arXiv:2304.04957v1 [math.SG] 11 Apr 2023

椭圆边界问题族与 Atiyah-Bott 类的指标理论

YIANNIS LOIZIDES

Abstract. 我们研究一类定义在紧致定向曲面 Σ 上的自然非局部椭圆边界问题族，该问题族以沿 $\partial\Sigma$带标架的平坦 G-联络模空间 $\mathcal{M}_\Sigma$ 为参数。此问题族推广了 Atiyah 和 Bott 为闭曲面引入的一类问题。在先前的工作中，我们构造了一个解析指标态射，其定义域是$\mathcal{M}_\Sigma$的 K 理论的一个子环。本文将该态射应用于 Fredholm 族的 K 类，并导出上同调公式。主要应用是计算 $\mathcal{M}_\Sigma$的辛商上的 K 理论交配对；后者是曲面带边界上的平坦联络紧致模空间，其中边界 holonomy 属于预先指定的共轭类。研究结果为 Teleman-Woodward 指标公式提供了一个规范理论类比。

1. Introduction

设 G 是一个紧致、连通、单连通的单李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$，并在 $\mathfrak{g}$上固定一个不变内积 '·'。设 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是亏格为 g 的闭连通黎曼曲面。Atiyah 和 Bott [5] 指出，平凡丛 $\mathcal{A}_{\boldsymbol{\Sigma}}$上的无限维仿射联络空间 $P = \boldsymbol{\Sigma} \times G$ 具有一个典范辛形式

$$\omega_{\mathcal{A}_\Sigma}(a,b) = \int_\Sigma a \cdot b, \quad a,b \in T_A\mathcal{A}_\Sigma \simeq \Omega^1(\Sigma,\mathfrak{g}).$$

规范群 $\mathcal{G}_{\boldsymbol{\Sigma}} = \mathrm{Map}(\boldsymbol{\Sigma}, G)$ 的作用是哈密顿作用，其动量映射为 $\mu(A) = \mathrm{curv}(A)$，即联络 A 的曲率。零纤维 $\mathcal{A}^\flat_{\boldsymbol{\Sigma}} = \mathrm{curv}^{-1}(0)$ 是 $\boldsymbol{\Sigma}$上的平坦联络空间，因此辛约化 $\mathbb{M}_{\boldsymbol{\Sigma}} = \mathcal{A}^\flat_{\boldsymbol{\Sigma}}/\mathcal{G}_{\boldsymbol{\Sigma}}$是 $\boldsymbol{\Sigma}$上的有限维平坦联络模空间。Atiyah 和 Bott 通过考察 $\mathbb{M}_{\boldsymbol{\Sigma}}$ 上的杨-米尔斯泛函的 Morse 理论，研究了 $\mathcal{A}_{\boldsymbol{\Sigma}}$的上同调。

Atiyah 和 Bott 在 $\mathbb{M}_{\boldsymbol{\Sigma}}$的上同调中引入了一些类，它们是将陈特征作用于 $\mathbb{M}_{\boldsymbol{\Sigma}}$上的某些典范 K-理论类而得到的。这些阿蒂亚-博特 K-理论类 $\mathsf{E}^N V$由一对（V，N）构造而成，其中包括 V 的一个有限维复表示 G 和一个闭子流形 $N \subset \Sigma$。考虑 $\mathcal{G}_{\boldsymbol{\Sigma}}$等变向量丛 $\mathcal{V} = \mathcal{A}_{\boldsymbol{\Sigma}} \times V \times \boldsymbol{\Sigma} \to \mathcal{A}_{\boldsymbol{\Sigma}} \times \boldsymbol{\Sigma}$。然后，$\mathsf{E}^N V$由以下步骤得到：将 $\mathcal{V}$限制到 $\mathcal{A}^\flat_{\boldsymbol{\Sigma}} \times N$，再对角线 $\mathcal{G}_{\boldsymbol{\Sigma}}$ 作用取商，最后应用与投影 $p_!$ 相关联的 K 理论中的反向映射 $p^!\colon \mathbb{M}_{\boldsymbol{\Sigma}} \times N \to \mathbb{M}_{\boldsymbol{\Sigma}}$，并选取 $\boldsymbol{\Sigma}$典范丛的一个平方根。

根据 Narasimhan 和 Seshadri 的一个著名定理，$\mathbb{M}_{\boldsymbol{\Sigma}}$ 可识别为半稳定全纯 $G_{\mathbb{C}}$-丛在 $\boldsymbol{\Sigma}$ 上的模空间。超越半稳定丛的范畴，我们可以研究所有全纯 $\mathfrak{M}_{\boldsymbol{\Sigma}}$ -丛的模叠。这里存在阿蒂亚-博特类的类似物，由 Teleman 和 Woodward 在 [40], 中加以研究，此前 Teleman 已开展相关工作。这些作者在由阿蒂亚-博特类生成的偶数次 K 理论类环上定义了一个指标态射，并证明了一个关于指标的精彩公式，给出了一个

Verlinde 公式的广泛推广。该结果的一个近期应用是证明 Higgs 丛模空间的等变 Verlinde 公式 [19, 3, 20]。

在本文中，我们将关注具有非空边界的黎曼曲面 Σ 。除了其内在价值之外，在带边界的黎曼曲面上定义的平坦联络模空间也是研究不变量在曲面拼接下行为的自然空间，例如在拓扑量子场论中。将联络沿每个边界分支的 holonomy 限制为属于 G 的指定共轭类后，根据 Seshadri和 Mehta 对 Narasimhan-Seshadri对应的推广，可以得到在有限个点处带有（拟）抛物结构的全纯 $G_{\mathbb{C}}$-丛模空间。

令 Σ 为一个具有 $b \geq 1$ 个边界分支的连通黎曼曲面。对于 N，即 Σ 中一个维数为 0 或 1 的闭子流形，阿蒂亚-博特类$\mathbf{E}^N V$的定义实质上没有变化。然而，当 $N = \Sigma$ 时，错误方向映射 $p_!$ 并未定义。从本文所采用的分析观点来看，问题在于，带边界的黎曼曲面上的$\overline{\partial}$ 算子不是 Fredholm 算子。这一点在圆盘 $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$的情形下已经很明显，此时$\ker(\overline{\partial})$ 是无限维的，由圆盘上的所有全纯函数组成。众所周知，为了得到 Fredholm算子，可以施加一个边界条件。对于圆盘 $\mathbb{D}$，我们施加的边界条件是：一个 V值函数在$\partial\mathbb{D}$ 上的限制的非负傅里叶模均为零。事实上，同一个边界条件（沿边界的每个边界分支施加）在一般的 Σ上也适用。这是 Atiyah-Patodi-Singer 边界条件 [7]的一个简单实例。

遗憾的是，对于族¯，不存在上述一般类型的边界条件的连续规范等变选择 ∂_A， $A \in \mathcal{A}_\Sigma$。因此，我们被迫考虑模空间 $\mathcal{M}_\Sigma$，其中的平坦联络带有沿边界的标架 $\partial\Sigma$。的构造$\mathcal{M}_\Sigma$ 类似于 $\mathbb{M}_{\mathbf{\Sigma}}$ 的构造，不同之处在于只需除以正规子群$\mathcal{G}_{\Sigma,\ \partial\Sigma} \subset \mathcal{G}_\Sigma$ 该子群由沿边界等于恒等变换的规范变换组成：

$$\mathcal{M}_\Sigma = \mathcal{A}^\flat_\Sigma / \mathcal{G}_{\Sigma,\partial\Sigma}.$$

空间 $\mathcal{M}_\Sigma$ 是一个光滑无限维辛流形，并带有商空间 $\mathcal{G}_\Sigma/\mathcal{G}_{\Sigma,\ \partial\Sigma}$的剩余作用。选取边界参数化后，限制到边界给出一个映射到回路群

$$\mathcal{G}_\Sigma/\mathcal{G}_{\Sigma,\partial\Sigma} \to L\underline{G}, \qquad \underline{G} = G^b. \tag{1}$$

当 G单连通时，（1）是满射，因而是同构。在 $\mathcal{M}_\Sigma$ 上的作用是哈密顿的，其动量映射为

$$\mu_{\mathcal{M}_\Sigma} \colon \mathcal{M}_\Sigma \to \Omega^1(\partial\Sigma, \mathfrak{g}) \simeq \Omega^1(S^1, \underline{\mathfrak{g}})$$

由联络的拉回诱导而来，作用于 $\partial\Sigma$。带框架的模空间 $\mathcal{M}_\Sigma$ 曾出现在 Donaldson [16], 的研究中，并由 Meinrenken 和 Woodward [31]系统研究；他们发展了一套哈密顿环群空间理论，涵盖了 $\mathcal{M}_\Sigma$ 及其他各种例子。对于 $\Sigma = \mathbb{D}$， $\mathcal{M}_\Sigma$ 是 G的光滑版本的仿射格拉斯曼流形，参见 [36]。 $\mathcal{M}_\Sigma$ 的辛商是有限维、紧致但可能奇异的平坦联络模空间，它们由定义在 Σ 上的平坦联络构成，且其边界 holonomy 被限制在指定的共轭类中。这些模空间具有丰富的拓扑结构，在辛几何、代数几何和物理学中都备受关注。特别是当所有共轭类

被选为平凡的，辛约化恢复了 $\mathbb{M}_{\mathbf{\Sigma}}$，其中 $\mathbf{\Sigma}$ 是通过封闭边界而得到的闭曲面。

子群 $\mathcal{G}_\Sigma$, $\partial\Sigma$ 保留了上述边界条件。因此，具有固定边界条件且 $\overline{\partial}_A$ 变化的 Fredholm 算子族 $A \in \mathcal{A}_\Sigma^\flat \subset \mathcal{A}_\Sigma$，下降为定义在 $\underline{G}$ 上的连续 $\mathcal{M}_\Sigma$-等变 Fredholm 族。后一个族表示一个 $\underline{G}$-等变 K 理论类 $\mathsf{E}^\Sigma V \in K_{\underline{G}}^0(\mathcal{M}_\Sigma)$。例如，Atiyah 和 Singer [9], 以及数学和物理学文献中的许多其他作者，都研究过这类由联络（或矢势）模空间参数化的闭流形上的“拓扑”狄拉克算子族。关于带边界流形的相应算子族则较少受到关注，尤其是我们尚未发现有先前研究探讨过上述算子族。不过，阿蒂亚-帕托迪-辛格边界问题族的一般指标理论已有所发展，其中包括 Bismut-Cheeger [13] 和 Melrose-Piazza [33]的著名指标定理。

如上所述，$\mathcal{M}_\Sigma$ 是 Meinrenken 和 Woodward [31]意义下的一个适当哈密顿环群空间。在早期工作中，[24], 我们为任意适当哈密顿环群空间构造了一个 K 理论中的“解析指标同态”。将其特化到 $\mathcal{M}_\Sigma$，并选取一个“层级” $k \geq 0$，即可得到一个同态

$$\mathrm{index}_{\underline{T}}^k \colon K_{\underline{T}}^{\mathrm{ad}}(\mathcal{M}_\Sigma) \to R^{-\infty}(\underline{T}). \tag{2}$$

这里 $T \subset G$ 是一个极大环面，$\underline{T} = T^b \subset G^b = \underline{G}$，而 $R^{-\infty}(\underline{T})$ 是形式傅里叶级数空间

$$\sum_{\underline{\lambda} \in \underline{\Lambda}} n_{\underline{\lambda}} e^{\underline{\lambda}}, \qquad n_{\underline{\lambda}} \in \mathbb{Z}, \quad \underline{\Lambda} = \mathrm{Hom}(\underline{T}, U(1)). \tag{3}$$

同态（2）的定义是：将 K 理论类与有限维子流形上的一阶椭圆算子耦合 $X \subset \mathcal{M}_\Sigma$，并取等变 L^2-指标。非正式地说，可以将其视为利用存在于 X上的规范 K 定向，沿映射 $X \to \mathrm{pt}$ 推前 K 类。层级 k 提供了额外的自由度，可以用规范预量子线丛的 k次张量幂进行扭曲 L，该线丛定义在 $\mathcal{M}_\Sigma$上。对于来自$\underline{G}$到 $\underline{T}$-等变 K 理论的限制映射像中的 K 类，指标取值于 $\underline{W}$-反对称形式级数，即在 Weyl 群3作用下按符号-1）$^{l(\underline{w})}$ 变化的级数（$\underline{W}$，其作用于 $\underline{\Lambda}$。因此，应用归纳法可得到一个类似的映射

$$\mathrm{index}_{\underline{G}}^k \colon K_{\underline{G}}^{\mathrm{ad}}(\mathcal{M}_\Sigma) \to R^{-\infty}(\underline{G}), \tag{4}$$

其中，$R^{-\infty}(\underline{G})$ 是由不可约 $\underline{G}$-特征的形式级数组成的 $R(\underline{G})$-模。

流形 X 是 Jeffrey 和 Kirwan 在研究平坦联络模空间的上同调环时所用“扩展模空间”的一种变体，而 Meinrenken 在 [29] 中也使用了一个相关空间。X 在 $\mathcal{M}_\Sigma$ 中的嵌入方式，类似于 $\mathfrak{t} = \mathrm{Lie}(T)$ 作为圆周上的常值联络 $\xi \mathrm{d}\theta, \xi \in \mathfrak{t}$ 嵌入 $\Omega^1(S^1, \mathfrak{g})$ 的方式。与 $\mathfrak{t}$本身一样，X 也是非紧的，这给整个问题带来了根本性的困难。其后果之一是，(2) 仅在偶数拓扑 K 理论的子环 $K_{\underline{T}}^{\mathrm{ad}}(\mathcal{M}_\Sigma) \subset K_{\underline{T}}(\mathcal{M}_\Sigma)$ 上有定义；该子环由那些可由满足等变有界几何条件的 Fredholm复形表示的 K 类组成。对于这些可容许的 K 类，所得算子在 X 上的 L^2 核与余核是无限维的，但其 $\underline{T}$-重数有限。

指标同态是计算 $\mathcal{M}_\Sigma$的辛约化上的 K理论交配对的一种工具。对于辛几何学家而言，这相当于一个更为熟悉的事实：扭曲的 Duistermaat-Heckman分布编码了辛商上的上同调交配对。为更精确地解释这种关系，令 $\mathsf{E} \in K_G^{\mathrm{ad}}(\mathcal{M}_\Sigma)$。令 $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{t}_+$ 为一个基本仿射室。利用 $\mathfrak{g}$ 上的基本内积，我们将 $\mathfrak{t} \simeq \mathfrak{t}^*$与之等同，因此实权格 $\Lambda \simeq \mathrm{Hom}(T, U(1))$ 可等同于 $\mathfrak{t}$中的一个格，该格包含子格 $\Pi = \ker(\exp_T) \simeq \mathrm{Hom}(U(1)\ T)$。令 $\underline{a} = (a_1, ..., a_b) \in \underline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}^b$为 $\mu_{\mathcal{M}_\Sigma}$ 的一个正则值。那么辛约化

$$\mathcal{M}_{\Sigma,\underline{a}} = \mu_{\mathcal{M}_\Sigma}^{-1}(\underline{a})/(L\underline{G})_{\underline{a}}$$

是一个有限维紧致辛轨形。假设 $\underline{a} \in \underline{\Lambda} \otimes \mathbb{Q}$和 $k \in \mathbb{Z}$ 满足$k\underline{a} \in \underline{\Lambda}$。此外，若稳定子 $(L\underline{G})_{\underline{a}} \subset \underline{G}$ （当且仅当每个 a_j 都不在小室 $\mathfrak{A}$的远墙上时，此条件成立），则 $\mathsf{E} \otimes L^k \otimes \mathbb{C}_{-k\underline{a}}$ 是 $(L\underline{G})_{\underline{a}}$-等变的，因此可下降为一个 K 类

$$\mathsf{E}_{k\underline{a}} \in K^0(\mathcal{M}_{\Sigma,\underline{a}}).$$

在 $\mathcal{M}_{\Sigma,\underline{a}}$ 上取任意相容的近复结构，指标

$$\mathrm{index}(\mathsf{E}_{k\underline{a}}) \in \mathbb{Z}$$

定义如下。令 $V_{k\underline{a}}$ 为不可约的 $\underline{G}$ 表示，其最高权为 $k\underline{a}$。 [24]中证明的非阿贝尔局部化定理蕴含（另见 [35]），

$$\mathrm{index}(\mathsf{E}_{k\underline{a}}) = \mathrm{multiplicity}\big(V_{k\underline{a}},\ \mathrm{index}_{\underline{G}}^{k}(\mathsf{E})\big), \quad \text{for } k \gg 0. \tag{5}$$

另一方面，根据轨形的指标公式，(5)的左侧是关于 k的准多项式函数，因此完全由其在 $k \gg 0$处的取值决定。从这个意义上说，指标同态 (2)决定了 $\mathcal{M}_\Sigma$上的 K 理论交配对，$\underline{a}$。当 $\mathsf{E} = 1$ 时， $[Q, R] = 0$ 关于哈密顿环群空间的定理表明，(5)对 $k \geq 1$已成立；这一结果与 Verlinde 公式密切相关，详情参见 [2] 。

关于指标同态的进一步直觉，来自我们先前的工作 [25, 26, 27, 28] ，在那项工作中，我们研究了特殊情形 $\mathsf{E} = 1$。在这种情形下，我们证明了 $\mathrm{index}_{\underline{T}}^{k}(1)$ 是$L\underline{G}$的一个射影正能量表示的 Weyl-Kac分子；这一表示值得被视为无限维辛流形 $\mathcal{M}_\Sigma$ 的几何量子化（定义后者有几种方法，参见 [2, 30, 27], ，这些方法的结果都一致）。

本文内容安排如下。第 2 节回顾与紧致连通定向曲面 $\mathcal{M}_\Sigma$ 相关的无限维辛流形的构造 Σ, 该曲面的亏格为 g，且具有 $b \geq 1$ 个边界分支。第 3 节仔细讨论阿蒂亚-博特类$\mathsf{E}^N V$，尤其关注最不平凡的情形 $N = \Sigma$。第 4 节介绍指标同态（2），并证明表示 Atiyah-Bott 类的 Fredholm复形满足可容许性假设。第 3 节和第 4 节中关于$\mathsf{E}^\Sigma V$的主要结果概述如下定理。

定理1.1。在上述描述的边界条件下，算子族 $\overline{\partial}_A$, $A \in \mathcal{A}_\Sigma^\flat$ 下降为一个连续的 $\underline{G}$-等变 Fredholm 算子族 $\mathcal{M}_\Sigma = \mathcal{A}_\Sigma^\flat/\mathcal{G}_{\Sigma,\partial\Sigma}$ ，表示一个偶可容许K-类 $\mathsf{E}^\Sigma V \in K_{\underline{G}}^{\mathrm{ad}}(\mathcal{M}_\Sigma)$。$\mathsf{E}^\Sigma V$ 在$K_{\underline{T}}^{\mathrm{ad}}(\mathcal{M}_\Sigma)$中的像在元素$(\underline{w}, \underline{\eta}) \in \underline{W} \ltimes \underline{\Pi} = \underline{W}_{\mathrm{af}}$的仿射 Weyl 作用下变换

一组 $\underline{G}$as

$$(\underline{w},\underline{\eta})^*\mathsf{E}^{\Sigma}V=\mathsf{E}^{\Sigma}V-(2\pi\mathrm{i})^{-1}\partial_{\underline{\eta}}\underline{\mathrm{Tr}}_V, \tag{6}$$

其中 Tr_V是 V的特征，$\mathrm{Tr}_V(\underline{g})=\underline{\Sigma}_i\mathrm{Tr}_V(g_i)$ 对于 $\underline{g}=(g_1,...,g_b)\in\underline{G}$，而 $\partial_{\underline{\eta}}\mathrm{Tr}_V$是导数。

注意 $(2\pi\mathrm{i})^{-1}\partial_{\underline{\eta}}\mathrm{Tr}_{\underline{V}}\in R(\underline{T})\simeq R(\underline{T})\cdot 1\subset K^0_{\underline{T}}(\mathcal{M}_\Sigma)$。非平凡变换（6）是利用椭圆边界问题在边界条件改变时 Fredholm 指标变化的一般公式计算得到的。

在第 5 节中，我们使用族指标定理构造一个等变微分形式，用以表示 $\mathsf{E}^{\Sigma}V\restriction X$ 的等变陈特征。所得微分形式具有良好的解析性质，并且可以在非紧流形 X 上进行（等变）积分，从而得到一个指标的 Kirillov 型公式。遵循 Teleman 和 Woodward 的思路，第 6 节研究生成级数

$$\mathsf{E}_t=\exp(t\mathsf{E}^{\Sigma}V)\in\mathbb{C}K^{\mathrm{ad}}_{\underline{G}}(\mathcal{M}_\Sigma)[\![t]\!]$$

其中 t 是一个形式变量。指数映射将加法变换（6）转化为乘法变换，并使我们能够利用泊松求和公式对 Kirillov 公式进行部分求和。沿着这一思路，在 [24], 中得到了一个非常一般的 Atiyah-Bott-Segal-Singer 不动点公式，用于计算哈密顿环群空间上适当 K 类的指标。在第 6 节中，我们将这一一般公式应用于$\mathsf{E}^{\Sigma}V$ 和其他 Atiyah-Bott 类，并计算不动点贡献。类$\mathsf{E}^{\Sigma}V$ 的最终结果如下。请注意，在陈述中，李代数 $\mathfrak{g}$ 通过基本内积与 $\mathfrak{g}^*$ 相认同，G 与 $\underline{G}=G^b$中的对角线相认同，指标$\mathrm{index}^k_{\underline{G}}(\exp(t\mathsf{E}^{\Sigma}V))$ 被视为 $\underline{G}$ 上的不变分布形式级数，并将其与一个类函数配对。

定理 1.2。设 $f\in R(\underline{G})$。则

$$\langle\mathrm{index}^k_{\underline{G}}(\exp(t\mathsf{E}^{\Sigma}V)),f\rangle=\sum_{g\in T^{\mathrm{reg}}_\ell/W}\Big(\frac{(-1)^{|\mathfrak{R}_+|}J(g_t)^2}{|T_\ell|\det(1-t\ell^{-1}H_V(g_t))}\Big)^{1-\mathrm{g}}f(g_t)\in\mathbb{C}[\![t]\!],$$

其中 $\ell=k+\mathsf{h}^\vee$且 $\mathsf{h}^\vee$是 $\mathfrak{g}$的对偶 Coxeter 数，$T_\ell=\ell^{-1}\Lambda/\Pi\subset T$（一个有限子群），$J$ 是 Weyl 分母，$g_t\in\mathcal{J}^\infty_g(T_{\mathbb{C}})$ 是以 $g\in T_{\mathbb{C}}$ 为基点、满足 $g_t\exp(t\ell^{-1}v(g_t))=g$ 的唯一 ∞ 阶曲线喷流（或 $\mathbb{C}[\![t]\!]$ 阶点），$v=\frac{1}{4\pi^2}\nabla\mathrm{Tr}_V$，以及 $H_V=\mathrm{d}v=\frac{1}{4\pi^2}$海森矩阵$(\mathrm{Tr}_V)$。

还有一个同类的更一般公式，涉及其他 Atiyah-Bott 类E^NV，以及含多个参数的类似公式 t_1，...，t_k适用于研究乘积$\mathsf{E}^{\Sigma}V_1\cdots\mathsf{E}^{\Sigma}V_k\in K^{\mathrm{ad}}_{\underline{G}}(\mathcal{M}_\Sigma)$。作为定理 1.2 和方程（5）的推论，我们得到辛商上 K 理论交配对的公式。对于超出 Verlinde 公式相关情形的最简单例子（$\mathsf{E}=1$），我们推得，若 $k\gg 0$ 且 $\underline{a}$ 如（5）所示，则

$$\mathrm{index}(\mathsf{E}_{k\underline{a}})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}\sum_{g\in T^{\mathrm{reg}}_\ell/W}\Big(\frac{(-1)^{|\mathfrak{R}_+|}J(g_t)^2}{|T_\ell|\det(1-t\ell^{-1}H_V(g_t))}\Big)^{1-\mathrm{g}}\mathrm{Tr}_{V^*_{k\underline{a}}}(g_t),$$

并且在 k 较小时，左侧是关于 k 的唯一准多项式函数的值，该函数在 $k\gg 0$ 时与右侧相等。在最后一节中，我们简要讨论（沿用

[40]）生成级数的另一个例子，其动机来自它在 Higgs 丛的等变 Verlinde 公式中的出现 [19, 3, 20]。

取 $f = 1$ 在定理 1.2中，可得到一个与Teleman 和Woodward关于全纯 $G_{\mathbb{C}}$-丛的模叠 $\mathfrak{M}_{\mathbf{\Sigma}}$ 的指标定理相匹配的表达式（其中 $\mathbf{\Sigma}$ 由封闭 Σ的边界获得）；这是Verlinde 公式的一个非凡推广（令 $t = 0$即可恢复），该公式由 Teleman在 [39] 中提出猜想，并于 [40]中得到证明。后一个定理与定理1.2 适用于不同的情形，无法直接进行比较。然而，两个定理都以辛商空间上的 K理论交配对公式为共同推论。之所以基本上预期二者之间存在某种关系，是因为叠 $\mathfrak{M}_{\mathbf{\Sigma}}$ 的同伦类型是同伦商空间$\mathcal{M}_{\Sigma,\underline{G}} = E\underline{G} \times_{\underline{G}} \mathcal{M}_{\Sigma}$（关于进一步讨论，参见 [16, 44], [40, 附录]）。在其证明中，Teleman 和 Woodward引入了（[40, 第 3] 节）一个具有扭曲仿射 Weyl 反对称性质的形式级数；我们认为，这个级数很可能与我们的 $\underline{T}$-等变解析指标相一致。关于（6）的证明随后为前者的扭曲等变性质提供了一个截然不同的视角。我们还要指出，最近Trapeznikova [41]给出了研究这些 K理论交配对的一种优雅的代数几何方法。

我们描述一个例子，其中指标可以直接轻松计算，无需使用 [24] 中发展的工具。在下文的讨论中，利用基本内积将 $\mathfrak{g}$ 识别为 $\mathfrak{g}^*$。令 $\Sigma = \mathbb{D}$ 为圆盘，并令 $\mathcal{M}_{\mathbb{D}}$ 表示 $\mathbb{D}$ 上模去沿 $\partial\mathbb{D} = S^1$ 取恒等变换的规范变换后的平坦 G-联络的模空间。那么 $\mathcal{M}_{\mathbb{D}}$ 是一个无限维 K¨ ahler 流形，并带有回路群 LG 的哈密顿作用，其动量映射为

$$\mu_{\mathbb{D}} \colon \mathcal{M}_{\mathbb{D}} \to \Omega^1(S^1, \mathfrak{g})$$

它由将联络拉回到 $\partial\mathbb{D} = S^1$ 所诱导。在此情形下，$\mu_{\mathbb{D}}$ 是一个嵌入，并将 $\mathcal{M}_{\mathbb{D}}$ 识别为 $0 \in \Omega^1(S^1, \mathfrak{g})$ 在规范作用下的 LG 轨道。由于 0 的稳定子是 $G \subset LG$ （常值环），因此还有 $\mathcal{M}_{\mathbb{D}} \simeq LG/G$。

流形 X 与离散空间同伦等价

$$\mathcal{M}_{\mathbb{D}} \cap \mathfrak{t} = W_{\mathrm{af}} \cdot 0 = \Pi, \qquad \Pi = \ker(\exp_T) \subset \mathfrak{t},$$

其中，在左边我们将 $\mathcal{M}_{\mathbb{D}}$ 与其在 $\Omega^1(S^1, \mathfrak{g})$ 中的像识别，并将 $\mathfrak{t}$ 与常值联络 $\xi \mathrm{d}\theta, \xi \in \mathfrak{t}$ 识别。交集 $\mathcal{M}_{\mathbb{D}} \cap \mathfrak{t}$ 也恰好是 $\mathcal{M}_{\mathbb{D}}$ 上的 $T \times S^1_{\mathrm{rot}}$ 作用的不动点集，其中 S^1_{rot} 旋转圆盘。

预量子线丛可以描述为

$$L = \widehat{LG} \times_{\widehat{G}} \mathbb{C}_{(0,-1)} \to LG/G \simeq \mathcal{M}_{\mathbb{D}},$$

其中 $\widehat{LG}$ 是回路群的最小中心扩张。旋量丛 $\mathscr{S} = L^{\mathrm{h}^\vee}$，以及用于考虑交 $\mathcal{M}_{\mathbb{D}} \cap \mathfrak{t}$ 的非横截性的 $\mathscr{S}$ 的修正项 S 是$S = \mathscr{S}\widehat{\otimes} \wedge \mathfrak{n}^- \otimes \mathbb{C}_\rho$，其中 $\mathfrak{n}^-$ 是负根空间之和，ρ 是正根的半和。T 通过特征 e^η作用于 L 在 $\eta \in \mathcal{M}_{\mathbb{D}} \cap \mathfrak{t} = \Pi$ 上的纤维。

由于 X 与离散空间同伦等价，T等变指标等于对点 $\eta \in \Pi$ 处的特征在 T 作用于（$S \otimes L^k$）$|_\eta$时的取值求和：

$$\mathrm{index}_T^k(1) = J \sum_{\eta \in \Pi} e^{\ell\eta} = \sum_{g \in T_\ell^{\mathrm{reg}}/W} \frac{J(g)}{|T_\ell|} \sum_{w \in W} (-1)^{l(w)} \delta_{wg} \in \mathcal{D}'(T),$$

其中 $\ell = k + \mathrm{h}^\vee$、 $T_\ell = \ell^{-1}\Lambda/\Pi \subset \mathfrak{t}/\Pi = T$。我们使用了泊松求和公式以及 J的反对称性。对 T_ℓ^{reg}/W的求和可以取遍任意一组代表元。

我们接下来引入一个非平凡 K 类。固定一个 V的有限维表示 G。在$\mathcal{A}_{\mathbb{D}}^\flat$ 上存在一个一阶椭圆算子的典范族，其中对$A \in \mathcal{A}_{\mathbb{D}}^\flat$ 赋予 $\mathbb{D}$ 上的$\overline{\partial}$算子，该算子与带有矢势 A的平凡丛 $\mathbb{D}\times V$耦合。施加这样的边界条件：截面在 $\partial\mathbb{D}$ 上的限制的非负傅里叶模均为零。由此我们得到一个在 $\mathcal{A}_{\mathbb{D}}^\flat$ 上的 Fredholm 算子族，它下降为一个在 $\mathcal{M}_{\mathbb{D}}$ 上的 G等变 Fredholm 算子族，表示 K 类 $\mathsf{E}^{\mathbb{D}}V \in K_G(\mathcal{M}_{\mathbb{D}})$。

令 $\mathrm{Tr}_V = \sum_\lambda n_\lambda e^\lambda$ 表示特征在极大环面上的限制。$\mathsf{E}^{\mathbb{D}}V$到点 $\eta \in \Pi = \mathcal{M}_{\mathbb{D}} \cap \mathfrak{t}$ 的拉回为

$$\mathsf{E}^{\mathbb{D}}V|_\eta = (2\pi\mathrm{i})^{-1}\partial_\eta \mathrm{Tr}_V = \sum_\lambda n_\lambda \langle\lambda,\eta\rangle e^\lambda \in R(T) = K_T^0(\mathrm{pt}).$$

（验证这一点的一种方法是注意到 $\mathsf{E}^{\mathbb{D}}V|_0 = 0$，然后使用我们将在第 3.4 节看到的边界条件变换公式。）因此，指标为

$$\mathrm{index}_T^k(\mathsf{E}^{\mathbb{D}}V) = J\sum_{\eta\in\Pi}\sum_\lambda n_\lambda\langle\lambda,\eta\rangle e^{\ell\eta+\lambda} \in R^{-\infty}(T).$$

相反，考虑形式级数 $\exp(t\mathsf{E}^{\mathbb{D}}V) \in \mathbb{C}K_T(\mathcal{M}_{\mathbb{D}})[\![t]\!]$，我们得到

$$\mathrm{index}_T^k(\exp(t\mathsf{E}^{\mathbb{D}}V)) = J\sum_{\eta\in\Pi} e^{\ell\eta + t\sum_\lambda n_\lambda\langle\lambda,\eta\rangle e^\lambda} \in \mathbb{C}R^{-\infty}(T)[\![t]\!],$$

经过形式变量替换后，可以使用泊松求和公式将其简化（详见 [24, 第 4 节。4] 结果为

$$\mathrm{index}_T^k(\exp(t\mathsf{E}^{\mathbb{D}}V)) = \sum_{g\in T_\ell^{\mathrm{reg}}/W} \frac{J(g_t)\sum_{w\in W}(-1)^{l(w)}\delta_{wg_t}}{|T_\ell|\det(1-t\ell^{-1}H_V(g_t))} \tag{7}$$

其中 $g_t \in \mathcal{J}_g^\infty(T_{\mathbb{C}})$ 是曲线的唯一 ∞-阶导数（或 $\mathbb{C}[\![t]\!]$-点），基于 $g \in T_{\mathbb{C}}$ 满足$g_t\exp(t\ell^{-1}v(g_t)) = g$，$v = \frac{1}{4\pi^2}\nabla\mathrm{Tr}_V$，以及 $H_V = \mathrm{d}v = \frac{1}{4\pi^2}$海森矩阵$(\mathrm{Tr}_V)$. 应用归纳法后，方程（7）变为亏格$\mathsf{g} = 0$ 情形，即定理 1.2。

我们指出，$T\times S^1_{\mathrm{rot}}$-等变 K 理论的 $\mathcal{M}_{\mathbb{D}}$ 由Kostant 和Kumar [22]计算得到。 $T\times S^1_{\mathrm{rot}}$ 和 T-等变 K 理论群的 $\mathcal{M}_{\mathbb{D}}$ 的代数描述见[23]。对于 T-等变 K 理论，条件如下。由于 $W_{\mathrm{af}} = W \ltimes \Pi$，元素$\mathsf{E} \in K_T(\mathcal{M}_{\mathbb{D}})$ 限制到 $\mathcal{M}_{\mathbb{D}}\cap\mathfrak{t} = \Pi$ 后可视为函数 ψ： $W_{\mathrm{af}} \to R(T)$，其在 W陪集上为常数。于是， $R(T)$-模 $K_T(\mathcal{M}_{\mathbb{D}})$ 同构于这类函数 ψ 组成的空间，并且还满足 GKM型性质：对于每个 $d > 0$和根 α，函数 $\mathfrak{d}_{\alpha^\vee}^d\psi$取值于$(1-e^\alpha)^d\cdot R(T)$，其中 $\mathfrak{d}_{\alpha^\vee}$是有限差分算子 $(\mathfrak{d}_{\alpha^\vee}\psi)(w) = \psi(w) - \psi(\alpha^\vee\cdot w)$。正如必然如此，$\mathsf{E}^\Sigma V$满足该条件（而对于 $d > 1$，在 $\mathfrak{d}_{\alpha^\vee}^d\psi = 0$的意义下该条件显然成立）。$\mathsf{E}^\Sigma V$与 [23]中的舒伯特型生成元大不相同。我们猜想，可容许类正是那些使 GKM 条件在某个有限 d下变得平凡的类。

致谢。我感谢 Michele Vergne 与我讨论，并在数年前向我介绍了物理学家 [19] 关于等变 Verlinde 公式的研究。我感谢 Eckhard。

Meinrenken、Nigel Higson、Reyer Sjamaar、Chris Woodward、Maxim Braverman 和 Daniel Halpern-Leistner，感谢他们提供的有益讨论。

记号。我们经常处理 $\mathbb{Z}_2$分次的向量空间/向量丛，在此语境下，$[a,b]$ 表示线性算子 a, b的分次交换子。分次张量积记作 $\widehat{\otimes}$。

令 G 为一个紧致、连通、单连通的单李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$。固定一个极大环面 $T \subset G$，其李代数为 $\mathfrak{t}$，并选定一个正室 $\mathfrak{t}_+ \subset \mathfrak{t}$。令 $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{t}_+$ 表示包含 0 的基本仿射室。令 W 为 Weyl 群，令 $\mathfrak{R} \supset \mathfrak{R}_+$ 分别表示根集和正根集。整数格或余根格记为 $\Pi = \ker(\exp : \mathfrak{t} \to T) \simeq \mathrm{Hom}(U(1)\ T)$，实权格记为 $\Lambda = \mathrm{Hom}(\Pi, \mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Hom}(T, U(1))$。对于 $\lambda \in \Lambda$，相应的同态 $T \to U(1)$记为 e^λ，并且如果 $\xi \in \mathfrak{t}$, $u = \exp(\xi)$，则 $e^\lambda(u) = u^\lambda = e^{2\pi \mathrm{i}\langle \xi, \lambda \rangle}$。格 Π 在 $\mathfrak{t}$ 中确定了 Lebesgue 测度的一个规范归一化，我们用它将分布与广义函数对应起来。通常，u, g 表示 T（或 $T_{\mathbb{C}}$）的元素，ξ 表示 $\mathfrak{t}$（或 $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$）的一个元素，$\eta$ 表示 Π 的一个元素，而 λ 表示 Λ的一个元素。

T的表示环为 $R(T) = \mathbb{Z}[\Lambda]$，而 $\mathbb{C}R(T) = \mathbb{C} \otimes R(T)$。形式完备化$R^{-\infty}(T) = \mathbb{Z}^\Lambda$是一个 $R(T)$-模。如果 T作用在希尔伯特空间 H上，则权为 $\lambda \in \Lambda$ 的同型分量子空间记为 $H_{[\lambda]}$。如果 a 是作用于 H上的 T-等变线性算子，则其在 $H_{[\lambda]}$ 上诱导的算子记为 $a_{[\lambda]}$。

对于单李代数，每个不变积分内积都是基本内积“$\cdot$”的正整数倍，并将短余根的长度归一化为 $\sqrt{2}$。对于$\mathfrak{su}(n)$，基本内积为

$$(\xi_1, \xi_2) \mapsto \xi_1 \cdot \xi_2 = -\frac{1}{4\pi^2} \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}^n}(\xi_1 \xi_2).$$

我们在全文中使用基本内积来定义 $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^*$。特别地，$\Lambda$ 成为 $\mathfrak{t}$ 中的一个格，并且对于 $\ell \in \mathbb{Z}_{>0}$，我们可以定义一个有限子群 $T_\ell := \ell^{-1}\Lambda/\Pi \subset \mathfrak{t}/\Pi = T$。

令 $\mathrm{h}^\vee$ 为 $\mathfrak{g}$ 的对偶 Coxeter 数。例如，若 $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(n)$，则 $\mathrm{h}^\vee = n$。从本文第 4 节开始，k 表示一个严格大于 $-\mathrm{h}^\vee$ 且大于 $\ell = k + \mathrm{h}^\vee$ 的整数。

设 $b \geq 1$ 为整数。与 b重乘积 $\underline{G} := G^b$ 相关的对象将用下划线表示。例如，$\underline{T} = T^b \subset G^b$、$\underline{\Pi} = \Pi^b \subset \underline{\mathfrak{t}} = \mathfrak{t}^b$，等等。

2. Framed moduli spaces of flat connections

2.1. 环群。关于环群的背景资料，参见 [36]。令 LG表示映射空间$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to G$，其固定索伯列夫类为 $\varsigma > \frac{3}{2}$。这是一个巴拿赫李群（群运算是回路的逐点乘法），其李代数 $L\mathfrak{g}$ 可识别为 $\mathfrak{g}$值 0-形式 $\Omega^0_\varsigma(S^1, \mathfrak{g})$，其索伯列夫类为 ς。

回路群的 $U(1)$ 个中心扩张由 $\ell \in \mathbb{Z}$ 分类，其中相应的中心扩张 $\widehat{LG}^{(\ell)}$ 具有李代数余圈

$$(\xi_1, \xi_2) \mapsto 2\pi \mathrm{i} \int_{S^1} \ell \mathrm{d}\xi_1 \cdot \xi_2.$$

群 G 作为常值环子群包含在 LG 中。中心扩张 $\widehat{LG}^{(\ell)}$在 G上平凡化，因此 G 可以视为 $\widehat{LG}^{(\ell)}$的子群。

令 $L\mathfrak{g}^* = \Omega^1_{\varsigma-1}(S^1, \mathfrak{g})$ 表示 $\mathfrak{g}$ 值的 1-形式（或联络）的索伯列夫类$\varsigma - 1$。由于 $\varsigma - 1 > -\varsigma$, 存在一个非退化配对 $L\mathfrak{g} \times L\mathfrak{g}^* \to \mathbb{R}$，它由 $\mathfrak{g}$ 上的内积 $\cdot$ 给出，并在 S^1 上积分。回路群 LG 通过规范变换在 $L\mathfrak{g}^*$ 上光滑且适当地作用：

$$a \mapsto g \cdot a = \mathrm{Ad}_g(a) - \mathrm{d}gg^{-1}, \qquad g \in LG, a \in L\mathfrak{g}^*. \tag{8}$$

给定 $\xi \in L\mathfrak{g}$ 在 $L\mathfrak{g}^*$ 上的无穷小作用所对应的向量场为 $\xi_{L\mathfrak{g}^*}(a) = \partial_u|_{u=0}\exp(-u\xi) \cdot a = \mathrm{d}_a\xi$ 在 $a \in L\mathfrak{g}^*$处，其中$\mathrm{d}_a = \mathrm{d} + \mathrm{ad}_a$ 是由联络 a定义的协变导数。子群$\Omega G \subset LG$ 由从 $1 \in G$ 开始的环路组成，自由且适当地作用于$L\mathfrak{g}^*$，其商空间为 $L\mathfrak{g}^*/\Omega G \simeq G$，并且 LG在 $L\mathfrak{g}^*$ 上的作用下降为 G 通过共轭在自身上的作用。全纯映射

$$\mathrm{hol}\colon L\mathfrak{g}^* \to G$$

是 ΩG 作用的商映射。

2.2. 带框架平坦联络模空间。设 Σ 是一个带有 $\partial\Sigma \neq \emptyset$ 的紧致连通定向亏格 g 曲面。我们将边界分支标记为 1, ..., b （b 个连通分支），并将第 j 个边界分支记为 $\partial_j\Sigma$。我们对边界定向, 使得若 v 是沿边界的一个处处非零且指向内部的向量场，则 $\iota(v)\mathrm{Vol}_\Sigma|_{\partial\Sigma}$ 是边界上的体积形式（在此定向下，斯托克斯定理中会出现一个负号）。我们还固定边界分支的保定向参数化 $\partial_j\Sigma \simeq S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$。回忆 $\underline{G} = G^b$，我们将其视为局部常值映射 $\partial\Sigma \to G$ 的集合。回路群 $L\underline{G} = LG^b$ 被认作索伯列夫类 ς 的映射 $\partial\Sigma \to G$ 的集合。

由于 G 是单连通的，任何位于 Σ 上的主 G丛在拓扑上都是平凡的。令 $\mathcal{G}_\Sigma$ 为规范群, 即由 $\Sigma \to G$ 构成的索伯列夫类 $\varsigma + \frac{1}{2}$ 映射的集合。存在一个连续群同态

$$\mathscr{R}\colon \mathcal{G}_\Sigma \to L\underline{G}$$

由限制到边界给出。由于 G 是单连通的， $\mathscr{R}$ 是满射，因此我们得到一个短正合列

$$1 \to \mathcal{G}_{\Sigma,\partial\Sigma} \to \mathcal{G}_\Sigma \to L\underline{G} \to 1.$$

Let

$$\mathcal{A}_\Sigma = \Omega^1_{\varsigma-\frac{1}{2}}(\Sigma, \mathfrak{g}) \supset \mathcal{A}^\flat_\Sigma$$

是主丛上的联络空间，分别是平坦联络空间 G-丛 $\Sigma \times G$，其索伯列夫类为 $\varsigma - \frac{1}{2}$。仿射空间 $\mathcal{A}_\Sigma$ 具有著名的阿蒂亚-博特辛结构 [5], , 且 $\mathcal{G}_{\Sigma\text{的作用}\partial\Sigma}$ 是哈密顿的，其动量映射为 $A \mapsto \mathrm{curv}(A)$。

定义 2.1。辛约化

$$\mathcal{M}_\Sigma = \mathcal{A}^\flat_\Sigma/\mathcal{G}_{\Sigma,\partial\Sigma}$$

是一个无限维弱辛Banach 流形，配备有回路群 $L\underline{G}$ 的哈密顿作用，其动量映射是适当的

$$\mu_{\mathcal{M}_\Sigma}\colon \mathcal{M}_\Sigma \to \Omega^1_{\varsigma-1}(\partial\Sigma, \mathfrak{g}) = L\underline{\mathfrak{g}}^*$$

由将联络拉回到边界所诱导。

$\mathcal{M}_\Sigma$ 是 Σ 上带有沿边界的标架的平坦联络模空间；它是一个适当的哈密顿 $L\underline{G}$-空间，参见 [31, 32]。我们在下一节回顾 $\mathcal{M}_\Sigma$ 上的巴拿赫流形图的构造。基于点的回路子群 $\Omega\underline{G} \subset L\underline{G}$ 在 $\mathcal{M}_\Sigma$上自由且适当地作用。

定义 2.2。商空间

$$M_\Sigma = \mathcal{M}_\Sigma/\Omega\underline{G}$$

是一个光滑、有限维、紧的 $\underline{G}$-空间，我们将其称为$\mathcal{M}_\Sigma$的全纯单值流形。商映射 $\mathcal{M}_\Sigma \to M_\Sigma$ 记作 $\mathrm{hol}_{\mathcal{M}_\Sigma}$。

存在一个拉回图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_\Sigma & \xrightarrow{\mu_{\mathcal{M}_\Sigma}} & L\underline{\mathfrak{g}}^* \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{hol}_{\mathcal{M}_\Sigma}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{hol}} \\ M_\Sigma & \longrightarrow & \underline{G} \end{array} \tag{9}$$

因此， M_Σ 是 Σ 上带有标架的平坦联络模空间，标架取在点集

$$P = \{p_1, ..., p_b\} \subset \partial\Sigma$$

这些点由 $0 \in S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 在边界参数化下的像给出。由于平坦联络的规范等价类可以用其 holonomy 数据来描述，因此存在一个同一

$$M_\Sigma \simeq \mathrm{Hom}(\Pi_1(\Sigma, P), G),$$

其中， $\Pi_1(\Sigma, P)$ 是以点集 P 为基点的 Σ 的基本群胚。 $\underline{G}$ 在 M_Σ 上有剩余作用，该作用改变点 P 处的标架，并且商空间之间存在典范同一

$$\mathcal{A}^\flat_\Sigma/\mathcal{G}_\Sigma \simeq \mathcal{M}_\Sigma/L\underline{G} \simeq M_\Sigma/\underline{G} \simeq \mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma, p_1), G)/G. \tag{10}$$

流形 M_Σ 是一个拟哈密顿 $\underline{G}$-空间 [1]，的例子，尽管本文不会采用这一视角。

稍后我们还需要 $\mathcal{M}_\Sigma$ 的一种略有不同的表述。令 $\mathcal{C}$ 为 $\partial\Sigma$ 的一个领圈邻域。令 $\mathcal{A}^\flat_{\Sigma,}$ $_{\mathcal{C}}$ 表示在 $\mathcal{C}$ 上为常值，且等于其在边界上的限制的拉回的平坦联络；令 $\mathcal{G}_{\Sigma,}$ $_{\mathcal{C}}$ 表示在 $\mathcal{C}$ 上等于 1 的规范变换。那么有

$$\mathcal{M}_\Sigma \simeq \mathcal{A}^\flat_{\Sigma,\mathcal{C}}/\mathcal{G}_{\Sigma,\mathcal{C}}. \tag{11}$$

可以利用 (10) 证明这一点——类似论证的例子可参见 [31, 定理 3。2]

令 $\underline{a} = (a_1,...,a_b) \in \underline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}^b$。辛约化

$$\mathcal{M}_{\Sigma,\underline{a}} = \mu^{-1}_{\mathcal{M}_\Sigma}(\underline{a})/(L\underline{G})_{\underline{a}}$$

是 Σ 上平坦联络的模空间，其中 holonomy 在第 j 个边界分量周围取值于 $\exp(a_j)$ 的共轭类。

2.3. 库仑规范图表。 流形图表 $\mathcal{M}_\Sigma$ 是利用巴拿赫空间上的隐函数定理构造的（例如参见 [16, 第 103], [31, 3 节。1], [44, 附录 C], [17, 第 2, 4], [6, 42]）。我们回顾这一构造，因为稍后会用到它。

使用忠实表示 $\mathbb{C}^N$，将 G 视为矩阵群。注意，对于 $A \in \mathcal{A}_\Sigma$， $g \in \mathcal{G}_\Sigma$

$$A - g \cdot A = (\mathrm{d}_A g) g^{-1}, \tag{12}$$

其中 $\mathsf{d}_A g = \mathrm{d}g + [A, g]$ 是 $\mathfrak{g}$ 在 $\mathsf{End}(\mathbb{C}^N)$ 上的表示所对应的协变导数。如果g 固定 A，那么 (12) 表示 $\mathsf{d}_A g = 0$，因此通过平行移动，连通流形 Σ 上的 g 由其在任意一点的取值唯一确定。特别地，若 $g \in \mathcal{G}_\Sigma,\ \partial\Sigma$，则$g|_{\partial\Sigma} = 1$，由唯一性可知 $g = 1$ 恒等成立。这说明 $\mathcal{G}_\Sigma,\ \partial\Sigma$ 在 $\mathcal{A}_\Sigma$ 上的作用是自由的。在李代数层面，这意味着映射

$$\gamma \in \Omega^0_{\varsigma+\frac{1}{2},\partial}(\Sigma, \mathfrak{g}) \mapsto \mathrm{d}_A \gamma \in \Omega^1_{\varsigma-\frac{1}{2}}(\Sigma, \mathfrak{g}) \tag{13}$$

其核是平凡的，其中下标“∂”表示我们施加边界条件$\gamma|_{\partial\Sigma} = 0$。方程（12）还表明，若 $g \in \mathcal{G}_\Sigma,\ \partial\Sigma$ 且 $\|A - g \cdot A\|_{\varsigma-\frac{1}{2}}$较小，则 g 在 Sobolev $\varsigma + \frac{1}{2}$ 拓扑下接近 $1 \in \mathcal{G}_\Sigma,\ \partial\Sigma$ （这里我们利用了 d_A 在 0-形式上的椭圆性以及 Σ的紧致性）。

在 Σ 上固定一个黎曼度量。设 $A \in \mathcal{A}$。我们称 A' 相对于 A 处于库仑规范，当且仅当

$$\mathrm{d}_A^*(A' - A) = 0.$$

定义库仑规范切片

$$C_{A,\epsilon} = \{A' \in \mathcal{A}_\Sigma | \mathrm{d}_A^*(A' - A) = 0, \|A' - A\|_{\varsigma-\frac{1}{2}} < \epsilon\}.$$

No请注意，这些切片对于整个规范群 $\mathcal{G}_\Sigma$ 是等变的，即

$$C_{g\cdot A,\epsilon} = g \cdot C_{A,\epsilon}, \qquad g \in \mathcal{G}_\Sigma. \tag{14}$$

对于 $A \in \mathcal{A}^\flat_\Sigma$，令

$$U_{A,\epsilon} = \{A' \in \mathcal{A} | \mathrm{curv}(A') = 0, \mathrm{d}_A^*(A' - A) = 0, \|A' - A\|_{\varsigma-\frac{1}{2}} < \epsilon\} \subset C_{A,\epsilon}.$$

命题 2.3。设 $A \in \mathcal{A}_\Sigma$。存在一个充分小的 $\epsilon > 0$ （取决于 A），使得如果$\|A' - A\|_{\varsigma-\frac{1}{2}} < \epsilon$，则存在唯一的 $g_A(A') \in \mathcal{G}_\Sigma、\partial\Sigma$，满足 $g_A(A') \cdot A' \in C_A、\epsilon$；此外， $g_A(A')$ 关于 A' 光滑依赖。因此，$C_A、\epsilon$ 是 $\mathcal{G}_\Sigma、\partial\Sigma$ 作用的切片，并且 $q\colon \mathcal{A}_\Sigma \to \mathcal{A}_\Sigma/\mathcal{G}_\Sigma、\partial\Sigma$ 是一个主 $\mathcal{G}_\Sigma、\partial\Sigma$-丛。当 $A \in \mathcal{A}^\flat_\Sigma$ 且 $\epsilon > 0$ 足够小时，存在一个从 U_A、 ϵ 到其在 A、 $T_A U_A$、 ϵ 处的切空间的微分同胚，并且后者与商映射 q 的复合为 $\mathcal{M}_\Sigma$ 在 $q(A)$ 附近提供一个局部坐标图。

证明。设 $\alpha = A' - A$。根据假设 $\|\alpha\|_{\varsigma-\frac{1}{2}} < \epsilon$。考虑关于 $g \in \mathcal{G}_\Sigma,\ \partial\Sigma、\alpha \in \Omega^1_{\varsigma-\frac{1}{2}}(\Sigma, \mathfrak{g})$ 的函数，该函数定义为

$$F(g, \alpha) = \mathrm{d}_A^*(g \cdot (A + \alpha) - A).$$

显然 $F(1, 0) = 0$。我们断言，对于充分小的 ϵ，方程 $F(g, \alpha) = 0$（固定α）有唯一解 $g \in \mathcal{G}_\Sigma,\ \partial\Sigma$ 满足 $\|g \cdot (A + \alpha) - A\|_{\varsigma-\frac{1}{2}} < \epsilon$。根据假设， α,$g \cdot (A + \alpha) - A$ 在 Sobolev $\varsigma - \frac{1}{2}$ 范数下很小，方程（12）之后的讨论表明， g 在 Sobolev $\varsigma + \frac{1}{2}$ 拓扑下接近 1，即 $\mathcal{G}_\Sigma,\ \partial\Sigma$。因此，取充分小的$\epsilon$，我们可以假设处于巴拿赫空间隐

函数定理适用的区域。 F 关于 g 在点 (1, 0) 处的第一个偏导数为

$$(\mathbf{d}_1 F)_{(1,0)}(\gamma) = -\mathrm{d}_A^* \mathrm{d}_A \gamma, \qquad \gamma \in \Omega^0_{\varsigma+\frac{1}{2},\partial}(\Sigma, \mathfrak{g}).$$

由于拉普拉斯型算子 $\mathbf{d}$ 的狄利克雷问题$^*_A\mathrm{d}_A$ 具有唯一解（例如，这可由 Lax-Milgram定理推出；利用（13）的单射性来验证强制性），隐函数定理给出了 g 的存在性与唯一性，并且还表明$g =:\ g_A$（A'）光滑地依赖于 $A' = A + \alpha$。

流出 $\mathcal{G}_{\Sigma,\ \partial\Sigma} \cdot C_{A,\ \epsilon}$是 $\mathcal{A}$的一个开子集。由上面证明的唯一性可知，每个 $A' \in \mathcal{G}_{\Sigma,\ \partial\Sigma} \cdot C_{A,\ \epsilon}$ 都位于 $\mathcal{G}_{\Sigma,\ \partial\Sigma}$ 中某个唯一元素的轨道上。因此 $C_{A,\ \epsilon}$ 是自由 $\mathcal{G}_{\Sigma,\ \partial\Sigma}$ 作用的一个切片，为 q 提供了一个局部截面。利用隐函数定理进行类似论证可表明：给定两个局部截面 $C_{A_i,\ \epsilon}$, $i = 1$, 当 ϵ 足够小时，过渡函数 $q(C_{A_1,\ \epsilon}) \cap q(C_{A_2,\ \epsilon}) \to \mathcal{G}_{\Sigma,\ \partial\Sigma}$ 是光滑的。

接下来令 $A \in \mathcal{A}^\flat_\Sigma$。curv(·) 在 A 处的导数为

$$(\mathbf{d}\mathrm{curv})_A(\alpha) = \mathrm{d}_A \alpha.$$

映射

$$\alpha \in \Omega^1_{\varsigma-\frac{1}{2}}(\Sigma, \mathfrak{g}) \cap \ker(\mathrm{d}_A^*) \mapsto \mathrm{d}_A \alpha \in \Omega^2_{\varsigma-\frac{3}{2}}(\Sigma, \mathfrak{g})$$

是满射：$\mathbf{d}_A \alpha = \beta$ 有一个解 $\alpha = *\mathbf{d}_A \gamma$，其中 γ 是狄利克雷问题的唯一解

$$-\mathrm{d}_A^* \mathrm{d}_A \gamma = *\beta, \qquad \gamma|_{\partial\Sigma} = 0,$$

此外，由于 A的平坦性，$\mathbf{d}^*_A \alpha \overset{2}{=} 0$，因为 $\mathbf{d}_A = 0$。这表明 0 是 curv 的正则值。根据隐函数定理，当 ϵ 充分小时，$U_{A,\ \epsilon}$ 与其在 A 处的切空间微分同胚

$$T_A U_{A,\epsilon} = \{\alpha \in \Omega^1_{\varsigma-\frac{1}{2}}(\Sigma, \mathfrak{g}) | \mathrm{d}_A \alpha = 0 = \mathrm{d}_A^* \alpha\}.$$

由此可得 $\mathcal{M}_\Sigma$ 在 $q(A)$ 附近的一个局部坐标图。 □

3. Atiyah-Bott classes for framed moduli spaces of flat connections

在本节中，我们将描述各种等变 K 理论类 $\mathcal{M}_\Sigma$。这些类推广了 Atiyah 和 Bott 引入的K理论类[5]，其适用于闭曲面的情形，因此我们将这些类称为 Atiyah-Bott 类。

我们将一个 $\underline{G}$空间 Y 的 $\underline{G}$-等变 K理论理解为 $\underline{G}$-等变的非紧支集K 理论，记作 $K_{\underline{G}}(Y) = K^0_{\underline{G}}(Y)$：从 Y到 $L^2(\underline{G})$上的 Fredholm算子空间的 $\underline{G}$-等变连续映射的同伦类，其中该空间赋予范数拓扑（参见 [38, 第 5]节）。在本文中，用对（$\mathcal{E}$, Q）表示 K-理论类较为方便，其中 $\mathcal{E} \to Y$是一个 $\mathbb{Z}_2$-分次的$\underline{G}$-等变Hilbert丛（结构群为赋予范数拓扑的酉群），而 Q 是定义在 $\mathcal{E}$ 的纤维上的一族可能无界的奇自伴Fredholm算子，使得相应的有界族$F = Q(1+Q^2)^{-1/2}$ 关于范数连续。给定这样的对（$\mathcal{E}$, Q），通过将 $\mathcal{E}$ 平凡化（必要时进行稳定化），并取 $F = Q(1 + Q^2)^{-1/2}$ 中将 $\mathcal{E}^+$ 映射到 $\mathcal{E}^-$的分量 F^+，即可得到一个从 Y 到 Fredholm 算子空间的连续映射。

取定 G 的一个有限维复表示（V, π_V）。令 $g \in \mathcal{G}_\Sigma$ 通过作用于平凡丛 $\Sigma \times V$

$$g \cdot (p, v) = (p, \pi_V(g(p))v), \qquad p \in \Sigma, v \in V.$$

定义 3.1. $\mathcal{A}_\Sigma^\flat \times (\Sigma \times V)$在 $\mathcal{G}_\Sigma$ 的对角作用下的商空间，$\partial\Sigma$ 是一个 $L\underline{G}$-等变向量丛

$$\mathsf{E}V = (\mathcal{A}_\Sigma^\flat \times \Sigma \times V)/\mathcal{G}_{\Sigma,\partial\Sigma} \to (\mathcal{A}_\Sigma^\flat \times \Sigma)/\mathcal{G}_{\Sigma,\partial\Sigma} = \mathcal{M} \times \Sigma.$$

它定义了一个类 $\mathsf{E}V \in K_{\underline{G}}^0(\mathcal{M} \times \Sigma)$。

策略是在 $\mathcal{M}_\Sigma$ 上构造 K 理论类：将 $\mathsf{E}V$ 拉回到 $\mathcal{M} \times N$，其中 $\iota\colon N \hookrightarrow \Sigma$ 是一个子流形，然后沿着 $p\colon \mathcal{M} \times N \to \mathcal{M}$ 推前。这样得到的类仅取决于映射 ι 的同伦类。当 $\dim(N) = 0$, 1 时，该方法可直接使用；经过适当解释后，当 $\dim(N) = 2$（即 $N = \Sigma$）时也适用。

3.1. $\dim(N) = 0$, 1 时的 Atiyah-Bott 类。最简单的情形是 $N = \mathrm{pt}$。由于 Σ 是连通的，Σ 中任意两点都可由一条路径连接，因此我们只得到一个不同的 K 理论类 $\mathsf{E}^{\mathrm{pt}}V \in K_{\underline{G}}^0(\mathcal{M}_\Sigma)$。选择位于 $\partial\Sigma$ 上的点，我们看到 $\mathsf{E}^{\mathrm{pt}}V$ 由平凡向量丛 $\mathcal{M}_\Sigma \times V$ 表示，其中 $\underline{G} = G^b$ 中除一个以外的所有 G 副本在纤维上都作用平凡（特别是，在 G^b 中选择不同的因子作用于纤维 V，会得到同伦的 G^b-等变向量丛）。

转到维数 1，设 $\iota\colon N = C \hookrightarrow \Sigma$ 是一条闭曲线。将 $\mathsf{E}V$拉回到 $\mathcal{M}_\Sigma \times C$，并沿 C 取 L^2-截面，得到一个 $L\underline{G}$-等变 Hilbert 丛:

$$\mathcal{E}_C = (\mathcal{A}_\Sigma^\flat \times L^2(C,V))/\mathcal{G}_{\Sigma,\partial\Sigma} \to \mathcal{A}_\Sigma^\flat/\mathcal{G}_{\Sigma,\partial\Sigma} = \mathcal{M}_\Sigma$$

其中 $\mathcal{G}_\Sigma$ 以对角线方式作用，而对 $L^2(C,V)$的作用则通过沿C各点的取值实现。（注意，规范作用保持 L^2-内积。）固定参数化 $C \simeq S^1$，并令$\not{D}_0^C = \frac{1}{\mathrm{i}\,\mathrm{d}\,\mathrm{d}s}$作用于 C上的平凡丛 $C\times V$的光滑截面。更一般地，对于 $A \in \mathcal{A}_\Sigma^\flat$，令

$$\not{D}_A^C = \not{D}_0^C + \iota^* A.$$

这定义了一个微分算子的典范族

$$\not{D}_\bullet^C = \{\not{D}_A^C \mid A \in \mathcal{A}_\Sigma^\flat\}$$

在 $\mathcal{A}_\Sigma^\flat$ 上，其对于 $\mathcal{G}_\Sigma$ 在 $\mathcal{A}_\Sigma^\flat \times L^2(C,V)$ 上的对角线作用是等变的。沿着 q 的纤维下降：$\mathcal{A}_\Sigma^\flat \to \mathcal{A}_\Sigma^\flat/\mathcal{G}_{\Sigma,\ \partial\Sigma} = \mathcal{M}_\Sigma$ 我们得到一个 $L\underline{G}$-等变的 Dirac 算子族，记作 $\not{D}_{q(\bullet)}^C$，作用于 Hilbert 丛 $\mathcal{E}_C$ 的纤维上。该族定义了一个奇 K-理论类 $\mathsf{E}^C V \in K_{\underline{G}}^1(\mathcal{M}_\Sigma)$。通过取这些类中偶数个的乘积，可以得到偶类。例如，如果 C_1、C_2 是两条闭曲线，那么 $\mathsf{E}^{C_1}V_1 \cdot \mathsf{E}^{C_2}V_2 \in K_{\underline{G}}^0(\mathcal{M}_\Sigma)$ 由二维环面 $C_1 \times C_2 \subset \Sigma \times \Sigma$ 上的一个椭圆微分算子族表示。

命题 3.2. $\mathsf{E}^C V \in K^1_{N(\underline{T})}(X)$ 只取决于 C在闭黎曼曲面 $\boldsymbol{\Sigma}$ 中的自由同伦类；该曲面由在 Σ的每个边界分量上粘接一个圆盘而得到。

证明。根据我们上面的论述，显然 $\mathsf{E}^C V$ 只取决于C在 Σ中的自由同伦类。设 $C = \partial_j\Sigma$是 Σ 的一个边界分支。那么 $\mathsf{E}^C V \in K_{\underline{G}}^1(\mathcal{M}_\Sigma)$ 是 $L\mathfrak{g}^*$上的一个典范 G-等变类的拉回。但 $K_G^1(L\mathfrak{g}^*) = 0$，因为 $L\mathfrak{g}^*$ 是G-等变可缩的（通过求解一个联络的平行移动方程，$L\mathfrak{g}^*$与 G 中从 1 开始的索伯列夫类 ς 路径空间 $P_1 G$ 相同）。由此可知，该 K 理论类只取决于 C 在 $\boldsymbol{\Sigma}$中的自由同伦类。□

¯二维情形 $N = \Sigma$则不那么直接。由于 $\partial\Sigma \neq \emptyset$, Σ 上的 ∂-算子不是 Fredholm 算子。构造 Fredholm 族有几种不同的方法。我们下面采用的方法是施加一个边界条件。

3.2. 椭圆边值问题族。固定 Σ 上的一个黎曼度量，使其在边界的领圈邻域内具有乘积形式；其中在 $\partial_j\Sigma \simeq S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上采用标准度量，使圆周长为 1。在 Σ 上选取一个自旋结构，并令 $\mathrm{c}^\Sigma\colon \mathbb{C}l(T\Sigma) \to \mathrm{End}(S^\Sigma)$, $S^\Sigma = S^{\Sigma,+} \oplus S^{\Sigma,-}$ 为相应的 $\mathbb{Z}_2$-分次 $\mathbb{C}l(T\Sigma)$-模。令 $\not{D}^\Sigma_0$ 为作用于 $S^\Sigma \boxtimes V$ 截面上的狄拉克算子（通过平凡联络与 $\Sigma \times V$ 耦合）。对于 $A \in \mathcal{A}^\flat_\Sigma$，令

$$\not{D}^\Sigma_A = \not{D}^\Sigma_0 + (\mathrm{c}^\Sigma \boxtimes \pi_V)(A) = \begin{pmatrix} 0 & \not{D}^{\Sigma,-}_A \\ \not{D}^{\Sigma,+}_A & 0 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

为自旋狄拉克算子在 Σ 上通过联络（或矢势） A 与 $\Sigma \times V$ 耦合后得到的狄拉克算子。这定义了一个以 $\mathcal{A}^\flat_\Sigma$ 为参数的狄拉克算子典范族$\not{D}^\Sigma_\bullet = (\not{D}^\Sigma_A)^{A\in\mathcal{A}^\flat_\Sigma}$。

由于边界 $\partial\Sigma$非空，算子 $\not{D}^\Sigma_A$ 不是 Fredholm 算子。为得到一个 Fredholm 族，我们施加一个边界条件。 Σ 上的自旋结构 S^Σ 诱导出 $\partial\Sigma$上的自旋结构 $S^{\partial\Sigma} = S^{\Sigma,\ +}|_{\partial\Sigma}$。边界上的 Clifford 作用的一般公式为 $\mathrm{c}^{\partial\Sigma}(w) = \mathrm{c}^\Sigma(v)^{-1}\mathrm{c}^\Sigma(w)$，其中 $w \in T\partial\Sigma$ 和 v 是沿边界指向内部的单位法向量场。在这个特别简单的情形中，注意到 (v, ∂_s) 是 $T\Sigma|_{\partial\Sigma}$的一个定向正交标架，因此 $\mathrm{c}^{\partial\Sigma}(\partial_s) = -\mathrm{c}^\Sigma(v)\mathrm{c}^\Sigma(\partial_s)$ 等于手征算子的 $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ 倍，所以 $\mathrm{c}^{\partial\Sigma}(\partial_s)$ 在 $S^{\partial\Sigma}$上作用为乘以 i。令 $\partial = \partial_0$ 表示边界上被 V扭曲的自旋狄拉克算子，它作用于 $S^{\partial\Sigma} \boxtimes V$的截面。令 $a \in L\underline{\mathfrak{g}}^* = \Omega^1_{\zeta-1}(\partial\Sigma, \mathfrak{g})$表示边界上的一个联络。相应的边界上的自旋狄拉克算子为

$$\partial_a = \partial + (\mathrm{c}^{\partial\Sigma} \boxtimes \pi_V)(a). \tag{16}$$

对于 $v \in \mathbb{R}$，令

$$B_{<v}(\partial_a) \subset L^{2,\frac{1}{2}}(\partial\Sigma, S^{\partial\Sigma} \boxtimes V), \qquad S^{\partial\Sigma} = S^{\Sigma,+}|_{\partial\Sigma},$$

为 ∂_a 的特征值为 $< v$ 的特征子空间之和在 Sobolev $_{1\ 2}$ 范数下的闭包。类似地，我们定义 $B_{\leq v}(\partial_a)$、 $B_{>v}(\partial_a)$、 $B_{\leq v}(\partial_a)$。令

$$\mathscr{R}\colon L^{2,1}(\Sigma, S^{\Sigma,+} \boxtimes V) \to L^{2,\frac{1}{2}}(\partial\Sigma, S^{\partial\Sigma} \boxtimes V)$$

表示到边界的限制。

在族 $\not{D}^{\Sigma,\ \bullet\ ^+}$ 的算子上施加边界条件 $B_{<0}(\partial)$，我们得到一族无界 Fredholm 算子：

定义 3.3. 对于 $A \in \mathcal{A}^\flat_\Sigma$，令 $(\not{D}^{\Sigma,\ _A\ ^+}, B_{<0}(\partial))$ 表示由微分算子 $\not{D}^{\Sigma,\ _A\ ^+}$ 定义的无界希尔伯特空间算子，其定义域为

$$\mathrm{dom}(\not{D}^{\Sigma,+}_A, B_{<0}(\partial)) = L^{2,1}(\Sigma, S^{\Sigma,+} \boxtimes V) \cap \mathscr{R}^{-1}(B_{<0}(\partial)).$$

$L^2(\Sigma, S^\Sigma \boxtimes V)$ 中对应的奇自伴算子记为

$$D_A = \begin{pmatrix} 0 & (\not{D}^{\Sigma,+}_A, B_{<0}(\partial))^* \\ (\not{D}^{\Sigma,+}_A, B_{<0}(\partial)) & 0 \end{pmatrix}.$$

令 $D_\bullet = \{D_A \mid A \in \mathcal{A}^\flat_\Sigma\}$ 表示典范族。有界变换记为

$$F_A = (1 + D_A^2)^{-1/2} D_A, \qquad F_\bullet = (F_A)_{A \in \mathcal{A}^\flat_\Sigma}.$$

条件 $\mathscr{R}(s) \in B_{<0}(\partial)$是 Atiyah-Patodi-Singer (APS) 边界条件 [7] 对于$\not{D}^{\Sigma,0}{}^{+}$。算子 $D_A^+ = (\not{D}^{\Sigma}{}_{,A}{}^{+}, B_{<0}(\partial))$ 是 Fredholm 算子，事实上是强意义下的椭圆算子，即当 $s \in \mathrm{dom}(D_A^+)$ 时，对于 $L^{2,1}$- 范数有估计 $\|s\|_1 \le C(\|D_A^+ s\| + \|s\|)$；根据 Rellich 引理， D_A 具有紧预解。关于 APS 及其他更一般的椭圆边值问题，[10, 11]是近期的详细参考文献。更一般地，对于任意 $v \in \mathbb{R}$, $a \in L\underline{\mathfrak{g}}^*$, 可以定义 Fredholm 算子$(\not{D}^{\Sigma}{}_{,A}{}^{+}, B_{<v}(\partial_a))$。指标与 A 无关，但对 v, a 的选择高度敏感。

定义 3.3 中的每个算子族的指标均为 0。我们可以利用 Atiyah-Patodi-Singer 定理对此进行验证。由 Σ上的自旋结构诱导出的 S^1 自旋结构是非平凡的（参见 [18, 练习 2.2。18]）。相应的狄拉克算子是（在对 $S^{\partial\Sigma}$作出非规范平凡化选择后）算子 $\mathrm{i}\,\mathrm{d}/\mathrm{d}s - \pi$。后者的谱为$\widehat{\ }(2\mathbb{Z} + 1)\pi$，核和平凡 η-不变量均为平凡。由于 $\hat{A}(\Sigma) = 1$，Atiyah-Patodi-Singer 定理表明

$$\mathrm{index}(\not{D}_A^{\Sigma,+}, B_{<0}(\partial)) = 0 - \frac{0+0}{2} = 0.$$

另请参见 [7, 第 61–62] 页，其中对自旋情形进行了概述，并讨论了黎曼曲面上的 $\overline{\partial}$-算子。

3.3. $N = \Sigma$的 Atiyah-Bott 类。规范群 $\mathcal{G}_\Sigma$ 通过表示 π_V逐点作用于 Hilbert 空间 $\mathcal{E}_0 = L^2(\Sigma, S^\Sigma \boxtimes V)$。对角作用取商后得到一个光滑的 $L\underline{G}$-等变 Hilbert 丛

$$\mathcal{E} = \left(\mathcal{A}^\flat_\Sigma \times \mathcal{E}_0\right)/\mathcal{G}_{\Sigma,\partial\Sigma} \to \mathcal{A}^\flat_\Sigma/\mathcal{G}_{\Sigma,\partial\Sigma} = \mathcal{M}_\Sigma.$$

等价地， $\mathcal{E}$ 是通过沿着纤维 $\mathcal{M}_\Sigma \times \Sigma \to \mathcal{M}_\Sigma$取$L^2$-截面，从 $\mathcal{M}_\Sigma \times \Sigma$ 上的向量丛 $(\mathbb{C} \boxtimes S^\Sigma) \otimes EV$得到的。

微分算子族$\not{D}^\Sigma_\bullet$对完整的 $\mathcal{G}_\Sigma$-作用是等变的，但边界条件仅对某个子群的作用是等变的。

命题 3.4。在 $\mathcal{A}^\flat_\Sigma \times L^2(\Sigma, S^\Sigma \boxtimes V)$上由 $g \in \mathcal{G}_\Sigma$ 给出的对角线作用下，族 $D_\bullet = (\not{D}^\Sigma_\bullet, B_{<0}(\partial))$ 被映射到该族

$$(\not{D}^\Sigma_\bullet, B_{<0}(\partial_{\mathscr{R}(g)\cdot 0})),$$

其中 $\mathscr{R}(g)$ 是 g 在边界上的限制。因此， $D_\bullet$（或等价地，有界变换 $F_\bullet$）在子群 $\mathcal{G}_{\Sigma,\ \partial\Sigma-lc}$ 的作用下等变，该子群由满足 $\mathscr{R}(g)$ 在 $\partial\Sigma$ 上局部常值的 $g \in \mathcal{G}_\Sigma$ 组成；等价地， $\mathscr{R}(g) \in L\underline{G}_0 = \underline{G}$，即 $0 \in L\underline{\mathfrak{g}}^*$ 在规范作用下的稳定子。

证明。在 $\mathcal{E}_0$ 上由 $g \in \mathcal{G}_\Sigma$ 的作用下，算子 $(\not{D}^{\Sigma}{}_{,A}{}^{+}, B_{<0}(\partial))$ 被映到算子 $(\not{D}^{\Sigma}{}_{,g\cdot A}{}^{+}, B_{<0}(\partial_{\mathscr{R}(g)\cdot 0}))$, 其中 g 在 A 上的作用（以及 $\mathscr{R}(g)$ 在 0 上的作用）是通过规范变换实现的。若 $g \in \mathcal{G}_{\Sigma,\partial\Sigma-lc}$, 则根据定义， $\mathscr{R}(g)\cdot 0 = -\mathrm{d}\mathscr{R}(g)\mathscr{R}(g)^{-1} = 0$，因此 g 将该族映入自身。□

由于 $\mathcal{G}_{\Sigma,\partial\Sigma} \subset \mathcal{G}_{\Sigma,\partial\Sigma-lc}$，取 $\mathcal{G}_{\Sigma,\partial\Sigma}$ 等价类后，得到一个定义在 $\mathcal{M}_\Sigma$ 上的 $\mathcal{G}_{\Sigma,\partial\Sigma-lc}/\mathcal{G}_{\Sigma,\partial\Sigma} \simeq \underline{G}$ 等变 Fredholm 算子族。回忆 $q\colon \mathcal{A}^\flat_\Sigma \to \mathcal{A}^\flat_\Sigma/\mathcal{G}_{\Sigma,\partial\Sigma} = \mathcal{M}_\Sigma$ 是商映射。

定义 3.5. 设 $D_{q(\bullet)}$ 表示一个由 $\mathcal{M}_\Sigma$ 参数化、作用于 $\mathcal{E}$ 的纤维上的 $L\underline{G}_0 = \underline{G}$-等变无界Fredholm算子族，该算子族是将族 $D_\bullet$ 沿 q 的纤维下降得到的。同样，设 $F_{q(\bullet)}$ 表示有界变换族。

该族 $F_{q(\bullet)}$ 范数连续变化。事实上，该族 $F_\bullet$ 在 $\mathcal{A}^\flat_\Sigma$ 上是范数连续的，这是因为边界条件 $B_{<0}(\partial)$ 是固定的，并且微分算子$\not{D}^\Sigma_\bullet$具有相同的符号。正如命题2.3中所述，$\mathcal{A}^\flat_\Sigma \to \mathcal{M}_\Sigma$ 是一个主 $\mathcal{G}_{\Sigma,\ \partial\Sigma}$-丛。$\mathcal{G}_{\Sigma,\ \partial\Sigma}$ 中的元素属于索伯列夫类$\varsigma + \frac{1}{2} > 2$，由于后一个 Sobolev 范数支配上确界范数，映射 $\mathcal{G}_{\Sigma,\ \partial\Sigma} \to \mathscr{U}(\mathcal{E}_0)$关于范数拓扑是连续的。因此，Hilbert丛 $\mathcal{E}$ 的结构群可以取为酉群 $\mathscr{U}(\mathcal{E}_0)$，赋予范数拓扑，并且 $F_{q(\bullet)}$ 的连续性随之成立。

定义 3.6. 对 $(\mathcal{E}, F_{q(\bullet)})$ 定义了一个类 $\mathrm{E}^\Sigma V \in K^0_{\underline{G}}(\mathcal{M}_\Sigma)$。

3.4. 仿射 Weyl 群对称性。设 Γ 是一个拓扑群，设 $\Gamma' \subset \Gamma$ 是一个紧正规子群。如果 Y 是一个 Γ-空间，则分支群 $\pi_0(\Gamma/\Gamma')$ 作用于 $K^*_{\Gamma'}(Y)$。当 $\gamma \in \Gamma$ 与 Γ' 对易时，该作用就是通过 γ^{-1} 进行拉回。特别地，对于 $Y = \mathcal{M}_\Sigma$，仿射 Weyl 群 $\underline{W}_{\text{仿射}} = W^b_{\text{aff}}$ 作用于 $K^*_{\underline{T}}(\mathcal{M}_\Sigma)$。忘记 $\underline{G}$-作用后，Atiyah-Bott 类 $\mathrm{E}^N V$ 限制为 $K^*_{\underline{T}}(\mathcal{M}_\Sigma)$ 中的类，我们仍用相同的符号表示。当 $\dim(N) = 0$ 时，所得的类 $\underline{W}_{\text{仿射}}$-不变。

令 $\mathrm{Tr}_V\colon T \to \mathbb{C}$ 为有限维表示V的特征在极大环面 $T \subset G$上的限制。它可分解为

$$\mathrm{Tr}_V = \sum_{\lambda\in\Lambda} \dim(V_{[\lambda]}) e^\lambda$$

其中 $V_{[\lambda]} = \mathrm{Hom}(\mathbb{C}_\lambda, V)$ 是 λ 权空间。令 Tr_V 为 $V^{\oplus b}$作为 $\underline{T} = T^b$的表示时的特征，

$$\underline{\mathrm{Tr}}_V\colon \underline{u} = (u_1, ..., u_b) \in \underline{T} = T^b \mapsto \mathrm{Tr}_V(u_1) + \cdots + \mathrm{Tr}_V(u_b) \in \mathbb{C}.$$

若 $\eta \in \Pi$ 令

$$\partial_\eta \mathrm{Tr}_V = \sum_{\lambda\in\Lambda} \dim(V_{[\lambda]}) 2\pi\mathrm{i}\langle\lambda, \eta\rangle e^\lambda, \tag{17}$$

为 Tr_V 沿方向 η的导数。由于 $\langle\lambda, \eta\rangle \in \mathbb{Z}$, $(2\pi\mathrm{i})^{-1}\partial_\eta \mathrm{Tr}_V \in R(T)$。类似地，对于 $\underline{\eta} = (\eta_1, ..., \eta_b) \in \underline{\Pi}$ 和 $\underline{u} = (u_1, ..., u_b)$，令

$$(\partial_{\underline{\eta}} \underline{\mathrm{Tr}}_V)(\underline{u}) = \sum_{j=1}^b (\partial_{\eta_j} \mathrm{Tr}_V)(u_j).$$

命题 3.7. Weyl 群 $\underline{W} = W^b$ 在 $\mathrm{E}^\Sigma V \in K^0_{\underline{T}}(\mathcal{M}_\Sigma)$ 上的作用是平凡的，而 $\underline{\eta} \in \underline{\Pi}$的作用为 $\underline{\eta}^*$ $\mathrm{E}^\Sigma V = \mathrm{E}^\Sigma V - (2\pi\mathrm{i})^{-1}\partial_{\underline{\eta}} \mathrm{Tr}_V$。 ∎

证明。类 $\mathsf{E}^{\Sigma}V$ 来自 $K^0_G(\mathcal{M}_\Sigma)$ 中的一个类，因此 $\underline{W}$ 的作用是平凡的。回忆一下，$\underline{\eta}=(\eta_1,\dots,\eta_b)\in\underline{\Pi}$ 嵌入 $L\underline{G}$ 中，作为指数环路 $s\mapsto(\exp(-s\eta_1)\dots,\exp(-s\eta_b))$，$s\in[0,1]$。沿 $\partial_j\Sigma$ 的相应规范变换为 $s_j\mapsto\exp(-s_j\eta_j)$。利用命题 3.4（针对 $\underline{\eta}^{-1}$），$\underline{\eta}^*\mathsf{E}^{\Sigma}V$ 由将族 $(\not{D}^{\Sigma}_{A}{}^{+},B_{<0}(\partial_{-\underline{\eta}}))_{A\in\mathcal{A}^\flat_\Sigma}$ 下降所得的边界问题族表示。由等式 (16)，并且由于 $\mathsf{c}^{\partial\Sigma}(\partial_s)$ 是乘以 i 的映射，算子 $\partial_{\underline{\eta}}$ 为

$$\partial-\mathrm{i}\pi_V(\underline{\eta}),\tag{18}$$

其中我们将 $\underline{\eta}$ 视为边界上的局部常值函数，其在 η_j 第 j 个边界分支上取值。我们将由（18）以及边界条件改变时指标变化公式的族版本推导出该结果（参见 [10, 推论 8.8，定理 8。15] 标准版本）。

令 P_1（分别为 P_2、P_0）表示到 $B_1=B_{\geq0}(\partial)$（分别为 $B_2=B_{\geq0}(\partial_{\underline{\eta}})$、$B_0=B_1+B_2$）上的 L^2-正交投影。对于 $i=0,1,2$，考虑 $\mathcal{A}^\flat_\Sigma$ 上的算子族 $\boldsymbol{D}_i$：

$$(\not{D}^{\Sigma,+}_A,P_i\circ\mathscr{R})\colon L^{2,1}(\Sigma,S^{\Sigma,+}\boxtimes V)\to L^2(\Sigma,S^{\Sigma,-}\boxtimes V)\oplus B_i.$$

下降到 $\mathcal{M}_\Sigma$后，族 $\boldsymbol{D}_1$、$\boldsymbol{D}_2$ 分别表示 $\mathsf{E}^{\Sigma}V$、$\underline{\eta}\cdot\mathsf{E}^{\Sigma}V$。

根据构造

$$\boldsymbol{D}_i=(\mathrm{id},p_i)\circ\boldsymbol{D}_0$$

对 $i=1,2$成立，其中 $p_i=P_i|_{B_0}$ 和 $\circ$ 表示在 $\mathcal{A}^\flat_\Sigma$ 上的算子族的（逐点）复合。根据复合的指标可加性（族版本），我们得到 $\mathcal{R}\mathsf{K}^0_{\underline{I}}(\mathcal{M}_\Sigma)$ 中的以下等式，

$$\mathsf{E}^{\Sigma}V=[\boldsymbol{D}_0]+[p_1],\qquad \underline{\eta}\cdot\mathsf{E}^{\Sigma}V=[\boldsymbol{D}_0]+[p_2]$$

因此

$$\underline{\eta}\cdot\mathsf{E}^{\Sigma}V=(\underline{\eta}^{-1})^*\mathsf{E}^{\Sigma}V=\mathsf{E}^{\Sigma}V+[p_2]-[p_1].$$

我们有 $[p_1]=[B_1^\perp\cap B_2]$，$[p_2]=[B_2^\perp\cap B_1]$，且这些子空间很容易确定。考虑$B_2^\perp\cap B_1=B_{<0}(\partial_{\underline{\eta}})\cap B_{\geq0}(\partial)$。令 $\lambda\in\Lambda$。限制在 $V_{[\lambda]}$上的截面中，j-第分支 $\partial\Sigma$上，方程 (18) 简化为 $\partial-2\pi\langle\lambda,\eta_j\rangle$。回忆一下，$\partial$的谱为 $(2\mathbb{Z}+1)\pi$，我们推得对于 λ-型分量

$$\dim\big(B_{<0}(\partial-2\pi\langle\lambda,\eta_j\rangle)\cap B_{\geq0}(\partial)\big)_{[\lambda]}=\begin{cases}\langle\lambda,\eta_j\rangle\dim(V_{[\lambda]}), & \text{if } \langle\lambda,\eta_j\rangle>0\\ 0, & \text{else.}\end{cases}$$

对于 $B_1^\perp\cap B_2$，可以得到类似的结果，只需将 $\langle\lambda,\eta_j\rangle$ 全部替换为 $-\langle\lambda,\eta_j\rangle$。对 λ 求和，j-个边界分支对差值 $[p_2]-[p_1]$ 的贡献为

$$\sum_\lambda\langle\lambda,\eta_j\rangle\dim(V_{[\lambda]})e_\lambda=(2\pi\mathrm{i})^{-1}\partial_{\eta_j}\mathrm{Tr}_V.$$

对 j 求和即可得到结果。 □

注 3.8。W_{aff} 的作用不能改变K-理论类的虚拟维数。因此，为保持一致性，$\partial_{\underline{\eta}}\mathrm{Tr}_V$的虚拟维数应为 0。该虚拟维数是对 j 求和，将 $\partial_{\eta_j}\mathrm{Tr}_V$ 在 $1\in G$ 处取值；由于 Tr_V 的梯度具有 G- 不变性，该和为 0。

注 3.9. 如果 $m \in \mathcal{M}_\Sigma$ 是一个 $\underline{T}$-不动点，那么

$$\mathsf{E}^\Sigma V|_m = \mathrm{index}_{\underline{T}}(D_m) \in K^0_{\underline{T}}(\mathrm{pt}) = R(\underline{T}).$$

命题 3.7 表明

$$\mathsf{E}^\Sigma V|_{\underline{\eta}\cdot m} = \mathsf{E}^\Sigma V|_m - (2\pi\mathrm{i})^{-1}\partial_{\underline{\eta}}\mathrm{Tr}_V \in R(\underline{T}).$$

特别是，这意味着族 $D_\bullet$ 中算子的核的维数无界。这也排除了类 $\mathsf{E}^\Sigma V|_{\mathcal{M}^{\underline{T}}_\Sigma} \in K^0_{\underline{T}}(\mathcal{M}^{\underline{T}}_\Sigma)$ 是从任意 $\underline{T}$-等变紧化空间 $\mathcal{M}^{\underline{T}}_\Sigma$ 拉回的可能性，因为若真如此，当 m 在 $\mathcal{M}^{\underline{T}}_\Sigma$ 中变化时， D_m 的 $\underline{T}$-等变指标就会有界。

4. The index of the Atiyah-Bott classes

在 [24] 中，我们在更一般的任意适当哈密顿环群空间这一背景下，构造了一列 $R(\underline{T})$-模同态

$$\mathrm{index}^k_{\underline{T}} \colon K^{\mathrm{ad}}_{\underline{T}}(\mathcal{M}_\Sigma) \to R^{-\infty}(\underline{T}) \tag{19}$$

它们来自 $K_{\underline{T}}(\mathcal{M}_\Sigma)$ 的一个 $R(\underline{T})$-子代数，其中包含满足等变有界几何条件的 K 类，我们称之为可容许类。对于遗忘映射 $K^{\mathrm{ad}}_{\underline{G}}(\mathcal{M}_\Sigma) \to K^{\mathrm{ad}}_{\underline{T}}(\mathcal{M}_\Sigma)$ 的像中的类，指标取值于 $R^{-\infty}(\underline{T})^{W-\mathrm{anti}}$，即 $\underline{W}$-反对称形式傅里叶级数，也就是形式级数

$$\sum_{\underline{\lambda}\in\underline{\Lambda}} m(\underline{\lambda})e^{\underline{\lambda}}, \quad \text{such that} \quad m(\underline{w}\cdot\underline{\lambda}) = (-1)^{l(\underline{w})}m(\underline{\lambda}), \quad \forall \underline{w}\in\underline{W}, \underline{\lambda}\in\underline{\Lambda}.$$

存在一个归纳法同构 $R^{-\infty}(\underline{T})^{W-\mathrm{anti}} \simeq R^{-\infty}(\underline{G})$，因此也存在类似的 $R(\underline{G})$-模同态。

$$\mathrm{index}^k_{\underline{G}} \colon K^{\mathrm{ad}}_{\underline{G}}(\mathcal{M}_\Sigma) \to R^{-\infty}(\underline{G}).$$

本节回顾指标同态的定义（19），并证明阿蒂亚-博特类是可容许的。

4.1. 全局横截面。 G在自身上的共轭作用轨道与 G中 T 的任意小管状邻域横截。这样的邻域可提升为常值 $\mathfrak{t}$值 1-形式子空间 $\mathfrak{t} \subset L\mathfrak{g}^* = \Omega^1(S^1, \mathfrak{g})$的一个“增厚”。令 $\mathfrak{t}^\perp$ 为 $\mathfrak{g}$中 $\mathfrak{t}$的正交补。令 $N(T) \ltimes \Pi$通过仿射 Weyl 群 $W_{\mathrm{aff}} = W \ltimes \Pi = (N(T) \ltimes \Pi)/T$的标准作用于 $\mathfrak{t}$上，并通过 $N(T)$的伴随作用于 $\mathfrak{t}^\perp$上（ Π 作用平凡）。令$\overline{B}_\epsilon(\mathfrak{t}^\perp)$表示 $\mathfrak{t}^\perp$ 中半径为 ϵ的闭球。

命题 4.1 ([26], 第 6.4 节)。 对于 $\epsilon > 0$ 充分小，包含映射 $\mathfrak{t} \hookrightarrow L\mathfrak{g}^*$延拓为一个 $N(T) \ltimes \Pi$-等变嵌入

$$\mathfrak{t} \times \overline{B}_\epsilon(\mathfrak{t}^\perp) \to L\mathfrak{g}^*$$

其像 $R \subset L\mathfrak{g}^*$ 与 ΩG 轨道横截，并包含在光滑回路的稠密子空间中。每个 ΩG 轨道都与 R 非平凡相交于一个 Π 轨道。

该构造在同伦意义下是典范的，唯一涉及的选择是一个分裂（在凸组合下保持不变）和一个“厚度” ϵ。进一步讨论也请参见 [24]。

定义 4.2 ([26])。 令 $R \subset L\mathfrak{g}^*$ 如命题 4.1中所述，并令 $\underline{R} \subset L\underline{\mathfrak{g}}^*$ 为 b个 R的乘积。由于 $\mu_{\mathcal{M}_\Sigma}$ 是 $L\underline{G}$-等变的，逆像

$$X = \mu_{\mathcal{M}_\Sigma}^{-1}(\underline{R})$$

是一个有限维的 $N(\underline{T}) \ltimes \underline{\Pi}$-不变子流形（带边界），我们将其称为 $\mathcal{M}_\Sigma$ 的全局横截面。 X （分别为 R）的内部记作 X° （分别为 R°）。动量映射 $\mu_{\mathcal{M}_\Sigma}$ 限制为一个适当的 $N(\underline{T}) \ltimes \underline{\Pi}$-等变映射 μ_X: $X \to \underline{R}$。

4.2. 旋量丛与狄拉克算子。若向量丛 $E \to \mathcal{M}_\Sigma$ 带有与 $L\underline{G}$ 在 $\mathcal{M}_\Sigma$上的作用相容的 $\widehat{L\underline{G}}^{(\ell)}$ 作用，则称其处于第$\ell \in \mathbb{Z}$ 级。同样，若向量丛 $E \to X$ 是 $\mathcal{M}_\Sigma$上第 ℓ 级向量丛在 X 上的限制，则称其处于第 ℓ 级。 $\mathcal{M}_\Sigma$ 具有一个典范的 1 级预量子线丛

$$L \to \mathcal{M}_\Sigma, \tag{20}$$

由阿蒂亚-博特辛结构的预量子线丛约化得到 $\mathcal{A}_\Sigma$。详情请参见 [31, 第 3 节。3], 遵循 [34, 37, 43]。

偶数维流形 Y 的 K 理论定向是一种 Spin^c 结构，或者等价地说，是一个旋量丛，即一个复向量丛 $\mathscr{S} \to Y$ ，其纤维是 Clifford 代数丛 $\mathbb{C}l(TY, g_Y)$ 的不可约模。流形 X 具有典范的 K 理论定向。

定理 4.3 （[26]） 。存在一个典范的旋量丛 $\mathscr{S}_{\mathrm{can}} \to X$，它是 $\mathcal{M}_\Sigma$ 上一个 $\widehat{L\underline{G}}^{(\mathrm{h}^\vee)}$-等变向量丛的限制，其中 $\mathrm{h}^\vee$ 是 G 的对偶考克斯特数。

对偶Coxeter数之所以出现，是因为它是回路群的旋量表示的层级。进一步的旋量丛可通过与 L作张量积得到。因此，对于任意 $k > -\mathrm{h}^\vee$，都有一个规范的旋量丛

$$\mathscr{S} = \mathscr{S}_k = \mathscr{S}_{\mathrm{can}} \otimes L^k, \qquad \text{at level } \ell = k + \mathrm{h}^\vee > 0. \tag{21}$$

相应的反典范线丛是层级为 2ℓ 的线丛

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_k = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}l(TX)}(\mathscr{S}^*, \mathscr{S}) = \mathscr{L}_{\mathrm{can}} \otimes L^{2k}. \tag{22}$$

选取一个完备的不变黎曼度量 g 在内部 X° 以及一个定义在 $\mathscr{L}$ 上的不变联络，确定了一个定义在 $\mathscr{S}$ 上的、与列维-奇维塔联络相容的联络。相应的Spin^c 狄拉克算子 $\not{D}_{\mathscr{S}}$ 定义为复合

$$C_c^\infty(X^\circ, \mathscr{S}) \xrightarrow{\nabla} C_c^\infty(X^\circ, T^*X^\circ \otimes \mathscr{S}) \xrightarrow{\mathrm{c}} C_c^\infty(X^\circ, \mathscr{S}).$$

回顾一下，$\underline{R}$ 是 $\underline{\mathfrak{t}} \subset L\underline{\mathfrak{g}}^*$的“加厚”，同样地，我们将 X° 视为奇异子集 $\mu_{\mathcal{M}_\Sigma}^{-1}(\underline{\mathfrak{t}})$ 的“加厚”；为此，我们引入一个新的算子 $\not{D}$ ，它是通过沿复合映射 $X^\circ \xrightarrow{\mu_{\mathcal{M}_\Sigma}} \underline{R} \to \underline{\mathfrak{t}}^\perp$ 的拉回，用表示K理论Thom-Bott类的循环扭曲 $\not{D}_{\mathscr{S}}$ 而得到的

$$\mathscr{B} \in K_{\underline{T}}^0(\underline{\mathfrak{t}}^\perp). \tag{23}$$

由此得到的算子可视为表示$\mu_{\mathcal{M}_\Sigma}^{-1}(\underline{\mathfrak{t}})$的虚拟基本类；它是一个狄拉克型算子

$$\not{D}\colon C_c^\infty(X^\circ, S) \to C_c^\infty(X^\circ, S) \tag{24}$$

作用于 $\mathbb{Z}_2$分次向量丛的截面上

$$S = \mathscr{S}_{\underline{\mathfrak{t}}^\perp} \widehat{\boxtimes} \mathscr{S}, \qquad \mathscr{S}_{\underline{\mathfrak{t}}^\perp} = \wedge \underline{\mathfrak{n}}^- \otimes \mathbb{C}_{\underline{\rho}}, \tag{25}$$

其中 $\mathscr{S}_{\underline{\mathfrak{t}}^\perp}$ 是 $\underline{T}$-等变 $\mathbb{Z}_2$-分次的 $\mathsf{Cl}(\underline{\mathfrak{t}}^\perp)$ 的自旋表示，$\mathfrak{n}^- \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 是负根空间的直和，而 ρ 是正根之和的一半。所谓 Dirac 型，是指相差一个零阶项的狄拉克算子；事实上，$\not{\mathcal{D}}$ 包含一个零阶势项，其平方在 ∂X处趋于无穷。详情请参见 [24] 。

4.3. 指标同态。若 Y 是一个紧致偶维 Spin^c 流形，且$f\colon Y \to M$ 是一个光滑映射，则存在一个同态

$$\mathrm{index}\colon K(M) = K^0(M) \to \mathbb{Z}$$

它将由向量丛 E 表示的 K 理论类映射为如下 Fredholm 算子的指标：该算子由 Y 上的 Spin^c 狄拉克算子与 f^*E 上的向量丛 E 通过任意联络耦合而得。若紧致李群以与所有数据相容的方式作用，则存在一个类似的等变指标同态，其目标为该紧致李群的表示环。

指标同态

$$\mathrm{index}^k_{\underline{T}}\colon K^{\mathrm{ad}}_{\underline{T}}(\mathcal{M}_\Sigma) \to R^{-\infty}(\underline{T}) \tag{26}$$

与之类似，但有一项重要区别：它是利用非紧子流形$X \hookrightarrow \mathcal{M}_\Sigma$ 以及由层级 $\ell = k + \mathrm{h}^\vee > 0$ Spin^c 结构$\mathscr{S}_{\mathrm{can}} \otimes L^k$构造的 Dirac 型算子 $\not{\mathcal{D}}$ 定义的。X 的非紧性会带来若干复杂之处：

(a) 该同态仅定义在 $R(\underline{T})$-子代数 $K^{\mathrm{ad}}_{\underline{T}}(\mathcal{M}_\Sigma) \subset K_{\underline{T}}(\mathcal{M}_\Sigma)$ 上，其中的元素是可容许类。这些 K 类由满足等变有界几何条件的 Fredholm复形表示，该条件保证指标定义良好。此外 $[L] \notin K^{\mathrm{ad}}_{\underline{T}}(\mathcal{M}_\Sigma)$，这就是为什么我们有一个序列指标$\mathrm{index}^k_{\underline{T}}$ (其中 $k > -\mathrm{h}^\vee$)，而不是单个指标同态。(b) 指标的取值是形式傅里叶级数。这是因为，即使在满足可容许性假设的情况下，该算子的核和余核通常仍是无限维的，尽管 L^2 中每个不可约表示的重数都是有限的。(c) 在非紧空间 X上，并非每个 K 理论类都能表示为向量丛的形式差。对于范围更窄的可容许类集合，情况也一样。因此，需要采用更一般的构造，其中 Fredholm复形与 $\not{\mathcal{D}}$耦合。(d) 与紧情形下基本上自动成立不同，这里需要证明（依据非阿贝尔局部化公式），所得的 Fredholm 指标仅取决于 K 理论类，因此可下降为一个映射（ 26 ）。

对于一般的哈密顿环群空间，指标同态是沿着这一路径构造的，见 [24]。要将一般理论应用于 Atiyah-Bott 类，仍需证明它们是可容许的。下文证明这些类具有可容许性时，将回顾类 $\mathsf{E}^\Sigma V$ 这一特殊情形下可容许性的定义。

$K_{\underline{G}}(\mathcal{M}_\Sigma)$ 中任何拉回自 $M_\Sigma = \mathcal{M}_\Sigma/\Omega\underline{G}$ 上 $\underline{G}$-等变类的类都是可容许的。由 $N \subset \Sigma$ 构造且 $\dim(N) = 0, 1$ 的阿蒂亚-博特类都是这样的拉回，因为定义这些类的数据实际上是 $L\underline{G}$-等变的。因此，这些类显然是可容许的。

因此，我们将聚焦于类 $\mathsf{E}^{\Sigma}V$，其定义见第 3.3 节。回顾一下，该类由对 $(\mathcal{E}, D)$ 表示，其中 $\mathcal{E} \to \mathcal{M}_{\Sigma}$是一个希尔伯特丛，其纤维为 $L^2(\Sigma, S^{\Sigma}\boxtimes V)$，而 $D = D_{q(\bullet)}$是椭圆边值问题族。

Hilbert 丛 $\mathcal{E}|_X \to X$是 $N(\underline{T}) \ltimes \underline{\Pi}$-等变的。为了检验可容许性，我们需要对利用库仑规范图表构造的 $\mathcal{E}|_X$上的不变厄米联络 $\nabla^{\mathcal{E}}$ 进行较为显式的描述（见第 2.2 节）。选取 $\underline{\Pi}$ 作用的一个紧基本域 $X_\diamond \subset X$，并选取有限个库仑规范图表 $i = 1, ..., N$，使其在 X 上的限制 $U_{i,\diamond}$ 覆盖 $X_\diamond$。如有必要，可将图表取得更小；于是我们可以假设，当 $\underline{\eta} \neq \underline{\eta}'$ 时，$\underline{\eta} \cdot U_{i,\diamond}$ 与 $\underline{\eta}' \cdot U_{i,\diamond}$ 互不相交，并且闭包 $\overline{U}_{i,\diamond}$ 仍包含在某个稍大的库仑图表的定义域内。令

$$U_i = \bigcup_{\underline{\eta}\in\underline{\Pi}} \underline{\eta} \cdot U_{i,\diamond} \simeq \underline{\Pi} \times U_{i,\diamond}.$$

因此，$\mathcal{U} = \{U_1, ..., U_N\}$ 是由 $\underline{\Pi}$不变子集构成的 X 的有限开覆盖。显然，该覆盖是一致有限的，即存在一个 $\delta > 0$，使得对每个 $x \in X$，都存在一个 $i \in \{1, ..., N\}$，令以 x 为中心、半径为 δ 的球包含于 U_i中。我们还固定一个从属于该覆盖的单位分解 $\{\rho_1, ..., \rho_N\}$，其中每个 ρ_i 都是 $\underline{\Pi}$不变的。

选择库仑规范图表 $U_{i,\diamond}$ 可确定一个平凡化 $\Phi_{i,\diamond}\colon \mathcal{E} \restriction U_{i,\diamond} \to \mathcal{E}_0 \times U_{i,\diamond}$，从而得到一个厄米联络 $\nabla^{\mathcal{E},U_{i,\diamond}}$。由于丛 $\mathcal{E}|_X$ 是 $\underline{\Pi}$-等变的，我们可以利用 $\underline{\Pi}$ 作用得到一个定义在整个 $U_i = \underline{\Pi} \cdot U_{i,\diamond}$ 上的联络 $\nabla^{\mathcal{E},U_i}$，并定义

$$\nabla^{\mathcal{E},\mathcal{U}} = \sum_{i=1}^{m} \rho_i \nabla^{\mathcal{E},U_i}.$$

等价地，平凡化和单位分解确定了一个从 $\mathcal{E}|_X$ 到平凡丛 $X \times (\mathcal{E}_0 \otimes \mathbb{C}^N)$ 的 $\underline{\Pi}$-等变嵌入，而 $\nabla^{\mathcal{E},\mathcal{U}}$ 是与此嵌入相应的联络。为了得到一个 $N(\underline{T}) \ltimes \underline{\Pi}$- 不变联络 $\nabla^{\mathcal{E}}$，将 $\nabla^{\mathcal{E},\mathcal{U}}$ 与紧群 $N(\underline{T})$ 的作用取平均。

X 上的黎曼度量 g_X、$\mathcal{E}$ 上的厄米结构以及联络 $\nabla^{\mathcal{E},\mathcal{U}}$ 确定了单位圆盘丛 $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}|_X$ 上的黎曼度量。环面 $\underline{T}$ 作用于 $\mathcal{B}$。令 $\underline{\xi}_{\mathcal{B}}$ 为 $\mathcal{B}$ 上由 $\underline{\xi} \in \underline{\mathfrak{t}}$ 诱导的向量场。

引理 4.4. 向量场 $\underline{\xi}_{\mathcal{B}}$ 具有有界范数。

证明。相对于 $\nabla^{\mathcal{E},\mathcal{U}}$ 的水平分量是 $\underline{\xi}_{\mathcal{B}}$ 的 $\underline{\xi}_X$ 的水平提升，显然具有有界范数（它是 $\underline{\Pi}$-不变的）。利用范数和联络的 $\underline{\Pi}$-不变性，并注意到 $\underline{T}$、$\underline{\Pi}$ 作用彼此可交换，只需检验 $\nabla^{\mathcal{E},U_{i,\diamond}}$-垂直分量在各个紧闭包 $\overline{U}_{i,\diamond} \subset X$、$i = 1$、……、$N$ 上具有有界范数（回想一下，我们假设闭包 $\overline{U}_{i,\diamond}$ 包含于某个稍大的库仑图中，因此 $\nabla^{\mathcal{E},U_{i,\diamond}}$ 可延拓到这个稍大的子集上）。

$\mathcal{B} = (\mathcal{A}^{\flat}_{\Sigma} \times \mathcal{B}_0)/\mathcal{G}_{\Sigma,\,\partial\Sigma}$ 的单位球丛，其中 $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{E}_0$ 是单位球。向量场 $\underline{\xi}_{\mathcal{B}}$ 可如下描述：设 $\boldsymbol{\xi}$ 是定义在 Σ 上、取值于 $\mathfrak{g}$ 的任意光滑函数，其在 Σ 的第 j 个边界分支 $\partial_j\Sigma$ 上的限制为 $\xi^j \in \mathfrak{t}$。那么 $\boldsymbol{\xi}$ 在 $\mathcal{A}^{\flat}_{\Sigma} \times \mathcal{B}_0$ 上诱导出向量场 $(\boldsymbol{\xi}_{\mathcal{A}^{\flat}_{\Sigma}}, \boldsymbol{\xi}_{\mathcal{B}_0})$，该向量场下降到 $\underline{\xi}_{\mathcal{B}^\circ}$。库仑规范条件唯一确定一个连续映射（因为 $\varsigma + \frac{1}{2} > 1$）$\boldsymbol{\zeta}\colon \overline{U}_{i,\diamond} \times \Sigma \to \mathfrak{g}$，使得（部分定义的）向量场 $\boldsymbol{\xi}'_{\mathcal{A}^{\flat}_{\Sigma}}$

与库仑切片相切，其中 $\boldsymbol{\xi}'\colon \overline{U}_{i,\diamond}\times\Sigma\to\mathfrak{g}$ 是映射 $\boldsymbol{\xi}'(x,p)=\boldsymbol{\xi}(p)-\boldsymbol{\zeta}(x,p)$，其中 $x\in\overline{U}_{i,\diamond}$，$p\in\Sigma_\circ$。$\underline{\xi}_{\mathcal{B}}$ 在 $\mathcal{B}\restriction\overline{U}_{i,\diamond}$ 上的 $\nabla^{\mathcal{E},U_i,\diamond}$-垂直分量的范数有界于

$$\sup_{(x,p)}|\pi_V(\boldsymbol{\xi}'(x,p))|_{\mathrm{End}(V)},$$

其中，上确界取遍 $(x,p)\in\overline{U}_{i,\diamond}\times\Sigma_\circ$。这是有限的，因为 $\boldsymbol{\xi}'\colon\overline{U}_{i,\diamond}\times\Sigma\to\mathfrak{g}$ 有界，并且 (V,π_V) 是有限维表示。□

定理 4.5。阿蒂亚-博特类 $\mathrm{E}^\Sigma V$ 是可容许的。

证明。我们将证明，$(\mathcal{E},D)$ 按照 [24] 的定义是 $\mathrm{E}^\Sigma V$ 的一个容许循环。需要检验四个性质。第一个性质是，对于每个 $x\in X$，$(1+D_x^2)^{-1}$ 是紧的；由于 D_x 是紧流形 Σ 上的椭圆边值问题，因此该性质成立。第二个性质是引理 4.4。第三个性质是关于族 $D_x, x\in X$ 的一个非常宽松的光滑性条件（精确定义请参阅 [24] ），在此情形下显然成立。最后一个性质是，$\nabla^{\mathcal{E}}$ 保持定义域子丛 $\mathrm{dom}(D_{q(\bullet)})\subset\mathcal{E}$，且协变导数 $\nabla^{\mathcal{E}}D$ 是 $T^*X\otimes\mathscr{B}(\mathcal{E})$ 的光滑有界截面，其中 $\mathscr{B}(\mathcal{E})$ 表示纤维上的有界端同态丛。

每个库仑规范联络 $\nabla^{\mathcal{E},U_i,\diamond}$ 都保持 $D_{q(\bullet)}$ 的定义域不变，因为边界条件是常量。利用 $\underline{\Pi}$ 作用将 $\nabla^{\mathcal{E},U_i,\diamond}$ 延拓为 $U_i=\underline{\Pi}\cdot U_{i,\diamond}$ 上的联络 $\nabla^{\mathcal{E},U_i}$ 也具有这一性质，因为库仑图在规范群元素作用下的像仍是库仑图。由于 $\nabla^{\mathcal{E}}$ 是由 $\nabla^{\mathcal{E},U_i}$ 通过单位分解拼接而成，随后再对 $N(\underline{T})$ 取平均，因此 $\nabla^{\mathcal{E}}$ 的平行移动也保持 $\mathrm{dom}(D_{q(\bullet)})$ 不变。

接下来我们论证，$\nabla^{\mathcal{E}}$-协变导数 D 是 $T^*X\otimes\mathscr{B}(\mathcal{E})$ 的有界截面。根据 $\nabla^{\mathcal{E}}$的构造，只需改为证明：对于每个 $i=1,\ldots,N$($\rho_1,\ldots,\rho_N$ 是周期性的，因此具有全局有界梯度)，$\nabla^{\mathcal{E},U_i}$-协变导数 $D|_{U_i}$ 是 $T^*U_i\otimes\mathscr{B}(\mathcal{E}|_{U_i})$ 的有界截面。固定 i，令 $U_\diamond=U_{i,\diamond}$，$U=U_i\simeq\underline{\Pi}\times U_{\diamond\circ}$。回忆一下，$U_\diamond\subset X$是某个联络 $A_\diamond$ 在 Σ上的库仑规范图表的限制。令 $\psi\colon U_\diamond\to\mathcal{A}^\flat_\Sigma$ 为由该图表确定的丛 $\mathcal{A}^\flat_\Sigma\to\mathcal{M}$ 在 $U_\diamond$ 上的光滑局部截面。由 ψ 的光滑性，并且由于 $U_\diamond$ 相对紧，有如下形式的估计

$$\|B\|_{\varsigma-\frac{1}{2}}\leq C|Tq(B)|$$

对于 $B\in T\psi(U_\diamond)$，其中 Tq是切映射，而 $|Tq(B)|$是利用黎曼度量 g_X计算得到的。由于 $\varsigma>\frac{3}{2}$，索伯列夫嵌入给出一个估计

$$\|B\|_\infty\leq C|Tq(B)|,\tag{27}$$

对于 $B\in T\psi(U_\diamond)$。

对于每个 $\underline{\eta}\in\underline{\Pi}$，令 $D_{\underline{\eta},q(\bullet)}$ 表示算子族 $\underline{\eta}^{-1}\circ(D_{q(\bullet)}\restriction\underline{\eta}\cdot U_\diamond)\circ\underline{\eta}$ 在 $\mathcal{E}\restriction U_\diamond$ 上的限制，并利用 $\underline{\Pi}$对 $\mathcal{E}$ 的作用将其拉回到 $U_\diamond$，其中该算子族由将族 $D_{q(\bullet)}$ 限制到 $\underline{\eta}\cdot U_\diamond$ 上得到。根据 $\nabla^{\mathcal{E},U}$的构造，要证明 $D_{q(\bullet)}$ 在 U 上的导数有界，等价于证明 $\nabla^{\mathcal{E},U_\diamond}D_{\underline{\eta},q(\bullet)}$ 对每个 $\underline{\eta}$ 都是有界算子，并且其范数有一个与 $\underline{\eta}$ 无关的上界。

根据命题 3.4，族 $D_{\underline{\eta},q(\bullet)}$ 在 $U_\diamond$ 上可由沿着 q 的纤维降下一个族 $D_{\underline{\eta},\bullet}$ 得到：$\mathcal{A}^\flat_\Sigma\to\mathcal{M}_\Sigma$(在 $U_\diamond$上)，其中 $D_{\underline{\eta},A}$ 是由如下族构造的奇自伴算子

如定义 3.3所述，由族 $(\not{D}^{\Sigma}{}_{,A}{}^{+}, B_{<0}(\partial_{\underline{\eta}}))$ 构造。固定 $A \in \psi(U_{\diamond})$，并令 $B \in T_A\psi(U_{\diamond})$。则根据定义

$$\nabla^{\mathcal{E},U_{\diamond}}_{Tq(B)} D_{\underline{\eta},q(\bullet)} = \lim_{t\to 0} t^{-1}(D_{\underline{\eta},A+tB} - D_{\underline{\eta},A}) = (\mathrm{c}^{\Sigma} \boxtimes \pi_V)(B), \tag{28}$$

一个有界算子，其算子范数至多为 $\|B\|_{\infty}$，且与 $\underline{\eta}$ 无关。由此可得，导数满足

$$\|\nabla^{\mathcal{E},U_{\diamond}}_{Tq(B)} D_{\underline{\eta},q(\bullet)}\| \le \|B\|_{\infty} \le C|Tq(B)|,$$

其中第二个不等式由（27）给出。这验证了所需的有界性性质。根据（ $\nabla^{\mathcal{E}}$28），协变导数的光滑性显然成立，由此证明完毕。□

联络 $\nabla^{\mathcal{E}}$ 用于将 $\not{D}$ 延拓为算子 $\not{D}_{\mathcal{E}}$，使其作用于 $S\widehat{\otimes}\mathcal{E}|_X$ 的截面。将 $\not{D}$ 与带有 $\nabla^{\mathcal{E}}$ 的（$\mathcal{E}$， D）耦合后得到的算子，按定义为

$$\not{D}_{\mathcal{E}} + 1\widehat{\otimes}D|_X, \tag{29}$$

其初始定义域由 $S\widehat{\otimes}\mathrm{dom}(D|_X)$ 的光滑紧支撑截面构成。定理 4.5中的可容许性及 [24] 的结果表明， $\underline{T}$-等变 L^2 指标（29）在 $R^{-\infty}(\underline{T})$ 中定义良好，这就是$\mathsf{E}^{\Sigma}V$的指标同态的定义。如上所述，由 [24] 中证明的非阿贝尔局部化公式可知，该指标仅取决于 K-理论类$\mathsf{E}^{\Sigma}V$。

根据命题 3.7，类 $\mathsf{E}^{\Sigma}V$ 在 Weyl 群$\underline{W}$ 对 $K_{\underline{T}}(\mathcal{M}_{\Sigma})$ 的自然作用下保持不变。其他 Atiyah-Bott 类也是如此。另一方面，内置于 $\not{D}$ 定义中的 Bott-Thom 类在 Weyl 群的作用下是反对称的。因此，Atiyah-Bott 类的指标在 Weyl 群的作用下是反对称的 [24]。

令 $J = \sum_{w\in W}(-1)^{l(w)}e^{w\rho}$ 为 Weyl 分母，并令 V_{λ} 为 G的最高权为 $\lambda \in \Lambda_+$的不可约表示。存在一个同构 $R^{-\infty}(G) \xrightarrow{\sim} R^{-\infty}(T)^{W-\mathrm{anti}}$，由下式给出

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_+} n_{\lambda}\mathrm{Tr}_{V_{\lambda}} \mapsto \sum_{\lambda\in\Lambda_+} n_{\lambda} J\cdot \mathrm{Tr}_{V_{\lambda}}|_T = \sum_{\lambda\in\Lambda_+} c_{\lambda} \sum_{w\in W}(-1)^{l(w)}e^{w(\lambda+\rho)}.$$

令 I^G_T 为逆映射。然后， I^G_T 将 Weyl 分子映射到相应的不可约特征。等价地， I^G_T 是 $|W|^{-1}$ 倍的 Dirac 归纳法映射。我们以显然的方式将定义和记号扩展到乘积 $\underline{G} = G^b$ 和 $\underline{T} = T^b$。形式上，我们定义一个 $\underline{G}$-等变指标映射

$$\mathrm{index}^k_{\underline{G}} = I^{\underline{G}}_{\underline{T}} \circ \mathrm{index}^k_{\underline{T}} \colon K^{\mathrm{ad}}_{\underline{G}}(\mathcal{M}_{\Sigma}) \to R^{-\infty}(\underline{G}). \tag{30}$$

推论 4.6。由 Atiyah-Bott 类 $\mathsf{E}^N V$、$\dim(N) = 0$、1、2 生成的 $K_{\underline{G}}(\mathcal{M}_{\Sigma}) = K^0_{\underline{G}}(\mathcal{M}_{\Sigma})$ 的 $R(\underline{G})$-子代数包含于 $K^{\mathrm{ad}}_{\underline{G}}(\mathcal{M}_{\Sigma})$ 中。因此，对于该子代数中的任意 E 以及任意 $k > -\mathsf{h}^{\vee}$，指标

$$\mathrm{index}^k_{\underline{G}}(\mathsf{E}) \in R^{-\infty}(\underline{G})$$

定义良好。

5. The Chern character and the Kirillov-Berline-Vergne formula

本节将介绍 $\mathsf{E}^{\Sigma}V$的一种不同的 K-理论类描述，该描述基于向边界的每个分支粘接圆盘 $\partial\Sigma$ 以获得一个闭曲面 $\boldsymbol{\Sigma}$。随后，我们构造一个表示 $\mathsf{E}^{\Sigma}V$的等变陈特征的闭等变微分形式。利用该形式，我们证明指标的 Kirillov-Berline-Vergne 公式。

5.1. $\mathsf{E}^{\Sigma}V$ 重新审视。 为便于本节讨论，我们采用表示 $\mathcal{M}_{\Sigma}=\mathcal{A}^{\flat}_{\Sigma,\ \mathcal{C}}/\mathcal{G}_{\Sigma,\ \mathcal{C}}$ 前文在第 2.2 节中简要提及并在此回顾；沿用第 3.2节中的相同思路，这一表示导出一个由 $\mathcal{M}_{\Sigma}$参数化的典范同构狄拉克算子族，因此在不同表示之间转换不会造成任何损失。

令 $\mathcal{C}\simeq\partial\Sigma\times[1,2]$ 表示边界的一个领圈邻域，其中边界在坐标 $r\in[1,2]$ 下位于 $r=1$。回忆一下，边界 $\partial\Sigma$ 有 $b\geq 1$ 个参数化分支，记为 $\partial_1\Sigma$、...、$\partial_b\Sigma$。令 $\mathcal{C}_j\simeq\partial_j\Sigma\times[1,2]$ 表示领圈的第 j 个分支。令 $r_j=r|_{\mathcal{C}_j}$。令 s_j：$\partial_j\Sigma\xrightarrow{\sim}S^1=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 表示 $\partial_j\Sigma$ 的参数化，并回忆 $(\partial_{r_j},\partial_{s_j})$ 是沿着 $\partial_j\Sigma$ 的定向标架，因为 ∂_{r_j} 指向内部。将 $A\in\mathcal{A}^{\flat}_{\Sigma}$ 拉回到 $\partial_j\Sigma$，记作

$$A_j(s_j)\mathrm{d}s_j, \tag{31}$$

其中 $A_j\in\Omega^0_{\varsigma-1}(S^1,\mathfrak{g})$。

子空间 $\mathcal{A}^{\flat}_{\Sigma,\mathcal{C}}\subset\mathcal{A}^{\flat}_{\Sigma}$ 表示满足以下条件的平坦联络 A：对于 Σ，若 $j=1,...,b$,

$$A|_{\mathcal{C}_j}=A_j(s_j)\mathrm{d}s_j. \tag{32}$$

换言之，$A|_{\mathcal{C}_j}$ 在 $\partial_j\Sigma$的法向上没有分量，而 $\mathrm{d}s_j$ 的系数仅依赖于 s_j。子群$\mathcal{G}_{\Sigma,\mathcal{C}}\subset\mathcal{G}_{\Sigma,\partial\Sigma}$ 表示满足 $g|_{\mathcal{C}}=1$的规范变换 g。如第 2.2 节所述，环群空间 $\mathcal{M}_{\Sigma}$ 与商空间$\mathcal{A}^{\flat}_{\Sigma,\mathcal{C}}/\mathcal{G}_{\Sigma,\mathcal{C}}$有典范同构。

设 $\mathbb{D}$ 表示 $\mathbb{R}^2$中的单位圆盘。设 $\mathbb{D}_1,...,\mathbb{D}_b$ 表示 b 个 $\mathbb{D}$的副本，其极坐标为 (r_j,s_j)，定义在第 j个副本上。通过封闭边界来定义闭曲面 $\boldsymbol{\Sigma}$：

$$\mathbb{\Sigma}=\Sigma\cup_{\partial\Sigma}\bigcup_{j=1}^{b}\mathbb{D}_j. \tag{33}$$

因此，坐标 r_j, s_j 定义在 $\boldsymbol{\Sigma}$的子集 $\mathcal{C}_j\cup_{\partial_j\Sigma}\mathbb{D}_j$ 上。

$\mathcal{A}^{\flat}_{\Sigma,\ \mathcal{C}}$ 中的元素可以延拓为 $\boldsymbol{\Sigma}$ 上的非平坦联络，使得光滑联络延拓后仍为光滑联络，具体如下。取一个鼓包函数 $\chi(r)$，使其在 $r>\frac{2}{3}$ 上等于 1，在 $r<\frac{1}{3}$ 上等于 0。对于 $A\in\mathcal{A}^{\flat}_{\Sigma,\ \mathcal{C}}$，令 $\mathbb{A}$ 为如下得到的联络：将 A在每个穿孔圆盘 $\mathbb{D}_j\backslash\{0\}$ 上作常值延拓，并乘以 $\chi(r_j)$，使得乘积可通过取值 0 延拓至 $\mathbb{D}_j$:

$$\mathbb{A}|_{\mathcal{C}_j\cup\mathbb{D}_j}(r_j,s_j)=A_j(s_j)\chi(r_j)\mathrm{d}s_j,\qquad r_j\in[0,2],\quad s_j\in\partial_j\Sigma\simeq S^1. \tag{34}$$

令 $\mathcal{G}_{\Sigma,\ \mathcal{C}-lc}\subset\mathcal{G}$ 为由在 $\mathcal{C}$ 上局部常值的规范变换构成的子群。$\mathcal{G}_{\Sigma,\ \mathcal{C}-lc}$ 中的元素可以典范地延拓至 $\boldsymbol{\Sigma}$，并在每个帽体上取常值。特别地，$\mathcal{G}_{\Sigma,\ \mathcal{C}}\subset\mathcal{G}_{\Sigma,\ \mathcal{C}-lc}$ 中的元素通过恒等映射延拓至 $\boldsymbol{\Sigma}$。

将黎曼度量和自旋量模延拓至 $\boldsymbol{\Sigma}$。令 $\not{D}^{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mathbb{A}}$ 表示作用于 $L^2(\boldsymbol{\Sigma},\ S^{\boldsymbol{\Sigma}}\boxtimes V)$ 上、利用联络 $\mathbb{A}$构造的狄拉克算子。族 $\not{D}^{\boldsymbol{\Sigma}}_{\bullet}{}^{+}=(\not{D}^{\boldsymbol{\Sigma}}_{\ \mathbb{A}}{}^{+})^{A\in\mathcal{A}^{\flat}_{\Sigma,\ \mathcal{C}}}$

是 $\mathcal{G}_{\Sigma,\ \mathcal{C}-lc}$-等变，因此下降为一个 $\mathcal{G}_{\Sigma,\ \mathcal{C}-lc}/\mathcal{G}_{\Sigma,\ \mathcal{C}} \simeq \underline{G}$-等变 Fredholm 算子族 $\mathcal{P}^{\mathbf{\Sigma}}_{,\ q\ \bullet}{}^{+}{}_{()}$ 在 $\mathcal{M}_\Sigma$上。

命题 5.1。 由族 $K_{\underline{G}}(\mathcal{M}_\Sigma)$ 所定义的类 $\mathcal{P}^{\mathbf{\Sigma}}_{,\ q\ \bullet}{}^{+}{}_{()}$ 是 $\mathsf{E}^\Sigma V$。

证明。 这是分裂定理的一个族版本的推论（参见 [10, 定理 8。17], ; 关于一个比此处实际所需更复杂的族版本，另请参见 [15] ）：由狄拉克算子族 $\mathcal{P}^{\mathbf{\Sigma}}_{,\ \mathbb{A}}{}^{+}$ 定义的 K 理论类，是边界问题族 $(\mathcal{P}^{\Sigma}_{,\ A}{}^{+}, B_{<0}(\partial))$ 定义的类 $\mathsf{E}^\Sigma V$ 与边界问题族 $(\mathcal{P}^{\mathbb{D}_j}_{,\ \mathbb{A}|_{\mathbb{D}}}{}^{+}{}_{j}, B_{\leq 0}(\partial))$，$j = 1,...,b$。后者中的每一个圆盘上的边界问题是由参数为 $L\mathfrak{g}^*$ 的边界问题典范族经动量映射拉回得到的。但 $K^0_G(L\mathfrak{g}^*) = R(G)$，因为 $L\mathfrak{g}^*$ 是 G-等变可缩的。要确定 $R(G)$ 中的哪个元素，只需计算该族中单个算子的指标，其值为 0（例如参见第 3.2 节末尾的讨论）。□

因此，使用这一族 $\mathcal{P}^{\mathbf{\Sigma}}_{,\ q\ \bullet}{}^{+}{}_{()}$ 会得到同一个类 $\mathsf{E}^\Sigma V \in K_{\underline{G}}(\mathcal{M}_\Sigma)$。环群空间$\mathcal{M}_\Sigma$ 有一个有限维（奇异）辛约化 $\mu^{-1}_{\mathcal{M}_\Sigma}(0)/\underline{G}$，而命题 5.1还表明，$\mathsf{E}^\Sigma V$ 在这个有限维模空间上诱导的类，与 Atiyah 和 Bott 引入的相应类一致 [5]。

5.2. 陈特征形式。 回顾一下，我们定义了（定义 3.1）一个 $L\underline{G}$-等变向量丛 $\mathsf{E}V \to \mathcal{M}_\Sigma \times \Sigma$。

定义 5.2。 设 $\mathbb{E}V \to \mathcal{M}_\Sigma \times \mathbf{\Sigma}$ 为向量丛

$$\mathbb{E}V = (\mathcal{A}^\flat_{\Sigma,\mathcal{C}} \times \mathbb{\Sigma} \times V)/\mathcal{G}_{\Sigma,\mathcal{C}} \to \mathcal{M}_\Sigma \times \mathbb{\Sigma}.$$

与 $\mathsf{E}V$ 不同，向量丛 $\mathbb{E}V$ 仅为 $\mathcal{G}_{\Sigma,\ \mathcal{C}-lc}/\mathcal{G}_{\Sigma,\ \mathcal{C}} = \underline{G}$-等变。$\mathbb{E}V$ 到 $\mathcal{M}_\Sigma \times \Sigma \subset \mathcal{M}_\Sigma \times \mathbf{\Sigma}$ 的限制可被典范地识别为 $\mathsf{E}V$。我们将使用相同的符号 $\mathbb{E}V$（分别为 $\mathsf{E}V$）来表示将 $\mathbb{E}V$ 限制到 $X \times \mathbf{\Sigma}$（分别将 $\mathsf{E}V$ 限制到 $X \times \Sigma$）后得到的 $N(\underline{T})$-等变（分别为 $N(\underline{T}) \ltimes \underline{\Pi}$-等变）向量丛。

$\mathbb{E}V$到 $X \times (\mathcal{C} \cup \mathbb{D}_1 \cup \cdots \cup \mathbb{D}_b)$的限制是典范平凡的，因为$\mathcal{G}_{\Sigma,\mathcal{C}}$在$\mathbf{\Sigma}$的这个子集上平凡作用。设 $\nabla^{\mathsf{E}V}$是向量丛$\mathsf{E}V = \mathbb{E}V|_{X\times\Sigma}$上的一个 $N(\underline{T}) \ltimes \underline{\Pi}$-不变联络。在领圈上，并相对于该平凡化，$\nabla^{\mathsf{E}V}|_{X\times\mathcal{C}_j} = \mathrm{d} + \alpha_j$ 对于 $X \times \mathcal{C}_j$上的某个联络1-形式 α_j。$\mathsf{E}V|_{X\times\mathcal{C}_j}$ 的平凡化与$\underline{\Pi}$-作用不相容：在 $\underline{\eta} = (\eta_1, ..., \eta_b) \in \underline{\Pi}$的作用下，领圈上的de Rham 微分 $\mathrm{d} = \mathrm{d}_X + \mathrm{d}_{r_j} + \mathrm{d}^{s_j}$变换为

$$\exp(s_j\eta_j)(\mathrm{d}_X + \mathrm{d}_{r_j} + \mathrm{d}_{s_j})\exp(-s_j\eta_j) = \mathrm{d}_X + \mathrm{d}_{r_j} + \mathrm{d}_{s_j} - \eta_j. \tag{35}$$

因此，为了得到一个 $\underline{\Pi}$-不变联络，1-形式 α_j 不能为 0。或许最简单的选择是令 α_j 取如下形式

$$\alpha_j(x, r_j, s_j) = \mu_j(x)f(s_j)\mathrm{d}s_j, \tag{36}$$

其中，$f(s_j)$ 是圆周上的任意光滑函数，其积分为 1（我们也可以选取 $f = 1$，但额外的灵活性稍后会很有用）。由于 $\mu_j(\underline{\eta}\cdot x) = \mu_j(x) + \eta_j$，方程 (35) 表明，联络 $\mathrm{d} + \alpha_j$ 在 $\mathbb{E}V|_{X\times\mathcal{C}_j}$ 上是 $\underline{\Pi}$-不变的。

令 $\nabla^{\mathbb{E}V}$为 $N(\underline{T})$-不变的联络，它定义在 $\mathbb{E}V$上，并通过 d $\nabla^{\mathbb{E}V}$延拓 $+\chi(r_j)\alpha_j$到$X\times(\mathcal{C}_j\cup\mathbb{D}_j$上。此后我们假定 α_j 如 (36) 所示。

陈-韦伊构造产生等变陈特征形式 $\mathrm{Ch}^{\underline{u}}(\mathbb{E}V,\underline{\xi})\in\Omega(X^{\underline{u}}\times\mathbf{\Sigma})$, 对于 $\underline{u}\in\underline{T},\underline{\xi}\in\underline{\mathfrak{t}}$。定义 $\mathrm{Ch}^{\underline{u}}(\mathsf{E}^{\Sigma}V,\underline{\xi})\in\Omega(X^{\underline{u}})$ 为沿纤维积分：

$$\mathrm{Ch}^{\underline{u}}(\mathsf{E}^{\Sigma}V,\underline{\xi})=\int_{\mathbb{\Sigma}}\mathrm{Ch}^{\underline{u}}(\mathbb{E}V,\underline{\xi}).\tag{37}$$

由于 $\mathsf{A}(\mathbf{\Sigma})=1$，紧基底上的等变阿蒂亚-辛格族指标定理 [8][12, 章节 8, 10] 表明 Ch 的拉回$^{\underline{u}}(\mathsf{E}^{\Sigma}V,\ \underline{\xi})$ 到任意相对紧的开$\underline{T}$-不变 $U\subset X^{\underline{u}}$表示了 $\mathsf{E}^{\Sigma}V|_U$的等变陈类。

定理 5.3。 存在一个紧子集 $K\subset\mathfrak{t}$ 和一个常数 $C>0$ 使得对所有 $\underline{u}\in\underline{T}$以及所有 $x\in X$, 闭等变微分形式 $\mathrm{Ch}^{\underline{u}}(\mathsf{E}^{\Sigma}V,\underline{\xi})\in\Omega(X^{\underline{u}})$ 在 (37)中定义，满足：

i) 向量值函数的傅里叶变换

$$\underline{\xi}\in\underline{\mathfrak{t}}\mapsto\mathrm{Ch}^{\underline{u}}(\mathsf{E}^{\Sigma}V,\underline{\xi})_x\in\wedge T^*_xX^{\underline{u}}$$

的支集包含于 $K^b\subset\underline{\mathfrak{t}}$;

ii) 存在估计

$$|\mathrm{Ch}^{\underline{u}}(\mathsf{E}^{\Sigma}V,\underline{\xi})_x|\leq C(1+|\mu(x)|).$$

帽体 $\mathbb{D}_1,...,\mathbb{D}_b$ 对 $\mathrm{Ch}^{\underline{u}}(\mathsf{E}^{\Sigma}V,\underline{\xi})$ 的贡献是 0-形式

$$-(2\pi\mathrm{i})^{-1}\sum_{j=1}^{b}\partial_{\mu_j}\mathrm{Tr}_V(u_j\exp(\xi_j))\tag{38}$$

其中 $\underline{u}=(u_1,...,u_b)$、 $\underline{\xi}=(\xi_1,...,\xi_b)$ 和 $\mu=(\mu_1,...,\mu_b)$。在 $\underline{\eta}\in\underline{\Pi}$ 的作用下，

$$\underline{\eta}^*\mathrm{Ch}^{\underline{u}}(\mathsf{E}^{\Sigma}V,\underline{\xi})=\mathrm{Ch}^{\underline{u}}(\mathsf{E}^{\Sigma}V,\underline{\xi})-(2\pi\mathrm{i})^{-1}\partial_{\underline{\eta}}\mathrm{Tr}_V(\underline{u}\exp(\underline{\xi})).\tag{39}$$

证明。对 $\mathbf{\Sigma}$ 的纤维积分可拆分为对 Σ 和 $\mathbb{D}_1,...,\mathbb{D}_b$ 的积分。由于 $\nabla^{\mathbb{E}V}\restriction X\times\Sigma$ 是 $\underline{\Pi}$-不变的，对 Σ 的积分贡献是 $\underline{\Pi}$-不变的，因此很容易满足性质 i) 和 ii)。另一方面，在 $X\times\mathbb{D}_j$ 上，我们有联络 1-形式的显式公式（$\chi(r_j)\mu_j(x)f(s_j)\mathrm{d}s_j$），其曲率为

$$F_j(x,r_j,s_j)=\chi'(r_j)\mu_j(x)f(s_j)\mathrm{d}r_j\mathrm{d}s_j+\chi(r_j)f(s_j)\mathrm{d}\mu_j(x)\mathrm{d}s_j.$$

在点 $(x,r_j,s_j)\in X^{\underline{u}}\times\mathbb{D}_j$，形式 $\mathrm{Ch}^{\underline{u}}(\mathbb{E}V,\underline{\xi})$ 是 $\mathrm{Tr}_V(u_j\exp(\xi_j)\exp(\mathrm{i}\frac{}{2\pi}F_j(x,r_j,s_j)))$。对 $\mathbb{D}$ 积分时，涉及 $\mathrm{d}\mu_j(x)$ 的项不作贡献，因为其中不含因子 $\mathrm{d}r_j$，而 $\chi'(r_j)\mu_j(x)f(s_j)\mathrm{d}r_j\mathrm{d}s_j$ 的积分为 $\mu_j(x)$。因此，$\mathbb{D}_j$ 对 $x\in X^{\underline{u}}$ 处纤维上的积分的贡献为

$$\mathrm{Tr}_V(u_j\exp(\xi_j)\tfrac{\mathrm{i}}{2\pi}\mu_j(x))=-(2\pi\mathrm{i})^{-1}\partial_{\mu_j(x)}\mathrm{Tr}_V(u_j\exp(\xi_j)).\tag{40}$$

为推出 i)，注意到 (40) 的 $\mathfrak{t}$-傅里叶变换（即关于变量 ξ_j 的傅里叶变换）在任意包含有限维 T表示 V 权的紧球 $K\subset\mathfrak{t}^*$ 上。ii) 中的估计由 (40) 得出，因为 $|\mu_j(x)|\leq|\mu(x)|$。(39) 式由 (40) 和 $\mu_j(\underline{\eta}x)=\mu_j(x)+\eta_j$ 立即推出，其中 $\underline{\eta}=(\eta_1,...,\eta_b)\in\underline{\Pi}$。□

5.3. Kirillov-Berline-Vergne 公式。定理5.3 （以及命题前一段中的备注）表明， [24, 定理 4.5] 满足条件，因此我们得到了一个 Kirillov-Berline-Vergne 公式（[24]中的式 (43)），用等变微分形式在不动点子流形上的积分来表示指标$\mathrm{index}_{\underline{T}}^{k}(\mathsf{E}^{\Sigma}V)$（$\mathsf{E}^{\Sigma}V$） $X^{\underline{u}}\subset X$。对于特殊情形 $\underline{u}=1$，该公式指出，当 $\underline{\xi}\in\underline{\mathfrak{t}}$ 充分小时，

$$\mathrm{index}_{\underline{T}}^{k}(\mathsf{E}^{\Sigma}V)(\exp(\underline{\xi}))=\int_{X}\widehat{\mathrm{A}}(X,\underline{\xi})\mathrm{Ch}(\mathsf{E}^{\Sigma}V,\underline{\xi})\mathrm{Ch}(\mathscr{L}_{k},\underline{\xi})^{1/2}\mathrm{Ch}(\mathscr{B},\underline{\xi}),\tag{41}$$

其中 $\mathscr{L}_{k}=\mathscr{L}_{\mathrm{can}}\otimes L^{2k}$ 是线丛（22），而 $\mathrm{Ch}(\mathscr{B},\underline{\xi})$ 是 Thom-Bott 元素（23）的等变陈形式的拉回。对于一般的 $\underline{u}$，也有类似的公式。该积分在分布意义下收敛，即如果 $\chi(\underline{\xi})\in C_{c}^{\infty}(\underline{\mathfrak{t}})$ 的支集充分接近 $0\in\underline{\mathfrak{t}}$，那么将被积函数与测试函数 X 配对后，在 $\chi(\underline{\xi})$ 上的积分收敛。

公式（41）在 [24] 中推导得出，其出发点是关于指标的（K 理论）非阿贝尔局部化公式。应用 Paradan-Berline-Vergne 的一个定理，可以得到动量映射平方范数的临界集各个分支所作贡献的上同调公式。转入上同调后，再利用上同调中的非阿贝尔局部化（方向与通常的应用相反）重新求和，便得到（41）。

6. The fixed point formula

在 [24, 定理 4 中，11] 我们证明了哈密顿环群空间上适当的可容许 K 理论类生成级数的指标满足 Atiyah-Bott-Segal-Singer 型不动点公式。这里我们将计算 Atiyah-Bott 类的不动点贡献。

6.1. 不动点公式的应用。令 t为一个形式变量。遵循 Teleman 和 Woodward [40], 的做法，定义一个 K 理论类形式级数

$$\mathsf{E}_{t}=\exp(t\mathsf{E}^{\Sigma}V)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n}}{n!}(\mathsf{E}^{\Sigma}V)^{\otimes n}\in\mathbb{C}K_{\underline{G}}^{\mathrm{ad}}(\mathcal{M}_{\Sigma})[\![t]\!],\tag{42}$$

其中 $\mathbb{C}K_{\underline{G}}^{\mathrm{ad}}(\mathcal{M}_{\Sigma})[\![t]\!]=\mathbb{C}\otimes K_{\underline{G}}^{\mathrm{ad}}(\mathcal{M}_{\Sigma})[\![t]\!]$，且 $K_{\underline{G}}^{\mathrm{ad}}(\mathcal{M}_{\Sigma})[\![t]\!]$ 表示由可容许 K 理论类作为系数的（ $R(\underline{G})[\![t]\!]$-代数形式级数（关于 t）。此类级数的等变指标是 $\mathbb{C}R^{-\infty}(T)[\![t]\!]$ 中的元素，通过逐项取指标得到。根据定理 5.3 ，相应的陈特征形式形式级数满足

$$\underline{\eta}^{*}\mathrm{Ch}^{\underline{u}}(\mathsf{E}_{t},\underline{\xi})=e^{-t(2\pi\mathrm{i})^{-1}\partial_{\underline{\eta}}\mathrm{Tr}_{V}(\underline{u}\exp(\underline{\xi}))}\mathrm{Ch}^{\underline{u}}(\mathsf{E}_{t},\underline{\xi}),\quad\text{for}\quad\underline{\eta}\in\underline{\Pi}.\tag{43}$$

在 [24, 定义 4.7 和第4 节的术语中，6], 公式（43）表明E_{t} 具有无穷小扭曲的 $N(\underline{T})\ltimes\underline{\Pi}$-等变陈特征形式，其无穷小扭曲为

$$v=\tfrac{1}{4\pi^{2}}\nabla\mathrm{Tr}_{V}\in(\underline{\mathfrak{t}}_{\mathbb{C}}\otimes\mathbb{C}R(\underline{T})[\![t]\!])^{W},$$

其中梯度 ∇ 是相对于基本内积而言的。方程（43）和定理5.3 表明 [24, 定理 4。11] 的假设均已满足，直接应用

后者给出指标公式：

$$\operatorname{index}_{\underline{T}}^{k}(\mathsf{E}_t)=\frac{1}{|\underline{T}_\ell|}\sum_{\underline{g}\in\underline{T}_\ell^{\mathrm{reg}}/\underline{W}}\frac{\sum_{\underline{w}\in\underline{W}}(-1)^{l(\underline{w})}\delta_{\underline{w}\underline{g}_t}}{\det(1-t\ell^{-1}\underline{H}_V(\underline{g}_t))}\int_{X^{\underline{g}}/\underline{\Pi}}\exp\left(t\mathrm{Ch}^{\underline{g}_t}(\mathsf{E}^{\Sigma}V)\right)\mathcal{AS}^{\underline{g}_t}(\sigma).\tag{44}$$

（44）的两边都是 $\underline{W}$在 $\underline{T}$上的反对称分布关于 t的形式级数。集合$\underline{T}_{\mathrm{reg}\,\ell}$是有限子群 $\underline{T}_\ell=\ell^{-1}\underline{\Lambda}/\underline{\Pi}$中的正则元素 $\underline{T}$的子集。对于 $\underline{g}\in\underline{T}_{\mathrm{reg}\,\ell}$，$\underline{g}_t\in\mathcal{J}_{\underline{g}}^{\infty}\underline{T}_{\mathbb{C}}$是以 g为基点的唯一 ∞-jet（或 $\mathbb{C}[\![t]\!]$-点），它满足不动点方程$\Phi_t(\underline{g}_t)=g$和 $\Phi_t(\underline{u})=\underline{u}\exp(t\ell^{-1}v(\underline{u}))$，$v=\frac{1}{4\pi^2}\nabla\mathrm{Tr}_V$。在分子中，$\delta_{\underline{w}\underline{g}_t}$是支撑在点$\underline{w}\underline{g}$ 上的分布形式级数，它通过求值作用于特征 $f\in\mathbb{C}R(\underline{T})$

$$f\mapsto f(\underline{w}\underline{g}_t)\in\mathbb{C}[\![t]\!],$$

利用 f的泰勒展开定义，将其视为 $T_{\mathbb{C}}$上的函数。

完整表达式与 $\underline{T}_\ell^{\mathrm{reg}}\circlearrowleft\underline{W}$ 的轨道代表元的选取无关，但为方便起见，我们选择求和范围为 $(\underline{T}_\ell)^{\mathrm{reg}}\cap\exp(\underline{\mathfrak{A}})$ 中唯一的一组代表元，其中 $\underline{\mathfrak{A}}\subset\underline{\mathfrak{t}}_+$ 是基本仿射室。在分母中，$\underline{H}_V(\underline{u})=\mathrm{d}v(\underline{u})\in\mathrm{End}(\underline{\mathfrak{t}}_{\mathbb{C}})$ 是 $1/4\pi^2$ 乘以 Tr_V 在 $\underline{u}$处的海森矩阵。微分形式 $\mathcal{AS}^{\underline{g}_t}(\sigma)$ 是与符号 σ 相关联的 Atiyah-Singer 被积函数，该符号由狄拉克算子 $\not{D}_{\mathscr{S}_k}$ 的符号经 Bott-Thom 扭曲得到（当然，后者可以用熟知的特征形式表示）。

在 [24], 指标公式（44）是利用定理 41 中的 Kirillov-Berline-Vergne 公式（5.3）推导出来的。将非紧流形 X （或 $X^{\underline{u}}$ 更一般地说）上的积分替换为在 $\underline{\Pi}$ 作用下的基本域上的积分，以及对 $\underline{\Pi}$的求和。后一个求和利用泊松求和公式和变量替换Φ_t来计算。进一步局部化（对闭等变形式的积分进行阿贝尔局部化）并化简后，得到（44）。

如果使用相应的 $\underline{G}$-等变指标（30），公式会稍微简洁一些；该指标是 $\mathbb{C}R^{-\infty}(\underline{G})[\![t]\!]^{\underline{G}}$ 的一个元素。方程（44）（参见 [24, 方程（66）]）给出

$$\operatorname{index}_{\underline{G}}^{k}(\mathsf{E}_t)=\frac{1}{|\underline{T}_\ell|}\sum_{\underline{g}\in\underline{T}_\ell^{\mathrm{reg}}/\underline{W}}\frac{(-1)^{|\underline{\mathfrak{R}}_+|}\underline{J}(\underline{g}_t)\delta_{\underline{g}_t}}{\det(1-t\ell^{-1}\underline{H}_V(\underline{g}_t))}\int_{X^{\underline{g}}/\underline{\Pi}}\exp\left(t\mathrm{Ch}^{\underline{g}_t}(\mathsf{E}^{\Sigma}V)\right)\mathcal{AS}^{\underline{g}_t}(\sigma).\tag{45}$$

这里 $\delta_{\underline{g}_t}$ 是一个分布形式级数，将 $f\in\mathbb{C}R(\underline{G})$ 映射为 $f(\underline{g}_t)$。我们旨在计算积分（45）。这需要先做一些准备。

6.2. 不动点轨迹。 回忆第4.1 节， $X/\underline{\Pi}\subset M_\Sigma=\mathcal{M}_\Sigma/\Omega\underline{G}$，其中 M_Σ是第 $\mathcal{M}_\Sigma$ 2.2节引入的的全纯单值流形。我们将使用 M_Σ 的一种类似于[1, 定理 93]的参数化。设 $p_j\in\partial_j\Sigma\simeq S^1=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 为第 j个边界分支上的基点，并回忆

$$P=\{p_1,\dots,p_b\}\subset\partial\Sigma.$$

令 a_1、b_1.....、a_{g}、b_{g}为 $\pi_1(\boldsymbol{\Sigma},p_1)$的一组标准生成元，其像包含于 Σ；c_2.....、c_b为连接 p_1与各个 p_2.....、p_b的路径集合；以及 $d_2=\partial_2\Sigma$.....、$d_b=\partial_b\Sigma$这些边界圆。我们可以安排使所有这些曲线均光滑、简单且彼此不相交，除了

在 p_1处 a_i、 b_i、 c_j的交集以及交集 $c_j \cap d_j = \{p_j\}$。集合 $\{a_i, b_i, c_j, d_j\}$生成 Σ中端点包含于 P的路径的基本群胚 $\Pi_1(\Sigma, P)$。

令$\mathcal{G}_{\Sigma,\ P} \subset \mathcal{G}_\Sigma$ 表示在子集 P上等于恒等变换的规范变换。全息流形可以识别为基本群胚的表示空间

$$M_\Sigma = \mathcal{A}_\Sigma^\flat / \mathcal{G}_{\Sigma,P} \simeq \mathrm{Hom}(\Pi_1(\Sigma, P), G).$$

生成元系统 $\{a_i, b_i, c_j, d_j\}$确定了一个微分同胚 $h\colon\ M_\Sigma \xrightarrow{\sim} G^{2(\mathrm{g}+b-1)}$给出为

$$[A] \mapsto h([A]) = (h_{a_1}(A), h_{b_1}(A), ..., h_{a_\mathrm{g}}(A), h_{b_\mathrm{g}}(A), h_{c_2}(A), h_{d_2}(A), ..., h_{c_b}(A), h_{d_b}(A)) \tag{46}$$

其中， $h_f(A)$ 是联络 A 沿路径 f 的 holonomy。 $\underline{g} = (g_1, ..., g_b) \in \underline{G}$ 的作用是

$$h_{a_i} \mapsto g_1 h_{a_i} g_1^{-1}, \quad h_{b_i} \mapsto g_1 h_{b_i} g_1^{-1}, \quad h_{c_j} \mapsto g_1 h_{c_j} g_j^{-1}, \quad h_{d_j} \mapsto g_j h_{d_j} g_j^{-1}.$$

将 G 与 $\underline{G}$中的对角线等同起来很方便。对于$\underline{g} \in \underline{T}_\ell^{\mathrm{reg}} \cap \exp(\underline{\mathfrak{a}})$，容易验证，除非 $g_1 = g_2 = \cdots = g_b =: g$，否则$M_\Sigma^{\underline{g}}$为空；在这种情况下，由于正则性， $M_\Sigma^{\underline{g}} = M_\Sigma^g = M_\Sigma^T$不依赖于$\underline{g} \in \underline{T}_\ell^{\mathrm{reg}}$ 的选择。由于该空间将在下文中频繁出现，我们作如下定义。

定义 6.1. 令 $F = M_\Sigma^T$ 为 M_Σ上 T 的对角线作用的不动点集。等价地， $F = \mathrm{Hom}(\Pi_1(\Sigma, P)\ T)$ 是P上的带标架的 T-联络模空间。在微分同胚 h下： $M_\Sigma \xrightarrow{\sim} G^{2(\mathrm{g}+b-1)}$， F映射到环面 $T^{2(\mathrm{g}+b-1)}$。

有了这一观察，我们可以基本上消除公式（45）中的“下划线”记号，

$$\mathrm{index}_{\underline{G}}^k(\mathsf{E}_t) = \frac{1}{|T_\ell|^b} \sum_{g \in T_\ell^{\mathrm{reg}}/W} \frac{(-1)^{b|\mathfrak{R}_+|} J(g_t)^b \delta_{g_t}}{\det(1 - t\ell^{-1} H_V(g_t))^b} \int_F \exp\left(t\mathrm{Ch}^{g_t}(\mathsf{E}^\Sigma V)\right) \mathcal{AS}^{g_t}(\sigma), \tag{47}$$

其中 $g_t \in \mathcal{J}_g^\infty(T_\mathbb{C})$ 满足 $\Phi_t(g_t) = g$， 且 $\Phi_t(u) = u\exp(t\ell^{-1} v(u))$， $v(u) = \frac{1}{4\pi^2}\nabla \mathrm{Tr}_V(u)$。

就非紧流形 X 而言， $F \simeq X^T/\underline{\Pi}$ 和 X^T 可以与纤维积相识别

$$X^T = \underline{\mathfrak{t}} \times_{\underline{T}} F = \underline{\mathfrak{t}} \times_{\underline{T}} \mathrm{Hom}(\Pi_1(\Sigma, P), T),$$

其中动量映射 $\mu = (\mu_1, ..., \mu_b)$ 是到 $\underline{\mathfrak{t}}$ 的投影，而到 $\underline{T}$ 的映射则将一个联络等价类对应到其沿边界圆的全体整体单值。对于 Σ 上的阿贝尔平坦联络，沿边界圆的整体单值之积为 1，因此可得其和

$$\bar{\mu} := \sum_{i=1}^b \mu_i \colon X \to \mathfrak{t} \tag{48}$$

取值于 Π。事实上， X^T 的连通分支是纤维 $\bar{\mu}^{-1}(\eta)$，其中 η 遍历格 Π。

在不动点集 X^T 上，阿蒂亚-西格尔-辛格被积函数 $\mathcal{AS}^{g_t}(\sigma)$ 化简为

$$\frac{J(g_t)^b}{(-1)^{|\mathfrak{R}_+|(\mathrm{g}+b-1)} J(g_t)^{2(\mathrm{g}+b-1)}} g_t^{\ell\bar{\mu}}. \tag{49}$$

计算式（49）涉及的主要要素（详情请参阅 [2, 第 5 节。5]）为：(i) $\widehat{\mathsf{A}}(F)=1$；(ii) X^T 不动点集包含在映射 $X\xrightarrow{\mu_\Sigma}\underline{R}\to\underline{\mathfrak{t}}^\perp$ 的零纤维中，因此，Bott-Thom 元素的陈特征 $\mathrm{Ch}^{g_t}(\mathscr{B})$（它是 Atiyah-Singer 被积函数 $\mathcal{AS}^{g_t}(\sigma)$ 的一个因子）可以替换为其拉回到 $0\in\underline{\mathfrak{t}}^\perp$ 的结果，即 $J(g_t)^b$；(iii) 不动点流形的法丛是纤维为 $(\mathfrak{g}/\mathfrak{t})^{2(\mathrm{g}+b-1)}$ 的平凡丛，并在分母中贡献因子 $(-1)^{|\mathfrak{R}_+|(\mathrm{g}+b-1)}J(g_t)^{2(\mathrm{g}+b-1)}$；因子 $g_t^{\ell\bar\mu}$ 来自 g_t 对旋量丛的作用（注意，当 $t=0$时，此因子不存在，因为 $g\in T_\ell$, $\bar\mu\in\Pi$ 推出 $g^{\ell\bar\mu}=1$）。经过这些简化后，（47）变为

$$\mathrm{index}^k_{\underline{G}}(\mathsf{E}_t)=\frac{1}{|T_\ell|^b}\sum_{g\in T_\ell^{\mathrm{reg}}/W}\frac{(-1)^{|\mathfrak{R}_+|(1-\mathrm{g})}J(g_t)^{2(1-\mathrm{g})}\delta_{g_t}}{\det(1-t\ell^{-1}H_V(g_t))^b}\int_F g_t^{\ell\bar\mu}e^{\frac{1}{2}c_1(\mathscr{L})+t\mathrm{Ch}^{g_t}(\mathsf{E}^\Sigma V)}. \tag{50}$$

我们将在下一节计算关于 F 的积分。

6.3. 关于 $\mathsf{E}^\Sigma V$ 的 Teleman-Woodward 公式。 式（50）中的被积函数先验定义在 X^T 上，但可下降到商空间 $F=X^T/\underline{\Pi}$ 上。我们已在[24, 定理 49], 中更一般的情形下验证了这一点，但也可以在这个特殊情形下直接验证。回顾第5.2 节中，我们通过对纤维上的积分，定义了 $\mathsf{E}^\Sigma V$ 的等变陈特征形式$X\times\mathbf{\Sigma}\to X$，它来自 $\mathbb{E}V$的等变陈特征形式。 $\Sigma\subset\mathbf{\Sigma}$ 的贡献$\underline{\Pi}$在 $\mathbb{D}_1$ 下不变。另一方面，我们在式（38）中计算了帽体 $\mathbb{D}_1$，.....，$\mathbb{D}_b$ 的贡献；将其限制到对角嵌入的 $T\subset\underline{T}$（如式（50）所示）上时，该贡献简化为

$$-(2\pi\mathrm{i})^{-1}\partial_{\bar\mu}\mathrm{Tr}_V(u\exp(\xi)).$$

将指数化后，我们发现帽体 $\mathbb{D}_1$，.....，$\mathbb{D}_b$ 对 $e^{t\mathrm{Ch}^{g_t}(\mathsf{E}^\Sigma V)}$ 的贡献是一个乘法因子 $\exp(-t(2\pi\mathrm{i})^{-1}\partial_{\bar\mu}\mathrm{Tr}_V(g_t))$。乘积

$$g_t^{\ell\bar\mu}\exp(-t(2\pi\mathrm{i})^{-1}\partial_{\bar\mu}\mathrm{Tr}_V(g_t))=g_t^{\ell\bar\mu}\exp(2\pi\mathrm{i}tv(g_t)\cdot\bar\mu)=\Phi_t(g_t)^{\ell\bar\mu}=g^{\ell\bar\mu}=1$$

因为 $\bar\mu|_{X^T}$ 取值于 Π 且 $g\in T_\ell$。由此可知，（50）中的被积函数下降。

还需要计算来自 Σ 的（$\underline{\Pi}$-不变）贡献。这涉及对纤维 $X^T\times\Sigma\to X$ 上的向量丛 $\mathsf{E}V|_{X^T\times\Sigma}=\mathbb{E}V|_{X^T\times\Sigma}$ 的陈特征形式进行积分。由于 $\mathsf{E}V$ 是 $\underline{\Pi}$-等变的，我们可以使用向量丛

$$\boldsymbol{E}V=\mathsf{E}V|_{X^T\times\Sigma}/\underline{\Pi} \tag{51}$$

在带边界紧流形 $F\times\Sigma=(X^T/\underline{\Pi})\times\Sigma$ 上。

在下面的讨论中，同调群/上同调群取系数于 $\mathbb{C}$。回顾$P=\{p_1,...,p_b\}$并注意到 $\mathrm{Hom}(\Pi_1(\Sigma,P)\ T)\simeq\mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma/P,P)\ T)$，其中 $\pi_1(\Sigma/P,P)$ 表示空间 Σ/P 在点 P（商空间中）处的基本群。令 $(\Sigma/P)^\sim$ 为 Σ/P 的万有覆盖空间。给定一个特征 $\lambda\in\Lambda=\mathrm{Hom}(T,U(1))$，令

$$h^\lambda\colon F\to\mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma/P,P),U(1))$$

是 λ 与全纯映射的复合。

$$F\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma/P,P),T).$$

定义一个复直线丛

$$\boldsymbol{E}\mathbb{C}_\lambda=(F\times(\Sigma/P)^\sim\times\mathbb{C})/\pi_1(\Sigma/P,P)\to F\times\Sigma/P$$

其中 $f \in \pi_1(\Sigma/P, P)$ 作用于乘积上

$$f \cdot (y, p, z) = (y, f \cdot p, h^\lambda(y, f) \cdot z).$$

设 $\{f_s\}_{s\in S}$ 为 $H_1(\Sigma/P)$ 的一组积分生成元，并设 f^s 为关于典范配对的 $H^1(\Sigma/P)$ 的对偶基。将 h^λ 与 f_s 配对可得到一个映射

$$\langle h^\lambda, f_s\rangle \colon F \to U(1),$$

λ 是沿着 f_s 的联络的 holonomy 的分量。设 $f_s^\lambda \in H^1(F)$ 为 $H^1(U(1))$ 的积分生成元在 $\langle h^\lambda, f_s\rangle$ 下的拉回。线丛 $\boldsymbol{E}\mathbb{C}_\lambda$ 的第一陈类为

$$c_1(\boldsymbol{E}\mathbb{C}_\lambda) = \sum_s f_s^\lambda f^s \in H^1(F)\widehat{\otimes} H^1(\Sigma/P) \subset H^2(F \times \Sigma/P). \tag{52}$$

我们可以取 $\{f_s\}_{s\in S}$ 作为 $\pi_1(\Sigma/P, P)$ 的生成元集，其中的元素是上一节引入的元素 $\{a_i, b_i, c_j, d_j\}$ 在商映射 $\Sigma \to \Sigma/P$ 下的像；我们滥用记号，仍用相同符号表示这些像。因此，集合 S 含有 $2(\mathsf{g}+b-1)$ 个元素。设 $a^i, b^i, c^j, d^j \in H^1(\Sigma/P)$ 为对偶基。为得到微分形式代表元，回顾 $H^1(\Sigma/P) \simeq H^1(\Sigma, P)$，因此相关的德拉姆上同调群是相对群

$$H^1_{\mathrm{dR}}(\Sigma, P) = \Omega^1_{\mathrm{cl}}(\Sigma)/\{\mathrm{d}f \mid f \in \Omega^0(\Sigma),\ f|_P \text{ is constant}\}.$$

将类 a^i、b^i 分别表示为托姆形式，其支集位于 $\Sigma\backslash\mathcal{C}$ 中与 b_i、a_i 分别同伦的光滑1-循环的管状邻域内。将类 c^j、d^j 分别表示为支集位于曲线 d_j、c_j 管状邻域内的托姆形式。我们滥用记号，对这些微分形式代表元仍分别使用相同的符号 a^i、b^i、c^j、d^j。利用 $U(1)$ 上标准1-形式的拉回，我们还得到 $f_s^\lambda = a_i^\lambda$、$b_i^\lambda$、$c_j^\lambda$、$d_j^\lambda$ 的微分形式代表元。由式 (52)，$\boldsymbol{E}\mathbb{C}_\lambda$ 的第一陈形式为

$$c_1(\boldsymbol{E}\mathbb{C}_\lambda) = \sum_{i=1}^{\mathrm{g}} (a_i^\lambda a^i + b_i^\lambda b^i) + \sum_{j=2}^{b} (c_j^\lambda c^j + d_j^\lambda d^j).$$

相应的等变陈特征形式为

$$\mathrm{Ch}^u(\boldsymbol{E}\mathbb{C}_\lambda) = u^\lambda e^{c_1(\boldsymbol{E}\mathbb{C}_\lambda)} \in \Omega(F). \tag{53}$$

If

$$V = \bigoplus_\lambda n_\lambda \mathbb{C}_\lambda$$

若 T 是一个表示，则

$$\boldsymbol{E}V = \bigoplus_\lambda n_\lambda \boldsymbol{E}\mathbb{C}_\lambda$$

与向量丛 $\mathsf{E}V|_{X^T\times\Sigma}/\underline{\Pi}$ 在式 (51) 中相对应。令

$$\mathrm{Ch}^u(\boldsymbol{E}V) = \sum_\lambda n_\lambda \mathrm{Ch}^u(\boldsymbol{E}\mathbb{C}_\lambda). \tag{54}$$

这是 T-等变陈类 $\boldsymbol{E}V$ 的微分形式代表元 .

我们很快将用（54）来计算 $\Sigma \subset \boldsymbol{\Sigma}$ 对 $\mathsf{E}^\Sigma V$ 的陈特征形式的贡献，以及（50）中的积分。关于（54）可用于此目的的论证是

之所以需要，是因为 $F \times \Sigma$ 具有非空边界（仅具有正确的德拉姆上同调类还不够）：根据第 5.2 节中的构造，只需证明在 $\underline{T} \times \underline{\Pi}$ 的拉回 $\pi^* \boldsymbol{E}\mathbb{C}_\lambda$ 上存在一个 $\boldsymbol{E}\mathbb{C}_\lambda$ - 不变联络，该拉回是通过商映射π: $X^T \times \Sigma \to (X^T/\underline{\Pi}) \times \Sigma = F \times \Sigma$相对于平凡化具有如下形式

$$\mathrm{d} + \langle \alpha_j(x, r_j, s_j), \lambda \rangle = \mathrm{d} + \langle \mu_j(x), \lambda \rangle f(s_j)\mathrm{d}s_j, \quad \text{where} \quad \int_{S^1} f(s_j)\mathrm{d}s_j = 1 \tag{55}$$

在领圈 $X^T \times \mathcal{C}_j$ 上，并且相应的陈–韦伊形式是上文构造的形式的拉回$\pi^* c_1(\boldsymbol{E}\mathbb{C}_\lambda)$。这可由以下简单观察得出：

(a) 对于 $j = 2,...,b$，我们选择形式 d^j ，使其成为支撑在 γ_j 的管状邻域中的托姆形式（ $p_1 \in \partial_1\Sigma$ 与 $p_j \in \partial_j\Sigma$ 之间的一条光滑曲线）。我们可以选择 d^j 在 $\mathcal{C}_j$ 上取乘积形式，此时，对于适当的光滑函数 $f(s_j)$，有 $d^j|_{\mathcal{C}_j} = f(s_j)\mathrm{d}s_j$，且该函数在 S^1 上的积分为 1。

(b)指数 $\exp(\mu_j(x)) \in T$ 是绕边界圆 $\partial_j\Sigma$的 $\mathcal{G}_{\Sigma,\partial\Sigma}$-等价类的联络 $x = [A]$ 的holonomy。因此，对于 $j = 2, ..., b$，由于 d_j^λ是由 δ_j的holonomy map 的 λ分量将 $U(1)$ 上的标准 1-形式拉回所得，我们有 $\mathrm{d}\langle \mu_j, \lambda \rangle = \pi^* d_j^\lambda$，所以

$$\mathrm{d}\langle \alpha_j, \lambda \rangle = \pi^* d_j^\lambda d^j|_{X^T \times \mathcal{C}_j}.$$

(c) 我们也可以选择使 d^j 在 $\mathcal{C}_1$ 上具有乘积形式（靠近 γ_j的另一端），例如$-f(s_1)\mathrm{d}s_1$（与靠近 $\mathcal{C}_j$ 处的公式相比，会多出一个负号，因为边界的定向由 Σ 上的定向诱导）。然后

$$\sum_{j=2}^{b} \pi^* d_j^\lambda d^j|_{X^T \times \mathcal{C}_1} = -\sum_{j=2}^{b} \mathrm{d}\langle \mu_j, \lambda \rangle f(s_1)\mathrm{d}s_1$$

但正如我们上文所解释的， $\sum_{j=1}^{b} \mu_j$ 在 X^T 上是局部常数。因此

$$\sum_{j=2}^{b} \pi^* d_j^\lambda d^j|_{X^T \times \mathcal{C}_1} = \mathrm{d}\langle \mu_1, \lambda \rangle f(s_1)\mathrm{d}s_1.$$

(d) 上述三项表明 $\sum_s \pi^* f_s^\lambda f^s|_{X^T \times \mathcal{C}_j} = \mathrm{d}\langle \alpha_j, \lambda \rangle$ 其中 α_j如（55）所示。由闭整2-形式的预量子联络的标准构造可知，存在 $\underline{T} \times \underline{\Pi}$-不变联络，定义在 $\pi^* \boldsymbol{E}\mathbb{C}_\lambda \to X^T \times \Sigma$ 上，其第一陈形式为 $\sum_s \pi^* f_s^\lambda f^s$。回顾一下，该构造涉及在良覆盖的开子集上选取平凡化和原函数，因此，在 α_j 上选取特定原函数 $X^T \times \mathcal{C}_j$ 可确保预量子联络在 $X^T \times \mathcal{C}_j$上与（55）相符。

继续进行计算， Σ 对 $\mathrm{Ch}^u(\mathrm{E}^\Sigma V)$ 的贡献是下列内容在π下的拉回：$X^T \to X^T/\underline{\Pi} = F$

$$\int_\Sigma \mathrm{Ch}^u(\boldsymbol{E}V) = \sum_\lambda n_\lambda u^\lambda \int_\Sigma \exp\Big(\sum_s f_s^\lambda f^s\Big). \tag{56}$$

由于 $\dim(\Sigma) = 2$，且 f_s^λ是 X^T上的形式的拉回，因此对 Σ 积分时，只有指数函数中的二次项会产生贡献。因此

$$\int_\Sigma \mathrm{Ch}^t(\boldsymbol{E}V) = \sum_\lambda n_\lambda t^\lambda \frac{1}{2}\int_\Sigma \Big(\sum_s f_s^\lambda f^s\Big)^2.$$

根据我们对这些形式的描述，显然，

$$\int_\Sigma a^i b^i = 1 = -\int_\Sigma b^i a^i, \qquad \int_\Sigma c^j d^j = 1 = -\int_\Sigma d^j c^j,$$

而所有其他交叉配对都是平凡的。因此（56）得到

$$\int_\Sigma \mathrm{Ch}^u(\boldsymbol{E}V) = -\sum_\lambda n_\lambda u^\lambda \Big(\sum_i a_i^\lambda b_i^\lambda + \sum_j c_j^\lambda d_j^\lambda\Big). \tag{57}$$

（负号在对纤维积分后出现，因为例如 $a_i^\lambda a^i b_i^\lambda b^i = -a_i^\lambda b_i^\lambda a^i b^i$。）令 $\nu_1, \ldots, \nu_{\dim(t)}$ 为 Λ的格基。方程（57）关于 λ是双线性的，因此如果我们将 $\lambda = \sum \lambda_p \nu_p$ 按该基分解，则

$$\int_\Sigma \mathrm{Ch}^u(\boldsymbol{E}V) = -\sum_\lambda \sum_{p,q} n_\lambda u^\lambda \lambda_p \lambda_q \Big(\sum_i a_i^p b_i^q + \sum_j c_j^p d_j^q\Big),$$

其中 $a_i^p = a_i^{\nu_p}$，其他形式同理。该和

$$\sum_\lambda n_\lambda u^\lambda \lambda_p \lambda_q = H_V(u)_{pq}$$

是（p，q）-项，即（$1/4\pi^2$ 乘以）Tr_V 在点 u 处相对于该基的海森矩阵。因此（57）可写为

$$\int_\Sigma \mathrm{Ch}^u(\boldsymbol{E}V) = \sum_{p,q} -H_V(u)_{pq}\Big(\sum_i a_i^p b_i^q + \sum_j c_j^p d_j^q\Big).$$

旋量 丛处于层级 ℓ，并且可以证明（参见 [32, 推论3。12], [2, 命题 5.2]）

$$\frac{1}{2}c_1(\mathscr{L}) = \ell \sum_p \Big(\sum_i a_i^p b_i^p + \sum_j c_j^p d_j^p\Big)$$

在 $H^2(F)$。因此，需要计算的积分从 50）是

$$\int_F \exp\Big(\ell \sum_{p,q}(\delta_{pq} - t\ell^{-1} H_V(u)_{pq})\big(\sum_i a_i^p b_i^q + \sum_j c_j^p d_j^q\big)\Big). \tag{58}$$

乘积

$$\prod_{p,i} a_i^p b_i^p \prod_{p,j} c_j^p d_j^p$$

是$2(\mathrm{g}+b-1)$维的T维环面 $F \simeq T^{2(\mathrm{g}+b-1)}$，其积分为 $|T_1|$（参见[2, 命题 5。2], [14]）。因此，对（58）进行简短计算可得

$$\det(1 - \ell^{-1} H_V(u))^{\mathrm{g}+b-1} |T_\ell|^{\mathrm{g}+b-1}.$$

将这些计算的结果代入（50），得到如下结果。

定理 6.2。生成级数 $\exp(t\mathsf{E}^{\Sigma}V)$ 的指标为

$$\operatorname{index}_{\underline{G}}^{k}(\exp(t\mathsf{E}^{\Sigma}V)) = \sum_{g\in T_{\ell}^{\mathrm{reg}}/W} \Big(\frac{(-1)^{|\mathfrak{R}_+|}J(g_t)^2}{|T_\ell|\det(1-t\ell^{-1}H_V(g_t))}\Big)^{1-\mathrm{g}}\delta_{g_t}$$

其中 $\ell = k+\mathsf{h}^{\vee}$, $g_t\exp(t\ell^{-1}v(g_t)) = g$, $v = \frac{1}{4\pi^2}\nabla\mathrm{Tr}_V$ 以及 $H_V = \mathrm{d}v$。

6.4. 一般类的 Teleman-Woodward 公式。 为求完整，本节简要说明如何扩展定理 6.2 ，以纳入第 3.1 节介绍的其他较初等的 Atiyah-Bott 类。为简便起见，我们仅考虑两个奇类的乘积。

设 C_1, C_2 是 Σ中的光滑简单闭曲线，且 U_1, U_2 是 G的表示。我们考虑乘积 $\mathsf{E}^{C_1}U_1\cdot\mathsf{E}^{C_2}U_2 \in K_{\underline{G}}^{\mathrm{ad}}(\mathcal{M}_\Sigma)$，它由二维环面 $C_1\times C_2\subset\Sigma\times\Sigma$上的一族狄拉克算子表示。$\exp(t\mathsf{E}^{\Sigma}V)\cdot\mathsf{E}^{C_1}U_1\cdot\mathsf{E}^{C_2}U_2$ 的指标可按照（50）中的不动点公式计算。唯一的变化是多出一个因子 $\mathsf{Ch}^{g_t}(\mathsf{E}^{C_1}U_1\cdot\mathsf{E}^{C_2}U_2)$，而后一个陈特征可以用族指标定理表示。计算与对 $\mathsf{E}^{\Sigma}V$所做的类似，事实上要简单得多，因为类 $\mathsf{E}^{C_1}U_1\cdot\mathsf{E}^{C_2}U_2$只是商空间 $X/\underline{\Pi}$上一个 K-理论类的拉回。

将 U_1, U_2 分解为权空间：

$$U_i = \bigoplus_{\lambda} n_{i,\lambda}\mathbb{C}_\lambda.$$

对于 λ_1、 $\lambda_2\in\Lambda$，并令 $\boldsymbol{E}\mathbb{C}_{\lambda_i}\to F\times\Sigma$ 为相应的线丛（使用与第6.3 节中相同的记号）。令$\boldsymbol{E}\mathbb{C}_{\lambda_1,\lambda_2}\to F\times\Sigma_{(1)}\times\Sigma_{(2)}$ （下标(1)、(2)表示 Σ的两个副本）为外积$\boldsymbol{E}\mathbb{C}_{\lambda_1}\boxtimes\boldsymbol{E}\mathbb{C}_{\lambda_2}$ 到 $F\times\Sigma_{(1)}\times\Sigma_{(2)}$的拉回，其中$F\hookrightarrow F\times F$与对角线相识别。此线丛的第一陈类为

$$c_1(\boldsymbol{E}\mathbb{C}_{\lambda_1,\lambda_2}) = \sum_s f_s^{\lambda_1}f_{(1)}^s + f_s^{\lambda_2}f_{(2)}^s,$$

以及陈特征

$$\mathrm{Ch}^u(\boldsymbol{E}\mathbb{C}_{\lambda_1,\lambda_2}) = u^{\lambda_1+\lambda_2}\exp\Big(\sum_s f_s^{\lambda_1}f_{(1)}^s + f_s^{\lambda_2}f_{(2)}^s\Big).$$

然后我们计算与 $C_1\times C_2\subset\Sigma_{(1)}\times\Sigma_{(2)}$的斜积。指数函数中唯一有贡献的项是二次项。同时，我们对 U_1、 U_2 的权空间分解求和，得到：

$$\mathrm{Ch}^u(\mathsf{E}^{C_1}U_1\cdot\mathsf{E}^{C_2}U_2) = -\sum_{\lambda_1,\lambda_2} n_{1,\lambda_1}n_{2,\lambda_2}u^{\lambda_1+\lambda_2}\sum_{s_1,s_2} f_{s_1}^{\lambda_1}f_{s_2}^{\lambda_2}\langle f^{s_1},C_1\rangle\langle f^{s_2},C_2\rangle, \tag{59}$$

其中尖括号表示上同调与同调类之间的配对。为稍微简化公式，下面起我们假设，对于某个 $1\le r\le\mathrm{g}$， C_1 与 a^r 对偶，且 C_2 与 b^r 对偶。这样做并不会造成实质性的普遍性损失，因为（59）只取决于 C_1、 C_2 在 Σ中的同调类，而它们分别都是与 a^i、 b^i、 d^j对偶的类之和；此外，我们很快将看到，任何其他组合（a^r、 $b^{r'}$ 与$r\neq r'$； a^r、 $a^{r'}$； b^r、 $b^{r'}$； a^r、 $d^{r'}$； b^r、 $d^{r'}$）的贡献都会消失（特别是，这将提供一个一致性检验

命题3.2）。在这一假设下

$$\mathrm{Ch}^u(\mathsf{E}^{C_1}U_1\cdot\mathsf{E}^{C_2}U_2)=-\sum_{\lambda_1,\lambda_2}n_{1,\lambda_1}n_{2,\lambda_2}u^{\lambda_1+\lambda_2}a_r^{\lambda_1}b_r^{\lambda_2}.$$

将 λ_1、λ_2 按格基展开，并注意到

$$\sum_{\lambda_1,\lambda_2}n_{1,\lambda_1}n_{2,\lambda_2}u^{\lambda_1+\lambda_2}\lambda_{1,p'}\lambda_{2,q'}$$

i这是 $u\in T$ 处 $-(4\pi^2)^{-1}\nabla\mathrm{Tr}_{U_1}\otimes\nabla\mathrm{Tr}^{U_2}$ 的 (p',q') 分量。因此

$$\mathrm{Ch}^u(\mathsf{E}^{C_1}U_1\cdot\mathsf{E}^{C_2}U_2)=\frac{1}{4\pi^2}\sum_{p',q'}(\nabla\mathrm{Tr}_{U_1}(u)\otimes\nabla\mathrm{Tr}_{U_2}(u))_{p'q'}a_r^{p'}b_r^{q'}.$$

加入 $\mathsf{E}^{C_1}U_1\cdot\mathsf{E}^{C_2}U_2$ 在（58）中的陈特征，因此得到

$$\int_F\exp\Big(\sum_{p,q}A_{pq}(u)\big(\sum_i a_i^pb_i^q+\sum_j c_j^pd_j^q\big)\Big)\frac{1}{4\pi^2}\sum_{p',q'}(\nabla\mathrm{Tr}_{U_1}(u)\otimes\nabla\mathrm{Tr}_{U_2}(u))_{p'q'}a_r^{p'}b_r^{q'},\tag{60}$$

其中 $A_{pq}(u)=\ell\delta_{pq}-tH_V(u)_{pq}$。现在考察（60）便可解释为什么 $H^1(\Sigma)$ 的其他生成元组合会产生零贡献，因为此时被积函数的最高次部分为零。积分（60）可用类似高斯积分的方法计算，结果为

$$\det(1-\ell^{-1}H_V(u))^{\mathrm{g}+b-1}|T_\ell|^{\mathrm{g}+b-1}\alpha_{U_1,U_2}^{\ell-tH_V(u)}(t)$$

其中，对于逆矩阵为 A^{pq} 且表示为 U_1、U_2 的矩阵 A_{pq}，我们有 se t

$$\alpha_{U_1,U_2}^A(u)=\frac{1}{4\pi^2}\sum_{p,q}A^{pq}(u)(\nabla\mathrm{Tr}_{U_1}(u)\otimes\nabla\mathrm{Tr}_{U_2}(u))_{pq}.\tag{61}$$

下述定理总结了这些计算。

定理6.3。设 C_1、C_2 是 Σ 中的光滑闭曲线。设 U_0、U_1、U_2、V 是 G 的表示。那么指标 $\underline{k}_G(\mathsf{E}^{\mathrm{pt}}U_0\cdot\mathsf{E}^{C_1}U_1\cdot\mathsf{E}^{C_2}U_2\cdot\exp(t\mathsf{E}^\Sigma V))$ 由下式给出

$$\sum_{g\in T_\ell^{\mathrm{reg}}/W}\#(C_1\cap C_2)\mathrm{Tr}_{U_0}(g_t)\alpha_{U_1,U_2}^{\ell-tH_V(g_t)}(g_t)\Big(\frac{(-1)^{|\mathfrak{R}_+|}J(g_t)^2}{|T_\ell|\det(1-t\ell^{-1}H_V(g_t))}\Big)^{1-\mathrm{g}}\delta_{g_t}$$

其中 $\ell=k+\mathrm{h}^\vee$，$g_t\exp(t\ell^{-1}v(g_t))=g$，$v=\frac{1}{4\pi^2}\nabla\mathrm{Tr}_V$，$H_V=\mathrm{d}v$，$\#(C_1\cap C_2)$ 是交叉配对，并且 α 定义见 (61)。

6.5. 总 λ-运算。在前几节中，我们研究了指数型生成级数 $\exp(t\mathsf{E}^\Sigma V)\in\mathbb{C}K_T(X)[\![t]\!]$，并发现适当的扭曲 $v=\frac{1}{4\pi^2}\nabla\mathrm{Tr}V$ 与 t 无关。另一个有趣的生成级数是总 λ-运算：

$$\boldsymbol{\lambda}_t\mathsf{E}^\Sigma V=\sum_{p\geq0}t^p\boldsymbol{\lambda}^p\mathsf{E}^\Sigma V\in K_T(X)[\![t]\!].\tag{62}$$

例如，在将等变 Verlinde 公式应用于 Higgs 丛模空间时，就会出现这一系列，其中 $V=\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 伴随表示 [19, 3, 20]。

我们首先注意到，如果 $\mathsf{E}\in K_T^{\mathrm{ad}}(X)$是容许的，那么类 $\boldsymbol{\lambda}^p\mathsf{E}$（同样，Adams 运算 $\psi^j\mathsf{E}$）也都是容许的。事实上，如果（$\mathcal{E},\nabla^{\mathcal{E}},Q$）是一个表示.....的容许循环

E，那么作用于E 的各种上同调运算，都由以下方式构造的循环表示：$\widehat{}$将分次张量幂 $\mathcal{E}^{\otimes j}$ 按对称群的作用进行分解（该作用中根据 Koszul 符号规则插入了适当的符号；参见[4]），并且显然，所得循环仍然是容许的。

我们简要地 解释为何（62）会导致一个扭曲 v_t，它取决于 t 如下的 [40, 第 6] .

命题 6.4. $\mathsf{E}_t = \boldsymbol{\lambda}_t\mathsf{E}^\Sigma V \in K_T^{\mathrm{ad}}(X)[\![t]\!]$ 具有无穷小扭曲陈特征形式，其无穷小扭曲为

$$v_t = \frac{1}{4\pi^2}\sum_{j>0}\frac{(-t)^{j-1}}{j^2}\nabla\underline{\mathrm{Tr}}_{\psi^j V}.$$

证明。一条公式为

$$\boldsymbol{\lambda}_t\mathsf{E} = \exp\Big(-\sum_{j>0}\frac{(-t)^j}{j}\psi^j\mathsf{E}\Big)$$

用 Adams 运算 ψ^j 表示。根据分裂原理

$$\mathrm{Ch}^{\underline{u}}(\psi^j\mathsf{E},\underline{\xi})_{[2p]} = j^p\mathrm{Ch}^{\underline{u}^j}(\mathsf{E},j\underline{\xi})_{[2p]}$$

其中 $\alpha_{[2p]}$ 是 α 在次数 $2p$中的分量。利用关于陈特征形式的族指标公式（37），（以及关系式 $\psi^j\mathbb{E}V = \mathbb{E}(\psi^j V)$）），

$$\mathrm{Ch}^{\underline{u}}(\psi^j\mathsf{E}^\Sigma V,\underline{\xi})_{[2p]} = j^p\mathrm{Ch}^{\underline{u}^j}(\mathsf{E}^\Sigma V,j\underline{\xi})_{[2p]} = \frac{1}{j}\int_{\mathbb{\Sigma}} j^{p+1}\mathrm{Ch}^{\underline{u}^j}(\mathbb{E}V,j\underline{\xi})_{[2p+2]} = \frac{1}{j}\mathrm{Ch}^{\underline{u}}(\mathsf{E}^\Sigma(\psi^j V),\underline{\xi})_{[2p]}.$$

因此

$$\mathrm{Ch}^{\underline{u}}(\boldsymbol{\lambda}_t\mathsf{E}^\Sigma V,\underline{\xi}) = \exp\Big(-\sum_{j>0}\frac{(-t)^j}{j^2}\mathrm{Ch}^{\underline{u}}(\mathsf{E}^\Sigma(\psi^j V),\underline{\xi})\Big)$$

对于 $\underline{\eta}\in\underline{\Pi}$，回忆 $\underline{\eta}^*\mathrm{Ch}^{\underline{u}}(\mathsf{E}^\Sigma V,\underline{\xi}) = \mathrm{Ch}^{\underline{u}}(\mathsf{E}^\Sigma V,\underline{\xi}) - (2\pi\mathrm{i})^{-1}\partial_{\underline{\eta}}\mathrm{Tr}_V(\underline{u}\exp(\underline{\xi}))$。由此可得

$$\underline{\eta}^*\mathrm{Ch}^{\underline{u}}(\boldsymbol{\lambda}_t\mathsf{E}^\Sigma V,\underline{\xi}) = \exp\Big(\sum_{j>0}\frac{(-t)^j}{j^2}(2\pi\mathrm{i})^{-1}\partial_{\underline{\eta}}\underline{\mathrm{Tr}}_{\psi^j V}(\underline{u}\exp(\underline{\xi}))\Big)\mathrm{Ch}^{\underline{u}}(\boldsymbol{\lambda}_t\mathsf{E}^\Sigma V,\underline{\xi}).$$

断言立即由此推出。 □

I在与等变 Verlinde 公式相关的特殊情形 $V=\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 中，有 s

$$\nabla\mathrm{Tr}_{\psi^j\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}} = \sum_{\alpha\in\mathfrak{R}}(2\pi\mathrm{i})je^{j\alpha}\alpha = \sum_{\alpha\in\mathfrak{R}_+}(2\pi\mathrm{i})j(e^{j\alpha}-e^{-j\alpha})\alpha,$$

由此可得（取 $b=1$），

$$v_t = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}t}\sum_{\alpha\in\mathfrak{R}_+}\sum_{j>0}\frac{(-t)^j}{j}(e^{j\alpha}-e^{-j\alpha})\alpha = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}t}\sum_{\alpha\in\mathfrak{R}_+}\log\Big(\frac{1+te^{-\alpha}}{1+te^{\alpha}}\Big)\alpha.$$

References

1. A. Alekseev、A. Malkin 和 E. Meinrenken, *Lie group valued moment maps*, J. Differential Geom. 48 (1998), 445–495。2. A. Alekseev、E. Meinrenken 和 C. Woodward, *The Verlinde formulas as fixed point formulas*, J. Symplectic Geom. 1 (2001), 1–46。3. J. E. Andersen、S. Gukov 和 D. Pei, *The Verlinde formula for Higgs bundles*, arXiv:1608.01761。4. M. F. Atiyah, *Power operations in K-theory*, Quart. J. Math. 17 (1966), no. 1, 165–193。5. M. F. Atiyah 和 R. Bott, *The Yang-Mills equations over Riemann surfaces*, Phil. Trans. R. Soc. Lond. 308 (1983), 523–615。6. M. F. Atiyah、N.J. Hitchin 和 I. M. Singer, *Self-duality in four-dimensional riemannian geometry*, Proc. Roy. Soc. Lon. A. 362 (1978), 425–461。7. M. F. Atiyah、V.K. Patodi 和 I. M. Singer, *Spectral asymmetry and Riemannian geometry. I*, Math. Proc. Cam. Phil. Soc., vol. 77, 1975, pp. 43–69。8. M. F. Atiyah 和 I. M. Singer, *The index of elliptic operators: IV*, Annals Math. (1971), 119–138。9. , *Dirac operators coupled to vector potentials*, Proc. Nat. Acad. Sci. 81 (1984), no. 8, 2597–2600。10. W. Ballmann 和 C. B¨ar, *Boundary value problems for elliptic differential operators of first order*, Surv. Diff. Geom. (H.-D. Cao 和 S.-T. Yau, eds.), vol. 17, Int. Press., 2012, pp. 1–78。11. , *Guide to elliptic boundary value problems for Dirac-type operators*, Arbeitstagung Bonn 2013, Springer, 2016, pp. 43–80。12. N. Berline、E. Getzler 和 M. Vergne, *Heat kernels and Dirac operators*, Springer-Verlag, 1992。13. J.M. Bismut 和 J. Cheeger, *Families index for manifolds with boundary superconnections and cones. I.* , , , J. of *Families of manifolds with boundary and Dirac operators* **89** 1990 2, 313 363 Func. Anal. ( ), no. – 。14. J.M. Bismut 和 F. Labourie, *Symplectic geometry and the Verlinde formulas*, Surveys in differential geometry: differential geometry inspired by string theory, Int. Press, Boston, MA, 1999, pp. 97–311。15. X. Dai 和 W. Zhang, *Splitting of the family index*, Comm. Math. Phys. 182 (1996), no. 2, 303–317。16. S.K. Donaldson, *Boundary value problems for Yang–Mills fields*, J. Geom. Phys. 8 (1992), no. 1-4, 89–122。17. S.K. Donaldson 和 P.B. Kronheimer, *The geometry of four-manifolds*, Oxford university press, 1997。18. D. Freed, *The geometry of Dirac operators*, Lecture notes (1987)。19. S. Gukov 和 D. Pei, *Equivariant Verlinde formula from fivebranes and vortices*, Comm. Math. Phys. 355 (2017), no. 1, 1–50。20. D. Halpern-Leistner, *The equivariant Verlinde formula on the moduli of Higgs bundles*, arXiv:1608.01754。21. L. Jeffrey 和 F. Kirwan, *Intersection theory on moduli spaces of holomorphic vector bundles of arbitrary rank on a Riemann surface* **148** 1998 109 196 , Annals of Math. ( ), – 。22. B. Kostant 和 S. Kumar, *T-equivariant K-theory of generalized flag varieties*, J. Diff. Geom. 32 (1990), no. 2, 549–603。23. T. Lam、A. Schilling 和 M. Shimozono, *K-theory Schubert calculus of the affine Grassmannian*, Compos. Math. 146 (2010), no. 4, 811–852。24. Y. Loizides, *Index formula for Hamiltonian loop group spaces*, arXiv:2106.03813。25. Y. Loizides, *Geometric K-homology and the Freed-Hopkins-Teleman theorem*, J. Noncomm. Geom. 16 (2022), 77–118。26. Y. Loizides、E. Meinrenken 和 Y. Song, *Spinor modules for Hamiltonian loop group spaces*, J. Symplectic Geom. 18 (2020), 889–937。27. Y. Loizides 和 Y. Song, *Quantization of Hamiltonian loop group spaces*, Mathematische Annalen 374 (2019), 681–722。28. , *Norm-square localization and the quantization of Hamiltonian loop group spaces*, J. Func. Anal. 278 (2020)。29. E. Meinrenken, *Witten's formulas for intersection pairings on moduli spaces of flat G-bundles*, Advances in Mathematics 197 (2005), 140–197。30. E. Meinrenken, *Twisted K-homology and group-valued moment maps*, Int. Math. Res. Not. 2012 (2012), 4563–4618。31. E. Meinrenken 和 C. Woodward, *Hamiltonian loop group actions and Verlinde factorization*, J. Diff. Geom. 50 (1998), 417–469。

32.E. Meinrenken 和C. Woodward, *Cobordism for Hamiltonian loop group actions and flat connections on the punctured two-sphere* **231** 1999 1, 133 168 , 《数学杂志》（），第 –期。33.R.B.Melrose 和 P.Piazza, *Families of Dirac operators, boundaries and the b-calculus*, 《微分几何杂志》46（1997），第1 期，99–180。34. J.Mickelsson, *String quantization on group manifolds and the holomorphic geometry of $diffs^1/s^1$*, 《数学物理通讯》112（1987），653–661。35. P.-E.Paradan 和M.Vergne, *Witten non abelian localization for equivariant K-theory and the $[Q,R]=0$* , , 《美国数学学会回忆录》，。36.A. Pressley 和G.B.Segal, *Loop groups*, 克拉伦登出版社，1986。37. T.R.Ramadas、I. Singer 和 J. Weitsman, *Some comments on Chern-Simons gauge theory*, 《数学物理通讯》126（1989），409–420。38.G.Segal, *Fredholm complexes*, 《数学季刊》21（1970），第 4期，385–402。39.C. Teleman, *K-theory of the moduli space of bundles on a surface and deformations of the Verlinde algebra*, 《伦敦数学学会讲义系列》308（2004），358–378。40. C.Teleman 和 C.Woodward, *The index formula for the moduli of G-bundles on a curve*, 《数学年刊》（2009），495–527。41. O. Trapeznikova, *Tautological bundles on parabolic moduli spaces: Euler characteristics and Hecke correspondences* 2209 15600 2022 , arXiv: 。（）。42.42. D.R. Wilkins, *Slice theorems in gauge theory*, 《爱尔兰皇家科学院学报 A 辑：数学、物理科学》，第 89A 卷，1989 年，第 13–34 页。43. E. Witten, *Two dimensional gauge theories revisited*, 《几何物理学杂志》9（1992），303–368。44. C. Woodward, *The Yang-Mills heat flow on the moduli space of framed bundles on a surface*, 《美国数学杂志》128（2006），第 2 期，311–359。

Department of Mathematical Sciences, George Mason University
Email address: yloizide@gmu.edu