} S(-\boldsymbol{a}_{2,\ell}) \leftarrow \bigoplus_{\ell=1}^{p} S(-\boldsymbol{a}_{3,\ell}) \leftarrow 0$$

其中 $\boldsymbol{a}_{i,\ell} = (a_{i,\ell}, a'_{i,\ell})$。然后， S/I_X 的双分次贝蒂数为

$$\beta_{0,(0,0)} = 1, \ \beta_{1,\boldsymbol{r}} = \#\{\boldsymbol{a}_{1,\ell} = \boldsymbol{r}\}, \ \beta_{2,\boldsymbol{r}} = \#\{\boldsymbol{a}_{2,\ell} = \boldsymbol{r}\}, \text{ and } \ \beta_{3,\boldsymbol{r}} = \#\{\boldsymbol{a}_{3,\ell} = \boldsymbol{r}\}.$$

请注意，我们的记号与 [HNV22]和 [GMR92]中的记号略有不同；在他们的记号中，我们有$\beta_{1,\ \boldsymbol{r}} = \alpha_{r,\ r'}$，$\beta_{2,\ \boldsymbol{r}} = \beta_{r,\ r'}$，以及$\beta_{3,\ \boldsymbol{r}} = \gamma_{r,\ r'}$。在 [GMR92], 中，作者探讨了这些Betti数的若干组合性质。在我们的论证中，我们将多次使用以下将Betti数与 $\Delta^2 H_X$ 中的条目联系起来的性质。

命题 2.7 ([GMR92，命题 3.3 (vi)])。 设 X 是 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 中满足 $\Delta^2 H_X = (d_{i,\ i'})$ 的点集。对于所有 $\boldsymbol{r} = (r, r') \succ (0,\ 0)$，有 $d_{r,\ r'} = -\beta_{1,\ \boldsymbol{r}} + \beta_{2,\ \boldsymbol{r}} - \beta_{3,\ \boldsymbol{r}}$。

我们的结果要求 X 中的点处于充分一般位置，该概念最初由 Giuffrida、Maggioni 和 Ragusa 定义，近来 Harada、Nowroozi 和 Van Tuyl 也使用了这一概念。关于 X 的这一条件确保这些点不仅具有一般希尔伯特函数，而且具有足够的“随机性”，从而保证 I_X 的最小生成元由 H_X 决定。具体而言，若 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 中的 n 个点 $X = \{P_1, \ldots, P_n\}$ 满足以下定理中，$(P_1,\ \ldots\ldots,\ P_n)$ 属于开集 U，则称其处于**充分一般位置**。

定理 2.8 ([GMR96，定理 4.3], [HNV22，定理 2.13])。 设 $n \geq 1$ 是一个整数。存在一个稠密开子集 $U \subseteq (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)^n$ 使得对于每个 $(P_1,\ \ldots,\ P_n) \in U$，点集 $X = \{P_1, \ldots, P_n\}$ 满足：

(1) X 具有一般希尔伯特函数，并且 *(2)* 非零的$\beta_{1,\boldsymbol{r}}$ 恰好由 $\beta_{1,\boldsymbol{r}} = -d_{r,r'}$ 给出，对于满足以下条件的条目 $d_{r,r'} < 0$ ： 或者 $d_{r,i'} > 0$ 对于某个 $i' > r'$ ，或者 $d_{i,r'} > 0$ 对于某个 $i > r$。

例 2.9. 设 X 如例 1.1和 2.5中所述。由于 X 具有一般希尔伯特函数，命题 2.6给出 $\operatorname{reg}(S/I_X) = \{(i,i') \mid (i+1)(i'+1) \geq 4\}$。注意，例 S/I_X 1.1 中展示的最小自由分解与等式（ $\mathcal{F}$ 1）中的结构相同，而第一个同调次数上的 Betti 数为

$$\beta_{1,\boldsymbol{r}} = \begin{cases} 1, & \boldsymbol{r} = (0,4) \text{ or } (4,0) \\ 2, & \boldsymbol{r} = (1,2) \text{ or } (2,1) \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

我们可以通过检验定理 2.8 中的条件 (2) 是否成立，直接验证这些点处于充分一般位置。注意，负项中其右侧或下方有正项的项为 $d_{r,r'} \in \Delta^2 H_X$ 、$d_{0,4} = -1$,$d_{1,2} = -2$,$d_{2,1} = -2$, 以及 ,$_0 = -1$，这些项取相反数后得到非零的 $\beta_{1,\boldsymbol{r}}$。

此外，注意到第二同调次数中的非零 Betti数由下式给出

$$\beta_{2,\boldsymbol{r}} = \begin{cases} 2, & \boldsymbol{r} = (1,4) \text{ or } (4,1) \\ 3, & \boldsymbol{r} = (2,2) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

而这些与正项 $d_{1,\ 4} = 2$、$d_{2,\ 2} = 3$以及 $d_{4,\ 2} = 2$ 中的正项相对应 $\Delta^2 H_X$。引理 3.2证明了这是因为它们各自都是所在行的第一个正项。

请参阅 [HNV22] 中的例 2.14 和 2.15，以进一步熟悉希尔伯特函数及其差分函数的计算，并了解 $\Delta^2 H_X$ 中的各项与 Betti数 $\beta_{1\text{之间的联系}\boldsymbol{r}}$；其中还给出了一个示例，展示一组具有一般希尔伯特函数但不满足条件(2) 的点，该条件见定理 2.8。

注 2.10。当 $X \subseteq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 是一组处于充分一般位置的点时，我们可以看到，关于 I_X的最小生成元已有许多已知结果。最重要的是，定理 2.8 指出， I_X 的最小生成元恰好对应于 $\Delta^2 H_X$ 中右侧或下方存在正项的负项。此外，[GMR94，引理 4.2] 后面的句子指出，该引理意味着 I_X的所有最小生成元必定出现在连续的次数中，即出现在次数 (i, i') 和 $(i, i'+1)$, 或出现在次数 (i, i') 和 $(i+1, i')$。此外， [GMR94] 第 202 页顶部的段落指出，如果忽略项 d_0,0，那么 $\Delta^2 H_X$ 每一行（分别地，每一列）的第一个非零项（若存在）都是负数，并且对应于该次数下最小生成元的个数。例 3.6 展示了这些性质。

注 2.11. 在 [GMR96 的定义 2.1], 中，Giuffrida、Maggioni 和 Ragusa 引入了 H_X的良好矩形这一概念。当 X 具有一般希尔伯特函数时，由[GMR96 的命题 2.3] 和命题2.6可知，次数$(i$, $i')$给出 H_X的良好矩形，当且仅当$(i-1, i'-1) \in \text{reg}(S/I_X)$。因此， [GMR96 的命题 2.7] 表明，对于满足$(i, i') \in \text{reg}(S/I_X)$的元素，任意一对$(S/I_X, (i, i'))$的虚拟分解实际上都是无环的。注意，如果分解的长度为二，这可由无环性引理 [Eis04 的引理 20.11] 推出；而 [GMR96 的命题 2.7] 还证明了长度为三的分解同样无环。这意味着本文讨论的每一对的虚拟分解都是无环的，因此长度为二的虚拟分解属于希尔伯特–伯奇型。在例 3.6 中，注意到次数(4, 6)给出 H_X 的一个（极小）良好矩形，因为(3, 5)是reg(S/I_X)的一个（极小）元素。此外，此例中的每一对的虚拟分解都是无环的。

3. 结果

为证明定理 1.4 和 3.3，我们需要确定 S/I_X 的 Betti数与 $\Delta^2 H_X$ 中非零项之间的关系。如果（i， i'）是 S/I_X 的多重分次正则性中的极小元，那么一对（S/I_X，（i， i'））的虚拟分解由相对于偏序 $\preceq$、次数不超过（$i+1$， $i'+1$）的 Betti数确定。因此，我们需要理解 $\Delta^2 H_X$ 中次数不超过（$i+1$， $i'+1$）的非零项。注 2.10 描述了关于 Betti数在

第一个同调次数中的已知情况，而我们的目标是描述第二和第三个同调次数中的情形。特别地，我们将证明，在大多数情况下，如果 $d_{i+1,\ i'+1}$ 为非负数，则（S/I_X，（i，i'））具有长度为二（定理 3.3）；如果 $d_{i+1,\ i'+1}$ 为负数，则（S/I_X，（i，i'））具有长度为三（定理 1.4）。为此，我们利用以下两个引理。引理 3.1 给出了数值条件，可准确确定该角点项何时为非负。此外，我们列出了 $\Delta^2 H_X$ 的所有可能形式，以确定由定理 3.3 导出并在附录 A 中给出的希尔伯特–伯奇虚拟分解的结构。随后，引理 3.2 将表明，在满足定理 3.3 的数值条件时，$\Delta^2 H_X$ 中的正项对应于第二个同调次数中的 Betti数。由此，我们将证明，由于在这些假设下 $d_{i+1,\ i'+1} \geq 0$，一对的虚拟分解具有长度为二。此外，如果 $d_{i+1,\ i'+1} < 0$，那么我们将证明 $\beta_{3,\ (i+1,i'+1)} > 0$，因此（$S/I_X$，（$i+1$，$i'+1$））具有长度为三。

引理 3.1. 设 X 是 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 中处于充分一般位置的一组 $n \geq 2$ 个点，且 (i, i') 是 正则性(S/I_X) 的一个极小元。由 H_X 的对称性，不失一般性，假设 $i \leq i'$。那么 $d_{i+1,i'+1} \geq 0$ 当且仅当以下条件之一成立：

(a) $i(i'+2) \leq n$，或 ***(b)*** $i(i'+2) > n$ 且

$3n - 3ii' - 2i - 2i' \geq 0$;

此外，在所有可能的情形下，都可以计算 $\Delta^2 H_X$ 中次数至 $(i+1, i'+1)$ 的各项。

证明。考虑位置 (i, i') 附近的希尔伯特函数 H_X：

$$H_X = \begin{array}{c} \\ \vdots \\ i-1 \\ i \\ i+1 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \cdots & i'-1 & i' & i'+1 & \cdots \end{array} \\ \begin{bmatrix} \ddots & & \vdots & & \\ & ii' & i(i'+1) & \min\{i(i'+2), n\} & \\ & (i+1)i' & n & n & \\ & \min\{(i+2)i', n\} & n & n & \\ & & \vdots & & \ddots \end{bmatrix} \end{array}$$

由于 (i, i') 是 $\mathrm{reg}(S/I_X)$ 的极小元，我们知道 $m_{i,i'} = n$（因此 $(i+1)(i'+1) \geq n$），$m_{i-1,\ i'} = i(i'+1) < n$，$m_{i,i'-1} = (i+1)i' < n$，以及 $m_{i-1,i'-1} = ii' < n$。我们还知道，对于每个 $(r, r') \succeq (i, i')$，都有$m_{r,r'} = n$。然而，由于条目 $m_{i-1,i'+1}$ 和 $m_{i+1,i'-1}$ 取决于 i, i' 和 n 的具体取值，为了确定 $d_{i+1,i'+1}$ 的符号，我们需要根据这两个条目的可能取值考虑三种情形（注意，由于 $i \leq i'$，$i(i'+2) \leq (i+2)i'$，因此 $i(i'+2) > n$ 和 $(i+2)i' \leq n$ 不可能同时成立）。情形 1 和 2 将表明，若 (a) 成立，则 $d_{i+1,i'+1} > 0$；情形 3 将表明，若 (b) 成立，则 $d_{i+1,i'+1} \geq 0$。此外，如果 (a) 和 (b) 均不成立，那么我们必定处于情形 3，且必有 $d_{i+1,\ i'+1} < 0$。为计算每种情形下的 $d_{i+1,i'+1}$，我们将利用 $\Delta^2 H_X$ 的定义（见第 2 节），有

$$d_{i+1,i'+1} = n + ii' - 2i(i'+1) - 2(i+1)i' + \min\{i(i'+2), n\} + \min\{(i+2)i', n\}. \tag{2}$$

此外，由于它们将用于定理3.3的证明，在每种情况下，我们将计算 $\Delta^2 H_X$ 中截至次数 $(i+1, i'+1)$ 的所有条目，并确定每个条目的符号已知情况。注意，在每种情况下，对于所有次数$(0, 0) \prec (r, r') \preceq (i+1, i'+1)$ 中未在 $\Delta^2 H_X$ 中明确显示的条目。

情形 *1*：如果 $i\,(i'+2) \leq n$ 且 $(i+2)\,i' \leq n$，则化简方程（2) 得到 $d_{i+1,\ i'+1} = n - ii' > 0$ 因为 $ii' < n$。在这种情形下，我们有

$$\Delta H_X = \begin{array}{c} \\ \vdots \\ i-1 \\ i \\ \\ i+1 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \cdots \quad i'-1 \qquad i' \qquad i'+1 \quad \cdots \\ \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & & \\ & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & n-ii' & -i \\ & & -i-i' & \\ & 1 & -i' & 0 \\ & \vdots & & \ddots \end{bmatrix} \end{array} \qquad \Delta^2 H_X = \begin{array}{c} \\ \vdots \\ i-1 \\ i \\ \\ i+1 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \cdots \quad i'-1 \qquad i' \qquad\qquad i'+1 \qquad\quad \cdots \\ \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & & \\ & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & n-ii' & -n+ii'+i' \\ & & -i-i'-1 & \\ & 0 & -n+ii'+i & n-ii' \\ & & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \end{array}$$

还要注意，$d_{i,\ i'} \leq 0$ 因为 $(i'+1)(i+1) \geq n$，$d_{i,\ i'+1} < 0$ 因为 $(i+1)i' < n$，并且$d_{i+1,\ i'} < 0$ 因为 $i(i'+1) < n$。

情形 *2*：如果 $i(i'+2) \leq n$ 且 $(i+2)i' > n$，那么等式 (2) 变为 $d_{i+1,\ i'+1} = 2(n - ii' - i') > 0$，因为 $(i+1)i' = ii' + i' < n$。在这种情况下，为了确定 $\Delta^2 H_X$，我们需要考虑条目$m_{i+1,\ j'} \in H_X$ 它是该行中第一个等于 n 的条目。换句话说，$(i+1,\ j')$ 也是 $\mathrm{reg}(S/I_X)$ 的一个极小元。我们知道 $j' \leq i'-1$，因为 $m_{i+1,\ i'-1} = n$，并且可以计算得

$$\Delta H_X = \begin{array}{c} \\ \vdots \\ i-1 \\ i \\ i+1 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \cdots \quad j'-1 \qquad j' \qquad\quad j'+1 \quad \cdots \quad i'-1 \qquad i' \qquad\quad i'+1 \quad \cdots \\ \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & & & & & \vdots & & \\ & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \\ & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & n-ii'-i-i' & -i & \\ & 1 & n-ij' & -i-1 & \cdots & -i-1 & -n+ii'+i' & 0 & \\ & & -i-2j'-1 & & & & & & \\ & & \vdots & & & & \vdots & & \ddots \end{bmatrix} \end{array}$$

其中，若 $j' = i'-1$，则我们只保留标记为 j' 的列，并删除从 $j'+1$ 到 $i'-1$ 标记的列。随后，我们可以根据 j' 的取值分两种情形计算 $\Delta^2 H_X$。

情形 *2.1*：若 $j' < i'-1$，则我们有

$$\Delta^2 H_X = \begin{array}{c} \\ \vdots \\ i-1 \\ i \\ \\ i+1 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \cdots \quad j'-1 \qquad j' \qquad\quad j'+1 \quad \cdots \quad i'-1 \qquad i' \qquad\quad i'+1 \qquad \cdots \\ \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & & & & & \vdots & & \\ & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-ii' & -n+ii'+i' & \\ & & & & & & -i-i'-1 & & \\ & 0 & n-ij' & -n+ij' & \cdots & 0 & -2n+2ii' & 2(n-ii'-i') & \\ & & -i-2j'-2 & +2j' & & & +2i+2i'+2 & & \\ & & \vdots & & & & \vdots & & \ddots \end{bmatrix} \end{array}$$

注意到 $d_{i,i'} \leq 0$, $d_{i,i'+1} < 0$, $d_{i+1,j'} \leq 0$，因为 $(i+1, j') \in$ 正则性(S/I_X) 意味着 $(i+2)(j'+1) \geq n$, $d_{i+1,j'+1} < 0$，因为 $(i+1, j'-1) \notin$ 正则性(S/I_X) 意味着 $(i+2)j' < n$，并且 $d_{i+1,\ i'} = -2d_{i,i'} \geq 0$。

情形 *2.2*： 如果 $j' = i' - 1$，那么我们有

$$\Delta^2 H_X = \begin{array}{c} \\ \vdots \\ i-1 \\ \\ i \\ \\ i+1 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \cdots \quad i'-2 \qquad i'-1 \qquad\qquad i' \qquad\qquad i'+1 \qquad \cdots \\ \begin{bmatrix} \ddots & & & \vdots & & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & n-ii' & -n+ii'+i' & \\ & & & -i-i'-1 & & \\ & 0 & n-ii'-2i' & -3n+3ii' & 2(n-ii'-i') & \\ & & & +i+4i' & & \\ & & & \vdots & & \ddots \end{bmatrix} \end{array}$$

这里，$d_{i,\ i'} \le 0$, $d_{i,\ i'+1} < 0$, $d_{i+1,\ i'-1} \le 0$ 和 $d_{i+1,\ i'}$ 可以是负数，也可以是非负数。

情形 *3*： 如果 $i(i'+2) > n$ 且 $(i+2)i' > n$，那么式（2）变为 $d_{i+1,\ i'+1} = 3n - 3ii' - 2i - 2i'$。如果 (b) 成立，那么 $d_{i+1,\ i'+1} \ge 0$。否则，$d_{i+1,\ i'+1} < 0$。

为计算 $\Delta^2 H_X$，我们再次令 j' 为 H_X 中第 $(i+1)$ 行里第一个等于 n 的项所对应的列；类似地，令 j 为第 $(i'+1)$ 列里第一个等于 n 的项所对应的行。换言之，$(i+1, j')$ 和 $(j, i'+1)$ 也是 $\mathrm{reg}(S/I_X)$ 的极小元素。于是，先验地，$j' \le i' - 1$ 和 $j \le i - 1$。然而，由于 $i \le i'$，我们必有 $j = i - 1$。事实上，由于 m_{i-1}，在这种情况下 $_{i'+1} = n$，因此只需证明 $m_{i-2i'+1} = (i-1)(i'+2) < n$。我们有 $(i-1)(i'+2) = i(i'+1) + (i-i') - 2 < n - 2 < n$，因为 $i(i'+1) < n$ 且 $i - i' \le 0$。因此，$(i-1, i'+1)$ 必须是 $\mathrm{reg}(S/I_X)$ 的一个极小元。此外，$j' \in \{i-2, i-1\}$。这是因为 m_{i+1} $_{i'-3} = (i+2)(i'-2) = (i+1)i' + (i'-2i) - 4 < n - 4 < n$；这里我们用到了 $i' < 2i$，这对属于情形 3 是必要的，因为 $(i+1)i' < n$，$i(i'+2) > n$，而且 $i' \ge 2i$ 对于 $i, i', n \in \mathbb{N}$ 是一个不相容的不等式组。因此，实际上我们只需考虑两种情形。首先，我们可以计算得出

$$\Delta H_X = \begin{array}{c} \\ \vdots \\ i-2 \\ i-1 \\ i \\ i+1 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \cdots \quad j'-1 \qquad j' \qquad\quad i'-1 \qquad\quad i' \qquad\quad i'+1 \qquad \cdots \\ \begin{bmatrix} \ddots & & & \vdots & & \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & n-ii'-2i+1 & \\ & 1 & 1 & 1 & n-ii'-i-i' & -n+ii'+i & \\ & 1 & n-ij' & -i-1 & -n+ii'+i' & 0 & \\ & & -i-2j'-1 & & & & \\ & & & \vdots & & & \ddots \end{bmatrix} \end{array}$$

其中，若 $j' = i' - 1$，则我们只保留标记为 j' 的列，并删除标记为 $i' - 1$ 的列。现在我们根据 j' 的值，分两种情况使用 ΔH_X 计算 $\Delta^2 H_X$。

情形 *3.1*：若 $j' = i' - 2$，则有

$$\Delta^2 H_X = \begin{array}{c} \\ \vdots \\ i-2 \\ i-1 \\ i \\ \\ i+1 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \cdots \quad i'-3 \qquad\quad i'-2 \qquad\quad i'-1 \qquad\quad i' \qquad\quad i'+1 \qquad\quad \cdots \\ \begin{bmatrix} \ddots & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n-ii'-2i & \\ 0 & 0 & 0 & \begin{matrix} n-ii' \\ -i-i'-1 \end{matrix} & \begin{matrix} -3n+3ii' \\ +4i+i' \end{matrix} & \\ 0 & \begin{matrix} n-ii' \\ +i-2i'+2 \end{matrix} & \begin{matrix} -n+ii' \\ -2i+2i'-4 \end{matrix} & \begin{matrix} -2n+2ii' \\ +2i+2i'+2 \end{matrix} & \begin{matrix} 3n-3ii' \\ -2i-2i' \end{matrix} & \\ & & \vdots & & & \ddots \end{bmatrix} \end{array}$$

这里，$d_{i-1,\ i'+1} < 0$, $d_{i,\ i'} < 0$, $d_{i,\ i'+1}$ 可以为负或非负，$d_{i+1,\ i'-2} \leq 0$,$d_{i+1,\ i'-1} < 0$, $d_{i+1,\ i'} > 0$，并且当且仅当 (*b*) 成立时，$d_{i+1,\ i'+1} \geq 0$ 。

情形 *3.2*：如果 $j' = i' - 1$，那么我们有

$$\Delta^2 H_X = \begin{array}{c} \\ \vdots \\ i-2 \\ i-1 \\ i \\ \\ i+1 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \cdots \quad i'-2 \qquad\quad i'-1 \qquad\quad i' \qquad\quad i'+1 \qquad\quad \cdots \\ \begin{bmatrix} \ddots & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & n-ii'-2i & \\ 0 & 0 & \begin{matrix} n-ii' \\ -i-i'-1 \end{matrix} & \begin{matrix} -3n+3ii' \\ +4i+i' \end{matrix} & \\ 0 & n-ii'-2i' & \begin{matrix} -3n+3ii' \\ +i+4i' \end{matrix} & \begin{matrix} 3n-3ii' \\ -2i-2i' \end{matrix} & \\ & & \vdots & & \ddots \end{bmatrix} \end{array}$$

这里，$d_{i-1,\ i'+1} < 0$, $d_{i,\ i'} < 0$, $d_{i+1,\ i'-1} < 0$, $d_{i,\ i'+1}$ 以及 $d_{i+1,\ i'}$ 可以为负或非负（但请注意，$d_{i,\ i'+1} \leq d_{i+1,\ i'}$），并且当且仅当 (*b*) 成立时，$d_{i+1,\ i'+1} \geq 0$ 。

通过考察上述三种可能的情形，我们看到，$d_{i+1,i'+1} \geq 0$ 当且仅当 (*a*) 成立（情形 1 或 2），或者 (*b*) 成立（由情形 3 涵盖）。□

以下是我们的第二个主要引理。请回想一下，使用 $\Delta^2 H_X$ 分析一对点的虚拟分解时，主要挑战之一在于该情形下的最小分解猜想尚未得到证明；参见注释3.5。引理3.2 是这方面的一个部分结果。Giuffrida-Maggioni-Ragusa 证明，在给定行或列中，$\Delta^2 H_X$ 的第一个负项总是对应于 I_X 中次数为该次数的最小生成元的数量（参见注释2.10）；引理 3.2 则以类似的方式证明，第一个正项总是对应于 I_X 中次数为该次数的极小一阶关系的数量。四个点的情形可参见示例2.9 。

引理 3.2。设 X 是 $n \geq 2$ 个处于充分一般位置的 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$中的点，并设 $\mathcal{F}$ 是 S/I_X 的最小自由分解（见等式 (1)）。如果 $d_{r,\ r'}$ 是 r 行（分别为 r' 列）中 $\Delta^2 H_X$ 的第一个正项（不包括第 0 行和列以及第 1 行和列），那么 $\beta_{2,\ \mathbf{r}} = d_{r,\ r'}$，即该正项恰好对应于.....的第一缠结数

次数 $\boldsymbol{r} = (r, r')$。此外，$\beta_{2,(r,u')} = 0$ 对所有 $u' < r'$ （分别地，$\beta_{2,(u,r')} = 0$ 对所有 $u < r$），即不存在来自该行（相应地，该列）的次数更小的一阶缠结。

证明。我们考虑最小自由分解 $\mathcal{F}$ 的以下子复形：对于 $r \geq 0$，令 $\mathcal{C}^{\leq r}$ 为 $\mathcal{F}$ 的子复形，它由所有满足 $\boldsymbol{a}_{i,\ell} = (a_{i,\ell}, a'_{i,\ell})$ 条件 $a_{i,\ell} \leq r$ 的项 $S(-\boldsymbol{a}_{i,\ell})$ 组成。因此，$\mathcal{C}^{\leq r}$ 由第一坐标次数至多为 r 的所有项组成，而对第二坐标的次数不作限制。由于对每个 $r \geq 1$ 都有自然包含映射 $\mathcal{C}^{\leq r-1} \hookrightarrow \mathcal{C}^{\leq r}$，因此 $\mathcal{F}$ 有一个由 $\mathcal{C}^{\leq r}$ 给出的滤过。令 $\mathcal{C}^r$ 表示每个 $r \geq 1$ 对应的该包含映射的余核。注意，$\mathcal{C}^r$ 是由 S-模构成的自由复形，其各个直和项在第一坐标上的次数均为 r。

接下来，我们旨在证明，对于 $r \geq 2$, $\mathcal{C}^r$ 是一个有限长度 S-模的最小自由分解。注意，对于 $r \geq 1$，$\mathcal{C}^{\leq r}$ 实际上是某个二元组 $(S/I_X, (r-1, N-1))$ 的虚拟分解，其中 $N \geq n$ 足够大（见定义 2.3）。事实上，由于 X 是一组处于充分一般位置的n 点，$(0, n-1) \in \mathbf{reg}(S/I_X)$（见命题2.6），这意味着对于所有 $r \geq 1$ 和 $N \geq n$，$(r-1, N-1) \in \mathbf{reg}(S/I_X)$。因此，我们可以将 N取为 $\mathcal{C}^{\leq r}$ 中第二个坐标出现的最大次数，从而确保二元组 $(S/I_X, (r-1, N-1))$ 的虚拟分解恰好是 $\mathcal{C}^{\leq r}$。这意味着，在复形的短正合列 $0 \longrightarrow \mathcal{C}^{\leq r-1} \longrightarrow \mathcal{C}^{\leq r} \longrightarrow \mathcal{C}^r \longrightarrow 0$ 中，对于每个 $r \geq 2$，左侧和中间的复形都是 S/I_X 的虚拟分解。因此，由同调中的长正合列可知，对于每个 $r \geq 2$，$\mathcal{C}^r$ 必定只有无关同调；也就是说，对于每个 $i \geq 0$，$H_i(\mathcal{C}^r)$ 都被 B 的某个幂所湮灭。此外，每个满足 $r \geq 2$ 的 $\mathcal{C}^r$ 的投射维数至多为二，因为其各个直和项仅来自 $\mathcal{F}$中的同调次数一、二和三；并且每个 $\mathcal{C}^r$ 实际上都是一个 $k[y_0, y_1]$ 上的复形，因为映射只涉及第二个坐标的变量。这意味着实际上，每个 $H_i(\mathcal{C}^r)$ 都被 $\langle y_0, y_1 \rangle$ 的某个幂所湮灭，因此其在 $k[y_0, y_1]$上的深度为零。注意，$\mathcal{C}^r$ 满足无挠引理 [Eis04, 引理 20.11] 的假设，因为它的投射维数至多为二，且复形中的每个模都是自由 $k[y_0, y_1]$-模，因而深度为二。应用无挠引理可知，对于 $i > 0$，每个 $H_i(\mathcal{C}^r) = 0$，否则某个同调群的深度必定至少为一。因此，对于满足 $r \geq 2$ 的每个$\mathcal{C}^r$，它都是一个有限长度 S-模的最小自由分解，因为对于$i > 0$，$H_i(\mathcal{C}^r) = 0$，并且 B 的某个幂会湮灭 $H_0(\mathcal{C}^r)$。

现在，为了证明引理，假设 $d_{r,r'}$ 是 $\Delta^2 H_X$ 的第 r 行中的第一个正项，其中 $r \geq 2$，并令 $\mathcal{C}^r$： $0 \leftarrow C_1^r \leftarrow C_2^r \leftarrow C_3^r \leftarrow 0$，因为来自 $\mathcal{F}$ 的同调次数零处没有项。由于这是一个最小自由分解，各映射中没有单位项，因此每个模的生成元的最小次数必须严格递增。根据注 2.10，我们可以准确知道 C_1^r 中出现的 Betti数：它们来自 $\Delta^2 H_X$ 的第 r 行中第一个和第二个（若存在）负项。令 $d_{r,s'}$ 为第一个负项（因此，根据我们的假设，$d_{r,r'}$ 是第一个正项，$s' < r'$）。

令 (r, t') 为 C_2^r的生成元的最小次数。那么 $\beta_{2,(r,t')} > 0$ 以及 $\beta_{2,(r,u')} = 0$对于 $u' < t'$，我们希望证明 $t' = r'$ 以及 $d_{r,r'} = \beta_{2,(r,r')}$。由于 C_i^r 的生成元的最小次数必须增加，我们知道 $s' < t'$。

首先假设 $r' = s' + 1$。那么根据定理 2.8，$\beta_{1,(r,r')} = 0$，因此命题 2.7给出 $d_{r,r'} = \beta_{2,(r,r')} - \beta_{3,(r,r')}$。由于 C_2^r 和 C_3^r 的生成元的最小次数必须增加，并且根据假设 $d_{r,r'} > 0$，我们必有 $\beta_{3,(r,r')} = 0$ 和 $d_{r,r'} = \beta_{2,(r,r')}$。因此，$t' = r'$，如所要求。

接下来，我们考虑 $r' > s' + 1$，并反设 $s' < t' < r'$。若$d_{r,\ s'+1}$为负，则由命题2.7，$\beta_{1,\ (r,s'+1)} = -d_{r,\ s'+1} = \beta_{1,\ (r,s'+1)} - \beta_{2,\ (r,s'+1)} +$

$\beta_{3,(r,s'+1)}$，这意味着 $\beta_{2,(r,s'+1)} = \beta_{3,(r,s'+1)}$。但由于 C_2^r 和 C_3^r 的生成元的最小次数不同，因此它们必定都为零。这说明，若 $d_{r,s'+1}$ 为负，则 $t' \neq s'+1$。若 $d_{r,s'+1}$ 不为负，则它必定为零（因为它不是第一个正项），并且由定理 2.8，$\beta_{1,(r,s'+1)} = 0$。因此，$d_{r,(s'+1)} = 0 = \beta_{2,(r,s'+1)} - \beta_{3,(r,s'+1)}$。同样，由于次数必须递增，$\beta_{2,(r,s'+1)} = \beta_{3,(r,s'+1)} = 0$。因此，若 $r' > s'+1$，则无论 $d_{r,s'+1}$的符号如何，$t' \neq s'+1$。这意味着 $s'+1 < t' < r'$。接着，由注 2.10，$\beta_{1,(r,t')} = 0$，所以我们有 $d_{r,t'} = \beta_{2,(r,t')} - \beta_{3,(r,t')}$。由于 $\beta_{2,(r,t')} > 0$，且根据我们的假设 $t' < r'$，$d_{r,t'}$ 不是正数，这意味着 $\beta_{3,(r,t')} > 0$。但这与 C_3^r 的生成元的最小次数必须大于 (r,t') 相矛盾。因此，我们证明了 $t' \geq r'$。最后，通过类似的论证，$d_{r,r'} = \beta_{2,(r,r')} - \beta_{3,(r,r')} > 0$ 意味着 $\beta_{2,(r,r')} > 0$ 且 $\beta_{3,(r,r')} = 0$。因此，$t' = r'$ 和 $d_{r,r'} = \beta_{2,(r,r')}$。

根据 $\Delta^2 H_X$ 的对称性，同样的论证适用于给定列中的第一个正项。□

定理 3.3。设 X 是 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 中处于充分一般位置的一组 $n \geq 2$ 点，且 (i,i') 是 $\operatorname{reg}(S/I_X)$ 的一个极小元。根据对称性，不失一般性，假设 $i \leq i'$。那么，二元组 $(S/I_X, (i,i'))$ 的虚拟分解在以下任一条件成立时长度为二：

(a) $i(i'+2) \leq n$, *or*
(b) $i(i'+2) > n$, $-3n+3ii'+4i+i' \leq 0$, *and* $3n-3ii'-2i-2i' \geq 0$.

此外，若 (a) 或 (b) 成立，则对所有次数 $\boldsymbol{r} = (r,r')$，$\preceq (i+1, i'+1)$，S/I_X 在次数 $\boldsymbol{r}$ 的双分次贝蒂数可按以下方式从 $\Delta^2 H_X$ 读出：

(i) $\beta_{0,\boldsymbol{r}} = d_{r,r'}$ 当且仅当 $\boldsymbol{r} = (0,0)$; ***(ii)*** $\beta_{1,\boldsymbol{r}} = -d_{r,r'}$ 当且仅当 $d_{r,r'} < 0$ 且或者 $d_{r,s'} > 0$ 对某个 $s' > r'$ 或 $d_{s,r'} > 0$ 对某个$s > r$; ***(iii)*** $\beta_{2,\boldsymbol{r}} = d_{r,r'}$ 当且仅当 $d_{r,r'} > 0$ 且 $\boldsymbol{r} \succ (0,0)$.

此外，满足以下任一(a) 或 (b) 的正则性极小元素会产生一对点的七种希尔伯特–伯奇虚拟分解类型，这些类型在附录A 中作为公式(3) 至 (9)进行了描述。

注3.4. 注意，在 $n = (i+1)(i'+1)$的特定情形下，条件 (a)得到满足，而定理 3.3 恰好化简为 [HNV22，定理 3.1]。他们给出的一对的虚拟分解以下述方式与我们的结果一致。若 $i' \in \{i, i+1\}$，则 $(S/I_X, (i,i'))$由等式(3)给出，这与 [HNV22，定理 3.1] 中通过取$j = i'$、$q = i'$ 和 $r = 0$ 所得到的复形相同。否则，若 $i' > i+1$，则 $(S/I_X, (i,i'))$由等式(4) 给出，这与 [HNV22，定理 3.1] 中通过取 $j = i'$、$q = j'$ 和 $r = n-(i+2)j'$ 所得到的复形相同。

定理 3.3 的证明。证明的主要思路是说明：如果 (a) 或 (b) 成立，那么从 $\Delta^2 H_X$ 中截至次数 $(i+1, i'+1)$ 的非零项出发，在 (i)、(ii) 和 (iii) 的意义下，可以确定 $(S/I_X, (i,i'))$。此外，利用引理 3.1 和引理 3.2 中的一些技术性论证，我们将看到，在上述任一条件下，$(S/I_X, (i,i'))$ 的长度为二，并且由附录 A 中的七个希尔伯特–伯奇复形之一给出。

令 $\mathcal{F}$ 为 S/I_X 的最小自由分解，如式 (1) 所示。注意到 (i) 可由 $\mathcal{F}$ 推出，而 (ii) 是定理 2.8 的另一种表述。因此，对于所有次数 $\boldsymbol{r}$，(i) 和 (ii) 都成立，而不仅仅是 $\boldsymbol{r} \preceq (i+1, i'+1)$。（关于 I_X 的最小生成元，进一步讨论见注 2.10。）因此，我们只需证明：若满足 (a) 或 (b)，则 (iii) 成立。

首先，假设 (a)。那么引理 3.1 表明 $d_{i+1,\ i'+1} \geq 0$，而该引理证明中的情形 1 和情形 2 描述了 $\Delta^2 H_X$的各种可能性。我们将利用这些描述来证明 (iii) 成立，这将表明 $(S/I_X,\ (i,\ i'))$ 的长度为二，且由方程（3）至（6）之一给出。

我们首先注意到，若 $i = 0$，则 $i' = n-1$ 且 $n = (i+1)(i'+1)$。然后，正如备注 3.4, [HNV22中的描述，定理 3.1] 表明 $(S/I_X, (i, i'))$ 长度为二，且由等式 (3) 或等式 (4给出。由此可见，通过将该复形与情形 1 或情形 2.1 中的 $\Delta^2 H_X$ 相比较，(iii) 分别成立。

既然我们已经讨论了满足 (a) 的 $i = 0$ 情形，现在假设 $i \geq 1$。那么有两种可能：或者 $(i+2)i' \leq n$，或者 $(i+2)i' > n$。若前者成立，则 $\Delta^2 H_X$ 由引理 3.1 证明中的情形 1 给出。由于 $d_{i+1,i'+1}$ 是 $\Delta^2 H_X$中次数为 (0, 0) $\prec \boldsymbol{r} \preceq (i+1, i'+1)$ 的唯一正项，我们看到 (iii) 成立当且仅当 $\beta_{2,\boldsymbol{r}} = 0$ 对所有$\boldsymbol{r} \prec (i+1, i'+1)$ 以及 $\beta_{2,(i+1,i'+1)} = d_{i+1,i'+1}$。由于这是第 $(i+1)$ 行和第 $(i'+1)$ 列中的第一个正项，引理 3.2 表明 $\beta_{2,(i+1,i'+1)} = d_{i+1,i'+1}$，且 $\beta_{2,\boldsymbol{r}} = 0$ 对所有次数为 $\boldsymbol{r} = (i+1, j')$ 且 $j' < i'+1$，以及 $\boldsymbol{r} = (j, i'+1)$ 且 $j < i+1$ 的情形成立。此外，对于剩余的次数 $\boldsymbol{r} \preceq (i, i')$，$\beta_{2,\boldsymbol{r}} = 0$成立，因为 $d_{r,\ r'} = -\beta_{1,\boldsymbol{r}} + \beta_{2,\boldsymbol{r}} - \beta_{3,\boldsymbol{r}}$（命题 2.7），$\beta_{1,\boldsymbol{r}} = 0$对所有 $\boldsymbol{r} \prec (i, i')$ 成立，$\beta_{1,(i,i')} = -d_{i,i'}$，且 Betti数必须随次数增加，即每个第一类 syzygy 的次数都必须大于某个极小生成元的次数，而每个第二类 syzygy 的次数都必须大于某个第一类 syzygy 的次数。因此，(iii) 成立；并且由于 $(S/I_X, (i, i'))$ 完全由次数至多为 $(i+1, i'+1)$ 的 Betti数确定，该复形长度为二，在这种情况下由等式 (3) 给出。

如果相反，$(i+2)i' > n$，那么 $\Delta^2 H_X$ 由情形 2 中的某个矩阵给出。如果它由情形 2.1 给出，那么我们知道唯一可能为正的项是 $d_{i+1、\ i'}$ 和 $d_{i+1、\ i'+1}$。由于这些项中的每一个都是 $\Delta^2 H_X$ 的某一行或某一列中的第一个正项，引理 3.2 给出 $\beta_{2,(i+1,i')} = d_{i+1,i'}$, $\beta_{2,(i+1,i'+1)} = d_{i+1,i'+1}$，并且不存在来自第 $(i+1)$ 行或第 $(i'+1)$ 列的其他第一个缠结。然后，我们可以使用与上一段相同的论证来证明，对于 $\boldsymbol{r} \preceq (i, i')$，$\beta_{2,\boldsymbol{r}} = 0$，从而确立 (iii)；这表明 $(S/I_X, (i, i'))$ 的长度为二，并且由式 (4) 给出。如果 $\Delta^2 H_X$ 由情形 2.2 给出，那么我们知道 $d_{i+1,i'+1} > 0$，但不知道 $d_{i+1,i'}$ 的符号。如果 $d_{i+1,i'} < 0$，那么根据 (ii)，$\beta_{1,(i+1,i')} = -d_{i+1,i'}$。由引理 3.2，$\beta_{2,(i+1,i'+1)} = d_{i+1,i'+1}$，并且不存在来自第 $(i+1)$ 行或第 $(i'+1)$ 列的缠结。然后，根据之前的相同论证，不存在次数更小的缠结，因此 (iii) 成立。如果 $d_{i+1,i'} = 0$，那么$\beta_{1,(i+1,i')} = 0$，所以根据引理 3.2，$\beta_{2,(i+1,i')} = \beta_{3,(i+1,i')} = 0$，我们再次看到 (iii) 成立。最后，如果$d_{i+1,i'} > 0$，那么我们将引理 3.2 应用于 $d_{i+1,i'}$ 和 $d_{i+1,i'+1}$，并且通过相同的论证，(iii) 成立。因此，在这种情况下，无论 $d_{i+1,i'}$ 的符号如何，$(S/I_X, (i, i'))$ 的长度为二，并且当 $d_{i+1,i'} \leq 0$ 时由式 (5) 给出，而当 $d_{i+1,i'} > 0$ 时由式 (6) 给出。

我们现在已经证明，如果 (a) 成立，那么 $(S/I_X,\ (i,\ i'))$ 具有长度为二，并且由式（3）至（6中的一个给出；这些式子由 $\Delta^2 H_X$ 中截至次数$(i+1,\ i'+1)$ 意义下的非零项决定，即 (i)、(ii)和 (iii)。

接下来，假设 (b)。那么引理3.1 给出$d_{i+1,i'+1} = 3n - 2ii' - 2i - 2i' \geq 0$ 和$d_{i,\ i'+1} = -3n + 3ii' + 4i + i' \leq 0$，而该引理证明中的情形 3描述了 $\Delta^2 H_X$ 的两种可能性。注意，由于在情形 3 中 $i' < 2i$，我们实际上必须有 $d_{i+1,i'+1} > 0$，因为如果它等于零，那么这将迫使 $d_{i,i'+1} > 0$。我们将采用与情形 1 和情形 2 中所使用的论证非常相似的论证来证明 (iii) 成立，并且 $(S/I_X, (i, i'))$ 长度为二，且由式 (7)至 (9) 中的某一个给出。如果 $\Delta^2 H_X$ 由情形 3.1 给出，那么 $d_{i,i'+1} \leq 0$ 确保唯一的正项是 $d_{i+1,i'}$ 和 $d_{i+1,i'+1}$。然后 (iii)

成立，因为引理3.2表明这些项对应极小一阶关系，而一对的虚拟分解由式（7）给出。若 $\Delta^2 H_X$ 由情形 3.2 给出，则唯一符号未确定的项是 $d_{i+1,\ i'}$。若此项为负，则根据定理2.8，它对应一个极小生成元；若此项为正，则根据引理 3.2，它对应一个一阶关系。无论哪种情况，由于 $d_{i+1,\ i'+1}$ 是第 $(i'+1)$ 列中的第一个正项，根据引理 3.2，有 $\beta_{2,\ (i+1,i'+1)} = d_{i+1,\ i'+1}$。因此，$(iii)$ 成立，并且当 $d_{i+1,\ i'} \leq 0$ 时，$(S/I_X,\ (i,\ i'))$ 由式（8）给出；当 $d_{i+1,\ i'} > 0$ 时，则由式（9）给出。□

定理1.4的证明。若 $i(i'+2) > n$ 和 $3n-3ii'-2i-2i' < 0$，则 $\Delta^2 H_X$ 由引理3.1的证明中情形 3 的某个矩阵给出，并且具有$d_{i+1,\ i'+1} < 0$。在这种情况下，我们可以证明 $d_{i,\ i'+1} > 0$。事实上，由于在情形 3中有 $i' < 2i$，我们有 $2i' - i' < 4i - 2i$，这给出$2i+2i' < 4i+i'$。因此，$3n-3ii' < 2i+2i' < 4i+i'$，所以 $d_{i,\ i'+1} = -3n+3ii'+4i+i' > 0$。如定理3.3 的证明中一样，我们可以使用引理3.2 得出$\beta_{2,\ (i,i'+1)} = d_{i,\ i'+1}$ 和$\beta_{2,\ (i+1,i')} = d_{i+1,\ i'}$。然后根据命题2.7，我们有$d_{i+1,\ i'+1} = \beta_{2,\ (i+1,i'+1)} - \beta_{3,\ (i+1,i'+1)}$。由于此项为负，我们必须有$\beta_{3,\ (i+1,i'+1)} > 0$，因此，$(S/I_X,\ (i,\ i'))$ 的长度为三。□

注记3.5。如 [Cas06、MP11、MRPL12a、BMMRN19], Giuffrida、Maggioni 和 Ragusa 在 [GMR96] 中的工作所述，他们证明了：位于 $\mathbb{P}^3$上的一般点集满足最小分解猜想，因为任意光滑二次曲面都同构于$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$，乍看之下，这似乎意味着最小分解猜想对 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$中的一般点集也成立，而这正是本文的研究对象。然而，我们考察的是一般点集的双齐次理想的双分次贝蒂数，该理想属于 S 的双分次 Cox 环 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$。因此，尽管将理想视为 $\mathbb{P}^3$的标准分次坐标环中的理想时，其贝蒂数满足最小分解猜想，但在我们研究的情形下，该猜想并非先验成立。不过，领域专家似乎相信该猜想确实成立；然而，尚无人对此给出正式证明。在定理1.4 和3.3的证明中，我们能够在某些假设下证明，直到次数 $(i+1,\ i'+1)$ 最小分解猜想成立；这些假设使我们能够排除贝蒂数发生重叠的可能性。

例如，在定理 1.4 的证明中，我们只知道 $d_{i+1,i'+1} = \beta_{2,(i+1,i'+1)} - \beta_{3,(i+1,i'+1)}$。如果最小分解猜想成立，那么这些 Betti数 中至多只有一个非零。由于我们假设 $d_{i+1,i'+1} < 0$，这将意味着 $d_{i+1,i'+1} = -\beta_{3,(i+1,i'+1)}$，于是我们就能知道一对 $(S/I_X, (i,i'))$ 的完整虚拟分解，而不只是知道它的长度为三。

此外，如果我们假设充分一般的 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 点集的最小分解猜想$d_{r\text{中的非零项}r'} \in \Delta^2 H_X$ 恰好能够确定 S/I_X 的最小自由分解，具体来说：(i)、(ii)，以及(iii) 定理3.3中的结论将对所有次数成立，并且我们将有

$$(iv)\ \beta_{3,\boldsymbol{r}} = -d_{r,r'} \text{ iff } d_{r,r'} < 0 \text{ and } d_{s,s'} > 0 \text{ for some nonzero } (s,s') \prec (r,r').$$

根据命题 2.7，这是因为最小分解猜想意味着 Betti数 $\beta_{1,(r,r')}$ $\beta_{2,(r,r')}$ $\beta_{3,(r,r')}$ 中至多有一个非零。因此，这表明，满足 (i,i') $\in$正则性(S/I_X) 的一对 $(S/I_X, (i,i'))$ 的每个虚拟分解（不一定是最小的），也由 $\Delta^2 H_X$ 中的非零项决定。特别地，这意味着，去掉条件 (b) 中 $-3n+3ii'+4i+i' \leq 0$ 的假设后，定理 3.3 将成为一个当且仅当命题。换言之，对于最小的

正则性元素，$d_{i+1,i'+1}$ 的符号将决定 $(S/I_X, (i, i'))$ 的长度：当且仅当 $d_{i+1,i'+1} < 0$ 时，其长度为三；否则长度为二。

例 3.6. 设 X 是 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 中一组处于足够一般位置的 $n = 21$ 个点，$I_X \subseteq S$ 是其定义理想。则 $\operatorname{reg}(S/I_X) = \{(i, i') \in \mathbb{Z}^2 | (i+1)(i'+1) \geq 21\}$ 有 5 个极小元素，其 $i \leq i'$ 为：$\{(0, 20), (1, 10), (2, 6), (3, 5), (4, 4)\}$。由于 X 具有一般希尔伯特函数，H_X 和 $\Delta^2 H_X = (d_{i,i'})$ 由以下无限矩阵给出。由于对称性，我们只展示每个矩阵的一个代表性部分，行和列分别以 i 和 i' 为指标，从 0 开始。

$$H_X = \left[\begin{array}{ccccccc|ccccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 21 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & 18 & 20 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 18 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 \\ 6 & 12 & 18 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 \end{array}\right]$$

$$\Delta^2 H_X = \left[\begin{array}{ccccccc|ccccccccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & 6 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 5 & 2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 5 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

让我们考虑对于每个正则性极小元的一对 $(S/I_X, (i, i'))$ 的虚拟分解。我们首先展示如何使用 $\Delta^2 H_X$ 中截至次数 (3, 5) 的非零项来计算 $(S/I_X, (3, 5)) + (1, 1) = (4, 6)$。对于 $(i, i') = (3, 5)$，$i(i'+2) = 21$，因此定理 3.3 中的条件 (a) 得到满足。因此，次数 (0, 0) 中的 1 给出 $\beta_{0,(0,0)} = 1$，次数 (3, 5)、(3, 6) 和 (4, 4) 中的负项给出 $\beta_{1,(3,5)} = 3, \beta_{1,(3,6)} = 1$，以及 $\beta_{1,(4,4)} = 4$，而次数 (4, 5) 和 (4, 6) 中的正项给出 $\beta_{2,(4,5)} = 5$ 和 $\beta_{2,(4,6)} = 2$。因此，一对的虚拟分解如下（见公式 (6)：

$$(S/I_X, (3,5)): \qquad 0 \leftarrow S \leftarrow \begin{array}{c} S(-3,-5)^3 \\ \oplus \\ S(-3,-6) \\ \oplus \\ S(-4,-4)^4 \end{array} \leftarrow \begin{array}{c} S(-4,-5)^5 \\ \oplus \\ S(-4,-6)^2 \end{array} \leftarrow 0.$$

对于 $(i,\ i') = (2,\ 6),\ i(i'+2) = 16$，因此 (a) 得到满足，我们有如下结果（参见公式（5）：

$$(S/I_X, (2,6)): \qquad 0 \leftarrow S \leftarrow \begin{array}{c} S(-2,-7)^3 \\ \oplus \\ S(-3,-5)^3 \\ \oplus \\ S(-3,-6) \end{array} \leftarrow S(-3,-7)^6 \leftarrow 0.$$

对于 $(i,\ i') = (1,\ 10),\ i(i'+2) = 12$，因此 (a) 成立，我们得到以下复形（见公式（4），其中 $j' = 6$）：

$$(S/I_X, (1,10)): \qquad 0 \leftarrow S \leftarrow \begin{array}{c} S(-1,-10) \\ \oplus \\ S(-1,-11) \\ \oplus \\ S(-2,-7)^3 \end{array} \leftarrow \begin{array}{c} S(-2,-10)^2 \\ \oplus \\ S(-2,-11)^2 \end{array} \leftarrow 0.$$

对于 $(i,\ i') = (0,\ 20)$，$i(i'+2) = 0$，因此 (a) 成立，并且我们有如下复形（见式（4），其中 $j' = 10$）：

$$(S/I_X, (0,20)): \qquad 0 \leftarrow S \leftarrow \begin{matrix} S(0,-21) \\ \oplus \\ S(-1,-10) \\ \oplus \\ S(-1,-11) \end{matrix} \leftarrow S(-1,-21)^2 \leftarrow 0.$$

最后，对于 $(i,i') = (4,4)$，$i(i'+2) = 24 > 21$ 和 $3n - 3ii' - 2i - 2i' = d_{5,5} = -1$，因此定理1.4 给出一对的虚拟分解长度为三。这是极小元正则性的一对的虚拟分解不属于希尔伯特–伯奇情形的首个例子；对于 $n \leq 20$ 个点的集合，它们的长度全都为二！复形如下，我们使用了 [M2] 来确认 $\beta_{2,(5,5)} = 0$ 和 $\beta_{3,(5,5)} = -d_{5,5} = 1$。

$$(S/I_X, (4,4)): \qquad 0 \leftarrow S \leftarrow \begin{matrix} S(-3,-5)^3 \\ \oplus \\ S(-4,-4)^4 \\ \oplus \\ S(-5,-3)^3 \end{matrix} \leftarrow \begin{matrix} S(-4,-5)^5 \\ \oplus \\ S(-5,-4)^5 \end{matrix} \leftarrow S(-5,-5) \leftarrow 0.$$

AP附录A。已知希尔伯特–伯奇(S/I_X，$(i,\ i')$)

设 X 是 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$中处于充分一般位置的一组 $n \geq 2$ 个点，并设(i,i')是reg(S/I_X) 中满足 $i \leq i'$的一个极小元。那么定理 3.3给出了一对$(S/I_X, (i,i'))$的虚拟分解何时为长度为二的充分条件。此外，它意味着，这些虚拟分解由 $\Delta^2 H_X$ 中截至次数 $(i+1, i'+1)$ 的非零项决定，具体而言，负项给出第一个模（最小生成元）中的 Betti数，而正项（不包括次数 (0,0)）给出第二个模（第一缠结）中的Betti数。在这里，我们使用引理3.1中计算的 $\Delta^2 H_X$ 矩阵，对来自定理 3.3 的希尔伯特–伯奇型$(S/I_X, (i,i'))$给出明确描述。下文中，设 $j' \leq i' - 1$ 是使得 $(i+1, j')$ 也成为 reg(S/I_X) 中的一个极小元的次数（如果存在这样的次数）。

[{"id":0,"output":"• 如果 $i(i'+2) \leq n$ 且 $(i+2)i' \leq n$ （参见引理中的情形 1 3.1），则"}]

$$(S/I_X, (i,i')): \quad 0 \leftarrow S \leftarrow \begin{matrix} S(-i,-i')^{-n+ii'+i+i'+1} \\ \oplus \\ S(-i,-i'-1)^{n-ii'-i'} \\ \oplus \\ S(-i-1,-i')^{n-ii'-i} \end{matrix} \leftarrow S(-i-1,-i'-1)^{n-ii'} \leftarrow 0. \tag{3}$$

• 如果 $i\ (i'+2)\ \leq n$，$(i+2)\ i' > n$，且 $j' < i' - 1$ （见引理 3.1 中的情形 2.1），则

$$(S/I_X, (i,i')): \quad 0 \leftarrow S \leftarrow \begin{matrix} S(-i,-i')^{-n+ii'+i+i'+1} \\ \oplus \\ S(-i,-i'-1)^{n-ii'-i'} \\ \oplus \\ S(-i-1,-j')^{-n+ij'+i+2j'+2} \\ \oplus \\ S(-i-1,-j'-1)^{n-ij'-2j'} \end{matrix} \leftarrow \begin{matrix} S(-i-1,-i')^{2(-n+ii'+i+i'+1)} \\ \oplus \\ S(-i-1,-i'-1)^{2(n-ii'-i')} \end{matrix} \leftarrow 0. \tag{4}$$

• 如果 $i(i'+2) \leq n$, $(i+2)i' > n$, $j' = i'-1$, 以及 $-3n+3ii'+i+4i' \leq 0$ （见引理中的情形 2.2 3.1），则

$$(5)\qquad (S/I_X,(i,i')): \quad 0 \leftarrow S \leftarrow \begin{array}{c} S(-i,-i')^{-n+ii'+i+i'+1} \\ \oplus \\ S(-i,-i'-1)^{n-ii'-i'} \\ \oplus \\ S(-i-1,-i'+1)^{-n+ii'+2i'} \\ \oplus \\ S(-i-1,-i')^{3n-3ii'-i-4i'} \end{array} \leftarrow S(-i-1,-i'-1)^{2(n-ii'-i')} \leftarrow 0.$$

• 若 $i(i'+2) \leq n$, $(i+2)i' > n$, $j' = i'-1$, 且 $-3n+3ii'+i+4i' > 0$ (见引理3.1中的情形 2.2)，则

$$(6)\qquad (S/I_X,(i,i')): \quad 0 \leftarrow S \leftarrow \begin{array}{c} S(-i,-i')^{-n+ii'+i+i'+1} \\ \oplus \\ S(-i,-i'-1)^{n-ii'-i'} \\ \oplus \\ S(-i-1,-i'+1)^{-n+ii'+2i'} \end{array} \leftarrow \begin{array}{c} S(-i-1,-i')^{-3n+3ii'+i+4i'} \\ \oplus \\ S(-i-1,-i'-1)^{2(n-ii'-i')} \end{array} \leftarrow 0.$$

• 若 $i(i'+2) > n$, $3n-3ii'-2i-2i' \geq 0$, $j' = i'-2$, 且 $-3n+3ii'+4i+i' \leq 0$ (见引理 3.1中的情形 3.1)，则

(7)

$$(S/I_X,(i,i')): \quad 0 \leftarrow S \leftarrow \begin{array}{c} S(-i+1,-i'-1)^{-n+ii'+2i} \\ \oplus \\ S(-i,-i')^{-n+ii'+i+i'+1} \\ \oplus \\ S(-i,-i'-1)^{3n-3ii'-4i-i'} \\ \oplus \\ S(-i-1,-i'+2)^{-n+ii'-i+2i'-2} \\ \oplus \\ S(-i-1,-i'+1)^{n-ii'+2i-2i'+4} \end{array} \leftarrow \begin{array}{c} S(-i-1,-i')^{2(-n+ii'+i+i'+1)} \\ \oplus \\ S(-i-1,-i'-1)^{3n-3ii'-2i-2i'} \end{array} \leftarrow 0.$$

• 如果 $i(i'+2) > n$, $3n-3ii'-2i-2i' \geq 0$, $j' = i'-1$, $-3n+3ii'+4i+i' \leq 0$, 且 $-3n+3ii'+i+4i' \leq 0$ （参见引理 3.1中的情形 3.2），则

$$(8)\qquad (S/I_X,(i,i')): \quad 0 \leftarrow S \leftarrow \begin{array}{c} S(-i+1,-i'-1)^{-n+ii'+2i} \\ \oplus \\ S(-i,-i')^{-n+ii'+i+i'+1} \\ \oplus \\ S(-i,-i'-1)^{3n-3ii'-4i-i'} \\ \oplus \\ S(-i-1,-i'+1)^{-n+ii'+2i'} \\ \oplus \\ S(-i-1,-i')^{3n-3ii'-i-4i'} \end{array} \leftarrow S(-i-1,-i'-1)^{3n-3ii'-2i-2i'} \leftarrow 0.$$

• 如果 $i(i'+2) > n$，$3n-3ii'-2i-2i' \geq 0$，$j' = i'-1$，$-3n+3ii'+4i+i' \leq 0$，并且$-3n+3ii'+i+4i' > 0$（见引理 3.1中的情形 3.2），则

$$(9) \quad (S/I_X,(i,i')): \quad 0 \leftarrow S \leftarrow \begin{array}{c} S(-i+1,-i'-1)^{-n+ii'+2i} \\ \oplus \\ S(-i,-i')^{-n+ii'+i+i'+1} \\ \oplus \\ S(-i,-i'-1)^{3n-3ii'-4i-i'} \\ \oplus \\ S(-i-1,-i'+1)^{-n+ii'+2i'} \end{array} \leftarrow \begin{array}{c} S(-i-1,-i')^{-3n+3ii'+i+4i'} \\ \oplus \\ S(-i-1,-i'-1)^{3n-3ii'-2i-2i'} \end{array} \leftarrow 0.$$

参考文献

[ABLS20] A. Almousa、J. Bruce、M. Loper 和 M. Sayrafi，《Macaulay2 的虚拟分解软件包》，《代数与几何软件杂志》10 (2020)，第 1 期，51–60 页。 ↑1，5[BE23] M. K. Brown 和 D. Erman，《环面簇的虚拟分解研究成果》(2023)，见 2303.14319。 ↑1[BES20] C. Berkesch、D. Erman 和 G. Smith，《射影空间乘积的虚拟分解》，《代数几何》7 (2020)，第 4 期，460–481 页。 ↑1，5[BG86] E. Ballico 和 A. Geramita，《 $\mathbb{P}^3$中 s 个一般点的理想的最小自由分解》，加拿大数学会会议录 6 (1986)。 ↑3[BH93] W. Bruns 和 J. Herzog，《科恩–麦考利环》，剑桥高等数学研究丛书，第 39 卷，剑桥大学出版社，剑桥，1993。MR1251956 ↑1[BKLY21] C. Berkesch、P. Klein、M. C. Loper 和 J. Yang，《虚拟科恩–麦考利层的同调与组合方面》，《伦敦数学会汇刊》8 (2021)，第 1 期，413–434 页。 ↑1[BMMRN19] M. Boij、J. Migliore、R. M. Miró-Roig 和 U. Nagel，《威斯康星州一般四次曲面上的最小分解猜想》，《纯粹与应用代数杂志》223 (2019)，第 4 期，1456–1471 页。 ↑16[BPC22] C. Booms-Peot 和 J. Cobb，《广义埃根–诺斯科特复形的虚拟判据》，《纯粹与应用代数杂志》226 (2022)，第 12 期，107138。 ↑1[BS22] M. K. Brown 和 M. Sayrafi，《皮卡秩为 2 的光滑射影环面簇的对角线短分解》(2022)，见 2208.00562。 ↑1[Cas06] M. Casanellas，《三次曲面上点的最小分解猜想》，《加拿大数学杂志》61 (2006)。 ↑4，16[DM19] C. Dowd 和 S. McNally，《光滑法诺环面簇中一般点的虚拟分解》，2019。 ↑1[DS20] E. Duarte 和 A. Seceleanu，《通过虚拟射影分解对张量积曲面进行隐式化》，Math. Comp. 89（2020 年 11 月），第 326 期，3023–3056 页。4136556 ↑1[Eis04] D. Eisenbud，《交换代数：以代数几何为视角》（G. T. in Mathematics 编），施普林格，2004。 ↑8，13[EPSW00] D. Eisenbud、S. Popescu、F.-O. Schreyer 和 C. Walter，《最小分解猜想的外代数方法》，《杜克数学杂志》112 (2000)。 ↑3[FL22] G. Farkas 和 E. Larson，《一般曲线上点的最小分解猜想》(2022)，见 2209.11308。 ↑4[FMP03] G. Farkas、M. Mustaţă 和 M. Popa，《$\mathcal{M}_g$上的除子，$_{g+1}$ 以及典范曲线上点的最小分解猜想》，《高等师范学校科学年刊》36 (2003)，第 4 期，553–581 页。 ↑4[GLLM21] J. Gao、Y. Li、M. C. Loper 和 A. Mattoo，《 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$中的虚拟完全交》，《纯粹与应用代数杂志》225 (2021)，第 1 期，106473。 ↑1[GMR92] S. Giuffrida、R. Maggioni 和 A. Ragusa，《光滑二次曲面上零维子概形的拟定》，《太平洋数学杂志》155 (1992)。 ↑3，6，7

[GMR94] S. Giuffrida、R. Maggioni 和 A. Ragusa，《光滑二次曲面上零维子概形的分解》，《零维概形：1992 年 6 月 8–13 日在拉韦洛举行的国际会议论文集》，1994 年，第 191–204 页。 ↑3，6，8[GMR96] S. Giuffrida、R. Maggioni 和 A. Ragusa，《位于光滑二次曲面上的一般点的分解》，Manuscripta Mathematica 91 (1996)，421–444 页。 ↑3，6，7，8，16[HHL23] A. Hanlon、J. Hicks 和 O. Lazarev，《通过线丛分解环面子簇及其应用》(2023)，见 2303.03763。 ↑1[HNV22] M. Harada、M. Nowroozi 和 A. Van Tuyl，《 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$中点的虚拟分解》，《纯粹与应用代数杂志》226 (2022)，第 12 期，107140。 ↑1，2，3，4，6，7，8，14，15[KLM+20] N. Kenshur、F. Lin、S. McNally、Z. Xu 和 T. Yu，《关于虚拟科恩–麦考利单纯复形》(2020)，见 2007.09443。 ↑1[Lop21] M. Loper，《什么样的复形才是虚拟分解？》，Trans. Amer. Math. Soc. Ser. B 8 (2021)，第 28 期，885–898 页。4325863 ↑1[Lor93] A. Lorenzini，《最小分解猜想》，Journal of Algebra 156 (1993)，第 1 期，5–35 页。↑3[M2] Macaulay2——一个用于代数几何与交换代数计算的系统，由 D. Grayson 和 M. Stillman 编程。 ↑3，5，18[MP11] J. Migliore 和 M. Patnott，《威斯康星州三次曲面上一般点的最小自由分解》，《纯粹与应用代数杂志》215 (2011)。 ↑4，16[MRPL12a] R. M. Miro Roig 和 J. Pons-Llopis，《曲面上点的最小自由分解》，Journal of Algebra 357 (2012)，304–318 页。 ↑4，16[MRPL12b] ，《德尔佩佐曲面上点的最小分解猜想》，Algebra & Number Theory 1 (2012)。 ↑4[MS04] D. Maclagan 和 G. Smith，《多重分次 Castelnuovo-Mumford 正则性》571 (2004)，179–212 页。↑5，6[Mus98] M. Mustaţă，《射影簇上一般有限点集的分次 Betti 数》，Le Matematiche；第 53 卷，第 3 期（1998）：Suppl. Pragmatic 1997；53–81 页 53 (1998)。 ↑4[Wal95] C. Walter，《 s 中一般点的齐次理想的最小自由分解》，Mathematische Zeitschrift 219 (1995)，231–234 页。 ↑3[Yan21] J. Yang，《环面簇上单项式理想的虚拟分解》，Proc. Amer. Math. Soc. Ser. B 8 (2021)，第 9 期，100–111 页。4215648 ↑1

威斯康星大学数学系，麦迪逊，威斯康星州邮箱地址: cbooms@math.wisc.edu