arXiv:2304.04955v1 [math.AP] 11 Apr 2023

关于 $\mathbb{S}^6$ 上轴对称函数的贝克纳不等式

CHANGFENG GUI, TUOXIN LI, JUNCHENG WEI, AND ZIKAI YE

Abstract. 我们证明了 Q-曲率型问题的轴对称解

$$\alpha P_6 u + 120(1 - \frac{e^{6u}}{\int_{\mathbb{S}^6} e^{6u}}) = 0 \qquad \text{on } \mathbb{S}^6$$

必为常数，前提是 $\frac{1}{2} \le \alpha < 1$。鉴于 Gui-Hu-Xie [17] 针对 $\frac{1}{7} < \alpha < \frac{1}{2}$ 得到了非恒定解的存在性，这一结果是尖锐的。该结果弥补了 [17], 中相关结果的空缺；该文证明了针对 $\alpha \ge 0.6168$ 的类似唯一性结果。这一改进基于两类新的估计：一类是对半范数 $\lfloor G \rfloor^2$ 的更优估计，另一类是关于 Gegenbauer 系数的一系列精细估计，例如逐点衰减性质和消去性质。

1. Introduction and Main Results

$\mathbb{S}^6$上的贝克纳不等式，即高阶莫泽-特鲁丁格不等式，断言泛函

$$J_\alpha(u) := \frac{\alpha}{2} \int_{\mathbb{S}^6} u(P_6 u) \mathrm{d}w + 120 \int_{\mathbb{S}^6} u \mathrm{d}w - 20 \ln \int_{\mathbb{S}^6} e^{6u} \mathrm{d}w$$

对 $\alpha = 1$ 以及所有 $u \in H^2(\mathbb{S}^6)$ 均非负，其中 $\mathrm{d}w$ 表示 $\mathbb{S}^6$ 上的归一化勒贝格测度，满足 $\int_{\mathbb{S}^6} \mathrm{d}w = 1$，而 $P_6 = -\Delta(-\Delta+4)(-\Delta+6)$ 表示 $\mathbb{S}^6$上的潘尼茨算子。此外，若再假设 u 的质量中心位于原点，且 u 属于集合

$$\mathcal{L} = \left\{ u \in H^2(\mathbb{S}^6) \ : \ \int_{\mathbb{S}^6} e^{6u} x_j \mathrm{d}w = 0, \ j = 1, ..., 7 \right\},$$

改进的高阶莫泽-特鲁丁格-奥诺弗里不等式表明，对任意 $\alpha \ge \frac{1}{2}$，存在常数 $C(\alpha) \ge 0$，使得 $J_\alpha(u) \ge -C(\alpha)$。与二阶情形 [7], 类似，人们猜想，对于任意 $\alpha \ge \frac{1}{2}$， $C(\alpha)$ 可以取为 0。

泛函 J_α 的欧拉-拉格朗日方程是以下定义在 $\mathbb{S}^6$ 上的 Q-曲率型方程

$$\alpha P_6 u + 120(1 - \frac{e^{6u}}{\int_{\mathbb{S}^6} e^{6u} \mathrm{d}w}) = 0 \text{ on } \mathbb{S}^6, \tag{1.1}$$

如果 (1.1) 只有常数解，那么该猜想便成立。当 $\alpha < 1$ 接近 1 时，第三位作者与 Xu [26] 证明了 (1.1) 的所有解都是常数。然而，对于一般的 $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1)$，该问题仍未解决。关于 Q-曲率问题的结果及背景介绍，请参阅 [9, 10, 11, 12, 16, 19, 21, 23, 26] 及其中的参考文献。

相应的 $\mathbb{S}^2$ 上的问题称为 Nirenberg 问题：

$$-\alpha\Delta u+1-\frac{e^{2u}}{\int_{\mathbb{S}^2}e^{2u}}=0 \ \text{ on } \mathbb{S}^2.$$

这个问题在过去四十年间得到了广泛研究。更多信息请参阅 [7, 8, 20] 及其中的参考文献。A. Chang 和 P. Yang 在 [7, 8]中猜想，下述泛函

$$\alpha\int_{\mathbb{S}^2}|\nabla u|^2\mathrm{d}w+2\int_{\mathbb{S}^2}u\mathrm{d}w-\ln\int_{\mathbb{S}^2}e^{2u}\mathrm{d}w$$

对于任意满足质心为 $\int_{\mathbb{S}^2}e^{2u}\vec{x}\mathrm{d}w=0$ 的 $\alpha\geq\frac{1}{2}$ 和 u，它均为非负。Feldman、Froese、Ghoussoub 和第一作者 [13] 证明，当 $\alpha>\frac{16}{25}-\epsilon$ 时，该猜想对轴对称函数成立；第一作者和第三作者在 [18] 确认了该猜想确实对轴对称函数成立。随后，Ghoussoub 和 Lin [14] 表明该猜想对 $\alpha>\frac{2}{3}-\epsilon$ 成立。最后，第一作者和 Moradifam [15] 证明了完整的猜想。关于改进的 Moser-Trudinger-Onofri 不等式在 $\mathbb{S}^2$ 上的更一般结果及其与 Szegő 极限定理的联系，参见 [5, 6]。

关于 $\mathbb{S}^4$ 上的相关问题，

$$\alpha P_4u+6(1-\frac{e^{4u}}{\int_{\mathbb{S}^4}e^{4u}\mathrm{d}w})=0 \text{ on } \mathbb{S}^4, \tag{1.2}$$

关于轴对称解，已有多项研究成果。Gui-Hu-Xie [16]利用分岔方法证明了 $\frac{1}{5}<\alpha<\frac{1}{2}$ 存在非常数解。他们还证明，在轴对称假设下，当 $\alpha\geq 0.517$时，上述方程仅有常数解。Li-Wei-Ye [22] 利用 Gegenbauer 多项式的精细估计，得到了精确界 $\alpha\geq 1$ 。

这些情形可以推广到任意 $n\geq 3$下的 $\mathbb{S}^n$ 情形。Gui-Hu-Xie [17]利用分岔方法证明了在 $\frac{1}{n+1}<\alpha<\frac{1}{2}$ 时存在非常数解，而在 $\alpha\geq 0.6168$ $(n=6)$ 和 $\alpha\geq 0.8261$ $(n=8)$ 时，所有临界点都是常数。

本文关注 $\alpha\in[\frac{1}{2},1$下的 $\mathbb{S}^6$情形中的轴对称解。如我们稍后将看到的，这个问题相当困难。

如同 [17],(1.1) 变为：

$$-\alpha[(1-x^2)^3u']^{(5)}+120-128\frac{e^{6u}}{\gamma}=0,\ x\in(-1,1), \tag{1.3}$$

它是该泛函的临界点

$$\begin{aligned}I_\alpha(u)=&-\frac{\alpha}{2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^2[(1-x^2)^3u']^{(5)}u+120\int_{-1}^{1}(1-x^2)^2u\\&-\frac{64}{3}\ln\left(\frac{15}{16}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^2e^{6u}\right)\end{aligned} \tag{1.4}$$

限制在集合

$$\mathcal{L}_r=\{u\in H^2(\mathbb{S}^6):\ u=u(x)\text{ and }\int_{-1}^{1}x(1-x^2)^2e^{6u}dx=0\}. \tag{1.5}$$

本文的主要结果如下：

定理 1.1. 若 $\alpha \geq \frac{1}{2}$，则限制在 $\mathcal{L}_r$ 上的泛函 I_α 的唯一临界点是常函数。因此，我们得到以下针对 $\mathbb{S}^6$ 上轴对称函数的改进贝克纳不等式

$$\inf_{u\in\mathcal{L}_r} I_\alpha(u) = 0,\ \alpha \geq \frac{1}{2}.$$

在 Gui-Hu-Xie [17], 的工作中，他们证明假设 $\alpha \geq \frac{1}{2}$ 是尖锐的，并采用与 [16, 18, 22]中类似的策略证明了 $\alpha \geq 0.6168$ 的定理 1.1。具体而言，他们将 $G = (1-x^2)u'$ 展开为 Gegenbauer 多项式的线性组合，并引入一个量 D，它与 Gegenbauer 系数以及 $\lfloor G \rfloor^2$ 的估计有关（见（3.2））。然而，与 [16], 中讨论的 $\mathbb{S}^4$ 情形不同，他们无法得到 β 的界，因而也无法得到 $a = \frac{6}{7}(1-\alpha\beta)$的界。因此，他们无法利用 D 生成一系列如 [16] 中的不等式，并继续进行归纳过程。

本文对 $\lfloor G \rfloor^2$ 给出了更好的估计，并采用了修订后的量 D。为了使归纳过程 $a \leq \frac{d_0}{\lambda_n}$ 可行，我们采用与 $\mathbb{S}^4$ [22] 中类似的 Gegenbauer 多项式精细逐点估计，以改进 G的 Gegenbauer 系数估计。更具体地说，我们细化了 Gegenbauer 多项式在 $x = \pm 1$附近的衰减行为。此外，我们利用相邻 Gegenbauer 多项式的消去性质，修改了 $\mathbb{S}^4$ 情形下的方法。

本文组织如下。第 2 节中，我们汇总 Gegenbauer 多项式的一些性质，将 G 展开为 Gegenbauer 多项式的线性组合，并引用 [17]中的一些基本事实。第 3 节中，我们给出关于 $\lfloor G \rfloor^2$和 G的 Gegenbauer 系数的改进估计。第 4 节中，我们利用上述估计证明定理 1.1。第 3 节中的若干引理和命题 4.1 的证明见附录。

2. Preliminaries and some basic estimates

本节首先介绍 Gegenbauer 多项式的一些性质，以及关于该方程的一些已知事实。

阶为 ν、次数为 k （[24]）的 Gegenbauer 多项式定义为

$$C_k^\nu(x) = \frac{(-1)^k}{2^k k!}\frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\Gamma(k+2\nu)}{\Gamma(2\nu)\Gamma(\nu+k+\frac{1}{2})}(1-x^2)^{-\nu+\frac{1}{2}}\frac{d^k}{dx^k}(1-x^2)^{k+\nu-\frac{1}{2}}.$$

当 k 为偶数时，C_k^ν 是偶函数；当 k 为奇数时，它是奇函数。C_k^ν 的导数满足

$$\frac{d}{dx}C_k^\nu(x) = 2\nu C_{k-1}^{\nu+1}(x). \tag{2.1}$$

令 F_k^ν为 C_k^ν的规范化，使得 $F_k^\nu(1) = 1$，即

$$F_k^\nu = \frac{k!\Gamma(2\nu)}{\Gamma(k+2\nu)}C_k^\nu, \tag{2.2}$$

那么 F_k^ν 满足

$$(1-x^2)(F_k^\nu)'' - (2\nu+1)x(F_k^\nu)' + k(k+2\nu)F_k^\nu = 0, \tag{2.3}$$

而（2.1）变为

$$(F_k^\nu)' = \frac{k(k+2\nu)}{2\nu+1}F_{k-1}^{\nu+1}. \tag{2.4}$$

引入以下利用超几何函数表示的表达式也很有用

$$F_{2m+1}^{\nu}(\cos\theta)=\cos\theta\,{}_2F_1(-m,m+\nu+1;\nu+\frac{1}{2};\sin^2\theta), \tag{2.5}$$

$$F_{2m}^{\nu+1}(\cos\theta)={}_2F_1(-m,m+\nu+1;\nu+\frac{3}{2};\sin^2\theta), \tag{2.6}$$

这里回顾一下，超几何函数对 $|x|<1$ 定义为幂级数

$${}_2F_1(a,b;c;x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k}\frac{x^k}{k!}.$$

这里 $(a)_k=\frac{\Gamma}{\Gamma(a)}$ 是 Pochhammer 符号。

在 $\mathbb{S}^6$上，相应的 Gegenbauer 多项式为 $C_k^{\frac{5}{2}}$。为便于记号，在下文中我们将 F_k 简记为 F_k^2，不会造成混淆。

由 (2.3) 可知， F_k 满足

$$(1-x^2)F_k''-6xF_k'+\lambda_kF_k=0 \tag{2.7}$$

and

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)F_kF_l=\frac{128}{(2k+5)(\lambda_k+4)(\lambda_k+6)}\delta_{kl}, \tag{2.8}$$

其中 $\lambda_k=k(k+5)$。与 [16, 18], 中一样，我们定义以下关键量。

$$G(x)=(1-x^2)u', \tag{2.9}$$

其中 u 是方程 (1.3) 的一个解。那么 G 满足方程

$$\alpha[(1-x^2)^2G]^{(5)}+120-128\frac{e^{6u}}{\gamma}=0, \tag{2.10}$$

其中

$$\gamma=\int_{-1}^{1}(1-x^2)^2e^{6u}. \tag{2.11}$$

G 可以用 Gegenbauer 多项式展开

$$G=a_0F_0+\beta x+a_2F_2(x)+\sum_{k=3}^{\infty}a_kF_k(x). \tag{2.12}$$

记

$$g=(1-x^2)^2\frac{e^{6u}}{\gamma},\ a:=\int_{-1}^{1}(1-x^2)g. \tag{2.13}$$

我们回顾 [17]中的一些结果。

引理 2.1. 对于上述的 $g=(1-x^2)^2\frac{e^{6u}}{\gamma}$ 和 $G=(1-x^2)u'$， 我们有 $a_0=0$并且

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)F_1G=\frac{16}{105}\beta, \tag{2.14}$$

$$a=\int_{-1}^{1}(1-x^2)g=\frac{6}{7}(1-\alpha\beta), \tag{2.15}$$

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)F_kG=-\frac{128}{\alpha(\lambda_k+4)(\lambda_k+6)}\int_{-1}^{1}(1-x^2)gF_k',\ k\geq 2, \tag{2.16}$$

$$\int_{-1}^{1}|[(1-x^2)^2G]''|^2=\frac{256}{35}(7-\frac{1}{\alpha})\beta. \tag{2.17}$$

引理 2.2. 对于所有 $x\in(-1,1)$，我们有

$$G_j:=(-1)^j[(1-x^2)^jG]^{(2j+1)}\le\frac{(2j+1)!}{\alpha},\ 0\le j\le 2. \tag{2.18}$$

3. Refined Estimates

本节中，我们推导出关于稍后定义的半范数 $\lfloor G\rfloor^2$ 和 b_k的两个精细估计。

为了粗略估计 β 和 $a=\frac{6}{7}(1-\alpha\beta)$，我们需要对以下半范数 $\lfloor G\rfloor^2$进行估计。令

$$\lfloor G\rfloor^2=-\int_{-1}^{1}(1-x^2)^2[(1-x^2)^3G']^{(5)}G. \tag{3.1}$$

通过分部积分（见 Gui-Hu-Xie [17]），我们得到

$$\begin{aligned}\lfloor G\rfloor^2=&-15\int_{-1}^{1}|[(1-x^2)^2G]''|^2+\frac{720}{\alpha}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^2G^2+30\int_{-1}^{1}(1-x^2)^4G'(G'')^2\\&+160\int_{-1}^{1}(1-x^2)^3(G')^3.\end{aligned} \tag{3.2}$$

借助引理 2.2，他们直接将 $G'\le\frac{1}{\alpha}$ 应用于最后两个积分，并得到了 $\lfloor G\rfloor^2$的一个估计

$$\lfloor G\rfloor^2\le(\frac{30}{\alpha}-15)\int_{-1}^{1}|[(1-x^2)^2G]''|^2-\frac{320}{\alpha}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^3(G')^2.$$

然而，仅凭这一估计，无法得到β的粗略下界，进而也无法得到 a的上界。这里的主要问题是，$\int_{-1}^{1}|[(1-x^2)^2G]''|^2$ 的系数过大。为解决这一问题，我们引入以下命题，以消去（3.2）中的第三个积分。

命题 3.1。

$$\lfloor G\rfloor^2\le-15\int_{-1}^{1}|[(1-x^2)^2G]''|^2+\frac{720}{\alpha}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^2G^2+\frac{160}{\alpha}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^3(G')^2, \tag{3.3}$$

证明。 对（3.2）分部积分，得到

$$\lfloor G\rfloor^2=-15\int_{-1}^{1}|[(1-x^2)^2G]''|^2+\frac{720}{\alpha}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^2G^2+\int_{-1}^{1}(1-x^2)^3\tilde{G}(G')^2,$$

其中

$$\tilde{G}=-15(1-x^2)G'''+120xG''+160G'. \tag{3.4}$$

Let

$$\hat{G}=-15(1-x^2)G'''+120xG''+150G'. \tag{3.5}$$

$\hat{}$ 直接计算可得， G 满足

$$(1-x^2)\hat{G}''-8x\hat{G}'-12\hat{G}=-15[(1-x^2)^2G]^{(5)}\ge-\frac{1800}{\alpha}.$$

最后一个不等式由引理 2.2 得出。

接下来我们断言

$$\hat{G} \leq \frac{150}{\alpha}.$$

为证明该断言，记 $M = \max_{-1\leq x\leq 1} \hat{G}(x)$。

如果 M 在某个点 $x_0 \in (-1, 1)$处取得，那么

$$\hat{G}'(x_0) = 0,\ \hat{G}''(x_0) \leq 0$$

所需的估计即得。

若 M 在 1 或 -1 处取得，不失一般性，设存在一个序列 $x_k \to 1$ ，使得

$$M = \lim_{k\to\infty} \hat{G}(x_k).$$

令 $r = \sqrt{1-x^2}$ 并写

$$G(x) = \bar{G}(r) \text{ and } u(x) = \bar{u}(r) \text{ for } r \in [0, 1),\ x \in (0, 1].$$

于是，我们可以将 $\bar{u}(r)$ 延拓为 $(-\frac{1}{2}, 1_2)$ 上的光滑偶函数。因此，

$$G(x) = \bar{G}(r) = -r\sqrt{1-r^2}u_r$$

是一个光滑函数。

直接计算可得

$$\hat{G}(r) = -15(1-r^2)^2 u_{rrrr} + 30(1-r^2)(7r^2-4)\frac{u_{rrr}}{r} - 15(48r^4 - 50r^2 + 5)\frac{u_{rr}}{r^2}$$

关于 r 是偶函数。此外，由于

$$\lim_{r\to 0} \frac{u_{rrr}(r)}{r} = u_{rrrr}(0),\ \lim_{r\to 0} \frac{u_{rr}(r)}{r^2} = \frac{1}{2}u_{rrrr}(0),$$

$\hat{G}(r)$ 在 $(-\frac{1}{2}, 1_2)$ 上光滑。现在我们可以写

$$\begin{aligned}
\hat{G}(r) &= c_1 + c_2 r^2 + c_3 r^4 + O(r^6),\\
x\hat{G}'(x) &= -2c_2 + O(r^2),\\
(1-x^2)\hat{G}''(x) &= (-2c_2 + 8c_3)r^2 + O(r^4)
\end{aligned}$$

在 $r = 0$ 附近。由于$\hat{G}(r)$ 在 $r = 0$ 处取得其局部最大值，我们有 $c_2 \leq 0$ 因此

$$\lim_{x\to 1} x\hat{G}'(x) \leq 0,\ \lim_{x\to 1}(1-x^2)\hat{G}''(x) = 0.$$

于是得到 $M \leq \frac{150}{\alpha}$ 。再次应用引理 2.2，我们得到

$$\tilde{G} \leq \frac{160}{\alpha}.$$

命题得证。 □

在接下来的部分中，我们开始估计 $b_k := a_k\sqrt{\int_{-1}^{1}(1-x^2)F_k^2}$，其中 a_k 是 G 展开式中的第 k 个系数（见（2.12））。对 b_k 的估计在证明 [16, 18] 中起着关键作用。在 [16], 中，他们利用了（2.16）以及以下事实:

$$|F_k'(x)| \leq |F_k'(1)| = \frac{\lambda_k}{6} \tag{3.6}$$

为了估计 b_k，如下所示

$$\begin{aligned} b_k^2 = a_k^2 \int_{-1}^{1} (1-x^2)F_k^2 &= \frac{1}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)F_k^2} \left[\frac{128}{\alpha\lambda_k} \int_{-1}^{1} (1-x^2) g F_k'\right]^2 \\ &\le \frac{(2k+5)(\lambda_k+4)(\lambda_k+6)}{128} \left[\frac{128}{\alpha\lambda_k(\lambda_k+2)} \frac{\lambda_k}{6} a\right]^2 \\ &= \frac{32(2k+5)}{9\alpha^2(\lambda_k+4)(\lambda_k+6)} a^2. \end{aligned}$$

然而，与 $\mathbb{S}^4$ 情形一样，这个估计还不足以推出归纳

$$a = \frac{6}{7}(1-\alpha\beta) \le \frac{d_0}{\lambda_n}. \tag{3.7}$$

同样，我们需要对 b_k 作出更精细的估计，这可由以下关于 Gegenbauer 多项式的精细估计得到。为简便起见，在本文余下部分，我们记

$$\tilde{F}_k' = \frac{6}{\lambda_k} F_k' = \frac{720}{\lambda_k(\lambda_k+4)(\lambda_k+6)} C_{k-1}^{\frac{7}{2}} \tag{3.8}$$

使得 $\tilde{F}_k'(1) = 1$。与 $\mathbb{S}^4$ 中一样，我们将右端的积分 b_k 分成两部分。为此，我们定义

$$a_+ := \int_0^1 (1-x^2)g,\ a_- := \int_{-1}^0 (1-x^2)g,\ A_k^+ = \int_0^1 (1-x^2)\tilde{F}_k' g,\ A_k^- = \int_{-1}^0 (1-x^2)\tilde{F}_k' g, \tag{3.9}$$

不失一般性，我们可以假设 $a_+ = \lambda a$，其中 $\frac{1}{2} \le \lambda \le 1$。

现在我们推导关于 g 的一些估计。回顾 g 的定义，可得

$$\int_{-1}^1 g = 1,\ \int_{-1}^1 xg = 0 \text{ and } \int_{-1}^1 (1-x^2)g = a.$$

由上面的第二个积分可得

$$\int_0^1 g - \int_0^1 (1-x)g = \int_0^1 xg = -\int_{-1}^0 xg = \int_{-1}^0 g - \int_{-1}^0 (1+x)g. \tag{3.10}$$

由于

$$\left|\int_0^1 (1-x)g\right| \le \int_0^1 (1-x^2)g = a_+,\ \left|\int_{-1}^0 (1+x)g\right| \le \int_0^1 (1-x^2)g = a_-,$$

结合 (3.10)，我们有

$$\left|\int_0^1 g - \int_{-1}^0 g\right| \le a.$$

因此

$$\frac{1-a}{2} \le \int_0^1 g, \int_{-1}^0 g \le \frac{1+a}{2}. \tag{3.11}$$

此外，由 g 的定义可直接推出

$$\int_0^1 xg \le \min\{\int_0^1 g, \int_{-1}^0 g\} \le \frac{1}{2}, \tag{3.12}$$

and

$$\int_0^1 (1+x)g = 1 - \int_{-1}^0 (1+x)g < 1. \tag{3.13}$$

利用上述关于 g 的估计，下面的定理给出了关于$A_k^{\pm}$ 的精细估计，进而也给出了关于 b_k的精细估计。

定理3.2. 令 $d = 8$、 $b = 0.33$。假设 $a \le \frac{16}{\lambda_n}$ 对于某个 $n \ge 3$。则对于所有k，我们有

$$|A_k^+| \le \mathcal{A}_k^+ := \begin{cases} a_+ - \frac{1-b}{d}\lambda_k a_+^2, \ \textit{if } \lambda_k \le \frac{\lambda_n}{4}, \\ ba_+ + (1-b)\frac{d}{4\lambda_k}, \ \textit{if } \frac{\lambda_n}{4} < \lambda_k \le \lambda_n, \end{cases} \tag{3.14}$$

$$|A_k^-| \le \mathcal{A}_k^- := \begin{cases} a_- - \frac{1-b}{d}\lambda_k a_-^2, \ \textit{if } a_- \le \frac{4}{\lambda_n}, \\ ba_- + (1-b)\frac{d}{4\lambda_k}\chi_{\{\lambda\neq 1\}}, \ \textit{if } \frac{4}{\lambda_n} < a_- \le \frac{8}{\lambda_n}. \end{cases} \tag{3.15}$$

事实上，对于 k 较小的简单情形，可以得到更好的估计。证明留在附录 A。

引理3.3. 对于 A_k， $2 \le k \le 5$,

$$|A_2| \le a_+ - a_+^2, \tag{3.16}$$

$$|A_3| \le a - \frac{9}{4}\frac{a^2}{a+1}(2\lambda^2 - 2\lambda + 1), \tag{3.17}$$

$$|A_4| \le (a_+ - a_+^2) - \frac{11}{4}(a_+ - a_+^2)^2 + \frac{1}{4\sqrt{11}}a_-, \tag{3.18}$$

$$|A_5| \le a - \frac{11(a_+^2 + a_-^2)}{2(a+1)} + \frac{143(a_+^3 + a_-^3)}{10(a+1)^2}. \tag{3.19}$$

在我们为一般的 k 证明定理3.2 之前，我们先介绍一些 Gegenbauer 多项式的逐点估计。

引理 3.4 （Nemes 和 Olde Daalhuis 的推论 5.3 [25] ）。 设 $0 < \zeta < \pi$ 且$N \ge 3$ 为整数。那么

$$C_{k-1}^{\frac{7}{2}}(\cos\zeta) = \frac{2}{\Gamma(\frac{7}{2})(2\sin\zeta)^{\frac{7}{2}}}\left(\sum_{n=0}^{N-1} t_n(3)\frac{\Gamma(k+6)}{\Gamma(k+n+\frac{7}{2})}\frac{\cos(\delta_{k-1,n})}{\sin^n\zeta} + R_N(\zeta, k-1)\right), \tag{3.20}$$

其中 $\delta_{k,n} = (k+n+\frac{7}{2})\zeta - (\frac{7}{2}-n)\frac{\pi}{2}$, $t_n(\mu) = \frac{(\frac{1}{2}-\mu)_n(\frac{1}{2}+\mu)_n}{(-2)^n n!}$, 而 $(x)_n = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)}$ 是 *Pochhammer* 符号。余项 R 满足计式

$$|R_N(\zeta,k)| \le |t_N(3)|\frac{\Gamma(k+6)}{\Gamma(k+N+\frac{7}{2})}\frac{1}{\sin^N\zeta}\cdot\begin{cases} |\sec\zeta| & \textit{if } 0 < \zeta \le \frac{\pi}{4} \textit{ or } \frac{3\pi}{4} \le \zeta < \pi, \\ 2\sin\zeta & \textit{if } \frac{\pi}{4} < \zeta < \frac{3\pi}{4}. \end{cases} \tag{3.21}$$

利用逐点估计（3.20），我们可以证明以下关于 F_k'的下界和上界~~界。注意，当 k为偶数时， F_k'为奇函数；当 k为奇数时， F_k'为偶函数。只需在 $[0,1]$ 上估计 F_k'即可。证明留给附录B。

引理 3.5。 设 $m_0 = 0.04$，则对于所有 $k \ge 8$，有

$$\widetilde{F}_k' \ge -m_0, \quad 0 \le x \le 1.$$

引理 3.6.设 $d=8$ 和 $b=0.33$。那么对于所有 $k\geq 6$,

$$\widetilde{F}_k' \leq \begin{cases} b, & 0\leq x\leq 1-\dfrac{d}{\lambda_k}, \\ 1-\dfrac{\lambda_k}{d}(1-b)(1-x), & 1-\dfrac{d}{\lambda_k}\leq x\leq 1. \end{cases}$$

借助上述两个引理，我们能够推导出定理 3.2。

定理 *3.2* 的证明。 由下文的 (4.4)，我们有 $\beta\geq \frac{113}{88}$，$\alpha<0.578$，因此有$a\leq 0.221$。容易验证当 $2\leq k\leq 5$ 成立时的情形，可得到引理 3.6 形式下的更优估计。在以下论证中，我们可以假设 $k\geq 6$。定义 $I=(0,1-\frac{d}{\lambda_k})$、$II=(1-\frac{d}{\lambda_k},1)$ 和 $a_I=\int_I (1-x^2)g$,$a_{II}=\int_{II}(1-x^2)g$。于是由引理 3.6 和 (3.13)，我们有

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-x^2)\widetilde{F}_k' g &= \int_I (1-x^2)\widetilde{F}_k' g + \int_{II}(1-x^2)\widetilde{F}_k' g \\ &\leq \int_I (1-x^2)bg + \int_{II}(1-x^2)(1-\frac{\lambda_k}{d}(1-b)(1-x))g \\ &= ba_I + a_{II} - \frac{\lambda_k}{d}(1-b)\int_{II}(1-x^2)(1-x)g \\ &\leq ba_I + a_{II} - \frac{\lambda_k}{d}(1-b)\frac{(\int_{II}(1-x^2)g)^2}{\int_{II}(1+x)g} \\ &\leq ba_I + a_{II} - \frac{\lambda_k}{d}(1-b)a_{II}^2 \\ &= ba_+ + (1-b)(a_{II} - \frac{\lambda_k}{d}a_{II}^2). \end{aligned} \tag{3.22}$$

如果 $\lambda_k\leq \frac{\lambda_n}{4}$，我们有 $a_{II}\leq a_+\leq a\leq \frac{16}{\lambda_n}\leq \frac{d}{2\lambda_k}$。因此,

$$\int_0^1 (1-x^2)\widetilde{F}_k' g \leq a_+ + (1-b)(a_+ - \frac{\lambda_k}{d}a_+^2) = a_+ - \frac{\lambda_k}{d}(1-b)a_+^2.$$

对于 $\lambda_k>\frac{\lambda_n}{4}$ 的情形，我们可直接得到

$$\int_0^1 (1-x^2)\widetilde{F}_k' g \leq ba_+ + (1-b)\frac{d}{4\lambda_k}.$$

另一方面，由引理 3.5 可得

$$\int_0^1 (1-x^2)\widetilde{F}_k' g \geq -0.04\int_0^1 (1-x^2)g = -0.04a_+.$$

结合上述三个估计，我们得到了关于 A_k^+ 的所需估计。

同样，在估计 A_k^- 时，只需注意到 $a_-\leq \frac{a}{2}\leq \frac{8}{\lambda_n}$。我们可以得到一个类似于 (3.22) 的估计，因而 (3.15) 直接成立。细节略去。□

接下来，我们推导连续 Gegenbauer 多项式相消的一个一致估计。该估计基于递推公式以及 Gegenbauer 多项式的一个有用不等式。众所周知，对于 $0<\nu<1$、$-1\leq x\leq 1$，有

$$(1-x^2)^{\frac{\nu}{2}}|C_n^\nu(x)| < \frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)}n^{\nu-1}, \tag{3.23}$$

其中常数 $\frac{2^{1-\nu}}{\Gamma\ \nu}$ () 是最优的。（参见 [3]中的定理 7.33.2。）我们认为， $\nu > 1$也存在与（3.23）类似的结果，但现在，以下引理已足以满足我们的需要，其证明留给附录 C。为保持记号一致，我们将使用 F_n^ν 而非 C_n^ν。

引理 3.7. 对于 $\nu \geq 2$ 和 $-1 \leq x \leq 1$，若 $n \geq \max\{2\nu+2, 12\}$，则有

$$|(1-x^2)F_n^\nu(x)| \leq \frac{\widetilde{C}_\nu}{n(n+2\nu)}, \tag{3.24}$$

~其中 C_ν 由(C.6)给出。

借助上述引理，我们可以证明以下命题。

命题 3.8. 设 $c_n^\nu = \max_{0\leq x\leq 1} |F_{n+1}^\nu(x) - F_n^\nu(x)|$。对于 $\nu \geq 2$，有

$$c_n^\nu \leq \frac{1}{n}\left(\frac{\widetilde{C}_\nu}{n+2\nu+1} + \widetilde{C}_{\nu+1}\right)$$

如果 $n \geq$ 最大值$\{2\nu+2, 12\}$。

证明。回顾 Gegenbauer 多项式的递推公式。

$$(1-x^2)2\nu C_n^{\nu+1} = -(n+1)xC_{n+1}^\nu + (n+2\nu)C_n^\nu,$$

根据 (2.2)，可将其改写为

$$(1-x^2)(n+2\nu+1)F_n^{\nu+1} = -xF_{n+1}^\nu + F_n^\nu.$$

然后由 (3.24),

$$\begin{aligned}
|F_{n+1}^\nu(x) - F_n^\nu(x)| &= |(1-x)F_{n+1}^\nu(x) - (1-x^2)(n+2\nu+1)F_n^{\nu+1}(x)| \\
&\leq |(1-x^2)F_{n+1}^\nu(x)| + (n+2\nu+1)|(1-x^2)F_n^{\nu+1}(x)| \\
&\leq \frac{\widetilde{C}_\nu}{(n+1)(n+2\nu+1)} + \frac{(n+2\nu+1)\widetilde{C}_{\nu+1}}{n(n+2\nu+2)} \\
&\leq \frac{1}{n}\left(\frac{\widetilde{C}_\nu}{n+2\nu+1} + \widetilde{C}_{\nu+1}\right).
\end{aligned}$$

□

~ ₇回顾 $F_n' = F_{n-1}^2$，因此我们有

~ ~**推论 3.9**。 令 $c_n =$最大值$_{0\leq x\leq 1} |F_{n+1}' - F_n'|$，则 $c_n \leq 0.12$ 若 $6 \leq n \leq 29$ 且$c_n < 0.026$ 若 $n \geq 30$。

证明。 直接通过 Matlab计算表明，第一个断言成立，并且 c_n <0。026 对于 $30 \leq n \leq 428$ （计算结果记录在补充~ ~数据文件中）。对于 $n > 428$，由（C.6），我们有 $C_{\frac{7}{2}} \leq 9.19$ 以及 $C_{\frac{9}{2}} \leq 11.02$, 因此还可以推导出

$$c_n = c_{n-1}^{\frac{7}{2}} \leq \frac{11.1}{n-1} < 0.026.$$

□

4. PROOF OF MAIN THEOREM FOR $\mathbb{S}^6$

在本节中，我们将通过归纳论证，借助关于 b_k 的精细估计，证明针对 $\mathbb{S}^6$ 的定理 1.1。

我们断言 $\beta = 0$，由此根据（2.17）可得 $(1-x^2)^2 G$ 是一个线性函数。由于 G 在 $(-1, 1)$ 上有界，我们得到 $G \equiv 0$，证毕。

因此，只需证明 $\beta = 0$。我们将通过矛盾来论证。如果 $\beta \neq 0$，那么 $0 < \beta < \frac{1}{\alpha}$ 因为 $a = \int_{-1}^{1}(1-x^2)g = \frac{6}{7}(1-\alpha\beta) > 0$。于是只需证明 $a = 0$。我们将通过证明来实现这一点。

$$a = \frac{6}{7}(1-\alpha\beta) \leq \frac{d_0}{\lambda_n}, \ \forall n \geq 5 \text{ with } n \equiv 1 \pmod 4, \tag{4.1}$$

其中 $d_0 = 16$。

与 [18] 和 [22], 中一样，我们将通过归纳法证明 (4.1)。

首先，我们引入如下量。

$$D = \sum_{k=3}^{\infty} \left[\lambda_k(\lambda_k+4)(\lambda_k+6) - (14 - \frac{74}{9\alpha})(\lambda_k+4)(\lambda_k+6) - \frac{160}{\alpha}\lambda_k - \frac{720}{\alpha} \right] b_k^2. \tag{4.2}$$

由（2.17）和（3.3），得到

$$\begin{aligned} D =& \lfloor G \rfloor^2 - (14 - \frac{74}{9\alpha}) \int_{-1}^{1} |[(1-x^2)^2 G]''|^2 - \frac{160}{\alpha} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^3 (G')^2 \\ & - \frac{720}{\alpha} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^2 G^2 + \frac{16}{105}(\frac{2080}{3\alpha} + 960)\beta^2 \\ \leq & (\frac{74}{9\alpha} - 29) \int_{-1}^{1} |[(1-x^2)^2 G]''|^2 + \frac{16}{105}(\frac{2080}{3\alpha} + 960)\beta^2 \\ =& \frac{256}{35}(\frac{74}{9\alpha} - 29)(7 - \frac{1}{\alpha})\beta + \frac{512}{7}(\frac{13}{9\alpha} + 2)\beta^2. \end{aligned} \tag{4.3}$$

由于 $D \geq 0$、$\alpha \geq \frac{1}{2}$ 和 $0 < \beta < \frac{1}{\alpha}$，我们得到

$$\beta \geq \frac{9}{440}(29 - \frac{74}{9\alpha})(7 - \frac{1}{\alpha}) \geq \frac{113}{88}, \tag{4.4}$$

and

$$\frac{256}{35}(\frac{74}{9\alpha} - 29)(7 - \frac{1}{\alpha}) + \frac{512}{7}(\frac{13}{9\alpha} + 2)\frac{1}{\alpha} \geq 0, \tag{4.5}$$

这意味着

$$\alpha < 0.578. \tag{4.6}$$

另一方面，任取整数 $n \geq 3$，我们有

$$\begin{aligned}
D =& \sum_{k=3}^{\infty} \left[\lambda_k(\lambda_k+4)(\lambda_k+6) - (14 - \frac{74}{9\alpha})(\lambda_k+4)(\lambda_k+6) - \frac{160}{\alpha}\lambda_k - \frac{720}{\alpha} \right] b_k^2 \\
\geq & \sum_{k=n+1}^{\infty} \left[\lambda_{n+1} - 14 + \frac{74}{9\alpha} - \frac{160\lambda_{n+1}+720}{(\lambda_{n+1}+4)(\lambda_{n+1}+6)\alpha} \right] (\lambda_k+4)(\lambda_k+6) b_k^2 \\
& + \sum_{k=3}^{n} \left[\lambda_k - 14 + \frac{74}{9\alpha} - \frac{160\lambda_k+720}{(\lambda_k+4)(\lambda_k+6)\alpha} \right] (\lambda_k+4)(\lambda_k+6) b_k^2 \\
\geq & (\lambda_{n+1} - 14 + \frac{275}{63\alpha}) \sum_{k=n+1}^{\infty} (\lambda_k+4)(\lambda_k+6) b_k^2 \\
& + \sum_{k=3}^{n} (\lambda_k - 14 + \frac{176}{63}\alpha)(\lambda_k+4)(\lambda_k+6) b_k^2 \\
= & \sum_{k=3}^{n} (\lambda_k - \lambda_{n+1} - \frac{11}{7\alpha})(\lambda_k+4)(\lambda_k+6) b_k^2 \\
& + (\lambda_{n+1} - 14 + \frac{275}{63\alpha}) \left[\frac{256}{35}(7 - \frac{1}{\alpha})\beta - \frac{128}{7}\beta^2 - 360 b_2^2 \right]. \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

结合（4.3）和（4.7），我们得到

$$\begin{aligned}
0 \leq & \frac{256}{35}(7 - \frac{1}{\alpha})(\frac{27}{7\alpha} - 15 - \lambda_{n+1})\beta + \frac{128}{7}(\lambda_{n+1} - 6 + \frac{71}{7\alpha})\beta^2 \\
& + \frac{176}{63\alpha}(\lambda_2+4)(\lambda_2+6) b_2^2 + \sum_{k=2}^{n} (\lambda_{n+1} - \lambda_k + \frac{11}{7\alpha})(\lambda_k+4)(\lambda_k+6) b_k^2. \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

然后我们可以开始归纳过程，以证明 $a \leq \frac{16}{\lambda_n}$，对所有满足 $n \equiv 1$ （模 4）的 $n \geq 5$ 均成立。注意，由（4.4）和（4.6），我们已经有 $a \leq 0.221 \leq \frac{16}{\lambda_5}$。 —

根据归纳法，现在假设对于某个满足 $n \equiv 1$ （模 4）的 $n \geq 5$，有 $a \leq \frac{16}{\lambda_n}$。然后我们将证明 $a \leq \frac{16}{\lambda_{n+4}}$。我们通过反证法进行论证，并反设相反地有 $a > \frac{16}{\lambda_{n+4}}$。

令 $B_k = \frac{9\alpha^2}{32}(\lambda_{n+1} - \lambda_k + \frac{11}{7\alpha})(2k+5)$，则对于每个偶数 k，我们有

$$\begin{aligned}
& \frac{9\alpha^2}{32} \left[(\lambda_{n+1} - \lambda_k + \frac{11}{7\alpha})(\lambda_k+4)(\lambda_k+6) b_k^2 + (\lambda_{n+1} - \lambda_{k+1} + \frac{11}{7\alpha})(\lambda_{k+1}+4)(\lambda_{k+1}+6) b_{k+1}^2 \right] \\
=& B_k (\int_{-1}^{1} (1-x^2)\tilde{F}_k' g)^2 + B_{k+1} (\int_{-1}^{1} (1-x^2)\tilde{F}_{k+1}' g)^2 \\
=& B_k \left[(\int_{0}^{1} (1-x^2)\tilde{F}_k' g)^2 + (\int_{-1}^{0} (1-x^2)\tilde{F}_k' g)^2 \right] + B_{k+1} \left[(\int_{0}^{1} (1-x^2)\tilde{F}_{k+1}' g)^2 + (\int_{-1}^{0} (1-x^2)\tilde{F}_{k+1}' g)^2 \right] \\
& + 2B_k \int_{0}^{1} (1-x^2)\tilde{F}_k' g \int_{-1}^{0} (1-x^2)(\tilde{F}_k' + \tilde{F}_{k+1}') g + 2B_{k+1} \int_{0}^{1} (1-x^2)(\tilde{F}_{k+1}' - \tilde{F}_k') g \int_{-1}^{0} (1-x^2)\tilde{F}_{k+1}' g \\
& + 2(B_{k+1} - B_k) \int_{0}^{1} (1-x^2)\tilde{F}_k' g \int_{-1}^{0} (1-x^2)\tilde{F}_{k+1}' g \\
:=& R_{k,1} + R_{k,2} + R_{k,3}.
\end{aligned}$$

回顾定理 3.2 中 $\mathcal{A}_k^{\pm}$ 的定义。根据定理 3.2，我们有

$$\begin{aligned} R_{k,1} &= B_k \left[(\int_0^1 (1-x^2)\tilde{F}_k' g)^2 + (\int_{-1}^0 (1-x^2)\tilde{F}_k' g)^2 \right] \\ &\quad + B_{k+1} \left[(\int_0^1 (1-x^2)\tilde{F}_{k+1}' g)^2 + (\int_{-1}^0 (1-x^2)\tilde{F}_{k+1}' g)^2 \right] \\ &\le B_k \left(|\mathcal{A}_k^+|^2 + |\mathcal{A}_k^-|^2 \right) + B_{k+1} \left(|\mathcal{A}_{k+1}^+|^2 + |\mathcal{A}_{k+1}^-|^2 \right). \end{aligned} \tag{4.9}$$

令 c_k 如推论 3.9 中的定义，则有

$$\begin{aligned} &| \int_{-1}^0 (1-x^2)(\tilde{F}_k' + \tilde{F}_{k+1}')g| \le c_k a_- = c_k(1-\lambda)a, \\ &| \int_0^1 (1-x^2)(\tilde{F}_{k+1}' - \tilde{F}_k')g| \le c_k a_+ = c_k \lambda a. \end{aligned}$$

So

$$\begin{aligned} R_{k,2} &= 2B_k \int_0^1 (1-x^2)\tilde{F}_k' g \int_{-1}^0 (1-x^2)(\tilde{F}_k' + \tilde{F}_{k+1}')g \\ &\quad + 2B_{k+1} \int_0^1 (1-x^2)(\tilde{F}_{k+1}' - \tilde{F}_k')g \int_{-1}^0 (1-x^2)\tilde{F}_{k+1}' g \\ &\le 2(B_k + B_{k+1}) c_k \lambda(1-\lambda)a^2. \end{aligned} \tag{4.10}$$

最后，由引理 3.5 可得

$$R_{k,3} \le \begin{cases} 2(B_{k+1} - B_k)\lambda(1-\lambda)a^2, & \text{if } B_k \le B_{k+1}, \\ 2(B_k - B_{k+1})m_0(1-\lambda)a^2, & \text{if } B_{k+1} < B_k. \end{cases} \tag{4.11}$$

现在，根据 (4.9)、(4.10) 和 (4.11)，可以得到 (4.7) 中求和式的每一项在每个偶数 k 情况下的估计。

$$\begin{aligned} &\frac{9\alpha^2}{32}[(\lambda_{n+1} - \lambda_k + \frac{11}{7\alpha})(\lambda_k + 4)(\lambda_k + 6)b_k^2 + (\lambda_{n+1} - \lambda_{k+1} + \frac{11}{7\alpha})(\lambda_{k+1} + 4)(\lambda_{k+1} + 6)b_{k+1}^2] \\ \le & B_k \left(|\mathcal{A}_k^+|^2 + |\mathcal{A}_k^-|^2 \right) + B_{k+1} \left(|\mathcal{A}_{k+1}^+|^2 + |\mathcal{A}_{k+1}^-|^2 \right) + 2(B_k + B_{k+1}) c_k \lambda(1-\lambda)a^2 \\ + & \begin{cases} 2(B_{k+1} - B_k)\lambda(1-\lambda)a^2, & \text{if } B_k \le B_{k+1}, \\ 2(B_k - B_{k+1})m_0(1-\lambda)a^2, & \text{if } B_{k+1} < B_k. \end{cases} \end{aligned} \tag{4.12}$$

注 4.1. 注意，这个估计优于 $\mathbb{S}^4$ 情形下的估计。证明中用到了相邻 *Gegenbauer* 多项式之间的抵消。

上面的右端可以视为关于 $\lambda = \frac{a_+}{a}$ 的函数 $f_{k,a}(\lambda)$。下面的命题表明，最差情形是 $\lambda = 1$。特别地，在这种情形下，可以略去较小的项 $R_{k,2}$ 和 $R_{k,3}$。证明留给附录 D。

命题 4.1。设 a 满足 $\frac{d_0}{\lambda_{n+4}} \le a \le \frac{d_0}{\lambda_n}$，~~其中某个 $n \ge 5$ 满足 $n \equiv 1$ （模 4）~~，其中 $d_0 = 16$。令 $f_{k,\ a}(\lambda)$ 如上定义。那么对于任意 k 偶数，对于 $n \ge 41$，

(1) 若 $\lambda_k \le \frac{1}{4}\lambda_n$，则

$$f_{k,a}(\lambda) \le f_{k,a}(1) = B_k(a - \frac{1-b}{d}\lambda_k a^2)^2 + B_{k+1}(a - \frac{1-b}{d}\lambda_{k+1} a^2)^2. \tag{4.13}$$

(2) 如果 $\frac{1}{4}\lambda_n < \lambda_k \le \lambda_n$，那么

$$f_{k,a}(\lambda) \le f_{k,a}(1) = B_k(ba + (1-b)\frac{d}{4\lambda_k})^2 + B_{k+1}(ba + (1-b)\frac{d}{4\lambda_{k+1}})^2. \quad (4.14)$$

对于 $5 \le n \le 65$，我们有

(1) If $\lambda_k \le \frac{1}{4}\lambda_n$, *then*

$$f_{k,a}(\lambda) \le B_k(a-\frac{1-b}{d}\lambda_k a^2)^2+B_{k+1}(a-\frac{1-b}{d}\lambda_{k+1}a^2)^2+\frac{1}{2}(B_k+B_{k+1})c_k a^2. \quad (4.15)$$

(2) 若 $-\frac{1}{4}\lambda_n < \lambda_k \le \lambda_n$，则

$$f_{k,a}(\lambda) \le B_k(ba + (1-b)\frac{d}{4\lambda_k})^2 + B_{k+1}(ba + (1-b)\frac{d}{4\lambda_{k+1}})^2 + \frac{1}{2}(B_k + B_{k+1})c_k a^2. \quad (4.16)$$

在下文中，我们将假设 $n > 10000$。当 $n < 10000$ 时的情形由 Matlab 检查，并留待附录E。

借助命题 4.1，并将其代入 (4.8)，我们得到

$$\begin{aligned}
0 \le & \frac{256}{35}(7-\frac{1}{\alpha})(\frac{27}{7\alpha}-15-\lambda_{n+1})\frac{1}{\alpha}(1-\frac{7}{6}a)+\frac{128}{7}(\lambda_{n+1}-6+\frac{71}{7\alpha})\frac{1}{\alpha^2}(1-\frac{7}{6}a)^2 \\
& +\frac{176}{63}\alpha(\lambda_2+4)(\lambda_2+6)b_2^2 \\
& +\frac{32}{9\alpha^2}\sum_{k=2}^{\frac{n-3}{2}}(\lambda_{n+1}-\lambda_k+\frac{11}{7\alpha})(2k+5)(1-\frac{1-b}{d}\lambda_k\frac{16}{\lambda_{n+4}})^2a^2 \\
& +\frac{32}{9\alpha^2}\sum_{k=\frac{n-1}{2}}^{n}(\lambda_{n+1}-\lambda_k+\frac{11}{7\alpha})(2k+5)(ba+(1-b)\frac{d}{4\lambda_k})^2. \\
\le & -\frac{512}{7}(\lambda_{n+1}+\frac{51}{7})(1-\frac{7}{6}a)+\frac{512}{7}(\lambda_{n+1}+\frac{100}{7})(1-\frac{7}{6}a)^2+\frac{22528}{63\alpha}a^2 \\
& +\frac{128}{9}\sum_{k=2}^{\frac{n-3}{2}}(\lambda_{n+1}-\lambda_k+\frac{22}{7})(2k+5)(1-\frac{1-b}{d}\lambda_k\frac{16}{\lambda_{n+4}})^2a^2 \\
& +\frac{128}{9}\sum_{k=\frac{n-1}{2}}^{n}(\lambda_{n+1}-\lambda_k+\frac{22}{7})(2k+5)(ba+(1-b)\frac{d}{4\lambda_k})^2. \\
=: & g_{n,1}(a)+g_{n,2}(a)+g_{n,3}(a)=g_n(a)
\end{aligned} \quad (4.17)$$

其中 $g_{n,1}$,$g_{n,2}$ 和 $g_{n,3}$ 在最后一个等式中定义。

对于$g_{n,2}(a)$，我们可以将其分解为三个求和式

$$g_{n,2}(a) = \frac{128}{9}\left[S_1 - \frac{34(1-b)}{d\lambda_{n+4}}S_2 + \frac{289(1-b)^2}{d^2\lambda_{n+4}^2}S_3\right]a^2, \quad (4.18)$$

其中

$$S_1 = \sum_{k=2}^{\frac{n-3}{2}}(\lambda_{n+1}-\lambda_k+\frac{11}{7\alpha})(2k+5) = \frac{7}{32}n^4+\frac{23}{8}n^3-\frac{115}{112}n^2-\frac{4265}{56}n-\frac{20075}{224}, \quad (4.19)$$

$$S_2 = \sum_{k=2}^{\frac{n-3}{2}} (\lambda_{n+1} - \lambda_k + \frac{11}{7\alpha})(2k+5)\lambda_k$$
$$= \frac{5}{192}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{3611}{1344}n^4 - \frac{9}{28}n^3 - \frac{100207}{5376}n^2 - \frac{1393237}{896}n - \frac{1040985}{1024}, \tag{4.20}$$

$$S_3 = \sum_{k=2}^{\frac{n-3}{2}} (\lambda_{n+1} - \lambda_k + \frac{11}{7\alpha})(2k+5)\lambda_k^2$$
$$= \frac{13}{3072}n^8 + \frac{41}{384}n^7 + \frac{1525}{1792}n^6 + \frac{3011}{2688}n^5 - \frac{48697}{3584}n^4 - \frac{14917}{384}n^3$$
$$+ \frac{1000525}{5376}n^2 - \frac{1393237}{896}n - \frac{1040985}{1024} \tag{4.21}$$

对于$g_{n,\ 3}(a)$，直接计算可得

$$\sum_{k=\frac{n-1}{2}}^{n} (\lambda_{n+1} - \lambda_k + \frac{22}{7})(2k+5)(ba + (1-b)\frac{d}{4\lambda_k})^2$$
$$= b^2 S_4 a^2 + 2b(1-b)(\lambda_{n+1} + \frac{22}{7})\frac{d}{4}S_5 a - 2b(1-b)\frac{d}{4}S_6 a + (1-b)^2\frac{d^2}{16}(\lambda_{n+1} + \frac{22}{7})S_7 - (1-b)^2\frac{d^2}{16}S_5, \tag{4.22}$$

其中

$$S_4 = \sum_{k=\frac{n-1}{2}}^{n} (\lambda_{n+1} - \lambda_k + \frac{22}{7})(2k+5) = \frac{9}{32}n^4 + \frac{33}{8}n^3 + \frac{2763}{112}n^2 + \frac{3753}{56}n + \frac{15147}{224}, \tag{4.23}$$

$$S_5 = \sum_{k=\frac{n-1}{2}}^{n} \frac{2k+5}{\lambda_k} = \sum_{k=\frac{n-1}{2}}^{n} (\frac{1}{k} + \frac{1}{k+5}) \geq 1.3863, \tag{4.24}$$

$$S_6 = \sum_{k=\frac{n-1}{2}}^{n} (2k+5) = \frac{3}{4}n^2 + \frac{9}{2}n + \frac{27}{4}, \tag{4.25}$$

$$S_7 = \sum_{k=\frac{n-1}{2}}^{n} \frac{2k+5}{\lambda_k^2} = \frac{1}{5}\sum_{k=\frac{n-1}{2}}^{n} (\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+5)^2})$$
$$= \frac{1}{5}\left(\frac{3}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{3}{(n+3)^2} - \frac{1}{(n+4)^2} + \frac{3}{(n+5)^2} + \frac{4}{(n+7)^2} + \frac{4}{(n-1)^2}\right)$$
$$\leq \frac{3}{n^2}. \tag{4.26}$$

为了得到矛盾，我们需要证明对于 $\frac{16}{\lambda_{n+4}} < a < \frac{16}{\lambda_n}$， $g_n(a)$ 为负。直接计算可得，对于满足 $n \equiv 1 \pmod 4$ 的 $n > 10000$，有以下三个估计

$$\begin{aligned}
g_{n,1}(a) =& -\frac{512}{7}(\lambda_{n+1}+\frac{51}{7})(1-\frac{7}{6}a)+\frac{512}{7}(\lambda_{n+1}+\frac{100}{7})(1-\frac{7}{6}a)^2+\frac{22528}{63\alpha}a^2\\
=&\frac{512}{7}\left[7-\frac{7}{6}a\lambda_{n+1}-\frac{149}{6}a+\frac{49}{36}\lambda_{n+1}a^2+\frac{175}{9}a^2\right]+\frac{22528}{63\alpha}a^2\\
\leq&\frac{512}{7}\left(7-\frac{56}{3}\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+4}}-\frac{1192}{3\lambda_{n+4}}+\frac{3136}{9\lambda_n}+\frac{44800}{9\lambda n^2}\right)+\frac{91543}{\lambda_n^2}\leq -853.33,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{n,2}(a) =&\frac{128}{9}\left[S_1-\frac{67}{25\lambda_{n+4}}S_2+\frac{4489}{2500\lambda_{n+4}^2}S_3\right]a^2\\
\leq&\frac{128}{9}\left[\left(\frac{56n^4}{\lambda_n^2}+\frac{736n^3}{\lambda_n^2}+\frac{1840n^2}{\lambda_{n+4}^2}-\frac{136480n}{7\lambda_{n+4}^2}-\frac{160600}{7\lambda_{n+4}^2}\right)\right.\\
&+\left(-\frac{268n^6}{15\lambda_{n+4}^3}-\frac{343n^5}{\lambda_{n+4}^3}-\frac{1843n^4}{\lambda_{n+4}^3}+\frac{221n^3}{\lambda_n^3}+\frac{51154n^2}{\lambda_n^3}+\frac{231234n}{\lambda_n^3}+\frac{40683}{\lambda_n^3}\right)\\
&+\left(\frac{1.94524n^8}{\lambda_n^4}+\frac{49.0797n^7}{\lambda_n^4}+\frac{391.18n^6}{\lambda_n^4}+\frac{515n^5}{\lambda_{n+4}^4}-\frac{6245n^4}{\lambda_{n+4}^4}-\frac{17856n^3}{\lambda_{n+4}^4}\right.\\
&\left.\left.-\frac{85550n^2}{\lambda_n^4}-\frac{714770n}{\lambda_n^4}-\frac{467298}{\lambda_{n+4}^4}\right)\right]\\
\leq&571.123,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{n,3}(a) =&\frac{128}{9}\left[0.1089S_4a^2+\frac{2211}{2500}(\lambda_{n+1}+\frac{22}{7})S_5a-\frac{2211}{2500}S_6a+\frac{4489}{2500}(\lambda_{n+1}+\frac{22}{7})S_7-\frac{4489}{2500}S_5\right]\\
\leq&\frac{128}{9}\left[\left(\frac{7.8408n^4}{\lambda_n^2}+\frac{115n^3}{\lambda_n^2}+\frac{688n^2}{\lambda_n^2}+\frac{1869n}{\lambda_n^2}+\frac{1886}{\lambda_n^2}\right)+19.6166\frac{\lambda_{n+1}+\frac{22}{7}}{\lambda_n}-\frac{10.6128n^2}{\lambda_{n+4}}\right.\\
&\left.+\frac{13467}{2500}\frac{\lambda_{n+1}+\frac{22}{7}}{n^2}-2.48923\right]\\
\leq&280.95.
\end{aligned}$$

综合以上三个估计，我们得到

$$0\leq g_n(a)\leq -853.33+571.123+280.95<-1.257<0,$$

对所有满足 $n>10000$ 、 $n\equiv 1 \pmod 4$ 和 $\frac{16}{\lambda_{n+4}}<a\leq\frac{16}{\lambda_n}$ 的情况，这就构成了矛盾。因此，我们完成了定理 1.1 的证明。

Appendix A. proof of Lemma 3.3

在本附录中，我们证明引理 3.3。

引理 *3.3* 的证明。 定义 $A^+_{m,\ n}=\int_0^1 x^m(1-x^2)^n g$、 $A^-_{m,\ n}=\int_{-1}^0 |x|^m(1-x^2)^n g$, 以及 $A_{m,\ n}=A^+_{m,\ n}+A^-_{m,\ n}$。 我们首先估计 A_2。 根据定义，

$$|A_2|=|\int_{-1}^1 x(1-x^2)g|\leq \max\left\{A^+_{1,1},A^-_{1,1}\right\}.$$

由柯西-施瓦茨不等式和 (3.13),

$$a_+ - A_{1,1}^+ = \int_0^1 (1-x^2)(1-x)g \geq \frac{(\int_0^1 (1-x^2)g)^2}{\int_0^1 (1+x)g} \geq a_+^2,$$

so

$$A_{1,1}^+ \leq a_+ - a_+^2.$$

同理,

$$A_{1,1}^- \leq a_- - a_-^2.$$

由于 $a < 1$，并且我们已假设 $\lambda \geq \frac{1}{2}$，-我们得出

$$|A_2| \leq a_+ - a_+^2.$$

$|A_4|$ 的估计类似于 $|A_2|$的估计。根据定义,

$$A_4 = \int_{-1}^1 (1-x^2)g\widetilde{F}_4' = \frac{1}{8}\int_{-1}^1 (1-x^2)(11x^2-3)xg = A_{1,1} - \frac{11}{8}A_{1,2}.$$

由柯西-施瓦茨不等式和（3.12）），

$$A_{1,2} \geq \frac{(A_{1,1}^+)^2}{\int_0^1 xg} \geq 2(A_{1,1}^+)^2,$$

so

$$A_4^+ \leq A_{1,1}^+ - \frac{11}{4}(A_{1,1}^+)^2$$

另一方面,

$$A_4^+ \geq \frac{1}{8}\min_{0\leq x\leq 1}\{(11x^2-3)x\}\int_0^1 (1-x^2)g = -\frac{1}{4\sqrt{11}}a_+.$$

同理,

$$-(A_{1,1}^- - \frac{11}{4}(A_{1,1}^-)^2) \leq A_4^- \leq \frac{1}{4\sqrt{11}}a_-.$$

由于 $\lambda \geq \frac{1}{2}$，我们得出

$$|A_4| \leq A_{1,1}^+ - \frac{11}{4}(A_{1,1}^+)^2 + \frac{1}{4\sqrt{11}}a_- \leq (a_+ - a_+^2) - \frac{11}{4}(a_+ - a_+^2)^2 + \frac{1}{4\sqrt{11}}a_-.$$

A_3 和 A_5 的估计略有不同。对于 A_3，我们写作

$$A_3 = \int_{-1}^1 (1-x^2)g\widetilde{F}_3' = \frac{1}{8}\int_{-1}^1 (1-x^2)(9x^2-1)g = \frac{1}{8}(9A_{2,1} - a).$$

由柯西-施瓦茨不等式和 (3.11),

$$\begin{aligned}(A_{2,1}^+)^2 &\leq \int_0^1 (1-x^2)^2 g \int_0^1 x^4 g \\ &\leq (a_+ - A_{2,1}^+)(\frac{a+1}{2} - a_+ - A_{2,1}^+),\end{aligned}$$

so

$$A_{2,1}^+ \leq a_+ - \frac{2a_+^2}{a+1}. \tag{A.1}$$

同理,

$$A_{2,1}^- \leq a_- - \frac{2a_-^2}{a+1}.$$

因此,

$$A_{2,1} \le a - \frac{2a_+^2 + 2a_-^2}{a+1} = a - \frac{2a^2}{a+1}(2\lambda^2 - 2\lambda + 1).$$

因此

$$A_3 \le a - \frac{9}{4}\frac{a^2}{a+1}(2\lambda^2 - 2\lambda + 1),$$

这与 A_3的定义一起意味着

$$|A_3| \le \max\left\{a - \frac{9}{4}\frac{a^2}{a+1}(2\lambda^2 - 2\lambda + 1), \frac{a}{8}\right\} = a - \frac{9}{4}\frac{a^2}{a+1}(2\lambda^2 - 2\lambda + 1).$$

最后，对于 A_5，我们有

$$A_5 = \frac{1}{80}\int_{-1}^{1}(1-x^2)(3 - 66x^2 + 143x^4)g = \frac{1}{80}(80a - 143A_{2,2} - 77A_{2,0}).$$

由柯西-施瓦茨不等式和 (3.11) 得,

$$A_{2,2}^+ \ge \frac{(A_{2,1}^+)^2}{\int_0^1 x^2 g} \ge \frac{(A_{2,1}^+)^2}{\frac{a+1}{2} - a_+},$$

因此由 (A.1),

$$\begin{aligned} A_5^+ &\le \frac{1}{80}\big(80a_+ - \frac{143(A_{2,1}^+)^2}{\frac{a+1}{2} - a_+} - 77(a_+ - A_{2,1}^+)\big) \\ &\le \frac{1}{80}\Big(3a_+ - 11(a_+ - \frac{2a_+^2}{a+1})(\frac{26a_+}{a+1} - 7)\Big) \\ &= a_+ - \frac{11a_+^2}{2(a+1)} + \frac{143a_+^3}{10(a+1)^2}. \end{aligned}$$

因此

$$A_5 \le a - \frac{11(a_+^2 + a_-^2)}{2(a+1)} + \frac{143(a_+^3 + a_-^3)}{10(a+1)^2}.$$

另一方面,

$$A_5 \ge \frac{1}{80}\min_{-1\le x\le 1}\{3 - 66x^2 + 143x^4\}\int_{-1}^{1}(1-x^2)g = -\frac{3}{52}a.$$

由(4.4)以及对 $|A_2|$ 和 $|A_3|$的估计，我们可以推得 $a < 0.125$，因此现在不难看出

$$|A_5| \le a - \frac{11(a_+^2 + a_-^2)}{2(a+1)} + \frac{143(a_+^3 + a_-^3)}{10(a+1)^2}.$$

因此，引理 3.3 的证明完成了。 □

Appendix B. proof of Lemma 3.5 and 3.6

在本附录中，我们证明引理 3.5 和引理 3.6。这些证明具有技术性，并运用了 Gegenbauer 多项式的许多定量性质。

在证明引理 3.5 之前，我们先陈述一个关于 Gegenbauer 多项式的一般引理。用 $x_{nk}(\nu)$、 $k = 1, \cdots, n$ 表示 $C_n^\nu(x)$ 的零点，并按降序排列，即 $1 > x_{n1}(\nu) > \cdots > x_{nn}(\nu) > -1$。

引理 B.1（Area 等人的推论 2.3[1]）。对于任意 $n \geq 2$ 以及对于每个 $\nu \geq 1$，不等式

$$x_{n1}(\nu) \leq \sqrt{\frac{(n-1)(n+2\nu-2)}{(n+\nu-2)(n+\nu-1)}}\cos(\frac{\pi}{n+1}) \tag{B.1}$$

成立。

下一个引理是众所周知的，对于许多其他正交多项式也成立。

引理 B.2 (Olver 等人 [2]). 记 $y_{nk}(\nu)$，$k = 0, 1, \cdots, n-1, n$ 为 $|C_n^\nu(x)|$ 按降序排列的局部极大值，则 $y_{n0}(\nu) = 1, y_{nn}(\nu) = -1$，并且我们有

(*a*) $y_{nk}(\nu) = x_{n-1,k}(\nu+1)$ $k = 1, \cdots, n-1$.(*b*) $|C_n^\nu(y_{n0}(\nu))| > |C_n^\nu(y_{n1}(\nu))| > \cdots > |C_n^\nu(y_{n,[\frac{n+1}{2}]}(\nu))|$.(*c*) $(C_n^\nu)^{(k)}(x) > 0$ 在 $(x_{n1}(\nu), 1)$ 对所有 $k = 0, 1, \cdots, n$.

引理 *3.5* 的证明。通过 Matlab 直接计算可知，该引理对 $8 \leq k \leq 200$成立，因此下文中我们可以假设 $k > 200$。根据引理 B.1 和~(2.1)，我们知道 F_k' 在 $[0, 1]$ 上的最小值在该点处取得

$$x_{k-2,1}(\frac{9}{2}) \leq \sqrt{\frac{(k-3)(k+5)}{(k+\frac{3}{2})(k+\frac{1}{2})}}\cos(\frac{\pi}{k-1}) < 1 - \frac{12.5}{k^2}. \tag{B.2}$$

在引理 3.4 中取 $N = 4$，可得

$$\tilde{F}_k'(\cos\zeta) = F_{k-1}^{\frac{7}{2}}(\cos\zeta) = 48\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\sum_{m=0}^{3} t_m(3)\frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k+m+\frac{7}{2})}\frac{\cos(\delta_{k-1,m})}{\sin^{m+\frac{7}{2}}\zeta} + \widetilde{R}\right), \tag{B.3}$$

~其中 R 满足

$$|\widetilde{R}| \leq t_4(3)\frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k+\frac{15}{2})}(\sin\zeta)^{-\frac{15}{2}} \cdot \begin{cases} \sec\zeta & \text{if } 0 < \zeta \leq \frac{\pi}{4}, \\ 2\sin\zeta & \text{if } \frac{\pi}{4} < \zeta < \frac{\pi}{2}, \end{cases} \tag{B.4}$$

$0 \leq m \leq 3$ 的 $t_m(3)$ 值列示如下：

$$t_0(3) = 1, t_1(3) = \frac{35}{8}, t_2(3) = \frac{945}{128}, t_3(3) = \frac{3465}{1024}, t_4(3) = -\frac{45045}{32768}.$$

令$\sin\zeta = \frac{l}{k}$。那么根据(B.2)，我们可以假设 $l \geq 5$。由 (B.4) 可知，如果 $l \leq \frac{k}{\sqrt{2}}$，那么

$$|\widetilde{R}| \leq |t_4(3)|\frac{k^{\frac{15}{2}}\Gamma(k)}{l^{\frac{15}{2}}\Gamma(k+\frac{15}{2})}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{l^2}{k^2}}} < \frac{1.5}{l^{\frac{15}{2}}\sqrt{1-\frac{l^2}{k^2}}}; \tag{B.5}$$

而如果 $l > \frac{k}{\sqrt{2}}$，那么

$$|\widetilde{R}| \leq 2|t_4(3)|\frac{k^{\frac{15}{2}}\Gamma(k)}{l^{\frac{15}{2}}\Gamma(k+\frac{9}{2})} < \frac{3(\sqrt{2})^{\frac{15}{2}}}{k^{\frac{15}{2}}}. \tag{B.6}$$

为了得到所需的下界，我们将使用以下简单估计。

$$\cos(x+\delta) = \cos x - \delta\sin(x+h\delta) \geq \cos x - |\delta|. \tag{B.7}$$

$$\zeta-\sin\zeta\le(\frac{\pi}{2}-1)\sin^3\zeta\le\sin^3\zeta,\ 0<\zeta<\frac{\pi}{2}. \tag{B.8}$$

借助于 (B.7) 和 (B.8)，我们有

$$\begin{aligned}\cos\left(\delta_{k-1,m}\right)&=\cos\left((k+\frac{5}{2}+m)\zeta-(\frac{7}{2}-m)\frac{\pi}{2}\right)\\&=\cos\left((k+\frac{5}{2}+m)\frac{l}{k}+(k+\frac{5}{2}+m)(\zeta-\sin\zeta)-(\frac{7}{2}-m)\frac{\pi}{2}\right)\\&\ge\cos\left(l-(\frac{7}{2}-m)\frac{\pi}{2}\right)-\left((k+\frac{5}{2}+m)(\zeta-\sin\zeta)+(\frac{5}{2}+m)\frac{l}{k}\right)\\&\ge\cos\left(l-(\frac{7}{2}-m)\frac{\pi}{2}\right)-(3+m)\frac{l}{k}.\end{aligned} \tag{B.9}$$

因此我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{m=0}^{3}t_m(3)\frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k+m+\frac{7}{2})}\frac{\cos\left(\delta_{k-1,m}\right)}{\sin^{m+\frac{7}{2}}\zeta}=\sum_{m=0}^{3}t_m(3)\frac{k^{m+\frac{7}{2}}\Gamma(k)}{\Gamma(k+m+\frac{7}{2})}\frac{\cos\left(\delta_{k-1,m}\right)}{l^{m+\frac{7}{2}}}\\&\ge\frac{k^{\frac{13}{2}}\Gamma(k)}{\Gamma(k+\frac{13}{2})}\sum_{m=0}^{3}t_m(3)\frac{(k+\frac{7}{2}+m)_{3-m}}{k^{3-m}l^{m+\frac{7}{2}}}\left(\cos\left(l-(\frac{7}{2}-m)\frac{\pi}{2}\right)-(3+m)\frac{l}{k}\right)\\&\ge\min\left\{(1-\frac{16}{k})\sum_{m=0}^{3}t_m(3)\frac{(k+\frac{7}{2}+m)_{3-m}}{k^{3-m}l^{m+\frac{7}{2}}}\left(\cos\left(l-(\frac{7}{2}-m)\frac{\pi}{2}\right)-(3+m)\frac{l}{k}\right),0\right\}.\end{aligned}$$

写。

$$(1-\frac{16}{k})\sum_{m=0}^{3}t_m(3)\frac{(k+\frac{7}{2}+m)_{3-m}}{k^{3-m}l^{m+\frac{7}{2}}}\left(\cos\left(l-(\frac{7}{2}-m)\frac{\pi}{2}\right)-(3+m)\frac{l}{k}\right)=\sum_{i=0}^{4}E_i,$$

其中

$$E_0=\frac{1024l^3\cos\left(l+\frac{\pi}{4}\right)-1920l^2\cos\left(l-\frac{\pi}{4}\right)-840l\cos\left(l+\frac{\pi}{4}\right)-315\cos\left(l-\frac{\pi}{4}\right)}{1024l^{13/2}},$$

$$E_1=\frac{-3\left(512l^3+1280l^2-2304l^2\cos\left(l+\frac{\pi}{4}\right)+700l-1920l\cos\left(l-\frac{\pi}{4}\right)+770\cos\left(l+\frac{\pi}{4}\right)-315\right)}{512kl^{11/2}},$$

$$E_2=\frac{-10368l^2+11520l+15296l\cos\left(l+\frac{\pi}{4}\right)+64920\cos\left(l-\frac{\pi}{4}\right)-5775}{256k^2l^{9/2}},$$

$$E_3=\frac{-3\left(478l^2-2705l-231l\cos\left(l+\frac{\pi}{4}\right)-1980\cos\left(l-\frac{\pi}{4}\right)\right)}{8k^3l^{9/2}}$$

$$E_4=\frac{297(-7l+80)}{8k^4l^{7/2}}.$$

若 $5\le l\le 6.5$，则 $E_0\ge-0.0002$, $E_1\ge-0.00025$, $E_2\ge-1.5\times10^{-5}$, $E_3\ge-10^{-7}$, $E_4\ge0$。由 (B.5) 可得 $|\widetilde{R}|\le8\times10^{-6}$。因此，由 (B.3) 可知

$$\tilde{F}_k'(\cos\zeta)\ge-48\sqrt{\frac{2}{\pi}}\times0.005\ge-0.04.$$

若 $l > 6.5$，则 $E_0 \geq -0.00077$, $E_1 \geq -0.0002$, $E_2 \geq -10^{-5}$, $E_3 \geq -10^{-7}$, $E_4 \geq -10^{-9}$。(B.5) 或 (B.6) 均可推出 $|\widetilde{R}| \leq 3 \times 10^{-7}$，因此我们还有

$$\tilde{F}_k'(\cos\zeta) \geq -48\sqrt{\frac{2}{\pi}} \times 0.01 \geq -0.04.$$

因此，该引理得证。 □

引理*3.6* 的证明。 我们首先证明以下一点处的估计:

$$0.3 \leq \tilde{F}_k'(1 - \frac{8}{\lambda_k}) \leq 0.33, \quad k \geq 6. \tag{B.10}$$

通过 Matlab 的直接计算表明，(B.10) 对于 $6 \leq k \leq 100$成立，因此在下文中我们可以假设 $k > 100$。我们所使用的主要工具是超几何展开(2.5)和(2.6)。我们将仅对偶数 k 证明 (B.10)，而奇数 k 的情形类似。

令 $k = 2m + 2$，则 $F_k' = F_{k-1}^{\frac{7}{2}}$，因此由 (2.5),

$$\tilde{F}_k'(1 - \frac{8}{\lambda_k}) = (1 - \frac{8}{\lambda_k})_2F_1(-m, m + \frac{9}{2}; 4; t),$$

其中 $t = 1 - (1 - \frac{8}{\lambda_k})^2 = \frac{8}{\lambda_k}(2 - \frac{8}{\lambda_k})$。现在我们写

$$_2F_1(-m, m + \frac{9}{2}; 4; t) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \gamma_i t^i,$$

其中 $\gamma_i = \frac{(m-i+1)i}{4^i} \cdot \frac{(m+\frac{7}{2})!}{()_i}$。容易看出

$$\min_{1 \leq i < m} \{\frac{\gamma_i}{\gamma_{i+1}}\} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{10}{(m-1)(m+\frac{9}{2})} = \frac{40}{(k-3)(k+7)} > t.$$

因此

$$\sum_{i=0}^{j_1 \text{ is odd}} (-1)^i \gamma_i t^i \leq {}_2F_1(-m, m + \frac{9}{2}; 4; t) \leq \sum_{i=0}^{j_2 \text{ is even}} (-1)^i \gamma_i t^i$$

取 $j_1 = 5, j_2 = 6$，直接计算可知 (B.10) 成立，因为 $m \geq 50$。现在根据引理 3.5，可知 $\tilde{F}_k'(1 - \frac{8}{\lambda_k}) > -\min_{0 \leq x \leq 1} \tilde{F}_k'(x)$。进而由引理 B.2 (*b*)，对所有 $0 \leq x \leq 1 - \frac{8}{\lambda_k}$，都有 $\tilde{F}_k'(1 - \frac{8}{\lambda_k}) \geq \tilde{F}_k'(x)$。此外，由引理 B.2 (*c*) 可知，$\tilde{F}_k'(x)$ 在 $[1 - \frac{8}{\lambda_k}, 1]$ 上的凸性成立。至此，引理 3.6 得证。□

Appendix C. proof of Lemma 3.7

我们首先证明一个简单引理，从而可以专注于 $x = 1$ 附近的区域。令 $x = \cos\theta$，我们在本附录中引入函数 $v(\theta) = (\sin\theta)^2 F_n^{\nu}(\cos\theta)$。

引理 C.1. 对于 $n \geq 2$ 和 $\nu > 0$，令 $v(\theta)$ 如上所定义。若 $\nu \geq 2$，则随着 θ 从 $\frac{\pi}{2}$ 递减至0，$|v(\theta)|$ 的相继相对极大值构成递增序列。

引理 *C.1* 的证明. 由 (2.3) 可直接验证， v 满足方程

$$v''(\theta)+p(\theta)v'(\theta)+q(\theta)=0,$$

其中 $p(\theta)=(2\nu-4)\cos\theta$，且 $q(\theta)=(n^2+2\nu n+4)-\frac{2}{\sin^2\theta}+(4\nu-8)(\sin\theta-\frac{1}{\sin\theta})$。由于 $\nu>2$，我们知道 $p\geq 0, q$ 是递增的，且 q 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内有唯一零点 θ。由于 $v(0)=0, v'>0$ 在 0 附近，且 $q(\theta)<0$ 在 $(0,\theta)$，根据最大值原理，容易看出，$|v(\theta)|$ 在 $(0,\theta]$ 中没有局部最大值。现在我们考虑当 $\theta\in(\theta,\frac{\pi}{2}]$ 的情形。令 $\tilde{q}=q^{-1}$，则 $\tilde{q}>0$ 在 $(\theta,\frac{\pi}{2}]$ 中严格递减。引入

$$f(\theta)=v^2(\theta)+\tilde{q}(\theta)(v')^2(\theta),$$

我们有

$$f'=\tilde{q}'(v')^2+2v'(\tilde{q}v''+v)=(\tilde{q}'-2p\tilde{q})u'^2<0.$$

但是 $f(\theta)=v^2(\theta)$，如果 $v'(\theta)=0$，所以引理得证。 □

引理 *3.7*的证明。鉴于引理 C.1，我们需要为 θ_* 找到一个界，其中 θ_*是 $v'(\theta)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 中的最小零点。根据 v 的定义以及 (2.4),

$$\begin{aligned}v'(\theta)&=\sin\theta\left(2\cos\theta F_n^\nu(\cos\theta)-\sin^2\theta(F_n^\nu)'(\cos\theta)\right)\\&=\sin\theta\left(2\cos\theta F_n^\nu(\cos\theta)-\frac{n(n+2\nu)}{2\nu+1}\sin^2\theta F_{n-1}^{\nu+1}(\cos\theta)\right).\end{aligned}$$

我们断言，当 $\theta=\bar{\theta}=\arcsin\sqrt{\frac{4\nu+2}{n(n+2\nu)}}$ 时，

$$v'(\bar{\theta})=2\sin\bar{\theta}\left(\cos\bar{\theta}F_n^\nu(\cos\bar{\theta})-F_{n-1}^{\nu+1}(\cos\bar{\theta})\right)<0. \tag{C.1}$$

我们将使用 Gegenbauer 多项式的超几何函数展开式 (2.5) 和 (2.6) 来证明 (C.1)。我们只给出 n 为奇数时的证明， n 为偶数时的证明类似。

写 $n=2m+1$。根据引理B.1，不难证明 $\cos\theta>x_{2m+1,1}(\nu)$，因此 $F_{2m+1}^\nu(\cos\theta)>0$，所以我们有

$$\begin{aligned}F_{2m}^{\nu+1}(\cos\bar{\theta})-\cos\bar{\theta}F_{2m+1}^\nu(\cos\bar{\theta})&\geq {}_2F_1(-m,m+\nu+1;\nu+\frac{3}{2};\sin^2\bar{\theta})-{}_2F_1(-m,m+\nu+1;\nu+\frac{1}{2};\sin^2\bar{\theta})\\&=\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}\alpha_k(\sin^2\bar{\theta})^k,\end{aligned}$$

其中 $\alpha_k=\frac{(m-k+1)_k(m+\nu+1)_k}{(k-1)!(\nu+\frac{1}{2})_{k+1}}$。我们计算

$$\frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}}=\frac{k(k+\nu+\frac{3}{2})}{(m-k)(m+\nu+k+1)}.$$

由此很容易看出，

$$\min_{1\leq k<m}\{\frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}}\}=\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\frac{\nu+\frac{5}{2}}{(m-1)(m+\nu+2)}.$$

由于$\sin^2\bar{\theta}=\frac{4\nu+2}{n(n+2\nu)}=\frac{4\nu+2}{(2m+1)(2m+2\nu+1)}<\frac{\nu+\frac{5}{2}}{(m-1)(m+\nu+2)}$，无论 m 是偶数还是奇数，我们都有

$$F_{2m}^{\nu+1}(\cos\bar{\theta})-\cos\bar{\theta}F_{2m+1}^\nu(\cos\bar{\theta})\geq\sum_{\substack{1\leq k\leq m\\ k\text{ is odd}}}(\sin^2\bar{\theta})^k(\alpha_k-\alpha_{k+1}\sin^2\bar{\theta})>0,$$

其中约定 $\alpha_{m+1}=0$，所以（C.1）成立。因此，由于当θ 很小时 $v'(\theta)>0$，由（C.1）可知 $\theta_*<\theta_\circ$

现在我们来寻找 θ_*的下界。令 $\theta=\arcsin\sqrt{\frac{4\nu+2}{n(n+2\nu)}\delta}$，其中 $0<\delta<1$待定。我们希望证明

$$v'(\theta)=2\sin\theta\left(\cos\theta F_n^{\nu}(\cos\theta)-\delta F_{n-1}^{\nu+1}(\cos\theta)\right)>0 \tag{C.2}$$

对所有$0\le\theta<\underline{\theta}$，与之前一样，我们只考虑 $n=2m+1$的情形，于是可以写成

$$\cos\theta F_n^{\nu}(\cos\theta)-\delta F_{n-1}^{\nu+1}(\cos\theta)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\beta_k(\sin^2\theta)^k,$$

其中

$$\beta_k=\frac{(m-k+1)_k(m+\nu+1)_k}{k!(\nu+\frac12)_{k+1}}\left((\nu+\frac12+k)\cos^2\theta)-\delta(\nu+\frac12)\right).$$

我们计算得

$$\frac{\beta_k}{\beta_{k+1}}=\frac{(k+1)(\nu+\frac12+k+1)}{(m-k)(m+\nu+k+1)}\frac{(\nu+\frac12+k)\cos^2\theta-\delta(\nu+\frac12)}{(\nu+\frac32+k)\cos^2\theta-\delta(\nu+\frac12)},$$

so

$$\min_{0\le k<m}\{\frac{\beta_k}{\beta_{k+1}}\}=\frac{\beta_0}{\beta_1}=\frac{\nu+\frac32}{m(m+\nu+1)}\frac{(\nu+\frac12)\cos^2\theta-\delta(\nu+\frac12)}{(\nu+\frac32)\cos^2\theta-\delta(\nu+\frac12)}.$$

因此，要证明 (C.2)，只需证明 $\frac{\beta_0}{\beta_1}>\sin^2\theta$，或者等价地

$$(\nu+\frac32)(\nu+\frac12)(\cos^2\theta-\delta)>m(m+\nu+1)\left((\nu+\frac32)\cos^2\theta-\delta(\nu+\frac12)\right)\sin^2\theta.$$

这是一个关于 $\sin^2\theta$ 的二次不等式。如果我们选择

$$\delta=\frac{\nu-\sqrt{\nu}+\frac12}{\nu+\frac12}, \tag{C.3}$$

然后，由于我们已经假设了 $n\ge2\nu+2$，直接计算表明，只需证明上述不等式对于$\theta=\theta$ 成立即可，而这归结为

$$(\nu+\frac32)(\cos^2\underline{\theta}-\delta)>m(m+\nu+1)\left((\nu+\frac32)\cos^2\underline{\theta}-\delta(\nu+\frac12)\right)\frac{4\delta}{n(n+2\nu)}.$$

由于 $\frac{4m}{(m+\nu+1)\ n(n+2\nu)}=\frac{(n-1)(n+2\nu+1)}{n(n+2\nu)}<1$，我们只需证明

$$\cos^2\underline{\theta}-\delta>\delta\left(\cos^2\underline{\theta}-\frac{\nu+\frac12}{\nu+\frac32}\delta\right),$$

这很容易验证，因此我们省略细节。

由（C.1）和（C.2），我们有$\theta<\underline{\theta}_*<\theta$，因此

$$|v(\theta_*)|=|\sin^2\theta_*F_n^{\nu}(\theta_*)|\le|\sin^2\overline{\theta}F_n^{\nu}(\underline{\theta})|=\frac{4\nu+2}{n(n+2\nu)}F_n^{\nu}(\underline{\theta}). \tag{C.4}$$

还需给出 $F_n^\nu(\theta)$ 的上界。令 $n=2m+1$, 则

$$\begin{aligned} F_n^\nu(\underline{\theta}) &= \cos\underline{\theta}\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k(m-k+1)_k(m+\nu+1)_k}{k!(\nu+\frac{1}{2})_k}\sin^{2k}\underline{\theta} \\ &\le \sum_{k=0}^{l \text{ is even}}\frac{(-1)^k(m-k+1)_k(m+\nu+1)_k}{k!(\nu+\frac{1}{2})_k}\sin^{2k}\underline{\theta}. \end{aligned}$$

对于 $m\ge 5$, 我们可以选择 $l=4$ 来得到

$$\begin{aligned} F_n^\nu(\underline{\theta}) &\le \sum_{k=0}^{4}\frac{(-1)^k(m-k+1)_k(m+\nu+1)_k}{k!(\nu+\frac{1}{2})_k}\left(\frac{4\nu+2}{n(n+2\nu)}\right)^k\delta^k \\ &= \sum_{k=0}^{4}\frac{(-1)^k(m-k+1)_k(m+\nu+1)_k}{k!(\nu+\frac{1}{2})_k}\left(\frac{\nu-\sqrt{\nu}+\frac{1}{2}}{(m+\frac{1}{2})(m+\nu+\frac{1}{2})}\right)^k \end{aligned} \tag{C.5}$$

直接计算表明, 对于固定的 ν, 上述表达式视为关于 $m>\nu$ 的函数时, 随 m 增大而递减。因此, 如果 $n\ge \max\{2\nu+2, 12\}$, 则由 (C.4) 和 (C.5) 可得

$$|v(\theta_*)|\le\frac{\widetilde{C}_\nu}{n(n+2\nu)},$$

其中

$$\widetilde{C}_\nu=\begin{cases}(4\nu+2)\displaystyle\sum_{k=0}^{4}\frac{(-1)^k(6-k)_k(6+\nu)_k}{k!(\nu+\frac{1}{2})_k}\left(\frac{\nu-\sqrt{\nu}+\frac{1}{2}}{\frac{11}{2}(\nu+\frac{11}{2})}\right)^k, & \text{if } \nu<5,\\ (4\nu+2)\displaystyle\sum_{k=0}^{4}\frac{(-1)^k(\nu-k+1)_k(2\nu+1)_k}{k!(\nu+\frac{1}{2})_k}\left(\frac{\nu-\sqrt{\nu}+\frac{1}{2}}{(\nu+\frac{1}{2})(2\nu+\frac{1}{2})}\right)^k, & \text{if } \nu\ge 5.\end{cases} \tag{C.6}$$

我们指出, 对于偶数 n, 同样的估计也成立。最后, 由于

$$|v(\frac{\pi}{2})|=F_n^\nu(0)=\begin{cases}0, & \text{如果 } n \text{ 是奇数,}\\ \dfrac{\Gamma(\frac{n}{2}+\nu)}{\Gamma(\nu)(\frac{n}{2})!}\Big/\dfrac{\Gamma(n+2\nu)}{\Gamma(2\nu)n!}=\dfrac{2\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n+3}{2})}{(n+1)\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n+1}{2}+\nu)}, & \text{如果 } n \text{ 为偶数,}\end{cases}$$

我们得出结论:

$$|v(\theta)|\le\max\{|v(\theta_*)|,|v(\frac{\pi}{2})|\}\le\frac{\widetilde{C}_\nu}{n(n+2\nu)}.$$

□

Appendix D. proof of Proposition 4.1

命题 *4.1* 的证明。 如果 $k=2$ 或 4, 那么根据引理 3.3, 可以直接验证该命题对所有 $n\ge 6$ 均成立, 因此下文中我们可以假设$k\ge 6$。

我们首先考虑 $n\ge 65$ 的情形。回顾一下, $d=8, b=0.33$ 在定理 3.2 中给出, $d_0=17$, 且 $B_k=\frac{9\alpha^2}{32}(\lambda_{n+1}-\lambda_k+\frac{11}{7\alpha})(2k+5)$, 因此我们有

$$\frac{B_{k+1}-B_k}{B_{k+1}+B_k}=\frac{\left(n^2+7n-3k^2-18k-15\right)+\frac{11}{7\alpha}}{(k+3)\left((2n^2+14n-2k^2-12k+5)+\frac{22}{7\alpha}\right)}. \tag{D.1}$$

情形 1： $\lambda_7 \le \lambda_{k+1} \le \frac{d\lambda_n}{2d_0}$。在这种情况下， $6 \le k \le \frac{n}{2} - 1$，因此 $B_{k+1} > B_k$，并且由 (D.1) 可知， $\frac{B_{k+1}-B_k}{B_{k+1}+B_k}$ 关于 k 递减，因此我们有

$$\frac{B_{k+1} - B_k}{B_{k+1} + B_k} \le \frac{\left(n^2 + 7n - 231\right) + \frac{11}{7\alpha}}{9\left((2n^2 + 14n - 139) + \frac{22}{7\alpha}\right)} < 0.054. \tag{D.2}$$

此外， $a \le \frac{d_0}{\lambda_n} \le \frac{d}{2\lambda_k}$。因此 (4.9) 变为

$$\begin{aligned}
R_{k,1} &\le B_k\Big((a_+ - \frac{\lambda_k}{d}(1-b)a_+^2)^2 + (a_- - \frac{\lambda_k}{d}(1-b)a_-^2)^2\Big)^2 \\
&\quad + B_{k+1}\Big((a_+ - \frac{\lambda_{k+1}}{d}(1-b)a_+^2)^2 + (a_- - \frac{\lambda_{k+1}}{d}(1-b)a_-^2)^2\Big)^2 \\
&= B_k\Big((2\lambda^2 - 2\lambda + 1)a^2 - \frac{2\lambda_k}{d}(1-b)(1 - 3\lambda + 3\lambda^2)a^3 + (\frac{\lambda_k}{d}(1-b))^2(\lambda^4 + (1-\lambda)^4)a^4\Big) \\
&\quad + B_{k+1}\Big((2\lambda^2 - 2\lambda + 1)a^2 - \frac{2\lambda_{k+1}}{d}(1-b)(1 - 3\lambda + 3\lambda^2)a^3 + (\frac{\lambda_{k+1}}{d}(1-b))^2(\lambda^4 + (1-\lambda)^4)a^4\Big),
\end{aligned}$$

而 (4.11) 变为

$$R_{k,3} \le 2(B_{k+1} - B_k)\lambda(1-\lambda)a^2.$$

结合 (4.10)，可写为

$$\begin{aligned}
f_{k,a}(\lambda) &= B_k\Big((2\lambda^2 - 2\lambda + 1) - \frac{2\lambda_k}{d}(1-b)(1 - 3\lambda + 3\lambda^2)a + (\frac{\lambda_k}{d}(1-b))^2(\lambda^4 + (1-\lambda)^4)a^2\Big) \\
&\quad + B_{k+1}\Big((2\lambda^2 - 2\lambda + 1) - \frac{2\lambda_{k+1}}{d}(1-b)(1 - 3\lambda + 3\lambda^2)a + (\frac{\lambda_{k+1}}{d}(1-b))^2(\lambda^4 + (1-\lambda)^4)a^2\Big) \\
&\quad + (2c_k(B_k + B_{k+1}) + 2(B_{k+1} - B_k))\lambda(1-\lambda).
\end{aligned}$$

对于 $\frac{1}{2} \le \lambda < 1$，直接计算可得

$$\begin{aligned}
\frac{f_{k,a}(1) - f_{k,a}(\lambda)}{2(\lambda - \lambda^2)} &= B_k\Big(1 - \frac{3\lambda_k}{d}(1-b)a + (\frac{\lambda_k}{d}(1-b))^2 a^2(\lambda^2 - \lambda + 2)\Big) \\
&\quad + B_{k+1}\Big(1 - \frac{3\lambda_{k+1}}{d}(1-b)a + (\frac{\lambda_{k+1}}{d}(1-b))^2 a^2(\lambda^2 - \lambda + 2)\Big) - c_k(B_{k+1} + B_k) - (B_{k+1} - B_k) \\
&\ge B_k(1 - 3w_k + \frac{7}{4}w_k^2) + B_{k+1}(1 - 3w_{k+1} + \frac{7}{4}w_{k+1}^2) - c_k(B_{k+1} + B_k) - (B_{k+1} - B_k),
\end{aligned}$$

其中

$$w_j = \frac{\lambda_j}{d}(1-b)a \le \frac{1-b}{2} < \frac{6}{7},\ j = k, k+1.$$

所以根据推论 3.9 和 (D.2)

$$\begin{aligned}
\frac{f_{k,a}(1) - f_{k,a}(\lambda)}{2(\lambda - \lambda^2)} &\ge (\frac{7b^2 + 10b - 1}{16} - c_k)(B_k + B_{k+1}) - (B_{k+1} - B_k) \\
&\ge (B_k + B_{k+1})(0.191 - 0.12 - 0.054) > 0.
\end{aligned}$$

情形 2： $\frac{\lambda_n}{4} = \frac{d\lambda_n}{2d_0} < \lambda_{k+1} \le \lambda_n$，但 $a_- \le \frac{d}{2\lambda_{k+1}}$。在这种情形下，$\frac{n}{2} - 2 \le k \le n - 1$，$\lambda \ge 1 - \frac{d}{2\lambda_k a}$，我们有

$$\begin{aligned}
R_{k,1} &\le B_k\left((ba_+ + \frac{d}{4\lambda_k}(1-b))^2 + (a_- - \frac{\lambda_k}{d}(1-b)a_-^2)^2\right) \\
&\quad + B_{k+1}\left((ba_+ + \frac{d}{4\lambda_{k+1}}(1-b))^2 + (a_- - \frac{\lambda_{k+1}}{d}(1-b)a_-^2)^2\right).
\end{aligned}$$

由于 $B_{k+1}-B_k$ 的符号未知，我们需要分别讨论两种情形。如果 $B_{k+1}\le B_k$，则由 (D.1) 得，

$$\frac{B_k-B_{k+1}}{B_k+B_{k+1}}\le\frac{7\alpha(2n+5)-11}{(n+2)(21\alpha(2n+5)+22)}<\frac{1}{3}, \tag{D.3}$$

且有

$$R_{k,3}\le 2(B_k-B_{k+1})m_0(1-\lambda)a^2.$$

结合式 (4.10)，对于 $\frac{1}{2}\le\lambda<1$，我们有

$$\begin{aligned}\phi(\lambda):=\frac{f_{k,a}(1)-f_{k,a}(\lambda)}{(1-\lambda)a^2}&=B_k\left((1+\lambda)b^2+\frac{d}{2\lambda_k a}(1-b)b-(1-\lambda)(1-\frac{\lambda_k}{d}(1-b)(1-\lambda)a)^2\right)\\&\quad+B_{k+1}\left((1+\lambda)b^2+\frac{d}{2\lambda_{k+1}a}(1-b)b-(1-\lambda)(1-\frac{\lambda_{k+1}}{d}(1-b)(1-\lambda)a)^2\right)\\&\quad-2c_k(B_k+B_{k+1})\lambda-2(B_k-B_{k+1})m_0.\end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned}\phi'(\lambda)&=B_k\left(b^2+\left(1-\frac{\lambda_k}{d}(1-b)(1-\lambda)a\right)\left(1-\frac{3\lambda_k}{d}(1-b)(1-\lambda)a\right)\right)\\&\quad+B_{k+1}\left(b^2+\left(1-\frac{\lambda_{k+1}}{d}(1-b)(1-\lambda)a\right)\left(1-\frac{3\lambda_{k+1}}{d}(1-b)(1-\lambda)a\right)\right)-2c_k(B_k+B_{k+1}).\end{aligned}$$

根据假设 $\frac{\lambda_k}{d}(1-b)(1-\lambda)a\le\frac{\lambda_{k+1}}{d}(1-b)(1-\lambda)a=\frac{\lambda_{k+1}}{d}(1-b)a\le\frac{1-b}{2}$，因此由推论 3.9，

$$\phi'(\lambda)\ge(B_k+B_{k+1})\left(b^2-2c_k+\frac{(b+1)(3b-1)}{4}\right)>(B_k+B_{k+1})\left(0.105-2c_k\right)>0.$$

由于 $\lambda\ge 1-\frac{d}{2\lambda_{k+1}a}$，我们需要讨论以下两种情况：

如果 $\frac{d}{2\lambda_{k+1}a}\ge\frac{1}{2}$，那么 λ 的下界为 $1\ 2$。此外，$\lambda_{k+1}\le\frac{d}{a}\le\frac{\lambda_{n+4}d}{d_0}=\frac{\lambda_{n+4}}{2}$ ，因此 $k\le\frac{n}{\sqrt{2}}+2$。因此，由 (D.1) 很容易验证 that

$$\frac{B_k-B_{k+1}}{B_k+B_{k+1}}<0.008,$$

因此，根据引理 3.5 和推论 3.9，我们有

$$\begin{aligned}\phi(\lambda)\ge\phi(\frac{1}{2})&=B_k\left(\frac{3}{2}b^2+\frac{d}{2\lambda_k a}(1-b)b-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda_k}{2d}(1-b)a\right)^2\right)\\&\quad+B_{k+1}\left(\frac{3}{2}b^2+\frac{d}{2\lambda_{k+1}a}(1-b)b-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda_{k+1}}{2d}(1-b)a\right)^2\right)\\&\quad-(B_k+B_{k+1})c_k-2m_0(B_k-B_{k+1})\\&\ge(B_k+B_{k+1})(0.02746-c_k-0.016m_0)\\&>0.\end{aligned}$$

若$\frac{d}{2\lambda_{k+1}a} \leq \frac{1}{2}$，则 λ 的下界为 $1-\frac{d}{2\lambda_{k+1}a}$，因此由(D.3)、引理 3.5 和推论 3.9 可得

$$\begin{aligned}\phi(\lambda) \geq \phi(1-\frac{d}{2\lambda_{k+1}}a) &= B_k\left((2-\frac{d}{2\lambda_{k+1}a})b^2+\frac{d}{2\lambda_k a}(1-b)b-\frac{d}{2\lambda_{k+1}a}(1-\frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\frac{1-b}{2})^2\right)\\&+B_{k+1}\left((2-\frac{d}{2\lambda_{k+1}a})b^2+\frac{d}{2\lambda_{k+1}a}(1-b)b-\frac{d}{2\lambda_{k+1}a}(1-\frac{1-b}{2})^2\right)\\&-(B_k+B_{k+1})c_k-2m_0(B_k-B_{k+1})\\&\geq (B_k+B_{k+1})\left(\frac{3}{2}b^2+\frac{(1-b)b}{2}-\frac{1}{2}(1-\frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\frac{1-b}{2})^2-c_k-2m_0\frac{B_k-B_{k+1}}{B_k+B_{k+1}}\right)\\&\geq (B_k+B_{k+1})(0.05-c_k-\frac{2}{3}m_0)\\&>0.\end{aligned}$$

如果 $B_k < B_{k+1}$，那么 $\frac{n}{2}-2 \leq k \leq \frac{n}{\sqrt{3}}$，所以

$$\frac{B_{k+1}-B_k}{B_k+B_{k+1}} \leq \frac{7\alpha\left(n^2+16n+36\right)+44}{(n+2)\left(21\alpha\left(n^2+8n+14\right)+44\right)} \leq 0.004. \tag{D.4}$$

在这种情况下，我们有

$$R_{k,3} \leq 2(B_{k+1}-B_k)\lambda(1-\lambda)a^2.$$

然后可以沿用之前的相同论证来证明 $f_{k,a}(1) \geq f_{k,a}(\lambda)$ 对于 $\frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1$ 成立。细节从略。

情形3：$\frac{\lambda_n}{4} = \frac{d\lambda_n}{2d_0} < \lambda_{k+1} \leq \lambda_n$，且$a_- > \frac{d}{2\lambda_{k+1}}$。在此情形下$(1-\lambda)\lambda_{k+1} > \lambda_n$，因此 $\frac{1}{2} \leq \lambda < \frac{3}{4}$，且 $2\lambda_{k+1} > \lambda_n$。于是 $k \geq \frac{n-2}{\sqrt{2}}$和 $B_k \geq B_{k+1}$。现在 (4.9) 和 (4.11) 变为

$$\begin{aligned}R_{k,1} &\leq B_k\left((ba_+ + \frac{d(1-b)}{4\lambda_k})^2+(ba_- + \frac{d(1-b)}{4\lambda_k})^2\right)+B_{k+1}\left((ba_+ + \frac{d(1-b)}{4\lambda_k})^2+(ba_- + \frac{d(1-b)}{4\lambda_k})^2\right)\\&= B_k\left((2\lambda^2-2\lambda+1)b^2a^2+\frac{4ab(1-b)}{\lambda_k}+8(\frac{1-b}{\lambda_k})^2\right)\\&+B_{k+1}\left((2\lambda^2-2\lambda+1)b^2a^2+\frac{4ab(1-b)}{\lambda_{k+1}}+8(\frac{1-b}{\lambda_{k+1}})^2\right)\end{aligned}$$

and

$$R_{k,3} \leq 2(B_k-B_{k+1})m_0(1-\lambda)a^2$$

分别地。借助 (4.10)，经过一些计算，我们推导出

$$\begin{aligned}\frac{f_{k,a}(1)-f_{k,a}(\lambda)}{a^2} &= B_k\left((2\lambda-2\lambda^2)b^2-4(\frac{1-b}{\lambda_k a})^2\right)+B_{k+1}\left((2\lambda-2\lambda^2)b^2-4(\frac{1-b}{\lambda_{k+1}a})^2\right)\\&-2(B_k+B_{k+1})c_k\lambda(1-\lambda)-2(B_k-B_{k+1})m_0(1-\lambda).\end{aligned}$$

很容易看出，对于固定的 k，上述函数关于 λ 是递增的，所以

$$\begin{aligned}\frac{f_{k,a}(1)-f_{k,a}(\lambda)}{a^2} &\geq B_k\left(\frac{1}{2}b^2-4(\frac{1-b}{\lambda_k a})^2\right)+B_{k+1}\left(\frac{1}{2}b^2-4(\frac{1-b}{\lambda_{k+1}a})^2\right)-\frac{1}{2}(B_k+B_{k+1})c_k-(B_k-B_{k+1})m_0\\ &\geq (B_k+B_{k+1})\left(\frac{b^2-c_k}{2}-4(\frac{1-b}{\lambda_k a})^2-m_0\frac{B_k-B_{k+1}}{B_k+B_{k+1}}\right)\\ &\geq (B_k+B_{k+1})\left(0.04-\frac{1.7956}{\lambda_k^2a^2}-0.04\frac{B_k-B_{k+1}}{B_k+B_{k+1}}\right)\\ &\geq (B_k+B_{k+1})\left(0.04-\left(0.0071(\frac{\lambda_{n+4}}{\lambda_k})^2+0.04\frac{B_k-B_{k+1}}{B_k+B_{k+1}}\right)\right).\end{aligned}$$

直接计算表明，当 $\sqrt[n-1]{2}\leq k\leq n$ 时，~~$0.0071\frac{\lambda_{n+4}}{\lambda_k}+0.04\frac{B_k-B_{k+1}}{B_k+B_{k+1}}$~~ 随 k 增大而减小~~，~~因此

$$\frac{f_{k,a}(1)-f_{k,a}(\lambda)}{a^2}\geq (B_k+B_{k+1})(0.04-0.035)>0.$$

总而言之，截至目前，当 $n\geq 65$时，我们已经证明了命题 4.1。当 $n<65$时，由于 c_k （因此 $R_{k,2}$）已经不再足够小，上述论证失效。在这种情况下，我们将 $R_{k,2}$ 搁置一旁，只考虑 $R_{k,1}$ 和$R_{k,3}$。然后，与上面相同的论证表明，$R_{k,3}$ 可以被吸收，从而完成证明。细节略去。

□

Appendix E. Proof for small n

在推论 3.9 和定理 1.1 的证明中，我们讨论了 n 充分大的情形。在本附录中，我们给出数值数据，以证明 n 较小时的相应情形。

我们首先证明小 n 情形下的推论 3.9

推论 *3.9* 在 $30\leq n\leq 428$ 下的证明。我们可以使用 Matlab 计算 c_n 的值，其结果如下所示，以散点图表示。

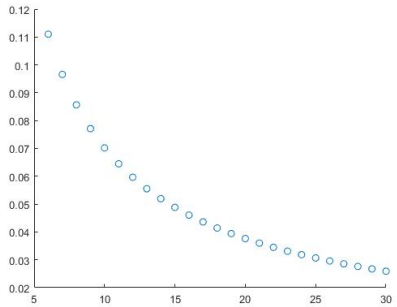


Figure 1. c_n 对于 $6\leq n\leq 30$

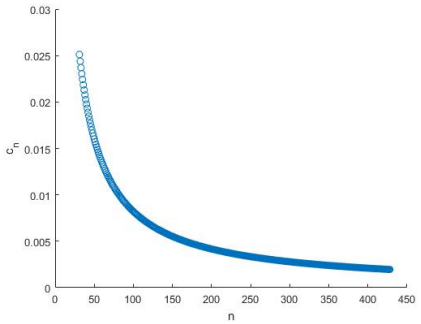


Figure 2. c_n 对于 $30\leq n\leq 428$

□

然后我们给出当 n 较小时定理 1.1 的证明。

对 $n < 10000$的定理 *1.1* 的证明。我们沿用第 4 节中的论证。这里只证明 $n \geq 65$ 的情形（当 $5 \leq n \leq 61$ 时，我们可以采用类似的方法进行归纳过程）。

应用命题 4.1 并将其代入 (4.8)，可得

$$
\begin{aligned}
0 \leq & \frac{256}{35}(7-\frac{1}{\alpha})(\frac{27}{7\alpha}-15-\lambda_{n+1})\frac{1}{\alpha}(1-\frac{7}{6}a)+\frac{128}{7}(\lambda_{n+1}-6+\frac{71}{7\alpha})\frac{1}{\alpha^2}(1-\frac{7}{6}a)^2 \\
& +\frac{176}{63}\alpha(\lambda_2+4)(\lambda_2+6)b_2^2 \\
& +\frac{32}{9\alpha^2}\sum_{k=2}^{\frac{n-3}{2}}(\lambda_{n+1}-\lambda_k+\frac{11}{7\alpha})(2k+5)(1-\frac{1-b}{d}\lambda_k a)^2a^2 \\
& +\frac{32}{9\alpha^2}\sum_{k=\frac{n-1}{2}}^{n}(\lambda_{n+1}-\lambda_k+\frac{11}{7\alpha})(2k+5)(ba+(1-b)\frac{d}{4\lambda_k})^2. \\
& \leq -\frac{512}{7}(\lambda_{n+1}+\frac{51}{7})(1-\frac{7}{6}a)+\frac{512}{7}(\lambda_{n+1}+\frac{100}{7})(1-\frac{7}{6}a)^2+\frac{22528}{63\alpha}a^2 \\
& +\frac{128}{9}\sum_{k=2}^{\frac{n-3}{2}}(\lambda_{n+1}-\lambda_k+\frac{22}{7})(2k+5)[(1-\frac{1-b}{d}\lambda_k a)^2+\frac{1}{2}c_k\chi_{\{5\leq n\leq 61\}}]a^2 \\
& +\frac{128}{9}\sum_{k=\frac{n-1}{2}}^{n}(\lambda_{n+1}-\lambda_k+\frac{22}{7})(2k+5)[(ba+(1-b)\frac{d}{4\lambda_k})^2+\frac{1}{2}c_k\chi_{\{5\leq n\leq 61\}}]a^2 \\
=: & \tilde{g}_n(a). \qquad \text{(E.1)}
\end{aligned}
$$

要得到矛盾，只需证明对于任意满足 $n \equiv 1$ （模 4）的 $n < 10000$， $\tilde{g}_n(a)$ 对 $\frac{16}{\lambda_{n+4}} < a \leq \frac{16}{\lambda_n}$ 为负。注意到 $\tilde{g}_n(a)$ 是关于 a 的抛物线，且常数项为正。只需证明 $\tilde{g}_n(\frac{16}{\lambda_{n+4}})$ 和 $\tilde{g}_n(\frac{16}{\lambda_n})$为负。使用 Matlab，我们得到上述两个量的如下散点图，因此结论成立。

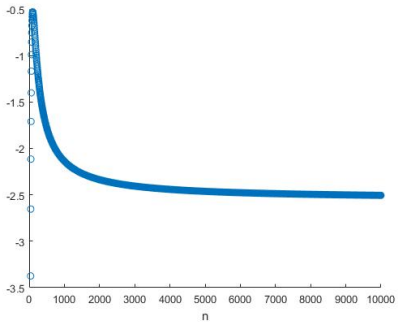


FIGURE 3. $\tilde{g}_n(\frac{16}{\lambda_{n+4}})$ 从 $n = 41$ 到 9997

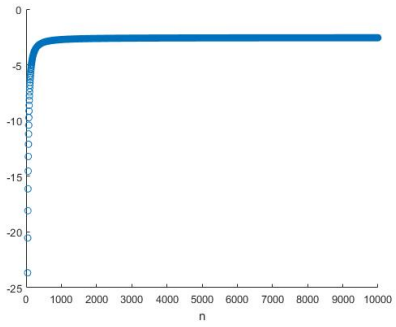


FIGURE 4. $\tilde{g}_n(\frac{16}{\lambda_n})$ 从 $n = 41$ 到 9997

□

Acknowledgements

J.Wei的研- 究部分得到了NSERC加拿大的支持。C.Gui的研- 究部分得到了NSF项目DMS-2155183和澳门大学UMDF教授奖学金的支持。

References

[1] I. Area, D. Dimitrov, E. Godoy 等. Gegenbauer 多项式与 Hermite 多项式的零点及连接系数, *Mathematics of Computation.* 73(248) (2004), 1937-1951. [2] F.W. Olver, D.W. Lozier, R.F. Boisvert, C.W. Clark 编.《NIST 数学函数手册》精装版及 CD-ROM, *Cambridge university press*, 2010.[3] G. Szeg¨o, 《正交多项式》, 第 4 版, 美国数学会丛书, 第 23 卷, 普罗维登斯, 罗得岛州, 1975[4] W. Beckner, 球面上的尖锐 Sobolev 不等式与 Moser-Trudinger 不等式, *Ann. Math.* 138 (1993), 213–242. [5] S.-Y.A. Chang 和 C. Gui, 球面上函数指数化的一个尖锐不等式, *Comm. Pure Appl. Math.*, 即将发表.[6] S.-Y.A. Chang 和 F.B. Hang, 约束条件下改进的 Moser-Trudinger-Onofri 不等式, *Comm. Pure Appl. Math.* 75 (2022), 197–220. [7] S.-Y.A. Chang 和 P.C. Yang, 在 S^2 上指定高斯曲率, *Acta Math.* 159 (1987), 215–259.[8] S.-Y. A. Chang 和 P. C. Yang, S

2 *J. Differential* 上度

Geom. 27 1988 2, 259 296
量的共形变形。( ), no. – . [9] S.-Y.A. Chang 和 P.C. Yang, 4 维流形上 ζ 函数行列式的极值度量, *Ann. Math.* 142 (1995), 171–212. [10] S.-Y.A. Chang 和 P.C. Yang, 关于共形几何中一个 n 阶微分方程解的唯一性, *Math. Res. Lett.* 4 (1997), 1–12. [11] Z. Djadli, E. Hebey 和 M. Ledoux, Paneitz 型算子及其应用, *Duke Math. J.*
104 1 2000 129 169 ( ) ( ),

– . [12] Z. Djadli 和 A. Malchiodi, 常 Q 曲率共形度量的存在性, *Ann.*
Math. 168 2008 813 858 ( ) – .

[13] J.Feldman, R. Froese, N. Ghoussoub 和 C.F. Gui, S2 上轴对称函数的改进 Moser-Aubin-Onofri 不等式。 *Calc. Var. Partial Differential Equations* 6(1998), no. 2, 95–104. [14] N. Ghoussoub 和 C. S. Lin, 关于 Moser-Onofri-Aubin 不等式的最佳常数。 *Comm. Math. Phys.* 298 (2010), no. 3, 869–878. [15] C. Gui 和 A. Moradifam, 球面覆盖不等式及其应用, *Invent. Math.*
214 3 2018 1169 1204 ( ) ( ),

– . [16] C. Gui, Y. Hu 和 W. Xie, S^4 上轴对称函数的改进贝克纳不等式, arXiv :2109 .13390.[17] C. Gui, Y. Hu 和 W. Xie, S^n 上轴对称函数的改进贝克纳不等式, *J. Funct. Analysis* 282(2022), 109335. [18] C. Gui 和 J. Wei, 关于具有对称性的 S^2 上函数的尖锐 Moser-Aubin-Onofri 不等式, *Pac. J. Math.* 194(2) (2000) 349–358. [19] M. Gursky 和 A. Malchiodi, Paneitz 算子的强最大值原理及 Q 曲率的非局部流。 *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* 17(9) (2015), 2137–2173. [20] T. Jin, Y. Li 和 J. Xiong, Nirenberg 问题及其推广: 统一方法。*Math. Ann.* 369 (2017), no. 1-2, 109–151. [21] Y.Y. Li 和 J.G. Xiong, 常 Q 曲率共形度量的紧性, *Adv.*
Math. 345 2019 116 160 ( ), – .

[22] T. Li, J. Wei 和 Z. Ye, 关于 S^4 上轴对称函数的尖锐贝克纳不等式, arXiv :2212.04099.[23] A. Malchiodi, 若干几何四阶方程解的紧性, *J. Reine*
Angew. Math. 594 2006 137 174 ( ), –

. [24] M. Morimoto, 《球面上的解析泛函》, 数学专著译丛, 第 178 号。AMS, 第一版, 1998.

[25] G. Nemes 和 A. O. Daalhuis，勒让德函数及相关函数的大参数渐近展开。
SIAM J. Math. Anal. 52 (2020), no. 1, 437–470. [26] J. Wei 和 X. Xu，关于 S^n 上度量的共形变形，
J. Funct. Anal. 157 (1998), 292–325.Department of Mathematics, University of Macau, Taipan, Macau and Departmentof Mathematics, University of Texas at San Antonio, Texas, USA*Email address*: changfeng.gui@utsa.edu

Department of Mathematics, University of British Columbia,Vancouver, Canada
Email address: tuoxin@math.ubc.ca

Department of Mathematics, University of British Columbia,Vancouver, Canada
Email address: jcwei@math.ubc.caDepartment of Mathematics,
University of British Columbia,Vancouver, Canada*Email address*:
yezikai@math.ubc.ca