arXiv:2304.04965v1 [math.RA] 11 Apr 2023

近二部 Leonard 对

野村一正和保罗·特威利格

2023年4月12日

摘要。

令 $\mathbb{F}$ 表示一个域，并令 V 表示一个在 $\mathbb{F}$ 上有限正维的向量空间。V上的一个 Leonard 对是一个由可对角化的$\mathbb{F}$-线性映射 $A: V \to V$和 $A^*: V \to V$组成的有序对，并且每个映射在另一个映射的一个特征基下都以不可约三对角的方式作用。令 A, A^* 表示 V 上的一个 Leonard 对。令 $\{v_i\}_{i=0}^d$ 表示 A^* 的一个特征基，在该特征基下 A 以不可约三对角的方式作用。对 $0 \le i \le d$，定义一个$\mathbb{F}$-线性映射 E_i^*: $V \to V$，使得当 $j \neq i$ ($0 \le j \le d$) 时，$E_i^* v_i = v_i$ 且 $E_i^* v_j = 0$。映射 $F = \sum_{i=0}^d E_i^* A E_i^*$ 称为 A 的平坦部分。当 $F = 0$ 时，Leonard 对 A, A^* 是二部的。当对 $A - F, A^*$ 是 V 上的一个Leonard 对时，Leonard 对 A, A^* 称为近二部。在这种情况下，Leonard 对 $A - F, A^*$ 是二部的，并称为 A, A^* 的二部收缩。令 B, B^* 表示 V 上的一个二部 Leonard对。所谓 B, B^* 的近二分扩张，是指 V 上的一个近二部 Leonard 对，其二部收缩为 B, B^*。在本文中，我们有三个目标。假设 $\mathbb{F}$ 是代数闭的，(i) 我们对 $\mathbb{F}$上的近二部Leonard 对按同构进行分类；(ii)对于每个 $\mathbb{F}$ 上的近二部 Leonard对，我们描述其二部收缩；(iii)对于每个 $\mathbb{F}$ 上的二部 Leonard 对，我们描述其近二分扩张。我们的分类 (i) 总结如下。我们确定了两个 Leonard 对族，分别称为 Krawtchouk 型和对偶 q-Krawtchouk 型。对偶 q-Krawtchouk 型的 Leonard 对称为强化的，如果对于 $1 \le i \le d-1$有 $q^{2i} \neq -1$。当 A 的平坦部分是单位映射的标量倍时，Leonard对 A, A^* 称为本质二部。假设 $\mathbb{F}$ 是代数闭的，我们证明： $\mathbb{F}$ 上满足 $d \ge 3$ 的Leonard 对 A, A^* 是近二部的，当且仅当以下至少一个条件成立：(i) A, A^* 是本质二部的；(ii) A, A^* 具有强化的对偶 q-Krawtchouk 型；(iii) A, A^* 具有 Krawtchouk 型。

K关键词。二部的，Leonard 对，Leonard 系统，近二部，三对角矩阵

美国数学学会学科分类。05E30，15A21，15B10

1 引言

Leonard 对这一概念由第二作者 [46] 提出。我们回顾 Leonard 对的定义。如果方阵的每个非零元素都位于对角线、次对角线或超对角线上，则称该方阵为三对角矩阵。如果三对角矩阵的次对角线上的每个元素都非零，并且

超对角线上的每个元素都非零，则称该三对角矩阵为不可约。设 $\mathbb{F}$ 表示一个域，设 V 表示一个在 $\mathbb{F}$ 上维数有限且为正的向量空间。在 V 上的 Leonard 对是由两个 $\mathbb{F}$-线性映射 $A: V \to V$ 和 $A^*: V \to V$ 组成的有序对，并满足以下条件 (i) 和 (ii)：

(i)存在 V 的一个基，使得表示 A 的矩阵是不可约三对角的，而表示 A^* 的矩阵是对角的；(ii)存在 V 的一个基，使得表示 A^* 的矩阵是不可约三对角的，而表示 A 的矩阵是对角的。

在这种情况下，我们称 A, A^* 位于 $\mathbb{F}$之上。我们称 $d =$维 $V - 1$ 为 A, A^* 的直径。

文献中有两类著名的 Leonard 对，分别称为二部的和近似二部的（见 [16, 小节 1]）。本文中，我们引入一类称为近二部的 Leonard 对。我们稍后将描述这类 Leonard 对。为说明缘由，我们先介绍一些历史背景。

Leonard 对源于对 Q-多项式距离正则图和正交多项式的研究。Delsarte在 [20] 证明了，一个 Q-多项式距离正则图产生两个正交多项式序列，它们通过如今称为 Askey-Wilson 对偶性的关系相联系。受Delsarte 结果的启发，Leonard 在 [32] 证明了，q-Racah多项式给出了满足 Askey-Wilson对偶性的最一般正交多项式系统。Bannai 和 Ito在 [5, 定理5.1] 中改进了 Leonard 的定理，处理了所有极限情形。这个版本给出了满足Askey-Wilson 对偶性的正交多项式系统的完整分类。它表明，满足 Askey-Wilson对偶性的正交多项式系统都来自Askey 方案的终止分支，该分支由 q-Racah、 q-Hahn、对偶 q-Hahn、 q-Krawtchouk、对偶q-Krawtchouk、量子 q-Krawtchouk、仿射 q-Krawtchouk、Racah、Hahn、Krawtchouk、Bannai/Ito 以及孤儿多项式组成。Leonard 定理 [5, 定理5.1] 相当复杂。Leonard 对的概念在 [46] 中被引入，以简化并阐明Leonard 的定理。Leonard 系统 [46, 定义1.4] 是一个 Leonard对 A、 A^*，连同 A 和 A^*的特征值的适当排序。Leonard系统在同构意义下于 [46, 定理1.9]中完成了分类。这个结果给出了 Leonard 定理的一个线性代数版本。

我们刚刚提到 Leonard 对与正交多项式的关系。Leonard 对在数学和物理的许多其他领域也有应用，例如李理论[3, 21, 22, 25, 29, 37], 量子群 [1, 2, 13–15, 26–28], 自旋模型 [17–19, 41], 双仿射Hecke代数 [23, 24, 30, 31, 38], 偏序集 [33, 34, 44, 52], 以及统计力学中的精确可解模型 [6–12]。有关 Leonard 对及相关主题的更多信息，请参见 [4, 37, 39, 40, 42, 43, 45, 47, 51]。

现在我们描述近二部Leonard 对。设 A, A^* 表示 V 上的一个Leonard 对。设 $\{v_i\}_{i=0}^d$ 表示 V 的一个基，使得表示 A 的矩阵是不可约三对角的，而表示 A^* 的矩阵是对角的。对 $0 \le i \le d$ 定义一个$\mathbb{F}$-线性映射 $E_i^*: V \to V$，使得 $E_i^* v_i = v_i$ 且对于 $j \ne i$ $(0 \le j \le d)$有 $E_i^* v_j = 0$。定义$F = \sum_{i=0}^d E_i^* A E_i^*$。我们称 F 为 A 的平坦部分。当且仅当 $F = 0$时，Leonard对 A, A^* 是二部的。当对$A - F, A^*$ 是 V 上的一个 Leonard对时，称 Leonard 对 A, A^* 为近二部的。在这种情况下，Leonard 对 $A - F, A^*$ 是二部的，并且

称为 A, A^*的二部收缩。令 B, B^* 表示 V 上的一个二部 Leonard 对。我们将 B, B^* 的近二分扩张定义为 V 上的一个近二部 Leonard 对，其二部收缩为 B, B^*。

In 在本文中，我们有三个主要目标。假设 $\mathbb{F}$ 是代数闭的 d,

(i) 我们对 $\mathbb{F}$ 上的近二部 Leonard 对进行同构分类;

(ii) 对于每个 $\mathbb{F}$ 上的近二部 Leonard 对，我们描述其二部收缩 n;

(iii) 对于每个 $\mathbb{F}$ 上的二部 Leonard 对，我们描述其近二部扩张。

现在我们概述目标 (i) 的分类结果。在此概述中，我们假设 $d \geq 3$; 情形 $d \leq 2$ 略有不同，将在论文正文中给出。我们将指出 Leonard 对的两个族，分别称为 Krawtchouk 型和对偶 q-Krawtchouk 型。这两类分别与 Krawtchouk 多项式和对偶 q-Krawtchouk 多项式相关。对偶 q-Krawtchouk 型的 Leonard 对称为强化的，当且仅当 $q^{2i} \neq -1$ 对于 $1 \leq i \leq d-1$ 成立。若平坦部分 F 是 A 的恒等算子的标量倍数，则称 Leonard 对 A, A^* 是本质二部的。假设 $\mathbb{F}$ 是代数闭的，我们将证明， $\mathbb{F}$ 上的 Leonard 对 A, A^* 是近二部的，当且仅当以下 (i)–(iii) 至少有一项成立:

(i) A, A^* 是本质二部的;

(ii) A, A^* 具有强化的对偶 q-Krawtchouk 型;

(iii) A, A^* 具有 Krawtchouk 型。

论文组织如下。在第 2节中，我们规定记号，并回顾一些线性代数的基本材料。在第 3节中，我们回顾一些关于 Leonard 对的材料。在第 4节中，我们为 Leonard 对引入 TD/D序列的概念。在第 5节中，我们引入 Leonard 对的规范化 TD/D形式。在第 6 节中，我们回顾二部Leonard 对和本质二部 Leonard对。在第7节中，我们引入 Leonard 对的平坦部分 F。在第 8 节中，我们为 Leonard对引入近二部性质。在第 9 节中，我们对直径为 $d = 1$的近二部 Leonard对进行分类。在第 10 节和第 11 节中，我们对直径为 $d = 2$ 的近二部Leonard 对进行分类。从第 12 节开始，我们假设 $d \geq 3$。在第 12节中，我们回顾 Leonard对的类型。在第 13–16 节中，我们回顾Leonard 对的主数据。在第17 节中，我们根据主数据刻画本质二部 Leonard 对。在第 18 节中，我们根据主数据刻画二部 Leonard 对。在第 19 节中，我们描述对偶 q-Krawtchouk Leonard 对。在第 20节中，我们描述 KrawtchoukLeonard对。在第 21 节中，我们描述既是二部的且具有对偶 q-Krawtchouk型的 Leonard 对。在第22 节中，我们描述既是二部的且具有Kra wtchouk型的Leonard 对。在第23 节中，我们确定对偶 q-Krawtchouk 型的近二部 Leonard 对，并描述其二部收缩。在第 24节中，我们证明 Krawtchouk 型的Leonard 对是近二部的，并描述其二部收缩。在第 25节中，我们对近二部 Leonard 对进行分类。在第26节和第 27 节中，我们描述二部 Leonard 对的近二部扩张。

2 预备知识

现在开始正式论证。在本文中，始终采用以下记号。令 $\mathbb{F}$ 表示一个域。本文中讨论的每个向量空间和代数都定义在$\mathbb{F}$上。固定一个整数 $d \geq 0$。记号 $\{x_i\}_{i=0}^d$表示序列 $x_0, x_1, \ldots, x_d$。令 Mat$_{d+1}(\mathbb{F})$表示由所有元素均属于 $\mathbb{F}$的 $d+1$ 乘 $d+1$ 矩阵构成的代数。我们用 0, 1, . . . , d 为行和列编号。Mat$_{d+1}(\mathbb{F})$ 的单位元记为 I。令 $\mathbb{F}^{d+1}$ 表示由 $d+1$ 行、所有元素均属于 $\mathbb{F}$的列向量构成的向量空间。我们用 0, 1, . . . , d为行编号。代数 Mat$_{d+1}(\mathbb{F})$通过左乘作用于 $\mathbb{F}^{d+1}$ 。在本文中， V 表示一个维数为 $d+1$的向量空间。令 End(V)表示由 $\mathbb{F}$-线性映射 $V \to V$构成的代数。End(V)的单位元记为 I。我们回顾一下， V的每个基 $\{v_i\}_{i=0}^d$ 如何给出一个代数同构 End(V) $\to$ Mat$_{d+1}(\mathbb{F})$。对于 $A \in$ End(V) 和 $M \in$ Mat$_{d+1}(\mathbb{F})$，当 M, A 关于$\{v_i\}_{i=0}^d$ 的表示满足 $Av_j = \sum_{i=0}^d M_{i,j} v_i$ （对 $0 \leq j \leq d$成立）时，我们称 M 是 A 关于$\{v_i\}_{i=0}^d$ 的表示。该同构将 A 映到 Mat$_{d+1}(\mathbb{F})$中唯一一个关于$\{v_i\}_{i=0}^d$表示 A 的矩阵。令 $A \in$ End(V)。我们称 A的一个特征子空间为满足 $W \neq 0$ 且存在 $\theta \in \mathbb{F}$ 使得 $W = \{v \in V \mid Av = \theta v\}$的子空间 $W \subseteq V$； 此时， θ 是与 W相关联的 A 的特征值。当 V 由 A的特征子空间张成时，我们称 A 可对角化。当 A可对角化且其特征子空间的维数均为一时，我们称 A无重数。假设 A 无重数。令 $\{\theta_i\}_{i=0}^d$表示 A的特征值的一种排序。对于 $0 \leq i \leq d$ ，令 V_i 表示与 θ_i相关联的A 的特征子空间，并定义 $E_i \in$ End(V)，使得($E_i - I$)$V_i = 0$ 且 $E_i V_j = 0$ （对$j \neq i$ ($0 \leq j \leq d$)成立）。我们称 E_i 为与 θ_i相关联的 A 的本原幂等元。我们有 (i) $E_i E_j = \delta_{i,j} E_i$ ($0 \leq i, j \leq d$); (ii) $I = \sum_{i=0}^d E_i$; (iii) $AE_i = \theta_i E_i = E_i A$ ($0 \leq i \leq d$); (iv)$A = \sum_{i=0}^d \theta_i E_i$; (v) $V_i = E_i V$ ($0 \leq i \leq d$); (vi) 秩(E_i) $= 1$; (vii) tr(E_i) $= 1$ ($0 \leq i \leq d$)，其中 tr 表示迹。此外

$$E_i = \prod_{\substack{0 \leq j \leq d \\ j \neq i}} \frac{A - \theta_j I}{\theta_i - \theta_j} \qquad (0 \leq i \leq d).$$

令 $\langle A \rangle$ 表示由 A生成的 End(V)的子代数。代数 $\langle A \rangle$ 是交换的。元素 $\{A^i\}_{i=0}^d$ （分别为 $\{E_i\}_{i=0}^d$）构成 $\langle A \rangle$ 的基。

引理2.1假设 $A \in$ End(V)是无重数的，其本原幂等元为$\{E_i\}_{i=0}^d$。那么对于 $H \in$ End(V)，以下 (i)–(iii) 等价：

(i) $H \in \langle A \rangle$； (ii) H 与 A可交换；
(iii) 对于 $0 \leq i \leq d$， H 与 E_i 可交换。

证明。这是对如下事实的另一种表述：矩阵 $M \in$Mat$_{d+1}(\mathbb{F})$ 与 Mat$_{d+1}(\mathbb{F})$ 中的每个对角矩阵都可交换，当且仅当 M 为对角矩阵。□

如果一个方阵的每个非零元素都位于对角线、次对角线或超对角线上，则称其为三对角矩阵。如果一个三对角矩阵的次对角线上的每个元素都非零，且超对角线上的每个元素也都非零，则称其为不可约矩阵。

引理 2.2 设 $T \in \mathrm{Mat}_{d+1}(\mathbb{F})$ 不可约三对角。则以下条件等价：

(i) T 可对角化；

(ii) T 无重数。

证明. (i) $\Rightarrow$ (ii) 注意到 $I, T, T^2, \ldots, T^d$ 线性无关。因此 T 的最小多项式次数为 $d+1$。所以 T 有 $d+1$ 个互不相同的特征值。

(ii) $\Rightarrow$(i) 显然。 □

对于代数中的元素 r, s，记号 $[r, s]$ 表示交换子 $rs - sr$。

3 Leonard 对

在本小节中，我们回顾Leonard 对的概念。回忆向量空间 V 的维数为 $d+1$。

定义 3.1（参见 [46, 定义 1.1]。）我们称 V 上的有序对 A, A^* 为 End(V) 中满足以下 (i) 和 (ii) 的元素：

(i) 存在 V 的一组基，关于该基，表示 A 的矩阵是不可约三对角矩阵，表示 A^* 的矩阵是对角矩阵；(ii) 存在 V 的一组基，关于该基，表示 A^* 的矩阵是不可约三对角矩阵，表示 A 的矩阵是对角矩阵。

我们称 d 为 A, A^*的直径。我们称 A, A^* 是定义在 $\mathbb{F}$上的。我们称 V为底层向量空间。

注3.2 按照一种常见的记号约定， A^* 表示 A的共轭转置。我们不采用这一约定。在一个 Leonard 对 A 中，元素 A 和 A^* 任意，但须满足上述 (i) 和 (ii)。

我们回顾 Leonard 对的同构概念。考虑向量空间 V上的 Leonard 对 A, A^* 以及向量空间 $\mathcal{V}$上的 Leonard 对 B, B^*。我们所说的从 A, A^* 到 B, B^* 的 Leonard 对的同构，是指一个 $\mathbb{F}$-线性双射 $S\colon V \to \mathcal{V}$，满足 $SA = BS$ 且 $SA^* = B^*S$。当存在从 A, A^* 到 B, B^* 的 Leonard 对的同构时，我们称 A, A^* 和 B, B^* 同构。

引理 3.3（参见 [36, 引理 5.1]。）对于 V 上的 Leonard 对 A, A^*，以及满足 $\xi\xi^* \neq 0$的 $\mathbb{F}$ 中的标量 $\xi, \xi^*, \zeta, \zeta^*$，有序对 $\xi A + \zeta I, \xi^* A^* + \zeta^* I$ 是 V上的 Leonard 对。

引理 3.4（参见 [46, 引理 3.1]。）对于 V上的 Leonard 对 A, A^*， A 和 A^* 均为无重数的。

引理 3.5（见 [46, 引理 3.3]）。设 A、A^* 表示 V上的一个 Leonard 对。则不存在 V的子空间 W，使得 $AW \subseteq W$、 $A^*W \subseteq W$、 $W \neq 0$、 $W \neq V$。

设 A、A^* 表示 V上的一个 Leonard 对。若存在 V 的一组基，使得关于该基，表示 A的矩阵为 diag$(\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_d)$，且表示 A^*的矩阵为不可约三对角矩阵，则称 A 的特征值的一个排序 $\{\theta_i\}_{i=0}^d$为标准排序。对于 A的特征值的一个标准排序 $\{\theta_i\}_{i=0}^d$，排序 $\{\theta_{d-i}\}_{i=0}^d$是标准的，且不存在其他标准排序。A^* 的特征值的标准排序类似地定义。

我们回顾参数数组的概念。

引理 3.6（参见 [46, 定理 3.2]。）设 A, A^* 表示 V 上的一个 Leonard 对。设 $\{\theta_i\}_{i=0}^d$（分别为 $\{\theta_i^*\}_{i=0}^d$）表示 A （分别为 A^*）的特征值的一种标准排序。则存在唯一的标量序列 $\{\varphi_i\}_{i=1}^d$，其属于 $\mathbb{F}$，并具有以下性质：存在 V 的一个基，使得相对于此基，表示 A 和 A^* 的矩阵为

$$A: \begin{pmatrix} \theta_0 & & & & \mathbf{0} \\ 1 & \theta_1 & & & \\ & 1 & \theta_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & 1 & \theta_d \end{pmatrix}, \qquad A^*: \begin{pmatrix} \theta_0^* & \varphi_1 & & & \mathbf{0} \\ & \theta_1^* & \varphi_2 & & \\ & & \theta_1^* & \ddots & \\ & & & \ddots & \varphi_d \\ \mathbf{0} & & & & \theta_d^* \end{pmatrix}.$$

定义 3.7 参照引理 3.6，称序列 $\{\varphi_i\}_{i=1}^d$ 为 A, A^* 关于标准排序 $\{\theta_i\}_{i=0}^d$ 和 $\{\theta_i^*\}_{i=0}^d$ 的第一分裂序列。

引理 3.8 设 A, A^* 表示 V 上的一个 Leonard 对。设 $\{\theta_i\}_{i=0}^d$ （分别为 $\{\theta_i^*\}_{i=0}^d$）表示 A （分别为 A^*）的特征值的一种标准排序。则存在唯一的标量序列 $\{\phi_i\}_{i=1}^d$，其属于 $\mathbb{F}$，并具有以下性质：存在 V 的一个基，使得相对于此基，表示 A 和 A^* 的矩阵为

$$A: \begin{pmatrix} \theta_d & & & & \mathbf{0} \\ 1 & \theta_{d-1} & & & \\ & 1 & \theta_{d-2} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & 1 & \theta_0 \end{pmatrix}, \qquad A^*: \begin{pmatrix} \theta_0^* & \phi_1 & & & \mathbf{0} \\ & \theta_1^* & \phi_2 & & \\ & & \theta_1^* & \ddots & \\ & & & \ddots & \phi_d \\ \mathbf{0} & & & & \theta_d^* \end{pmatrix}.$$

证明。将引理 3.6 应用于 A、A^* 的特征值序列 $\{\theta_{d-i}\}_{i=0}^d$。□

定义 3.9 参见引理 3.8，序列 $\{\phi_i\}_{i=1}^d$ 称为相对于标准排序 $\{\theta_i\}_{i=0}^d$ 和 $\{\theta_i^*\}_{i=0}^d$ 的 A、A^* 的第二分裂序列。

定义 3.10（参见 [48, 定义 11.1]。）设 A、A^* 表示作用在 V 上的 Leonard 对。我们将 A、A^* 的参数数组定义为一个序列

$$(\{\theta_i\}_{i=0}^d;\{\theta_i^*\}_{i=0}^d;\{\varphi_i\}_{i=1}^d;\{\phi_i\}_{i=1}^d), \tag{1}$$

其中，$\{\theta_i\}_{i=0}^d$（分别地，$\{\theta_i^*\}_{i=0}^d$）是 A（分别地，A^*）的特征值的一个标准排序，而 $\{\varphi_i\}_{i=1}^d$（分别地，$\{\phi_i\}_{i=1}^d$）是相对于标准排序 $\{\theta_i\}_{i=0}^d$ 和 $\{\theta_i^*\}_{i=0}^d$的第一分裂序列（分别地，第二分裂序列）。

我们讨论参数数组的唯一性。

引理 3.11（见 [46, 定理 1.11]。）设 A, A^* 表示 V上的一个 Leonard 对，且 l et

$$(\{\theta_i\}_{i=0}^d;\{\theta_i^*\}_{i=0}^d;\{\varphi_i\}_{i=1}^d;\{\phi_i\}_{i=1}^d)$$

表示 A, A^*的一个参数数组。那么下列每一个都是 A, A^*的一个参数数组：

$$\begin{aligned}
&(\{\theta_i\}_{i=0}^d;\{\theta_i^*\}_{i=0}^d;\{\varphi_i\}_{i=1}^d;\{\phi_i\}_{i=1}^d),\\
&(\{\theta_i\}_{i=0}^d;\{\theta_{d-i}^*\}_{i=0}^d;\{\phi_{d-i+1}\}_{i=1}^d;\{\varphi_{d-i+1}\}_{i=1}^d),\\
&(\{\theta_{d-i}\}_{i=0}^d;\{\theta_i^*\}_{i=0}^d;\{\phi_i\}_{i=1}^d;\{\varphi_i\}_{i=1}^d),\\
&(\{\theta_{d-i}\}_{i=0}^d;\{\theta_{d-i}^*\}_{i=0}^d;\{\varphi_{d-i+1}\}_{i=1}^d;\{\phi_{d-i+1}\}_{i=1}^d).
\end{aligned}$$

此外，A, A^* 没有其他参数数组。

我们提及参数数组的一项重要意义。

引理3.12（参见 [46, 定理 1.9]。）在 $\mathbb{F}$ 上的两个 Leonard 对同构，当且仅当它们具有共同的参数数组。

定义 3.13 我们将 $\mathbb{F}$上的参数数组定义为 $\mathbb{F}$上的 Leonard 对的参数数组。

在下一个结果中，我们对 $\mathbb{F}$ 上的参数数组进行分类。

引理 3.14（参见 [46, 定理 1.9]。）考虑一个序列

$$(\{\theta_i\}_{i=0}^d;\{\theta_i^*\}_{i=0}^d;\{\varphi_i\}_{i=1}^d;\{\phi_i\}_{i=1}^d) \tag{2}$$

在 $\mathbb{F}$ 中的标量。该序列是 $\mathbb{F}$ 上的参数数组，当且仅当满足以下条件 (i)–(v)：

(i) $\theta_i \neq \theta_j$, $\theta_i^* \neq \theta_j^*$若 $i \neq j$ $(0 \leq i, j \leq d)$; (ii) $\varphi_i \neq 0$, $\phi_i \neq 0$ $(1 \leq i \leq d)$; (iii) $\varphi_i = \phi_1 \sum_{\ell=0}^{i-1} \frac{\theta_\ell - \theta_{d-\ell}}{\theta_0 - \theta_d} + (\theta_i^* - \theta_0^*)($ $\theta_{i-1} - \theta_d)$ $(1 \leq i \leq d)$; (iv) $\phi_i = \varphi_1 \sum_{\ell=0}^{i-1} \frac{\theta_\ell - \theta_{d-\ell}}{\theta_0 - \theta_d} + (\theta_i^* - \theta_0^*)($ $\theta_{d-i+1} - \theta_0)$ $(1 \leq i \leq d)$; (v) 这些表达式

$$\frac{\theta_{i-2} - \theta_{i+1}}{\theta_{i-1} - \theta_i}, \qquad \frac{\theta_{i-2}^* - \theta_{i+1}^*}{\theta_{i-1}^* - \theta_i^*} \tag{3}$$

相等且不依赖于 i，适用于 $2 \leq i \leq d-1$。

引理3.15（参见 [36, 引理 6.1]。）令 A、A^* 表示在 $\mathbb{F}$ 上的一个具有参数数组的 Leonard 对

$$(\{\theta_i\}_{i=0}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d; \{\varphi_i\}_{i=1}^d; \{\phi_i\}_{i=1}^d).$$

那么，对于 $\mathbb{F}$ 中满足 $\xi\xi^* \neq 0$ 的标量 ξ、ξ^*、ζ、ζ^*，序列

$$(\{\xi\theta_i + \zeta\}_{i=0}^d; \{\xi^*\theta_i^* + \zeta^*\}_{i=0}^d; \{\xi\xi^*\varphi_i\}_{i=1}^d, \{\xi\xi^*\phi_i\}_{i=1}^d)$$

是 Leonard 对 $\xi A + \zeta I$、$\xi^* A^* + \zeta^* I$ 的一个参数数组。

定义 3.16 设 $(\{\theta_i\}_{i=0}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d; \{\varphi_i\}_{i=1}^d; \{\phi_i\}_{i=1}^d)$ 表示 $\mathbb{F}$ 上满足 $d \geq 3$ 的一个参数数组。定义 $\beta \in \mathbb{F}$，使得 $\beta + 1$ 等于式 (3) 中两个分式的共同值。我们称 β 为该参数数组的基本常数。

定义 3.17 设 A、A^* 表示 $\mathbb{F}$ 上直径为 $d \geq 3$ 的一个 Leonard 对。A、A^* 的参数数组具有相同的基本常数 β；我们称 β 为 A、A^* 的基本常数。

4 Leonard 对的 TD/D 序列

在本小节中，我们介绍 Leonard 对的 TD/D 序列这一概念。为说明这一概念的动机，我们对 Leonard 对作一些说明。当一个不可约三对角矩阵的次对角线元素全为 1 时，称其为规范化的。

引理 4.1 对于 $A \in \mathrm{End}(V)$ 和 V 的一组基 $\{u_i\}_{i=0}^d$，假设相对于 $\{u_i\}_{i=0}^d$，表示 A 的矩阵 B 是不可约三对角的。那么对于 $\mathbb{F}$ 中的非零标量 $\{\alpha_i\}_{i=0}^d$，以下条件等价：

(i) 相对于 V 的基 $\{\alpha_i u_i\}_{i=0}^d$，表示 A 的矩阵是标准化不可约三对角矩阵；

(ii) $\alpha_i/\alpha_{i-1} = B_{i,i-1}$ 对于 $1 \leq i \leq d$.

证明。根据线性代数，A 关于基 $\{\alpha_i u_i\}_{i=0}^d$的表示矩阵等于 $D^{-1}BD$，其中 $D = \mathrm{diag}(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_d)$。结论由此可直接推出。□

命题 4.2 设 A, A^* 是 V 上的 Leonard 对。设 $\{\theta_i^*\}_{i=0}^d$ 是 A^*的特征值的一种标准排序。那么存在唯一的标量序列 $(\{a_i\}_{i=0}^d; \{x_i\}_{i=1}^d)$，其中标量属于 $\mathbb{F}$，且满足以下性质：存在 V 的一组基，使得 A 和 A^* 的表示矩阵为

$$A: \begin{pmatrix} a_0 & x_1 & & & \mathbf{0} \\ 1 & a_1 & x_2 & & \\ & 1 & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot & x_d \\ \mathbf{0} & & & 1 & a_d \end{pmatrix}, \qquad A^*: \operatorname{diag}(\theta_0^*, \theta_1^*, \ldots, \theta_d^*). \tag{4}$$

此外，对于 $1 \le i \le d$， $x_i \neq 0$ 。

证明。我们先证明该序列存在。根据定义 3.1(ii)以及标准排序的定义，存在 V 的一个基 $\{u_i\}_{i=0}^d$ ，使得表示 A 的矩阵是不可约三对角矩阵，而表示 A^* 的矩阵等于 diag$(\theta_0^*, \theta_1^*, \ldots, \theta_d^*)$。利用引理 4.1 调整基 $\{u_i\}_{i=0}^d$ 后，表示 A 的矩阵是标准化不可约三对角矩阵，而表示 A^* 的矩阵为 diag$(\theta_0^*, \theta_1^*, \ldots, \theta_d^*)$。由此我们证明了该序列存在。接下来证明该序列唯一。假设另有 V 的一个基 $\{v_i\}_{i=0}^d$ ，使得表示 A 的矩阵是标准化不可约三对角矩阵，而表示 A^* 的矩阵为 diag$(\theta_0^*, \theta_1^*, \ldots, \theta_d^*)$。注意，对于 $0 \le i \le d$， u_i 和 v_i 各自都是 A^* 的特征向量，对应的特征值为 θ_i^*。因此存在非零标量 $\alpha_i \in \mathbb{F}$ ，使得 $v_i = \alpha_i u_i$。根据引理 4.1 和构造，对于 $1 \le i \le d$，有 $\alpha_i/\alpha_{i-1} = 1$ 。因此，对于 $0 \le i \le d$， α_i 与 i 无关。由此，对于 $0 \le i \le d$，有 $v_i = \alpha_0 u_i$ 。这意味着，相对于 $\{u_i\}_{i=0}^d$ ，表示 A 的矩阵等于相对于 $\{v_i\}_{i=0}^d$，表示 A 的矩阵。因此该序列唯一。根据引理 3.5，对于 $1 \le i \le d$ ，有 $x_i \neq 0$ 。□

定义 4.3 设 A， A^* 表示作用在 V 上的一个 Leonard 对。我们将 A， A^* 的一个 TD/D 序列定义为序列

$$(\{a_i\}_{i=0}^d; \{x_i\}_{i=1}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d), \tag{5}$$

其中， $\{\theta_i^*\}_{i=0}^d$ 是 A^* 的特征值的一个标准排序，而（$\{a_i\}_{i=0}^d$； $\{x_i\}_{i=1}^d$）是命题 4.2 中相应的标量序列。

我们说明 TD/D 序列的唯一性。

引理 4.4 设 A， A^* 表示作用在 V 上的一个 Leonard 对。设

$$(\{a_i\}_{i=0}^d; \{x_i\}_{i=1}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d)$$

表示 A， A^* 的一个 TD/D 序列。则

$$(\{a_{d-i}\}_{i=0}^d; \{x_{d-i+1}\}_{i=1}^d; \{\theta_{d-i}^*\}_{i=0}^d) \tag{6}$$

是 A， A^* 的一个 TD/D 序列，并且 A， A^* 没有其他 TD/D 序列。

Proof. B由命题 4.2，存在 V 的一组基 $\{u_i\}_{i=0}^d$ ，使得相对于该基， the

表示 A 和 A^* 的矩阵如 (4) 所示。定义

$$v_i = x_d x_{d-1} \cdots x_{d-i+1} u_{d-i} \qquad (0 \le i \le d).$$

序列 $\{v_i\}_{i=0}^d$ 是 V 的一个基，相对于该基，表示 A 和A^* 的矩阵是

$$A: \begin{pmatrix} a_d & x_d & & & \mathbf{0} \\ 1 & a_{d-1} & x_{d-1} & & \\ & 1 & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot & x_1 \\ \mathbf{0} & & & & 1 & a_0 \end{pmatrix}, \qquad A^*: \ \mathrm{diag}(\theta_d^*, \theta_{d-1}^*, \ldots, \theta_0^*)。$$

由引理 3.4下方的段落可知，排序 $\{\theta_{d-i}^*\}_{i=0}^d$ 是标准的。根据这些评论和定义 4.3，序列 (6) 是 A、 A^*的 TD/D 序列。唯一性由引理 3.4 下方的段落得出。□

我们提及 TD/D 序列的一个重要意义。

命题4.5在 $\mathbb{F}$ 上的两个Leonard 对是同构的，当且仅当它们共有一个 TD/D 序列。

证明。令 A, A^* 表示 V上的一个Leonard 对，并令 B, B^* 表示向量空间 $\mathcal{V}$ 上的一个Leonard对。首先假设 A, A^* 和 B, B^* 同构。显然，它们具有相同的 TD/D 序列。接下来假设 A, A^*和 B, B^* 具有一个公共的TD/D序列（$\{a_i\}_{i=0}^d; \{x_i\}_{i=1}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d$）。根据定义 4.3， $\{\theta_i^*\}_{i=0}^d$ 是 A^* 和 B^*的特征值的标准排序。此外，存在 V 的一个基 $\{u_i\}_{i=0}^d$ （相应地，存在 $\mathcal{V}$的一个基 $\{v_i\}_{i=0}^d$ ），使得相对于该基，表示 A （相应地， B）的矩阵等于(4)左侧的矩阵，并且表示 A^* （相应地， B^*）的矩阵等于(4) 右侧的矩阵。根据线性代数，存在一个 $\mathbb{F}$-线性双射 $V \to \mathcal{V}$ ，其将 $u_i \mapsto v_i$ 发送到 $0 \le i \le d$。按照构造，该双射是从 A, A^* 到 B, B^* 的 Leonard 对的同构。□

定义 4.6 我们所说的 $\mathbb{F}$ 上的 TD/D 序列，是指 Leonard 对在 $\mathbb{F}$ 上的 TD/D 序列。

定义 4.7 考虑一个参数数组

$$(\{\theta_i\}_{i=0}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d; \{\varphi_i\}_{i=1}^d; \{\phi_i\}_{i=1}^d) \tag{7}$$

在 $\mathbb{F}$ 上，以及一个 TD/D 序列

$$(\{a_i\}_{i=0}^d; \{x_i\}_{i=1}^d; \{\theta_i^{*\prime}\}_{i=0}^d) \tag{8}$$

在 $\mathbb{F}$ 上。若 $\theta_i^* = \theta_i^{*\prime}$ 对 $0 \le i \le d$ 成立，且存在一个 $\mathbb{F}$ 上的 Leonard 对 A, A^* ，其参数数组为 (7)，TD/D 序列为 (8)，则称 (7) 与 (8) 相对应。

引理 4.8 参见定义 4.6，假设 (7) 与 (8) 相对应。那么 $\sum_{i=0}^{d}\theta_i = \sum_{i=0}^{d} a_i$。

证明。设矩阵 A、A^* 如（4）所示。一方面，我们有 $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=0}^{d} a_i$。另一方面，$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=0}^{d}\theta_i$，因为 A 的特征值为 $\{\theta_i\}_{i=0}^{d}$。结论成立。□

引理 4.9 以下结论成立。

(i) 考虑 $\mathbb{F}$ 上的一个参数数组：

$$(\{\theta_i\}_{i=0}^{d}; \{\theta_i^*\}_{i=0}^{d}; \{\varphi_i\}_{i=1}^{d}; \{\phi_i\}_{i=1}^{d}). \tag{9}$$

那么，存在唯一一个 $\mathbb{F}$ 上与（9）对应的 TD/D 序列。

(ii) 考虑 $\mathbb{F}$ 上的一个 TD/D 序列：

$$(\{a_i\}_{i=0}^{d}; \{x_i\}_{i=1}^{d}; \{\theta_i^*\}_{i=0}^{d}). \tag{10}$$

那么，至少存在一个 $\mathbb{F}$ 上与（10）对应的参数数组。如果

$$(\{\theta_i\}_{i=0}^{d}; \{\theta_i^*\}_{i=0}^{d}; \{\varphi_i\}_{i=1}^{d}; \{\phi_i\}_{i=1}^{d}) \tag{11}$$

是 $\mathbb{F}$ 上对应于 (10) 的一个参数数组，那么以下也是

$$(\{\theta_{d-i}\}_{i=0}^{d}; \{\theta_i^*\}_{i=0}^{d}; \{\phi_i\}_{i=1}^{d}; \{\varphi_i\}_{i=1}^{d}),$$

并且不存在其他 $\mathbb{F}$ 上对应于 (10) 的参数数组。

证明。（i）由引理 3.12，存在唯一一个参数数组为 (9) 的 $\mathbb{F}$ 上 Leonard 对 A, A^*，且在同构意义下唯一。由引理 4.4 和定义 4.7，存在唯一一个对应于 A, A^* 的 $\mathbb{F}$ 上 TD/D 序列。由这些说明可得结论。

（ii）由命题 4.5，存在唯一一个具有 TD/D 序列 (10) 的$\mathbb{F}$ 上 Leonard 对 A, A^*，且在同构意义下唯一。引理 3.11 给出了 A, A^* 的四个参数数组。在这四个参数数组中，只有第一个和第三个涉及 A^* 的特征值，且其标准顺序与 (10) 相同。由这些说明可得结论。□

为准备接下来的结果，我们定义一些记号。暂时令 $\{\theta_i^*\}_{i=0}^{d}$ 表示 $\mathbb{F}$ 中的任意标量序列。对于 $0 \le i \le d$，定义不定元 λ 中的下列多项式：

$$\tau_i^*(\lambda) = (\lambda-\theta_0^*)(\lambda-\theta_1^*)\cdots(\lambda-\theta_{i-1}^*),$$
$$\eta_i^*(\lambda) = (\lambda-\theta_d^*)(\lambda-\theta_{d-1}^*)\cdots(\lambda-\theta_{d-i+1}^*).$$

引理 4.10 假设 $d \geq 1$。考虑 $\mathbb{F}$ 中的一个标量序列:

$$(\{a_i\}_{i=0}^d; \{x_i\}_{i=1}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d). \tag{12}$$

该序列 ce (12) 是 $\mathbb{F}$ 上的 TD/D 序列，当且仅当存在一个参数数组

$$(\{\theta_i\}_{i=0}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d; \{\varphi_i\}_{i=1}^d; \{\phi_i\}_{i=1}^d) \tag{13}$$

在 $\mathbb{F}$ 上，使得

$$a_0 = \theta_0 + \frac{\varphi_1}{\theta_0^* - \theta_1^*}, \tag{14}$$

$$a_i = \theta_i + \frac{\varphi_i}{\theta_i^* - \theta_{i-1}^*} + \frac{\varphi_{i+1}}{\theta_i^* - \theta_{i+1}^*} \qquad (1 \leq i \leq d-1), \tag{15}$$

$$a_d = \theta_d + \frac{\varphi_d}{\theta_d^* - \theta_{d-1}^*}, \tag{16}$$

$$x_i = \varphi_i \phi_i \frac{\tau_{i-1}^*(\theta_{i-1}^*)\eta_{d-i}^*(\theta_i^*)}{\tau_i^*(\theta_i^*)\eta_{d-i+1}^*(\theta_{i-1}^*)} \qquad (1 \leq i \leq d). \tag{17}$$

在此情况下，TD/D 序列 (12) 与参数数组 (13) 相对应。

证明。首先假设序列 (12) 是在 $\mathbb{F}$ 上的 TD/D 序列。根据定义 4.6，存在一个在 $\mathbb{F}$ 上、具有 TD/D 序列 (12) 的 Leonard 对 A, A^*。于是由 [49, 定理 17.8、17.9] 可知，(14)–(17) 成立。我们已证明了一个方向的结论。关于逆向，假设存在一个在 $\mathbb{F}$ 上、满足 (14)–(17) 的参数数组 (13)。令 A, A^* 表示一个在 $\mathbb{F}$ 上、具有参数数组 (13) 的 Leonard 对。由 (14)–(17) 以及 [49, 定理 17.8、17.9], 可知，序列 (12) 是 A, A^* 的 TD/D 序列。最后一个断言由我们上面的讨论可得。□

引理 4.11 假设 $d \geq 1$。考虑 $\mathbb{F}$ 中的一个标量序列:

$$(\{a_i\}_{i=0}^d; \{x_i\}_{i=1}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d). \tag{18}$$

序列 (18) 是 $\mathbb{F}$ 上的 TD/D 序列，当且仅当存在一个参数数组

$$(\{\theta_i\}_{i=0}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d; \{\varphi_i\}_{i=1}^d; \{\phi_i\}_{i=1}^d) \tag{19}$$

在 $\mathbb{F}$ 上，使得

$$a_0 = \theta_d + \frac{\phi_1}{\theta_0^* - \theta_1^*}, \tag{20}$$

$$a_i = \theta_{d-i} + \frac{\phi_i}{\theta_i^* - \theta_{i-1}^*} + \frac{\phi_{i+1}}{\theta_i^* - \theta_{i+1}^*} \qquad (1 \leq i \leq d-1), \tag{21}$$

$$a_d = \theta_0 + \frac{\phi_d}{\theta_d^* - \theta_{d-1}^*}, \tag{22}$$

$$x_i = \varphi_i \phi_i \frac{\tau_{i-1}^*(\theta_{i-1}^*)\eta_{d-i}^*(\theta_i^*)}{\tau_i^*(\theta_i^*)\eta_{d-i+1}^*(\theta_{i-1}^*)} \qquad (1 \leq i \leq d). \tag{23}$$

在此情形下，TD/D 序列 (18) 与参数数组 (19) 相对应。

证明。根据引理 4.9，$(\{\theta_{d-i}\}_{i=0}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d; \{\phi_i\}_{i=1}^d; \{\varphi_i\}_{i=1}^d)$ 是 $\mathbb{F}$ 上对应于 (18) 的参数数组。现在将引理 4.10 应用于此参数数组。□

引理 4.12 设 A、A^* 是 $\mathbb{F}$ 上具有 TD/D 序列的 Leonard 对

$$(\{a_i\}_{i=0}^d; \{x_i\}_{i=1}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d).$$

那么，对于 $\mathbb{F}$ 中满足 $\xi\xi^* \neq 0$ 的标量 $\xi, \zeta, \xi^*, \zeta^*$，序列

$$(\{\xi a_i + \zeta\}_{i=0}^d; \{\xi^2 x_i\}_{i=1}^d; \{\xi^* \theta_i^* + \zeta^*\}_{i=0}^d)$$

是 Leonard 对 $\xi A + \zeta I, \xi^* A^* + \zeta^* I$ 的一个 TD/D 序列。

证明。由引理 3.15 和 4.10 可得。 □

在本小节余下部分，我们采用以下记号。令 A, A^* 表示 V 上具有 TD/D 序列 $(\{a_i\}_{i=0}^d; \{x_i\}_{i=1}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d)$ 的 Leonard 对。对于 $0 \leq i \leq d$，令 E_i^* 表示 A^* 中对应于 θ_i^* 的本原幂等元。

引理 4.13（参见 [49, 定义 7.1、引理 7.5]。）对于 $0 \leq i \leq d$，以下结论成立：

(i) $E_i^* A E_i^* = a_i E_i^*$；
(ii) $a_i = \mathrm{tr}(A E_i^*)$。

引理 4.14（参见 [49, 定义 7.1，引理 7.5]。）对于 $1 \leq i \leq d$，以下结论成立：

(i) $E_i^* A E_{i-1}^* A E_i^* = x_i E_i^*$；
(ii) $x_i = \mathrm{tr}(E_i^* A E_{i-1}^* A)$。

5 规范化 TD/D 形式中的 Leonard 对

设 A, A^* 表示 $\mathbb{F}$ 上的一个 Leonard 对。本小节将介绍一种针对 A, A^* 的规范化形式，称为规范化 TD/D 形式。我们证明，A, A^* 的规范化 TD/D 形式与 A, A^* 的 TD/D 序列之间存在双射。

定义 5.1 若直径为 d 的 $\mathbb{F}$ 上的 Leonard 对 A, A^* 满足以下 (i)–(iii)，则称其具有规范化 TD/D 形式：

(i) A, A^* 的底层向量空间为 $\mathbb{F}^{d+1}$；

(ii) A 是 $\mathrm{Mat}_{d+1}(\mathbb{F})$ 中的归一化不可约三对角矩阵；

(iii) A^* 是 $\mathrm{Mat}_{d+1}(\mathbb{F})$ 中的对角矩阵。

引理 5.2 设 Leonard 对 A, A^* 定义在 $\mathbb{F}$ 上，且处于规范化 TD/D 形式：

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & x_1 & & & \mathbf{0} \\ 1 & a_1 & x_2 & & \\ & 1 & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot & x_d \\ \mathbf{0} & & & & 1 & a_d \end{pmatrix}, \qquad A^* = \mathrm{diag}(\theta_0^*, \theta_1^*, \ldots, \theta_d^*).$$

则以下结论成立。

(i) $(\{a_i\}_{i=0}^d; \{x_i\}_{i=1}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d)$是 A, A^*的 TD/D 序列。(ii) 对于 $0 \le i \le d$，令 E_i^* 表示 A^* 关于 θ_i^*的本原幂等元。然后 E_i^* 的 (i,i)-项为 1，所有其他项均为 0。

证明。(i) 注意到，根据引理 3.4 下方的段落，$\{\theta_i^*\}_{i=0}^d$ 是 A^* 的特征值的标准排序。现在由定义 4.3 可得结论。(ii) 显然。

□

引理 5.3令 A， A^* 表示 V 上具有 TD/D 序列的 Leonard 对

$$(\{a_i\}_{i=0}^d; \{x_i\}_{i=1}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d).$$

然后是矩阵

$$\begin{pmatrix} a_0 & x_1 & & & \mathbf{0} \\ 1 & a_1 & x_2 & & \\ & 1 & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot & x_d \\ \mathbf{0} & & & & 1 & a_d \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{diag}(\theta_0^*, \theta_1^*, \ldots, \theta_d^*)$$

构成一个与 A、A^* 同构的规范化 TD/D 形式中的 Leonard 对。

证明。根据命题 4.2 和定义 4.3。 □

接下来我们给出引理 5.3 的一个变体。考虑 $\mathbb{F}$ 中的一个标量序列：

$$(\{a_i\}_{i=0}^d; \{x_i\}_{i=1}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d).$$

定义矩阵 $A, A^* \in \mathrm{Mat}_{d+1}(\mathbb{F})$ 如下：

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & x_1 & & & \mathbf{0} \\ 1 & a_1 & x_2 & & \\ & 1 & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot & x_d \\ \mathbf{0} & & & & 1 & a_d \end{pmatrix}, \qquad A^* = \mathrm{diag}(\theta_0^*, \theta_1^*, \ldots, \theta_d^*). \tag{24}$$

命题 5.4 使用上述记号，以下条件等价:

(i) $(\{a_i\}_{i=0}^d; \{x_i\}_{i=1}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d)$ 是 $\mathbb{F}$ 上的 TD/D 序列;

(ii) 矩阵 A, A^* 在 $\mathbb{F}$ 上构成一个 Leonard 对。

假设 (i)和(ii) 成立。那么 Leonard对 A, A^* 处于规范化 TD/D 形式，并且 $(\{a_i\}_{i=0}^d; \{x_i\}_{i=1}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d)$ 是 A, A^* 的 TD/D 序列。

证明。根据定义 4.3 和 5.1。 □

6 二部和本质二部 Leonard 对

在本小节中，我们首先回顾 Leonard对的二部条件和本质二部条件。然后，我们根据参数数组刻画这些条件。

在本小节中，令 A、 A^* 表示 $\mathbb{F}$ 上具有参数数组的 Leonard 对

$$(\{\theta_i\}_{i=0}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d; \{\varphi_i\}_{i=1}^d; \{\phi_i\}_{i=1}^d)$$

以及相应的 TD/D 序列

$$(\{a_i\}_{i=0}^d; \{x_i\}_{i=1}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d).$$

定义 6.1（见 [35, 小节 1]。）

（i）若对于 $0 \le i \le d$ 有 $a_i = 0$，则称 Leonard 对 A、 A^* 为二部的。

（ii）若对于 $0 \le i \le d$， a_i 与 i 无关，则称 Leonard 对 A、 A^* 为本质二部。

注 6.2 二部 Leonard 对是本质二部的。

注 6.3 假设 $d = 0$。那么 End(V) 中任意一对有序元素 A, A^* 都构成本质二部 Leonard 对。当且仅当 $A = 0$ 时，该 Leonard 对是二部的。

引理 6.4 以下结论成立。

(i) 假设 A、 A^* 是二部的。则对于 $\zeta \in \mathbb{F}$，Leonard对 $A + \zeta I$、 A^* 是本质二部的。(ii)假设 A、 A^* 是本质二部的。则存在唯一的 $\zeta \in \mathbb{F}$，使得 $A - \zeta I$、 A^* 是二部的。标量 ζ 等于 $\{a_i\}_{i=0}^d$ 的共同值。

证明。根据引理4.12和定义 6.1。 □

引理 6.5 假设 A, A^* 是二部的。那么对于 $\mathbb{F}$ 中满足 $\xi\xi^* \neq 0$ 的标量 ξ, ξ^*, ζ^*，Leonard 对 $\xi A, \xi^* A^* + \zeta^* I$ 是二部的。

证明。根据引理4.12和定义 6.1。 □

引理 6.6 假设 A, A^* 是本质二部的。那么对于 $\mathbb{F}$ 中满足 $\xi\xi^* \neq 0$ 的标量 $\xi, \zeta, \xi^*, \zeta^*$，Leonard 对 $\xi A + \zeta I, \xi^* A^* + \zeta^* I$ 是本质二部的。

证明. 由引理 4.12 和定义 6.1。 □

引理 6.7（参见 [35,定理 1.5]。）以下各项等价：

(i) A, A^* 是本质二部的；

(ii)对于 $0 \leq i \leq d$, $\theta_i + \theta_{d-i}$ 与 i 无关；对于 $1 \leq i \leq d$, $\theta_i + \theta_{d-i}$ 与 $\varphi_i + \phi_i = 0$ 无关。

假设 (i)、(ii) 成立。那么对于 $0 \leq i \leq d$, $\theta_i + \theta_{d-i} = 2\alpha$，其中 α 是 $\{a_i\}_{i=0}^d$ 的共同值。

引理 6.8 假设 $d \geq 1$。那么以下条件等价：

(i) A, A^* 是二部的；(ii) 对于 $0 \leq i \leq d$, $\theta_i + \theta_{d-i} = 0$，并且对于 $1 \leq i \leq d$, $\varphi_i + \phi_i = 0$。

证明。(i) $\Rightarrow$ (ii) 根据引理 6.7。

(ii) $\Rightarrow$ (i) 我们首先证明 Char($\mathbb{F}$) $\neq 2$。根据假设, $\theta_0 + \theta_d = 0$。由 $d \geq 1$ 和引理 3.14(i), $\theta_0 \neq \theta_d$。根据这些说明, $\theta_d \neq -\theta_d$。因此 Char($\mathbb{F}$) $\neq 2$。根据假设，对于 $0 \leq i \leq d$, $\theta_i + \theta_{d-i} = 0$。由此以及引理 6.7 的最后一个断言，对于 $0 \leq i \leq d$, $2a_i = 0$。由此以及 Char($\mathbb{F}$) $\neq 2$，我们得到对于 $0 \leq i \leq d$, $a_i = 0$。□

引理 6.9 假设 $d \geq 1$ 和 A、A^* 是本质二部的。那么 Char($\mathbb{F}$) $\neq 2$。

证明。反设 Char($\mathbb{F}$) $= 2$。根据引理 6.7, $\theta_0 + \theta_d = 0$。因此 $\theta_0 = \theta_d$，这与引理 3.14(i)矛盾。□

定义 6.10称 $\mathbb{F}$ 上的参数数组为二部的（分别为本质二部），当且仅当相应的 Leonard 对为二部的（分别为本质二部）。

7 Leonard 对的元素 F

在本小节中，令 A, A^* 表示 $\mathbb{F}$ 上具有 TD/D 序列的 Leonard 对。

$$(\{a_i\}_{i=0}^d; \{x_i\}_{i=1}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d). \tag{25}$$

我们引入 A的平坦部分 F。我们用 F来描述二部条件和本质二部条件。对于 $0 \le i \le d$，令 E_i^*表示与 θ_i^*相关联的 A^* 的本原幂等元。

定义 7.1 定义

$$F = \sum_{i=0}^{d} E_i^* A E_i^*.$$

我们称 A的平坦部分为 F。

注 7.2 元素 F与 A, A^*的 TD/D 序列 (25) 的选取无关。

引理 7.3 参见定义 7.1，$F = \sum_{i=0}^d a_i E_i^*$。

证明。根据引理4.13(i)和定义 7.1。 □

引理 7.4 假设 A, A^* 处于规范化 TD/D 形式：

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & x_1 & & & & \mathbf{0} \\ 1 & a_1 & x_2 & & & \\ & 1 & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & x_d \\ \mathbf{0} & & & & 1 & a_d \end{pmatrix}, \qquad A^* = \operatorname{diag}(\theta_0^*, \theta_1^*, \ldots, \theta_d^*).$$

Then

$$F = \operatorname{diag}(a_0, a_1, \ldots, a_d), \qquad A - F = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & & & & \mathbf{0} \\ 1 & 0 & x_2 & & & \\ & 1 & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & x_d \\ \mathbf{0} & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{26}$$

证明。由引理5.2(ii)和7.3。 □

引理 7.5令 F 表示 A 的平坦部分。则 F 与 A^* 对易。此外，$F \in \langle A^* \rangle$。

证明。由引理2.1和定义 7.1 可得。 □

引理 7.6 令 F 表示 A 的平坦部分。对于满足 $\xi\xi^* \neq 0$ 的 $\mathbb{F}$ 中的标量 ξ、ζ、ξ^*、ζ^*，考虑 Leonard 对 $\xi A+\zeta I$、$\xi^* A^*+\zeta^* I$。对于这个 Leonard 对，$\xi A+\zeta I$ 的平坦部分是 $\xi F+\zeta I$。

证明。根据定义 7.1。 □

引理 7.7 令 F 表示 A的平坦部分。那么以下结论成立:

(i) A, A^* 是二部的，当且仅当 $F=0$; (ii) A, A^* 是本质二部的，当且仅当 F 是 I的标量倍。

证明。根据定义 6.1 和引理 7.3。 □

8 近二部 Leonard 对

在本小节中，我们将介绍 Leonard 对的近二部条件。为说明这一条件的由来，我们先作如下观察。令 $\mathbb{O}$ 表示 $\mathbb{F}$中满足 $a_i=0$ （对 $0 \leq i \leq d$）的标量序列 $\{a_i\}_{i=0}^d$。

引理 8.1 设 A、A^* 表示 V 上的一个 Leonard 对，其 TD/D 序列

$$(\{a_i\}_{i=0}^d; \{x_i\}_{i=1}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d).$$

令 F 表示 A 的平坦部分，并假设 $A-F, A^*$ 是 V 上的 Leonard 对。那么 $A-F, A^*$ 具有 TD/D 序列。

$$(\mathbb{O}; \{x_i\}_{i=1}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d). \tag{27}$$

此外，Leonard 对 $A-F, A^*$ 是二部的。

证明。根据引理 5.3，我们可以假设 A, A^* 处于规范化TD/D形式，且 A, A^*如 (24)所示。根据引理7.4，F和 $A-F$如 (26) 所示。由此以及命题 5.4，$A-F, A^*$ 具有 TD/D序列 (27)。由此以及定义 6.1，Leonard 对 $A-F, A^*$是二部的。□

定义 8.2 设 A, A^* 表示 V 上的一个 Leonard 对，并设 F 表示 A 的平坦部分。当 $A-F, A^*$ 是 V 上的一个Leonard 对时，称 A, A^* 为近二部。在此情形下，我们称Leonard对 $A-F, A^*$ 为 A, A^* 的二部收缩。

注 8.3 本质二部 Leonard 对是近二部的。

注释8.4 假设 $d=0$。那么，End(V) 中的任意元素有序对都是近二部 Leonard 对。

定义 8.5 设 B, A^* 表示 V 上的二部 Leonard 对。我们将 B, A^* 的近二分扩张定义为 V 上的近二部 Leonard 对 A, A^*，其二部收缩等于 B, A^*。

在下一个结果中，我们将阐明定义 8.2 和 8.5。

引理 8.6 设 A, A^* 表示 V 上的一个 Leonard 对，并设 F 表示 A 的平坦部分。设 B, A^* 表示 V 上的一个二部 Leonard 对。则以下各项等价:

(i) B、A^* 是 A、A^*的二部收缩；(ii) A、A^* 是 B、A^*的近二分扩张；(iii) $A - F = B$。

证明. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) 由定义 8.2 和8.5。

(i) $\Leftrightarrow$ (iii) 根据定义 8.2。 □

在下一个结果中，我们给出引理 8.6 的一个变体，该变体不涉及 F。

引理 8.7 令 A, A^* 表示 V 上的一个 Leonard 对，并令 B, A^* 表示 V 上的一个二部 Leonard 对。则以下各项等价:

(i) B、A^* 是 A、A^*的二部收缩；(ii) A、A^* 是 B、A^*的近二分扩张；(iii) $[A, A^*] = [B, A^*]$。

证明. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) 根据引理8.6。

(i)、(ii) $\Rightarrow$ (iii) 根据引理8.6，$A - F = B$。根据引理 7.5，$[F, A^*] = 0$。根据这些评论，$[A, A^*] = [B, A^*]$。

(iii) $\Rightarrow$ (i), (ii) 对于 Leonard 对 A, A^*，令 $\{\theta_i^*\}_{i=0}^d$ 表示 A, A^* 的一个对偶特征值序列。对于 $0 \le i \le d$，令 E_i^* 表示与 θ_i^* 相关联的 A^* 的本原幂等元。根据定义 7.1，A 的平坦部分为 $F = \sum_{i=0}^d E_i^* A E_i^*$。根据引理 7.7(i)，并且由于 Leonard 对 B, A^* 是二部的，我们有 $E_i^* B E_i^* = 0$，其中 $0 \le i \le d$。根据假设，$[A, A^*] = [B, A^*]$，所以 $[A - B, A^*] = 0$。由此及引理 2.1，我们有 $A - B \in \langle A^* \rangle$。元素 $\{E_i^*\}_{i=0}^d$ 构成 $\langle A^* \rangle$ 的一组基，因此存在标量 $\{\alpha_i\}_{i=0}^d$ 属于 $\mathbb{F}$，使得 $A - B = \sum_{i=0}^d \alpha_i E_i^*$。现在我们可以进行论证

$$F = \sum_{i=0}^d E_i^* A E_i^* = \sum_{i=0}^d E_i^* (A - B) E_i^* = \sum_{i=0}^d \alpha_i E_i^* = A - B.$$

根据这些评论和引理 8.6，我们得到 (i)、(ii)。 □

引理 8.8 设 A、A^* 表示 V上的近二部Leonard对，其二部收缩为 B、A^*。设 ξ、ζ、ξ^*、ζ^* 表示 $\mathbb{F}$ 中满足 $\xi\xi^* \neq 0$ 的标量。则 Leonard 对

$$\xi A + \zeta I,\ \xi^* A^* + \zeta^* I \tag{28}$$

是近二部的，其二部收缩为 $\xi B, \xi^* A^* + \zeta^* I$。

证明。令 F 表示 A 的平坦部分。根据引理 8.6，我们有 $B = A - F$。对于Leonard对 (28)，根据引理 7.6，$\xi A + \zeta I$ 的平坦部分是 $\xi F + \zeta I$。我们有

$$\xi A + \zeta I - (\xi F + \zeta I) = \xi(A - F) = \xi B.$$

注意，根据引理6.5，ξB、$\xi^* A^* + \zeta^* I$是二部 Leonard 对，并且由于 B、A^*是二部 Leonard 对。根据这些评论

$$\xi A + \zeta I - (\xi F + \zeta I),\ \xi^* A^* + \zeta^* I$$

是一个Leonard对。根据这些评论和定义8.2，(28) 中的对是近二部的，其二部收缩为 ξB, $\xi^* A^* + \zeta^* I$。□

引理 8.9 设 A, A^* 表示 $\mathbb{F}$ 上处于规范化 TD/D 形式的近二部 Leonard 对。那么 A, A^* 的二部收缩处于规范化 TD/D 形式。

证明。由定义 5.1 和引理 7.4、8.1 可得。 □

引理 8.10 设 B, A^* 是 $\mathbb{F}$ 上处于规范化 TD/D 形式的二部 Leonard 对。那么 B, A^* 的每个近二分扩张都处于规范化 TD/D 形式。

证明。由定义 5.1 和引理 7.4、8.1 可得。 □

引理 8.11 参照引理 8.7，假设 A, A^* 和 B, A^* 都处于规范化 TD/D 形式。设

$$(\{\theta_i\}_{i=0}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d; \{\varphi_i\}_{i=1}^d; \{\phi_i\}_{i=1}^d), \qquad (\{\theta_i'\}_{i=0}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d; \{\varphi_i'\}_{i=1}^d; \{\phi_i'\}_{i=1}^d)$$

分别表示 A, A^* 和 B, A^* 的参数数组，并设

$$(\{a_i\}_{i=0}^d; \{x_i\}_{i=1}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d), \qquad (\mathbb{O}; \{x_i'\}_{i=1}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d)$$

分别表示 A, A^* 和 B, A^* 对应的 TD/D 序列。那么 (i)–(iii) 成立当且仅当

$$x_i = x_i' \qquad (1 \leq i \leq d) \tag{29}$$

当且仅当

$$\varphi_i \phi_i = \varphi_i' \phi_i' \qquad (1 \leq i \leq d). \tag{30}$$

证明。 By引理 7.4，$A^* = \mathrm{diag}(\theta_0^*, \theta_1^*, \ldots, \theta_d^*)$ 以及 $F = \mathrm{diag}(a_0, a_1, \ldots, a_d)$。此外根据

引理 7.4,

$$A=\begin{pmatrix} a_0 & x_1 & & & \mathbf{0} \\ 1 & a_1 & x_2 & & \\ & 1 & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot & x_d \\ \mathbf{0} & & & 1 & a_d \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 0 & x_1' & & & \mathbf{0} \\ 1 & 0 & x_2' & & \\ & 1 & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot & x_d' \\ \mathbf{0} & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

由此以及定义 8.2，若且唯若 $A-F=B$ 当且仅当 (29) 成立时，引理 8.7 中的等价条件 (i)–(iii) 成立。由 (17)，条件 (29) 等价于条件 (30)。□

引理 8.12 设 A, A^* 表示定义在 $\mathbb{F}$ 上、参数数组为

$$(\{\theta_i\}_{i=0}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d; \{\varphi_i\}_{i=1}^d; \{\phi_i\}_{i=1}^d). \tag{31}$$

Let

$$(\{\theta_i'\}_{i=0}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d; \{\varphi_i'\}_{i=1}^d; \{\phi_i'\}_{i=1}^d) \tag{32}$$

表示定义在 $\mathbb{F}$ 上的二部参数数组。那么以下条件等价 *:*

(i) $\varphi_i\phi_i=\varphi_i'\phi_i'$ 对于 $1\le i\le d$;

(ii) A, A^* 是近二部的，且其二部收缩的参数数组为 (3 2).

证明。由引理 5.3，不妨设 A, A^* 处于规范化 TD/D 形式。设 B, A^*表示一个处于规范化 TD/D 形式、参数数组为 (32) 的 Leonard 对。注意，B, A^* 是二部的。现在由引理 8.11 得出结论。□

引理 8.13 设 B、A^* 表示在 $\mathbb{F}$ 上具有参数数组的二部 Leonard 对

$$(\{\theta_i'\}_{i=0}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d; \{\varphi_i'\}_{i=1}^d; \{\phi_i'\}_{i=1}^d). \tag{33}$$

Let

$$(\{\theta_i\}_{i=0}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d; \{\varphi_i\}_{i=1}^d; \{\phi_i\}_{i=1}^d) \tag{34}$$

表示 $\mathbb{F}$ 上的一个参数数组。那么以下各项等价:

(i) $\varphi_i\phi_i=\varphi_i'\phi_i'$ 对于 $1\le i\le d$;

(ii) 存在 B、A^* 的一个近二分扩张，其参数数组为 (3 4).

证明。 根据引理5.3，我们可以假设 B, A^* 处于规范化 TD/D 形式。

(i) $\Rightarrow$ (ii) 按照 (14)–(16) 定义标量 $\{a_i\}_{i=0}^d$。按照 (17) 定义标量 $\{x_i\}_{i=1}^d$。如 (24) 所示定义 $A\in$ Mat$_{d+1}(\mathbb{F})$。根据引理 5.3， A, A^* 是一个 Leonard 对，其参数数组为 (34)。根据引理 8.11， A, A^* 是 B, A^* 的一个近二分扩张。

(ii) $\Rightarrow$ (i) 根据引理 8.11。 □

In 本文有三个主要目标。假设 $\mathbb{F}$ 在代数上接近 d,

(i)我们对 $\mathbb{F}$ 上的近二部 Leonard 对按同构进行分类;

(ii) 对于每个定义在 $\mathbb{F}$ 上的近二部 Leonard 对，我们描述其二部收缩;

(iii) 对于每个定义在 $\mathbb{F}$ 上的二部 Leonard 对，我们描述其近二部扩张。

引理 8.14 假设 $d \geq 1$ 且 Char($\mathbb{F}$) $= 2$。那么在 V 上不存在近二部 Leonard 对。

证明。由定义 8.2 和引理 6.9 可得。 □

鉴于引理 6.9、8.14，在本文余下部分我们假设

$$\mathrm{Char}(\mathbb{F}) \neq 2.$$

作为预备，我们先讨论 $d = 1$，并在此情形下假设 $\mathbb{F}$ 是任意的。稍后讨论 $d \geq 2$ 时，我们将假设 $\mathbb{F}$ 是代数闭的。

9 直径为一的近二部 Leonard 对

本小节中，我们对直径为一的近二部 Leonard 对按同构进行分类。此外，对于每个直径为一的近二部 Leonard 对，我们描述其二部收缩。对于每个直径为一的二部 Leonard 对，我们也描述其近二部扩张。

根据命题 5.4，我们考虑 $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{F})$ 中的以下矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & x_1 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & x_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^* = \begin{pmatrix} \theta_0^* & 0 \\ 0 & \theta_1^* \end{pmatrix}.$$

令 $f_A(\lambda)$ 表示 A 的特征多项式。由线性代数可知,

$$f_A(\lambda) = \lambda^2 - (a_0 + a_1)\lambda + a_0 a_1 - x_1.$$

令 θ_0, θ_1 表示 $f_A(\lambda)$ 的根。注意， θ_0, θ_1 属于 $\mathbb{F}$ 的代数闭包，且可能不属于 $\mathbb{F}$。我们有

$$(\theta_0 - \theta_1)^2 = (a_0 - a_1)^2 + 4x_1. \tag{35}$$

引理 9.1 对 A, A^* 而言，它们在 $\mathbb{F}$ 上构成 Leonard 对，当且仅当以下 (i) 和 (ii) 成立:

(i) $\theta_0, \theta_1 \in \mathbb{F}$;

(ii) $x_1 \neq 0$, $\theta_0^* \neq \theta_1^*$，以及

$$(a_0 - a_1)^2 + 4x_1 \neq 0. \tag{36}$$

证明。首先假设 A、A^* 是域 $\mathbb{F}$ 上的 Leonard 对。显然，(i) 成立。由引理 3.5，$x_1 \neq 0$。由引理 3.4， $\theta_0^* \neq \theta_1^*$。同样由引理 3.4， $\theta_0 \neq \theta_1$。由此以及 (35)，我们

得到 (36)。因此 (ii) 成立。接下来假设 (i) 和 (ii) 成立。由 (35) 和 (36)，有 $\theta_0 \neq \theta_1$，所以 A 是可对角化的。矩阵 A 和 A^* 没有公共特征子空间，因为 A 不是上三角或下三角矩阵。由于 A 是可对角化的，存在一个可逆矩阵 $P \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{F})$，使得 PAP^{-1} 为对角矩阵。矩阵 PA^*P^{-1} 的非对角元素均非零，因为 A 和 A^* 没有公共特征子空间。因此 PA^*P^{-1} 是不可约三对角矩阵。由上述说明，A、A^* 是域 $\mathbb{F}$ 上的 Leonard 对。□

令 $f_B(\lambda)$表示 B 的特征多项式。我们有 $f_B(\lambda) = \lambda^2 - x_1$。$f_B(\lambda)$的根是 $\pm\sqrt{x_1}$。我们指出，$\sqrt{x_1}$ 包含于$\mathbb{F}$的代数闭包中，并且可能不在 $\mathbb{F}$ 中。以下结果对直径为一的二部 Leonard 对进行了分类。

命题 9.2 对 B, A^* 在 $\mathbb{F}$ 上是 Leonard 对，当且仅当以下 (i) 和 (ii) 成立：

(i) $\sqrt{x_1} \in \mathbb{F}$；(ii) $x_1 \neq 0$ 和 $\theta_0^* \neq \theta_1^*$。

证明。由引理 9.1。□

以下结果对直径为一的近二部 Leonard 对进行了分类，并描述了其二部收缩。

命题 9.3 设对 A, A^* 是 $\mathbb{F}$ 上的 Leonard 对。则以下 (i) 和 (ii) 等价。

(i) A, A^* 是近二部的；

(ii) B, A^* 是 $\mathbb{F}$上的Leonard 对。

假设(i)和(ii)成立。那么 B、A^* 是 A、A^* 的二部收缩。

证明。显然。□

以下结果描述了在 $\mathbb{F}$ 上具有直径为一的给定二部 Leonard 对的近二部扩张。

命题 9.4 假设对 B, A^* is 是 $\mathbb{F}$ 上的 Leonard 对。那么以下 (i)–(iii) 等价：

(i) A, A^* 是 B, A^* 的近二分扩张；

(ii) A, A^* 是 $\mathbb{F}$ 上的 Leonard 对；

(iii) θ_0、$\theta_1 \in \mathbb{F}$ 以及 a_0、a_1、x_1 满足 (36)。

证明。(i) 与 (ii) 等价，这由引理 7.4 和 8.6 得出。(ii) 与 (iii) 等价，这由引理 9.1 和命题 9.2 得出。□

接下来，我们考察当 $\mathbb{F}$ 是代数闭域时，本小节前面的结果会变成什么。

引理 9.5 假设 $\mathbb{F}$ 是代数闭域。那么， A, A^* 是 $\mathbb{F}$ 上的 Leonard 对，当且仅当 $x_1 \neq 0$, $\theta_0^* \neq \theta_1^*$，并且

$$(a_0 - a_1)^2 + 4x_1 \neq 0.$$

命题 9.6假设 $\mathbb{F}$ 是代数闭的。那么， B、 A^* 在 $\mathbb{F}$ 上构成一个 Leonard 对，当且仅当 $x_1 \neq 0$ 且 $\theta_0^* \neq \theta_1^*$。

命题 9.7 假设 $\mathbb{F}$ 是代数闭的，并且对 A, A^* 是在 $\mathbb{F}$ 上的Leonard 对。那么 A, A^* 是近二部的，当且仅当 B, A^* 是在 $\mathbb{F}$ 上的Leonard 对。在此情况下， B, A^* 是 A, A^* 的二部收缩。

命题 9.8 假设 $\mathbb{F}$ 是代数闭的，并且 B、 A^* 是 $\mathbb{F}$ 上的 Leonard 对。那么， A、 A^* 是 B、 A^* 的近二分扩张，当且仅当 A、 A^* 是 $\mathbb{F}$ 上的 Leonard 对，当且仅当 a_0、 a_1、 x_1 满足 (36)。

在本文的其余部分，我们假设 $\mathbb{F}$ 是代数闭的。

TD/D 形式中直径二的 10 个 Leonard 对

在前一个小节中，我们描述了直径为一的近二部Leonard 对。在当前小节和下一小节中，我们描述直径二的近二部Leonard 对。考虑 $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{F})$ 中的以下矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & x_1 & 0 \\ 1 & a_1 & x_2 \\ 0 & 1 & a_2 \end{pmatrix}, \qquad A^* = \begin{pmatrix} \theta_0^* & 0 & 0 \\ 0 & \theta_1^* & 0 \\ 0 & 0 & \theta_2^* \end{pmatrix}.$$

在本小节中，我们证明以下结果。

命题 10.1 当且仅当 A、 A^* 是 $\mathbb{F}$ 上的 Leonard 对。

$$\theta_i^* \neq \theta_j^* \quad (0 \leq i < j \leq 2), \qquad x_i \neq 0 \quad (1 \leq i \leq 2), \tag{37}$$

$$\frac{x_1}{\theta_2^* - \theta_1^*} + \frac{x_2}{\theta_0^* - \theta_1^*} = \frac{a_0 - a_2}{(\theta_0^* - \theta_2^*)^2}\Big(a_0(\theta_0^* - \theta_1^*) + a_1(\theta_2^* - \theta_0^*) + a_2(\theta_1^* - \theta_2^*)\Big), \tag{38}$$

$$0 \neq \frac{x_1}{(\theta_2^* - \theta_1^*)^2} + \frac{x_2}{(\theta_0^* - \theta_1^*)^2} + \frac{(a_0 - a_2)^2}{(\theta_0^* - \theta_2^*)^2}, \tag{39}$$

$$0 \neq \frac{x_1}{\theta_2^* - \theta_1^*} - \frac{x_2}{\theta_0^* - \theta_1^*} + \frac{(a_0 - a_2)^2}{2(\theta_2^* - \theta_0^*)} + \frac{\big(a_0(\theta_0^* - \theta_1^*) + a_1(\theta_2^* - \theta_0^*) + a_2(\theta_1^* - \theta_2^*)\big)^2}{2(\theta_2^* - \theta_0^*)^3}. \tag{40}$$

引理 10.2 假设 A、 A^* 是 $\mathbb{F}$上的一个 Leonard 对，并且 $\{\theta_i\}_{i=0}^2$ 是 A 的特征值的标准排序。那么

$$\theta_1 = \frac{a_0(\theta_0^* - \theta_1^*) + a_2(\theta_1^* - \theta_2^*)}{\theta_0^* - \theta_2^*}. \tag{41}$$

证明。由引理 3.14(iii),

$$\varphi_2 = \phi_1 + (\theta_2^* - \theta_0^*)(\theta_1 - \theta_2).$$

在该方程中，利用 (16) 和 (20) 消去 φ_2 和 ϕ_1 ，并解出 θ_1。□

引理 10.3 假设 A、A^* 是 $\mathbb{F}$ 上的 Leonard 对。则 (38) 成立 .

证明。由(17),

$$x_1 = -\varphi_1\phi_1\frac{\theta_1^* - \theta_2^*}{(\theta_0^* - \theta_1^*)^2(\theta_0^* - \theta_2^*)}, \qquad x_2 = -\varphi_2\phi_2\frac{\theta_0^* - \theta_1^*}{(\theta_0^* - \theta_2^*)(\theta_1^* - \theta_2^*)^2}.$$

In 这些方程，利用 (14)、(16)、(20)、(22) 消去 $\varphi_1, \varphi_2, \phi_1, \phi_2$ 。这给出

$$x_1 = -\frac{(a_0 - \theta_0)(a_0 - \theta_2)(\theta_1^* - \theta_2^*)}{\theta_0^* - \theta_2^*}, \qquad x_2 = -\frac{(a_2 - \theta_0)(a_2 - \theta_2)(\theta_0^* - \theta_1^*)}{\theta_0^* - \theta_2^*}.$$

So

$$\frac{x_1}{\theta_1^* - \theta_2^*} - \frac{x_2}{\theta_0^* - \theta_1^*} = -\frac{(a_0 - \theta_0)(a_0 - \theta_2) - (a_2 - \theta_0)(a_2 - \theta_2)}{\theta_0^* - \theta_2^*}. \tag{42}$$

考虑 A的迹,

$$\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 = a_0 + a_1 + a_2.$$

由此以及 (41)，可得

$$\begin{aligned}(a_0 - \theta_0)(a_0 - \theta_2) - (a_2 - \theta_0)(a_2 - \theta_2)& \\ = \frac{(a_0 - a_2)\big(a_0(\theta_0^* - \theta_1^*) + a_1(\theta_2^* - \theta_0^*) + a_2(\theta_1^* - \theta_2^*)\big)}{\theta_0^* - \theta_2^*}&.\end{aligned}$$

由此以及 (42)，我们得到 (38)。 □

引理 10.4 假设 A、A^* 是 $\mathbb{F}$上的一个 Leonard 对。令 $\{\theta_i\}_{i=0}^2$ 表示 A 的特征值的一个标准排序。然后

$$\theta_0 + \theta_2 = \frac{a_0(\theta_1^* - \theta_2^*) + a_1(\theta_0^* - \theta_2^*) + a_2(\theta_0^* - \theta_1^*)}{\theta_0^* - \theta_2^*}, \tag{43}$$

$$\theta_0\theta_2 = \frac{a_1\big(a_0(\theta_1^* - \theta_2^*) + a_2(\theta_0^* - \theta_1^*)\big)}{\theta_0^* - \theta_2^*} + \frac{(a_0 - a_2)^2(\theta_1^* - \theta_0^*)(\theta_1^* - \theta_2^*)}{(\theta_0^* - \theta_2^*)^2} - x_1 - x_2. \tag{44}$$

证明。令 $f(\lambda)$ 表示 A 的特征多项式。则

$$\begin{aligned}f(\lambda) = \lambda^3 - (a_0 + a_1 + a_2)\lambda^2 + (a_0a_1 + a_0a_2 + a_1a_2 - x_1 - x_2)\lambda& \\ + a_0x_2 + a_2x_1 - a_0a_1a_2.&\end{aligned}$$

我们有 $f(\lambda) = (\lambda - \theta_0)(\lambda - \theta_1)(\lambda - \theta_2)$. 比较前面的两个方程，我们得到

$$\theta_0 + \theta_2 = a_0 + a_1 + a_2 - \theta_1, \tag{45}$$

$$\theta_0\theta_2 = a_0a_1 + a_0a_2 + a_1a_2 - x_1 - x_2 - \theta_1(\theta_0 + \theta_2). \tag{46}$$

在（45）中，利用（41）消去 θ_1 ，得到（43）。在（46）中，利用（41）消去 θ_1 ，并利用（38）化简所得结果，得到（44）。□

引理 10.5 假设 A, A^* 是 $\mathbb{F}$上的一个 Leonard 对。令 $\{\theta_i\}_{i=0}^2$ 表示 A 的特征值的标准排序。那么

$$\frac{(\theta_1-\theta_0)(\theta_1-\theta_2)}{(\theta_1^*-\theta_0^*)(\theta_1^*-\theta_2^*)} = \frac{x_1}{(\theta_2^*-\theta_1^*)^2} + \frac{x_2}{(\theta_0^*-\theta_1^*)^2} + \frac{(a_0-a_2)^2}{(\theta_0^*-\theta_2^*)^2},$$
$$\frac{(\theta_0-\theta_2)^2}{2(\theta_2^*-\theta_0^*)} = \frac{x_1}{\theta_2^*-\theta_1^*} - \frac{x_2}{\theta_0^*-\theta_1^*} + \frac{(a_0-a_2)^2}{2(\theta_2^*-\theta_0^*)} + \frac{\left(a_0(\theta_0^*-\theta_1^*)+a_1(\theta_2^*-\theta_0^*)+a_2(\theta_1^*-\theta_2^*)\right)^2}{2(\theta_2^*-\theta_0^*)^3}.$$

证明。我们有

$$(\theta_1-\theta_0)(\theta_1-\theta_2) = \theta_1^2 - (\theta_0+\theta_2)\theta_1 + \theta_0\theta_2,$$
$$(\theta_0-\theta_2)^2 = (\theta_0+\theta_2)^2 - 4\theta_0\theta_2.$$

在这些方程的右端，利用(41)、(43)、(44) 消去 θ_1、 $\theta_0+\theta_2$、 $\theta_0\theta_2$，并利用 (38) 对结果进行化简。□

命题 10.1 的证明。首先假设 A、 A^* 是 $\mathbb{F}$ 上的 Leonard 对。显然，(37) 成立。由引理 10.3，(38) 成立。标量 $\{\theta_i\}_{i=0}^2$ 两两不同。由此以及引理 10.5，我们得到 (39) 和 (40)。

接下来假设 (37)–(40) 成立。定义满足 (41)、(43) 的标量 $\{\theta_i\}_{i=0}^2$，定义标量 (44).

$$\varphi_1 = (a_0-\theta_0)(\theta_0^*-\theta_1^*), \qquad \varphi_2 = (a_2-\theta_2)(\theta_2^*-\theta_1^*), \tag{47}$$
$$\phi_1 = (a_0-\theta_2)(\theta_0^*-\theta_1^*), \qquad \phi_2 = (a_2-\theta_0)(\theta_2^*-\theta_1^*). \tag{48}$$

我们的首要目标是证明该序列

$$(\{\theta_i\}_{i=0}^2; \{\theta_i^*\}_{i=0}^2; \{\varphi_i\}_{i=1}^2; \{\phi_i\}_{i=1}^2) \tag{49}$$

是 $\mathbb{F}$ 上的参数数组。我们有

$$(a_0-\theta_0)(a_0-\theta_2) = a_0^2 - (\theta_0+\theta_2)a_0 + \theta_0\theta_2.$$

在这个方程中，利用 (43) 和 (44) 消去因子 $\theta_0+\theta_2$ 和 $\theta_0\theta_2$。然后在所得结果中利用 (38) 消去 x_2，得到

$$(a_0-\theta_0)(a_0-\theta_2) = -\frac{\theta_0^*-\theta_2^*}{\theta_1^*-\theta_2^*}x_1. \tag{50}$$

同理可得

$$(a_2-\theta_0)(a_2-\theta_2) = -\frac{\theta_0^*-\theta_2^*}{\theta_0^*-\theta_1^*}x_2. \tag{51}$$

我们证明了

$$x_1 = -\varphi_1\phi_1\frac{\theta_1^*-\theta_2^*}{(\theta_0^*-\theta_1^*)^2(\theta_0^*-\theta_2^*)}, \tag{52}$$
$$x_2 = -\varphi_2\phi_2\frac{\theta_0^*-\theta_1^*}{(\theta_0^*-\theta_2^*)(\theta_1^*-\theta_2^*)^2}. \tag{53}$$

在 (52) 的右边，使用 (47)、(48) 消去 φ_1, ϕ_1 ，再利用 (50) 化简结果，得到 (52)。(53) 同理可得。现在我们验证引理 3.14 中的条件 (i)–(v)。我们假设 $d = 2$。首先验证条件 (i) 成立。由 (37) 可知，标量 $\{\theta_i^*\}_{i=0}^2$ 两两不同。仿照引理 10.5 的证明，我们得到引理 10.5 中的两个方程。由此以及 (39)、(40)，我们发现标量 $\{\theta_i\}_{i=0}^2$ 两两不同。根据以上说明，条件 (i) 成立。由 (52)、(53) 可知条件 (ii) 成立。由 (41)、(47)、(48) 可知条件 (iii) 和 (iv) 成立。条件 (v) 显然成立。我们已经证明 (49) 是一个定义在 $\mathbb{F}$ 上的参数数组。我们的下一个目标是证明序列

$$(\{a_i\}_{i=0}^2; \{x_i\}_{i=1}^2; \{\theta_i^*\}_{i=0}^2) \tag{54}$$

是一个 TD/D 序列。为此，我们验证 (14)–(17)。根据 (47) 和 (48)，(14)、(16) 成立。利用 (47)，我们得到

$$\frac{\varphi_1}{\theta_1^* - \theta_0^*} + \frac{\varphi_2}{\theta_1^* - \theta_2^*} = \theta_0 + \theta_2 - a_0 - a_2.$$

在此行中，使用 $\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 = a_0 + a_1 + a_2$ 以得到 (15)。根据 (52) 和 (53)，等式 (17) 成立。我们已经证明，序列 (54) 是一个 TD/D 序列。现在根据命题 5.4， A， A^* 是 $\mathbb{F}$ 上的 Leonard 对。□

11 直径二的近二部 Leonard 对的分类

在本小节中，我们对直径二的近二部 Leonard 对按同构进行分类。此外，对于每个直径二的近二部Leonard 对，我们描述其二部收缩。另外，对于每个直径二的二部 Leonard 对，我们描述其近二部扩张。

鉴于命题 5.4，我们考虑 $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{F})$ 中的以下矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & x_1 & 0 \\ 1 & a_1 & x_2 \\ 0 & 1 & a_2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & 0 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^* = \begin{pmatrix} \theta_0^* & 0 & 0 \\ 0 & \theta_1^* & 0 \\ 0 & 0 & \theta_2^* \end{pmatrix}.$$

以下结果对直径为二的二部 Leonard 对进行了分类。

命题 11.1 对 B, A^* 而言， B, A^* 是 $\mathbb{F}$ 上的 Leonard 对，当且仅当

$$\theta_i^* \neq \theta_j^* \quad (0 \leq i < j \leq 2), \qquad\qquad x_i \neq 0 \quad (1 \leq i \leq 2), \tag{55}$$

$$\frac{x_1}{\theta_1^* - \theta_2^*} = \frac{x_2}{\theta_0^* - \theta_1^*}. \tag{56}$$

证明。将命题 10.1 应用于 $a_i = 0$ $(0 \leq i \leq 2)$。 □

以下结果对直径二的近二部 Leonard 对进行了分类，并描述了其二部收缩。

命题 11.2 假设 A, A^* 是 $\mathbb{F}$ 上的 Leonard 对。那么，当且仅当 (56) 成立时，A, A^* 是近二部的。在这种情况下，B, A^* 是 A, A^* 的二部收缩。

证明。由命题10.1和11.1。 □

我们的下一个目标是确定给定二部 Leonard 对的所有近二部扩张。我们将用到命题 10.1。为此，我们考察在假设 B, A^* 是 Leonard 对的条件下，条件 (38)–(40) 会变成什么样。我们先考虑条件 (38)。

引理 11.3 假设 B、A^* 是 $\mathbb{F}$ 上的 Leonard 对。当且仅当下列 (i)、(ii) 之一成立时，(38) 成立：

(i) $a_0 = a_2$;

(ii) $a_0 \neq a_2$ 且

$$a_0(\theta_0^* - \theta_1^*) + a_2(\theta_1^* - \theta_2^*) + a_1(\theta_2^* - \theta_0^*) = 0. \tag{57}$$

证明。根据命题11.1，注意到(56) 成立，因此在 (38) 中左端为零。首先假设(38) 成立。在(38) 中右端为零。因此 (i)、(ii) 中至少一个成立。接下来假设 (i)、(ii)中至少一个成立。于是 (38) 中右端为零。所以 (38) 成立。□

接下来我们考虑条件 (39) 和 (40)。

引理 11.4 设 B, A^* 是 $\mathbb{F}$ 上的 Leonard 对。那么，当且仅当下列情形之一成立时，(39) 和 (40) 成立：

(i) $a_0 = a_2$，并且

$$(a_0 - a_1)^2 + 4(x_1 + x_2) \neq 0; \tag{58}$$

(ii) $a_0 \neq a_2$，以及

$$(a_0 - a_2)^2 + 4(x_1 + x_2) \neq 0, \tag{59}$$

$$(a_0 - a_2)^2 + \frac{(x_1 + x_2)^3}{x_1 x_2} \neq 0. \tag{60}$$

证明。由命题 11.1 注意到 (56) 成立。利用 (56)，不难得到

$$(\theta_0^* - \theta_2^*)\left(\frac{x_1}{\theta_1^* - \theta_2^*} + \frac{x_2}{\theta_0^* - \theta_1^*}\right) = 2(x_1 + x_2), \tag{61}$$

$$(\theta_0^* - \theta_2^*)^2\left(\frac{x_1}{(\theta_1^* - \theta_2^*)^2} + \frac{x_2}{(\theta_0^* - \theta_1^*)^2}\right) = \frac{(x_1 + x_2)^3}{x_1 x_2}. \tag{62}$$

对于每种情况 $a_0 = a_2$ 和 $a_0 \neq a_2$，使用 (61)、(62) 化简 (39) 和 (40)。对于情况 $a_0 \neq a_2$，还要使用 (57)。□

命题 11.5 假设 B, A^* 是 $\mathbb{F}$ 上的 Leonard 对。那么 A, A^* 是 B, A^* 的近二部扩张，当且仅当以下 (i)、(ii) 中有一个成立：

(i) $a_0 = a_2$ 并且 (58) 成立；(ii) $a_0 \neq a_2$ 并且 (57)、(59)、(60) 成立。

证明。根据命题 10.1 以及引理 11.3、11.4。 □

12 Leonard 对的类型

在第 9 小节和第 11 小节中，我们对直径为一和二的近二部 Leonard 对进行了分类。为了对直径至少为3的近二部 Leonard对进行分类，我们将论证分成若干种情形。为了描述这些情形，我们回顾 [35] Leonard 对的类型。

在本文余下部分，我们假设 $d \geq 3$。

定义 12.1（见 [35, 小节 4]。）令 A, A^* 表示 $\mathbb{F}$ 上的一个Leonard 对，其直径为 d。令 β 表示 A, A^* 的基本常数。我们如下定义 A, A^* 的类型。

type	description
I	$\beta \neq 2,\ \beta \neq -2$
II	$\beta = 2$
III$^+$	$\beta = -2,\ d$ even
III$^-$	$\beta = -2,\ d$ odd

注 12.2 根据定义 3.16，Leonard 对 A, A^* 的基本常数由 A^* 确定。由此以及定义 8.2 可知，任意近二部 Leonard 对的类型都与其二部收缩相同。

定义 12.3 我们所说的参数数组的类型，是指相应 Leonard 对的类型。

引理 12.4 设 A, A^* 表示 $\mathbb{F}$ 上的一个 Leonard 对。对于 $\mathbb{F}$ 中满足 $\xi\xi^* \neq 0$ 的标量 $\xi, \zeta, \xi^*, \zeta^*$，Leonard 对 $\xi A + \zeta I, \xi^* A^* + \zeta^* I$ 与 A, A^* 具有相同的类型。

证明。根据引理 3.15 和定义 3.16，Leonard 对 A、A^* 和 $\xi A + \zeta I$、$\xi^* A^* + \zeta^* I$ 具有相同的基本常数。□

根据 [35, 定理 9.6]，III$^-$ 型 Leonard 对不是二部的，因此根据注 12.2，它不是近二部的。在第 13–15 小节中，我们将描述 I、II、III$^+$ 型的参数数组。

13 I 型参数数组

在本小节中，我们描述 I型参数数组。在整个本小节中，固定一个非零的 $q \in \mathbb{F}$，使得 $q^4 \neq 1$。

引理 13.1（参见 [42, 引理 16.1]。）对于一个序列

$$(\delta, \mu, h, \delta^*, \mu^*, h^*, \tau) \tag{63}$$

$\mathbb{F}$ 中的标量，定义

$$\theta_i = \delta + \mu q^{2i-d} + hq^{d-2i}, \tag{64}$$
$$\theta_i^* = \delta^* + \mu^* q^{2i-d} + h^* q^{d-2i} \tag{65}$$

对于 $0 \leq i \leq d$ 和

$$\varphi_i = (q^i - q^{-i})(q^{d-i+1} - q^{i-d-1})(\tau - \mu\mu^* q^{2i-d-1} - hh^* q^{d-2i+1}), \tag{66}$$
$$\phi_i = (q^i - q^{-i})(q^{d-i+1} - q^{i-d-1})(\tau - h\mu^* q^{2i-d-1} - \mu h^* q^{d-2i+1}) \tag{67}$$

对于 $1 \leq i \leq d$。然后是序列

$$(\{\theta_i\}_{i=0}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d; \{\varphi_i\}_{i=1}^d; \{\phi_i\}_{i=1}^d) \tag{68}$$

是一个在 $\mathbb{F}$ 上的参数数组，具有I 型和基本常数 $\beta = q^2 + q^{-2}$，前提是不等式引理3.14(i)、(ii)成立。反之，假设序列(68)是一个在 $\mathbb{F}$ 上的参数数组，具有I 型和基本常数 $\beta = q^2 + q^{-2}$。那么存在唯一的标量序列 (63)，其属于 $\mathbb{F}$ 并满足 (64)–(67)。

引理 13.2（参见 [42, 引理 16.4]。）参照引理 13.1，当且仅当以下条件成立时，引理 3.14(i)、(ii) 中的不等式成立

$$q^{2i} \neq 1 \qquad (1 \leq i \leq d), \tag{69}$$
$$\mu \neq hq^{2i} \qquad (1 - d \leq i \leq d - 1), \tag{70}$$
$$\mu^* \neq h^* q^{2i} \qquad (1 - d \leq i \leq d - 1), \tag{71}$$
$$\tau \neq \mu\mu^* q^{2i-d-1} + hh^* q^{d-2i+1} \qquad (1 \leq i \leq d), \tag{72}$$
$$\tau \neq h\mu^* q^{2i-d-1} + \mu h^* q^{d-2i+1} \qquad (1 \leq i \leq d). \tag{73}$$

定义 13.3 主 q-数据是由满足 (69)–(73) 的标量构成的序列 (63)，其中 $\mathbb{F}$。称主 q-数据 (63) 与参数数组 (68) 相对应。

定义 13.4 令 A, A^* 表示一个 I 型 Leonard 对。我们将对应于 A, A^* 的参数数组的主 q-数据称为 A, A^* 的主 q-数据。

引理 13.5 对于引理 3.11 中的参数数组，考虑相应的基本 q 数据。这些基本 q 数据之间的关系如下：

参数数组	主要 q-数据
$(\{\theta_i\}_{i=0}^d;\{\theta_i^*\}_{i=0}^d;\{\varphi_i\}_{i=1}^d;\{\phi_i\}_{i=1}^d)$	$(\delta,\mu,h,\delta^*,\mu^*,h^*,\tau)$
$(\{\theta_i\}_{i=0}^d;\ \{\theta_{d-i}^*\}_{i=0}^d;\{\phi_{d-i+1}\}_{i=1}^d;\ \{\varphi_{d-i+1}\}_{i=1}^d)$	$(\delta,\mu,h,\delta^*,h^*,\mu^*,\tau)$
$(\{\theta_{d-i}\}_{i=0}^d;\{\theta_i^*\}_{i=0}^d;\{\phi_i\}_{i=1}^d;\{\varphi_i\}_{i=1}^d)$	$(\delta,h,\mu,\delta^*,\mu^*,h^*,\tau)$
$(\{\theta_{d-i}\}_{i=0}^d;\ \{\theta_{d-i}^*\}_{i=0}^d;\{\varphi_{d-i+1}\}_{i=1}^d;\ \{\phi_{d-i+1}\}_{i=1}^d)$	$(\delta,h,\mu,\delta^*,h^*,\mu^*,\tau)$

证明。使用引理 13.1 和定义 13.3。 □

14 II 型参数数组

本小节将介绍 II 型参数数组。

引理 14.1（参见 [42, 引理 19.1]。）对于一个序列

$$(\delta,\mu,h,\delta^*,\mu^*,h^*,\tau) \tag{74}$$

由 $\mathbb{F}$ 中的标量组成，定义

$$\theta_i=\delta+\mu(i-d/2)+hi(d-i), \tag{75}$$
$$\theta_i^*=\delta^*+\mu^*(i-d/2)+h^*i(d-i) \tag{76}$$

对于 $0\le i\le d$ 及

$$\varphi_i=i(d-i+1)\big(\tau-\mu\mu^*/2+(h\mu^*+\mu h^*)(i-(d+1)/2)+hh^*(i-1)(d-i)\big), \tag{77}$$
$$\phi_i=i(d-i+1)\big(\tau+\mu\mu^*/2+(h\mu^*-\mu h^*)(i-(d+1)/2)+hh^*(i-1)(d-i)\big) \tag{78}$$

对于 $1\le i\le d$。那么该序列

$$(\{\theta_i\}_{i=0}^d;\{\theta_i^*\}_{i=0}^d;\{\varphi_i\}_{i=1}^d;\{\phi_i\}_{i=1}^d) \tag{79}$$

是 $\mathbb{F}$ 上的一个 II 型参数数组，前提是引理 3.14(i)、(ii) 中的不等式成立。反过来，假设序列 (79) 是 $\mathbb{F}$ 上的一个 II 型参数数组。那么存在唯一的标量序列 (74)，其元素属于 $\mathbb{F}$，并满足 (75)–(78)。

引理 14.2（参见 [42, 引理 19.4]。）参照引理 14.1，引理 3.14(i)、(ii) 中的不等式成立，当且仅当

$$\text{Char}(\mathbb{F}) \text{ 等于 } 0 \text{ 或大于 } d, \tag{80}$$
$$\mu\ne hi \qquad (1-d\le i\le d-1), \tag{81}$$
$$\mu^*\ne h^*i \qquad (1-d\le i\le d-1), \tag{82}$$
$$\tau\ne\mu\mu^*/2-(h\mu^*+\mu h^*)(i-(d+1)/2)-hh^*(i-1)(d-i) \qquad (1\le i\le d), \tag{83}$$
$$\tau\ne-\mu\mu^*/2-(h\mu^*-\mu h^*)(i-(d+1)/2)-hh^*(i-1)(d-i) \qquad (1\le i\le d)。 \tag{84}$$

定义14.3　II 型主数据是满足 (80)–(84) 的 $\mathbb{F}$ 中的标量序列(74)。II 型主数据 (74) 与参数数组 (79) 称为相互对应。

定义 14.4 令 A, A^* 表示一个 II 型 Leonard 对。我们将对应于 A, A^* 的参数数组的 II 型主数据称为 A, A^* 的主数据。

引理 14.5 对于引理 3.11 中的参数数组，考虑相应的 II 型主数据。这些主数据之间的关系如下:

参数数组	主数据
$(\{\theta_i\}_{i=0}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d; \{\varphi_i\}_{i=1}^d; \{\phi_i\}_{i=1}^d)$	$(\delta, \mu, h, \delta^*, \mu^*, h^*, \tau)$
$(\{\theta_i\}_{i=0}^d; \{\theta_{d-i}^*\}_{i=0}^d; \{\phi_{d-i+1}\}_{i=1}^d; \{\varphi_{d-i+1}\}_{i=1}^d)$	$(\delta, \mu, h, \delta^*, -\mu^*, h^*, \tau)$
$(\{\theta_{d-i}\}_{i=0}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d; \{\phi_i\}_{i=1}^d; \{\varphi_i\}_{i=1}^d)$	$(\delta, -\mu, h, \delta^*, \mu^*, h^*, \tau)$
$(\{\theta_{d-i}\}_{i=0}^d; \{\theta_{d-i}^*\}_{i=0}^d; \{\varphi_{d-i+1}\}_{i=1}^d; \{\phi_{d-i+1}\}_{i=1}^d)$	$(\delta, -\mu, h, \delta^*, -\mu^*, h^*, \tau)$

证明。使用引理14.1和定义14.3。 □

15 III型参数数组$^+$

在本小节中，我们描述 III$^+$ 型的参数数组。

引理15.1（参见 [42, 引理 22.1]。）假设 d 为偶数。对于一个序列

$$(\delta, s, h, \delta^*, s^*, h^*, \tau) \tag{85}$$

$\mathbb{F}$ 中的标量，定义

$$\theta_i = \begin{cases} \delta + s + h(i - d/2) & \text{if } i \text{ is even}, \\ \delta - s - h(i - d/2) & \text{if } i \text{ is odd}, \end{cases} \tag{86}$$

$$\theta_i^* = \begin{cases} \delta^* + s^* + h^*(i - d/2) & \text{if } i \text{ is even}, \\ \delta^* - s^* - h^*(i - d/2) & \text{if } i \text{ is odd} \end{cases} \tag{87}$$

对于 $0 \le i \le d$ 和

$$\varphi_i = \begin{cases} i\big(\tau - sh^* - s^*h - hh^*(i - (d+1)/2)\big) & \text{如果 } i \text{ 是偶数}, \\ (d-i+1)\big(\tau + sh^* + s^*h + hh^*(i - (d+1)/2)\big) & \text{如果 } i \text{ 为奇数}, \end{cases} \tag{88}$$

$$\phi_i = \begin{cases} i\big(\tau - sh^* + s^*h + hh^*(i - (d+1)/2)\big) & \text{if } i \text{ is even}, \\ (d-i+1)\big(\tau + sh^* - s^*h - hh^*(i - (d+1)/2)\big) & \text{如果 } i \text{ 为奇数} \end{cases} \tag{89}$$

对于 $1 \le i \le d$。然后是序列

$$(\{\theta_i\}_{i=0}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d; \{\varphi_i\}_{i=1}^d; \{\phi_i\}_{i=1}^d) \tag{90}$$

是 $\mathbb{F}$上的一个参数数组，且为 III 型$^+$，前提是引理 3.14(i)、(ii) 中的不等式成立。反过来，假设序列 (90) 是 $\mathbb{F}$上的一个参数数组，且为 III 型$^+$。那么存在唯一一个由 $\mathbb{F}$ 中的标量构成的序列 (85)，满足 (86)–(89)。

引理 15.2（参见 [42, 引理 22.4]。）参照引理 15.1，当且仅当以下条件成立时，引理 3.14(i)、(ii) 中的不等式成立

$$\mathrm{Char}(\mathbb{F}) \text{ is equal to 0 or greater than } d/2, \tag{91}$$

$$h \neq 0, \qquad h^* \neq 0, \tag{92}$$

$$2s \neq ih \qquad \text{if } i \text{ is odd} \qquad (1-d \leq i \leq d-1), \tag{93}$$

$$2s^* \neq ih^* \qquad \text{if } i \text{ is odd} \qquad (1-d \leq i \leq d-1), \tag{94}$$

$$\tau \neq \begin{cases} sh^* + s^*h + hh^*\big(i-(d+1)/2\big) & \text{if } i \text{ is even}, \\ -sh^* - s^*h - hh^*\big(i-(d+1)/2\big) & \text{if } i \text{ is odd} \end{cases} \qquad (1 \leq i \leq d), \tag{95}$$

$$\tau \neq \begin{cases} sh^* - s^*h - hh^*\big(i-(d+1)/2\big) & \text{if } i \text{ is even}, \\ -sh^* + s^*h + hh^*\big(i-(d+1)/2\big) & \text{if } i \text{ is odd} \end{cases} \qquad (1 \leq i \leq d). \tag{96}$$

定义15.3 III$^+$ 型的主数据是指一列标量（85），其中的标量属于 $\mathbb{F}$，并满足 (91)–(96)。称 III$^+$ 型主数据（85）与参数数组（90）相对应。

定义 15.4 设 A, A^* 表示一个 III$^+$ 型 Leonard 对。我们将 A, A^* 的主数据定义为与 A, A^* 的参数数组相对应的 III$^+$ 型主数据。

引理 15.5 对于引理 3.11 中的参数数组，考虑相应的 III$^+$ 型主数据。这些主数据之间的关系如下:

参数数组	主数据
$(\{\theta_i\}_{i=0}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d; \{\varphi_i\}_{i=1}^d; \{\phi_i\}_{i=1}^d)$	$(\delta, s, h, \delta^*, s^*, h^*, \tau)$
$(\{\theta_i\}_{i=0}^d; \{\theta_{d-i}^*\}_{i=0}^d; \{\phi_{d-i+1}\}_{i=1}^d; \{\varphi_{d-i+1}\}_{i=1}^d)$	$(\delta, s, h, \delta^*, s^*, -h^*, \tau)$
$(\{\theta_{d-i}\}_{i=0}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d; \{\phi_i\}_{i=1}^d; \{\varphi_i\}_{i=1}^d)$	$(\delta, s, -h, \delta^*, s^*, h^*, \tau)$
$(\{\theta_{d-i}\}_{i=0}^d; \{\theta_{d-i}^*\}_{i=0}^d; \{\varphi_{d-i+1}\}_{i=1}^d; \{\phi_{d-i+1}\}_{i=1}^d)$	$(\delta, s, -h, \delta^*, s^*, -h^*, \tau)$

证明。使用引理15.1和定义15.3。 □

16 关于条件 $\varphi_i\phi_i = \varphi_i'\phi_i'$

在我们主要结果的证明中，引理 8.11将发挥至关重要的作用。在该引理中，我们看到条件 (30)。在本小节中，我们回顾从 [42] 得到的关于 (30) 的主数据方面的充要条件。

令 A、A^* 和 B、A^* 表示 $\mathbb{F}$ 上的 Leonard 对。令

$$(\{\theta_i\}_{i=0}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d; \{\varphi_i\}_{i=1}^d; \{\phi_i\}_{i=1}^d), \qquad (\{\theta_i'\}_{i=0}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d; \{\varphi_i'\}_{i=1}^d; \{\phi_i'\}_{i=1}^d) \tag{97}$$

分别表示 A、A^* 和 B、A^* 的参数数组。

首先考虑 I 型的情况。

引理 16.1（参见 [42, 定理 17.1]。）假设 A, A^* 属于 I 型。对于式 (97) 中的参数数组，令

$$(\delta, \mu, h, \delta^*, \mu^*, h^*, \tau), \qquad (\delta', \mu', h', \delta^*, \mu^*, h^*, \tau')$$

表示 相应的主 q数据。那么，当且仅当 $\varphi_i\phi_i = \varphi_i'\phi_i'$ $(1 \le i \le d)$ *if*

$$\mu h = \mu' h', \tag{98}$$

$$\tau(\mu + h) = \tau'(\mu' + h'), \tag{99}$$

$$\tau^2 + (\mu + h)^2\mu^* h^* = \tau'^2 + (\mu' + h')^2\mu^* h^*. \tag{100}$$

接下来考虑 II 型的情形。

引理16.2（参见 [42, 定理 20.1]。）假设 A, A^* 具有 II 型。对于 (97) 中的参数数组，令

$$(\delta, \mu, h, \delta^*, \mu^*, h^*, \tau), \qquad (\delta', \mu', h', \delta^*, \mu^*, h^*, \tau')$$

表示相应的主数据。那么，当且仅当 $\varphi_i\phi_i = \varphi_i'\phi_i'$ $(1 \le i \le d)$

$$h^2 = h'^2, \tag{101}$$

$$2h\tau + \mu^2 h^* = 2h'\tau' + \mu'^2 h^*, \tag{102}$$

$$4\tau^2 - \mu^2\big(\mu^{*2} + (d-1)^2 h^{*2}\big) = 4\tau'^2 - \mu'^2\big(\mu^{*2} + (d-1)^2 h^{*2}\big). \tag{103}$$

接下来考虑 III 型$^+$的情形。

引理 16.3（参见 [42, 定理 23.1]。）假设 A, A^* 具有 III$^+$ 型。对于（97）中的参数数组，令

$$(\delta, s, h, \delta^*, s^*, h^*, \tau), \qquad (\delta', s', h', \delta^*, s^*, h^*, \tau')$$

表示相应的主数据。则 $\varphi_i\phi_i = \varphi_i'\phi_i'$ $(1 \le i \le d)$ 当且仅当

$$h^2 = h'^2, \tag{104}$$

$$(\tau + sh^*)^2 = (\tau' + s'h^*)^2, \tag{105}$$

$$(\tau - sh^*)^2 = (\tau' - s'h^*)^2. \tag{106}$$

17 本质二部 Leonard 对的若干刻画

在本小节中，我们从主数据、参数数组和 TD/D 序列的角度刻画本质二部 Leonard 对。

Throug 在本小节中，令 A、A^* 表示 $\mathbb{F}$ 上的 Leonard 对，其参数数组为

$$(\{\theta_i\}_{i=0}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d; \{\varphi_i\}_{i=1}^d; \{\phi_i\}_{i=1}^d) \tag{107}$$

相应的 TD/D 序列为

$$(\{a_i\}_{i=0}^d; \{x_i\}_{i=1}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d).$$

我们首先考虑 I 型的情形。

引理 17.1（参见 [35, 定理 6.11]。）固定一个非零的 $q \in \mathbb{F}$，并假设 A, A^* 具有基本常数为 $\beta = q^2 + q^{-2}$ 的 I 型。令

$$(\delta, \mu, h, \delta^*, \mu^*, h^*, \tau)$$

表示与参数数组 (107) 对应的主 q-数据。则以下条件等价:

(i) A, A^* 是本质二部的;

(ii) $\mu + h = 0$ 和 $\tau = 0$。

引理17.2 沿用引理 17.1 的记号， A, A^* 是本质二部的，当且仅当

$$\begin{aligned}
\theta_i &= \delta + \mu(q^{2i-d} - q^{d-2i}) && (0 \le i \le d),\\
\theta_i^* &= \delta^* + \mu^* q^{2i-d} + h^* q^{d-2i} && (0 \le i \le d),\\
\varphi_i &= -(q^i - q^{-i})(q^{d-i+1} - q^{i-d-1})\mu(\mu^* q^{2i-d-1} - h^* q^{d-2i+1}) && (1 \le i \le d),\\
\phi_i &= (q^i - q^{-i})(q^{d-i+1} - q^{i-d-1})\mu(\mu^* q^{2i-d-1} - h^* q^{d-2i+1}) && (1 \le i \le d)。
\end{aligned}$$

证明。由引理 13.1 和引理 17.1 可知。 □

引理17.3 参照引理 17.1，设 A, A^* 是本质二部的。那么

$$\begin{aligned}
&q^{2i} \ne 1 && (1 \le i \le d),\\
&q^{2i} \ne -1 && (1 \le i \le d-1),\\
&\mu \ne 0,\\
&\mu^* q^i \ne h^* q^{-i} && (1-d \le i \le d-1).
\end{aligned}$$

证明。利用引理 17.1(ii) 对引理 13.2 中的不等式求值。 □

Lem理 17.4 参照引理 17.1， A, A^* 是本质二部的，当且仅当

$$\begin{aligned}
a_i &= \delta && (0 \le i \le d),\\
x_i &= \frac{(q^i - q^{-i})(q^{d-i+1} - q^{i-d-1})\mu^2(\mu^* q^i - h^* q^{-i})(\mu^* q^{i-d-1} - h^* q^{d-i+1})}{(\mu^* q^{2i-d} - h^* q^{d-2i})(\mu^* q^{2i-d-2} - h^* q^{d-2i+2})} && (1 \le i \le d-1),\\
x_d &= \frac{(q^d - q^{-d})(q - q^{-1})\mu^2(\mu^* q^{-1} - h^* q)}{\mu^* q^{d-2} - h^* q^{2-d}}.
\end{aligned}$$

证明。根据引理4.10和17.2。 □

接下来考虑 II 型的情况。

引理 17.5（参见 [35, 定理 7.11]。）假设 A, A^* 为 II 型。令

$$(\delta, \mu, h, \delta^*, \mu^*, h^*, \tau)$$

表示与参数数组 (107) 相对应的主数据。则以下各项等价:

(i) A, A^* 是本质二部的;

(ii) $h = 0$ 和 $\tau = 0$.

Lemma17.6 参照引理 17.5, A, A^* 是本质二部的当且仅当

$$\begin{aligned}
\theta_i &= \delta + \mu(i - d/2) && (0 \le i \le d),\\
\theta_i^* &= \delta^* + \mu^*(i - d/2) + h^* i(d - i) && (0 \le i \le d),\\
\varphi_i &= -i(d - i + 1)\mu\big(\mu^*/2 - h^*(i - (d+1)/2)\big) && (1 \le i \le d),\\
\phi_i &= i(d - i + 1)\mu\big(\mu^*/2 - h^*(i - (d+1)/2)\big) && (1 \le i \le d)。
\end{aligned}$$

证明。根据引理14.1和17.5。 □

引理 1 7.7 参照引理 17.5, 假设 A, A^* 是本质二部的。那么

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Char}(\mathbb{F}) \text{ is equal to 0 or greater than } d,\\
&\mu \ne 0,\\
&\mu^* \ne h^* i \qquad\qquad (1 - d \le i \le d - 1).
\end{aligned}$$

证明。利用引理 17.5(ii) 评估引理 14.2 中的不等式。 □

引理17.8 参见引理 17.5, $A\,A^*$ 是本质二部的当且仅当

$$\begin{aligned}
a_i &= \delta && (0 \le i \le d),\\
x_i &= \frac{i(d - i + 1)\mu^2(\mu^* - ih^*)\big(\mu^* + (d - i + 1)h^*\big)}{4\big(\mu^* + (d - 2i)h^*\big)\big(\mu^* + (d - 2i + 2)h^*\big)} && (1 \le i \le d - 1),\\
x_d &= \frac{d\mu^2(\mu^* + h^*)}{4(\mu^* + (2 - d)h^*)}.
\end{aligned}$$

证明。根据引理4.10和17.6。 □

接下来考虑 type III$^+$ 的情形。

引理17.9（参见 [35, 定理8.11]。）假设 A、 A^* 具有 III 型$^+$, 并令

$$(\delta, s, h, \delta^*, s^*, h^*, \tau)$$

表示对应于参数数组 (107) 的主数据。则以下条件等价:

(i) A、 A^* 本质二部;

(ii) $s = 0$ 和 $\tau = 0$。

引理17.10 参见引理 17.9， A, A^* 是本质二部的当且仅当

$$\theta_i = \begin{cases} \delta + h(i-d/2) & \text{if } i \text{ is even,} \\ \delta - h(i-d/2) & \text{if } i \text{ is odd} \end{cases} \qquad (0 \le i \le d),$$

$$\theta_i^* = \begin{cases} \delta^* + s^* + h^*(i-d/2) & \text{if } i \text{ is even,} \\ \delta^* - s^* - h^*(i-d/2) & \text{if } i \text{ is odd} \end{cases} \qquad (0 \le i \le d),$$

$$\varphi_i = \begin{cases} -ih\big(s^* + h^*(i-(d+1)/2)\big) & \text{if } i \text{ is even,} \\ (d-i+1)h\big(s^* + h^*(i-(d+1)/2)\big) & \text{if } i \text{ is odd} \end{cases} \qquad (1 \le i \le d),$$

$$\phi_i = \begin{cases} ih\big(s^* + h^*(i-(d+1)/2)\big) & \text{if } i \text{ is even,} \\ -(d-i+1)h\big(s^* + h^*(i-(d+1)/2)\big) & \text{if } i \text{ is odd} \end{cases} \qquad (1 \le i \le d).$$

证明。根据引理15.1和17.9。 □

引理 17.11 参见引理 17.9，假设 A, A^* 是本质二部的。那么

$$\begin{aligned} &\text{Char}(\mathbb{F}) \text{ is equal to 0 or greater than } d, \\ &h \ne 0, \qquad h^* \ne 0, \\ &2s^* \ne h^* i \qquad \text{if } i \text{ is odd} \qquad (1-d \le i \le d-1). \end{aligned}$$

证明。使用引理 17.9(ii) 计算引理 15.2 中的不等式。 □

引理 17.12 参照引理 17.9， A, A^* 是本质二部的，当且仅当

$$a_i = \delta \qquad (0 \le i \le d),$$

$$x_i = \begin{cases} ih^2\big((d-i+1)h^* - 2s^*\big)/(4h^*) & \text{if } i \text{ is even,} \\ (d-i+1)h^2(ih^* + 2s^*)/(4h^*) & \text{if } i \text{ is odd} \end{cases} \qquad (1 \le i \le d).$$

证明。由引理 4.10 和 17.10。 □

引理 17.13（见 [35, 定理 9.6]。）一个 III 型 Leonard 对$^-$ 不是本质二部的。

18 二部 Leonard 对的一些刻画

在本小节中，我们从主数据、参数数组和 TD/D 序列的角度刻画二部 Leonard 对。

通　　过本小节，设 A、A^* 表示 $\mathbb{F}$ 上的一个 Leonard 对，其参数数组为

$$(\{\theta_i\}_{i=0}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d; \{\varphi_i\}_{i=1}^d; \{\phi_i\}_{i=1}^d) \tag{108}$$

以及相应的 TD/D 序列

$$(\{a_i\}_{i=0}^d; \{x_i\}_{i=1}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d).$$

我们首先考虑 I 型的情形。

引理18.1 固定一个非零的 $q \in \mathbb{F}$，并假设 A、A^* 为具有基本常数 $\beta = q^2 + q^{-2}$ 的 I 型。令

$$(\delta, \mu, h, \delta^*, \mu^*, h^*, \tau)$$

记与参数数组(108)相对应的主 q-数据。则以下各项等价:

(i) A、A^* 是二部的；(ii) $\delta = 0$、$\mu + h = 0$ 和 $\tau = 0$。

证明。由引理17.1和17.4可得。 □

引理18.2 参见引理18.1，A、A^* 是二部的，当且仅当

$$\begin{aligned}
\theta_i &= \mu(q^{2i-d} - q^{d-2i}) && (0 \le i \le d),\\
\theta_i^* &= \delta^* + \mu^* q^{2i-d} + h^* q^{d-2i} && (0 \le i \le d),\\
\varphi_i &= -(q^i - q^{-i})(q^{d-i+1} - q^{i-d-1})\mu(\mu^* q^{2i-d-1} - h^* q^{d-2i+1}) && (1 \le i \le d),\\
\phi_i &= (q^i - q^{-i})(q^{d-i+1} - q^{i-d-1})\mu(\mu^* q^{2i-d-1} - h^* q^{d-2i+1}) && (1 \le i \le d)。
\end{aligned}$$

证明。由引理17.2和引理18.1可得。 □

引理 18.3 参照引理18.1，假设 A, A^* 是二部的。那么

$$\begin{aligned}
&q^{2i} \ne 1 && (1 \le i \le d),\\
&q^{2i} \ne -1 && (1 \le i \le d-1),\\
&\mu \ne 0,\\
&\mu^* q^i \ne h^* q^{-i} && (1 - d \le i \le d-1).
\end{aligned}$$

证明。利用引理18.1(ii)检验引理 13.2 中的不等式。 □

引理 18.4 参照引理18.1，A, A^* 是二部的，当且仅当

$$\begin{aligned}
a_i &= 0 && (0 \le i \le d),\\
x_i &= \frac{(q^i - q^{-i})(q^{d-i+1} - q^{i-d-1})\mu^2(\mu^* q^i - h^* q^{-i})(\mu^* q^{i-d-1} - h^* q^{d-i+1})}{(\mu^* q^{2i-d} - h^* q^{d-2i})(\mu^* q^{2i-d-2} - h^* q^{d-2i+2})} && (1 \le i \le d-1),\\
x_d &= \frac{(q^d - q^{-d})(q - q^{-1})\mu^2(\mu^* q^{-1} - h^* q)}{\mu^* q^{d-2} - h^* q^{2-d}}.
\end{aligned}$$

证明。由引理17.4可得。 □

接下来考虑 II 型的情形。

引理 18.5 假设 A, A^* 为 II 型，并令

$$(\delta, \mu, h, \delta^*, \mu^*, h^*, \tau)$$

表示与参数数组 (108) 相对应的主数据。则以下各项等价:

(i) A, A^* 是二部的; (ii)
$\delta = 0$ 和 $h = 0$ 和 $\tau = 0$.

证明。根据引理17.5和17.8。 □

引理18.6 参见引理 18.5， A， A^* 是二部的当且仅当

$$\begin{aligned}
\theta_i &= \mu(i - d/2) && (0 \le i \le d),\\
\theta_i^* &= \delta^* + \mu^*(i - d/2) + h^* i(d - i) && (0 \le i \le d),\\
\varphi_i &= -i(d - i + 1)\mu\big(\mu^*/2 - h^*(i - (d+1)/2)\big) && (1 \le i \le d),\\
\phi_i &= i(d - i + 1)\mu\big(\mu^*/2 - h^*(i - (d+1)/2)\big) && (1 \le i \le d).
\end{aligned}$$

证明。根据引理17.6和18.5。 □

引理18.7 参见引理 18.5，假设 A, A^* 是二部的。然后

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Char}(\mathbb{F}) \text{ is equal to 0 or greater than } d,\\
&\mu \ne 0,\\
&\mu^* \ne h^* i \qquad\qquad (1 - d \le i \le d - 1).
\end{aligned}$$

证明。利用引理 18.5(ii)验证引理 14.2中的不等式。 □

引理 18.8 参见引理 18.5， A, A^* 是二部的，当且仅当

$$\begin{aligned}
a_i &= 0 && (0 \le i \le d),\\
x_i &= \frac{i(d - i + 1)\mu^2(\mu^* - ih^*)\big(\mu^* + (d - i + 1)h^*\big)}{4\big(\mu^* + (d - 2i)h^*\big)\big(\mu^* + (d - 2i + 2)h^*\big)} && (1 \le i \le d - 1),\\
x_d &= \frac{d\mu^2(\mu^* + h^*)}{4(\mu^* + (2 - d)h^*)}.
\end{aligned}$$

证明。由引理 17.8可得。 □

接下来考虑 III 型$^+$。

引理 18.9 假设 A, A^* 具有 III$^+$ 型，并令】【。

$$(\delta, s, h, \delta^*, s^*, h^*, \tau)$$

表示与参数数组 (108) 对应的主数据。则以下各项等价:

(i) A, A^* 是二部的; (ii)
$\delta = 0$ 和 $s = 0$ 和 $\tau = 0$。

证明。由引理 17.9 和 17.12 得出。 □

引理 18.10 参照引理 18.9, A, A^* 是二部的，当且仅当

$$\theta_i = \begin{cases} h(i - d/2) & \text{if } i \text{ is even}, \\ -h(i - d/2) & \text{if } i \text{ is odd} \end{cases} \qquad (0 \le i \le d),$$

$$\theta_i^* = \begin{cases} \delta^* + s^* + h^*(i - d/2) & \text{if } i \text{ is even}, \\ \delta^* - s^* - h^*(i - d/2) & \text{if } i \text{ is odd} \end{cases} \qquad (0 \le i \le d),$$

$$\varphi_i = \begin{cases} -ih\big(s^* + h^*(i - (d+1)/2)\big) & \text{if } i \text{ is even}, \\ (d - i + 1)h\big(s^* + h^*(i - (d+1)/2)\big) & \text{if } i \text{ is odd} \end{cases} \qquad (1 \le i \le d),$$

$$\phi_i = \begin{cases} ih\big(s^* + h^*(i - (d+1)/2)\big) & \text{if } i \text{ is even}, \\ -(d - i + 1)h\big(s^* + h^*(i - (d+1)/2)\big) & \text{if } i \text{ is odd} \end{cases} \qquad (1 \le i \le d).$$

证明。由引理 17.10 和 18.9 得出。 □

引理 18.11 参照引理 18.9，假设 A, A^* 是二部的。则

$$\begin{aligned} &\mathrm{Char}(\mathbb{F}) \text{ is equal to 0 or greater than } d, \\ &h \ne 0, \qquad h^* \ne 0, \\ &2s^* \ne h^* i \qquad \text{if } i \text{ is odd} \qquad (1 - d \le i \le d - 1). \end{aligned}$$

证明。利用引理 18.9(ii) 计算引理 15.2 中的不等式。 □

引理18.12 参见引理 18.9, A, A^* 是二部的当且仅当

$$a_i = 0 \qquad (0 \le i \le d),$$

$$x_i = \begin{cases} ih^2\big((d - i + 1)h^* - 2s^*\big)/(4h^*) & \text{if } i \text{ is even}, \\ (d - i + 1)h^2(ih^* + 2s^*)/(4h^*) & \text{if } i \text{ is odd} \end{cases} \qquad (1 \le i \le d).$$

证明。根据引理 17.12。 □

引理18.13 一个 III 型$^-$ Leonard 对不是二部的。

证明。由引理17.13。 □

19 个对偶 q-Krawtchouk 型 Leonard 对

在本小节中，我们描述一族被称为具有对偶 q-Krawtchouk 型的 Leonard 对。在本小节中，令 A、A^* 表示在 $\mathbb{F}$ 上具有参数数组的一个 Leonard 对

$$(\{\theta_i\}_{i=0}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d; \{\varphi_i\}_{i=1}^d; \{\phi_i\}_{i=1}^d). \tag{109}$$

定义 19.1 若以下 (i)–(iii) 成立，则称 Leonard 对 A, A^* 具有对偶 q-Krawtchouk 型:

(i) A, A^* 具有 I 型；(ii) 表达式 $(\theta_{i-1}^* - \theta_i^*)/(\theta_i^* - \theta_{i+1}^*)$ 对于 $1 \le i \le d-1$ 不依赖于 i；

(iii) φ_i/ϕ_i 与 i 对于 $1 \le i \le d$ 是独立的。

注 19.2 dual q-Krawtchouk 型的 Leonard 对与 dual q- Krawtchouk 多项式 [50,例 35.8] 相关。

在本小节余下部分，假设 A, A^* 具有 I 型，并令

$$(\delta, \mu, h, \delta^*, \mu^*, h^*, \tau) \tag{110}$$

表示与参数数组 (109) 对应的主 q-数据。

引理 19.3 我们有

$$\frac{\theta_{i-1}^* - \theta_i^*}{\theta_i^* - \theta_{i+1}^*} = \frac{\mu^* q^{4i} - h^* q^{2d+2}}{\mu^* q^{4i+2} - h^* q^{2d}} \qquad (1 \le i \le d-1), \tag{111}$$

$$\frac{\varphi_i}{\phi_i} = \frac{\tau - \mu\mu^* q^{2i-d-1} - hh^* q^{d-2i+1}}{\tau - h\mu^* q^{2i-d-1} - \mu h^* q^{d-2i+1}} \qquad (1 \le i \le d). \tag{112}$$

证明。使用（65）–（67）。 □

由 (71) 可知，μ^* 和 h^* 不同时为零。

引理 19.4 以下各项等价:

(i) A, A^* 具有对偶 q-Krawtchouk 型;

(ii) $\mu^* h^* = 0$ 和 $\tau = 0$。

假设等价条件 (i) 和 (ii) 成立。那么

$$(\theta_{i-1}^* - \theta_i^*)/(\theta_i^* - \theta_{i+1}^*) = \begin{cases} q^2 & \text{if } \mu^* = 0, \\ q^{-2} & \text{if } h^* = 0 \end{cases} \qquad (1 \le i \le d-1), \tag{113}$$

$$\varphi_i/\phi_i = \begin{cases} h/\mu & \text{if } \mu^* = 0, \\ \mu/h & \text{if } h^* = 0 \end{cases} \qquad (1 \le i \le d). \tag{114}$$

证明。(i) $\Rightarrow$ (ii) 根据定义 19.1(ii)，比较 $i = 1$ 和 $i = 2$ 对应的 (111) 的值，得到

$$\mu^* h^* q^{2d+4} (q^4 - 1)^2 = 0.$$

由此以及 (69) 得到 $\mu^* h^* = 0$。首先假设 $\mu^* = 0$。由 (112),

$$\frac{\varphi_i}{\phi_i} = \frac{\tau - hh^* q^{d-2i+1}}{\tau - \mu h^* q^{d-2i+1}} \qquad (1 \le i \le d). \tag{115}$$

使用 定义 19.1(iii)，比较 $i = 1$ 和 $i = 2$ 对应的 (115) 的值，以找出 tha t

$$\tau h^*(\mu - h)(q^2 - 1) = 0.$$

由此以及 (69)、(70)，我们得到 $\tau = 0$。接下来假设 $h^* = 0$。类似地，我们得到 $\tau = 0$ 。

(ii) $\Rightarrow$ (i)由 (111) 和(112) 可得 (113) 和 (114) 成立。因此在定义 19.1 中，条件 (ii) 和 (iii) 成立。 □

引理 19.5 以下结论成立:

(i) A, A^* 当且仅当具有关于 $\mu^* = 0$ 的对偶 q-Krawtchouk 型。

$$\begin{aligned}
\theta_i &= \delta + \mu q^{2i-d} + hq^{d-2i} && (0 \le i \le d),\\
\theta_i^* &= \delta^* + h^* q^{d-2i} && (0 \le i \le d),\\
\varphi_i &= -hh^* q^{d-2i+1}(q^i - q^{-i})(q^{d-i+1} - q^{i-d-1}) && (1 \le i \le d),\\
\phi_i &= -\mu h^* q^{d-2i+1}(q^i - q^{-i})(q^{d-i+1} - q^{i-d-1}) && (1 \le i \le d);
\end{aligned}$$

(ii) A、 A^* 具有带有 $h^* = 0$ 的对偶 q-Krawtchouk 型，当且仅当

$$\begin{aligned}
\theta_i &= \delta + \mu q^{2i-d} + hq^{d-2i} && (0 \le i \le d),\\
\theta_i^* &= \delta^* + \mu^* q^{2i-d} && (0 \le i \le d),\\
\varphi_i &= -\mu\mu^* q^{2i-d-1}(q^i - q^{-i})(q^{d-i+1} - q^{i-d-1}) && (1 \le i \le d),\\
\phi_i &= -h\mu^* q^{2i-d-1}(q^i - q^{-i})(q^{d-i+1} - q^{i-d-1}) && (1 \le i \le d).
\end{aligned}$$

证明。由引理 13.1 和引理 19.4 得。 □

引理 19.6 设 A、 A^* 具有对偶 q-Krawtchouk 型。则

$$\begin{aligned}
&q^{2i} \ne 1 \qquad (1 \le i \le d),\\
&\mu \ne hq^{2i} \qquad (1 - d \le i \le d - 1),\\
&\mu \ne 0, \qquad h \ne 0,\\
&\mu^*,\ h^* \text{ not both zero.}
\end{aligned}$$

证明。使用引理 19.4(ii) 计算引理 13.2 中的不等式。 □

令 $(\{a_i\}_{i=0}^d; \{x_i\}_{i=1}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d)$ 表示与参数数组 (109) 相对应的 A, A^* 的 TD/D 序列。

引理 19.7 以下结论成立：

(i) A、A^* 具有带 $\mu^* = 0$ 的对偶 q-Krawtchouk 型，当且仅当

$$a_i = \delta + (\mu + h)q^{2i-d} \qquad (0 \le i \le d), \tag{116}$$
$$x_i = -\mu h q^{2i-d-1}(q^i - q^{-i})(q^{d-i+1} - q^{i-d-1}) \qquad (1 \le i \le d), \tag{117}$$
$$\theta_i^* = \delta^* + h^* q^{d-2i} \qquad (0 \le i \le d); \tag{118}$$

(ii) A、A^* 具有带有 $h^* = 0$ 的对偶 q-Krawtchouk 型，当且仅当

$$a_i = \delta + (\mu + h)q^{d-2i} \qquad (0 \le i \le d),$$
$$x_i = -\mu h q^{d-2i+1}(q^i - q^{-i})(q^{d-i+1} - q^{i-d-1}) \qquad (1 \le i \le d),$$
$$\theta_i^* = \delta^* + \mu^* q^{2i-d} \qquad (0 \le i \le d).$$

证明。(i) 首先假设 A、A^* 具有带有 $\mu^* = 0$ 的对偶 q-Krawtchouk 型。利用引理 4.10 和 19.5，我们得到 (116)–(118)。接下来假设 (116)–(118) 成立。比较 (118) 与 (65)，我们得到 $\mu^* = 0$。现在由 (14) 和 (64)–(66),

$$a_0 = \delta + (\mu + h)q^{-d} + \frac{\tau}{h^*} q(1 - q^{-2d}).$$

将此与 (116) 比较，我们得到 $\tau q(1 - q^{-2d}) = 0$。由此以及 (69)，我们得到 $\tau = 0$。因此由引理 19.4，我们发现 A、A^* 具有对偶 q-Krawtchouk 型。

(ii) 类似。 □

定义 19.8 若参数数组在 $\mathbb{F}$ 上，则称其具有对偶 q-Krawtchouk 型，当且仅当相应的 Leonard 对具有对偶 q-Krawtchouk 型。

20 个 Krawtchouk 型 Leonard 对

在本小节中，我们描述一族被称为 Krawtchouk 型的 Leonard 对。

在本小节中，令 A, A^* 表示 $\mathbb{F}$ 上具有参数数组的 Leonard 对

$$(\{\theta_i\}_{i=0}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d; \{\varphi_i\}_{i=1}^d; \{\phi_i\}_{i=1}^d). \tag{119}$$

定义 20.1 当以下 (i)–(iii) 条件成立时，称 Leonard 对 A、A^* 具有 Krawtchouk 型：

(i) A, A^* 具有 II 型；

(ii) $\theta_i - \theta_{i-1}$ 对于 $1 \le i \le d$与 i 无关；

(iii) $\theta_i^* - \theta_{i-1}^*$ 对于 $1 \le i \le d$与 i 无关。

注 20.2 Krawtchouk 型 Leonard 对与 Krawtchouk 多项式 [50, Example 35.12]相关。

在本小节的其余部分，假设 A, A^* 的类型为 II 型，并令

$$(\delta, \mu, h, \delta^*, \mu^*, h^*, \tau) \tag{120}$$

表示与参数数组（119）相对应的主数据。

引理 20.3 对于 $1 \le i \le d$，我们有

$$\theta_i - \theta_{i-1} = \mu + (d+1)h - 2hi, \tag{121}$$
$$\theta_i^* - \theta_{i-1}^* = \mu^* + (d+1)h^* - 2h^*i. \tag{122}$$

证明。使用(75)和(76)。 □

引理 20.4 以下各项等价:

(i) A, A^* 具有 Kra
wtchouk 型; (ii) $h = 0$ 和 $h^* = 0$.

假设等价条件 (i) 和 (ii) 成立。那么

$$\theta_i - \theta_{i-1} = \mu, \qquad \theta_i^* - \theta_{i-1}^* = \mu^* \qquad (1 \le i \le d).$$

证明。使用(121)和(122)。 □

注 20.5 定义 20.1 并不是定义19.1 的 II型版本。对于 II 型的情形，定义 19.1 中的条件(ii) 和 (iii) 成立，当且仅当 $\mu h = 0$ and $h^* = 0$。

引理 20.6 Leonard 对 A, A^* 具有 Krawtchouk 型，当且仅当

$$\theta_i = \delta + \mu(i - d/2) \qquad (0 \le i \le d),$$
$$\theta_i^* = \delta^* + \mu^*(i - d/2) \qquad (0 \le i \le d),$$
$$\varphi_i = i(d - i + 1)(\tau - \mu\mu^*/2) \qquad (1 \le i \le d),$$
$$\phi_i = i(d - i + 1)(\tau + \mu\mu^*/2) \qquad (1 \le i \le d)$$

证明。根据引理14.1和20.4。 □

引理20.7 假设 Leonard 对 A, A^* 具有 Krawtchouk 型。那么

$$\mathrm{Char}(\mathbb{F}) \text{ is equal to } 0 \text{ or greater than } d,$$
$$\mu \ne 0, \qquad \mu^* \ne 0,$$
$$2\tau \ne \mu\mu^*, \qquad 2\tau \ne -\mu\mu^*.$$

证明。使用引理 20.4(ii)计算引理 14.2 中的不等式。 □

令 $(\{a_i\}_{i=0}^d; \{x_i\}_{i=1}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d)$ 表示与参数数组 (119) 对应的 A、A^* 的 TD/D 序列。

引理 20.8 Leonard对 A, A^* 具有 Krawtchouk 型，当且仅当

$$a_i = \delta + (2i-d)\tau/\mu^* \qquad (0 \le i \le d), \tag{123}$$

$$x_i = i(d-i+1)\left(\frac{\mu^2}{4} - \frac{\tau^2}{\mu^{*2}}\right) \qquad (1 \le i \le d), \tag{124}$$

$$\theta_i^* = \delta^* + \mu^*(i - d/2) \qquad (0 \le i \le d). \tag{125}$$

证明。首先假设 A, A^* 具有 Krawtchouk 型。由引理 20.4 可得 $h = 0$ 和 $h^* = 0$。现在利用引理 4.10 和 20.6，得到 (123)–(125)。接下来假设 (123)–(125) 成立。比较 (76) 和 (125)，得到 $h^* = 0$。由 (15) 和带有 $h^* = 0$ 的 (75)–(77),

$$a_0 = \delta - \frac{d\tau}{\mu^*} + \frac{d(d-1)h}{2}.$$

由 (123),

$$a_0 = \delta - \frac{d\tau}{\mu^*}.$$

比较上面两个方程，我们发现 $h = 0$。现在，由引理 20.4， A, A^* 具有 Krawtchouk 型。□

定义 20.9 若某个 $\mathbb{F}$ 上的参数数组所对应的 Leonard 对具有 Krawtchouk 型，则称该参数数组具有 Krawtchouk 型。

21 二部且具有对偶 q-Krawtchouk 型的 Leonard 对

在第 18 节中，我们描述了二部 Leonard 对。在第 19 节中，我们描述了具有对偶 q-Krawtchouk 型的 Leonard 对。本节将描述既是二部的，又具有对偶 q-Krawtchouk 型的 Leonard 对。

在本节中，设 A, A^* 表示 $\mathbb{F}$ 上的一个 I 型 Leonard 对，其参数数组为

$$(\{\theta_i\}_{i=0}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d; \{\varphi_i\}_{i=1}^d; \{\phi_i\}_{i=1}^d). \tag{126}$$

将相应的主 q-数据记为

$$(\delta, \mu, h, \delta^*, \mu^*, h^*, \tau). \tag{127}$$

引理 21.1 Leonard 对 A, A^* 是二部的且具有对偶 q-Krawtchouk 型，当且仅当

$$\delta = 0, \qquad \mu + h = 0, \qquad \mu^* h^* = 0, \qquad \tau = 0.$$

证明。由引理 18.1 和 19.4 得出。 □

引理 21.2 以下结论成立:

(i) A, A^* 是二部的，并且具有对偶 q-Krawtchouk 型及 $\mu^* = 0$，当且仅当

$$\begin{aligned}
\theta_i &= \mu(q^{2i-d} - q^{d-2i}) && (0 \le i \le d),\\
\theta_i^* &= \delta^* + h^* q^{d-2i} && (0 \le i \le d),\\
\varphi_i &= \mu h^* q^{d-2i+1}(q^i - q^{-i})(q^{d-i+1} - q^{i-d-1}) && (1 \le i \le d),\\
\phi_i &= -\mu h^* q^{d-2i+1}(q^i - q^{-i})(q^{d-i+1} - q^{i-d-1}) && (1 \le i \le d);
\end{aligned}$$

(ii) A, A^* 是二部的，且在 $h^* = 0$ 的条件下具有对偶 q-Krawtchouk 型，当且仅当

$$\begin{aligned}
\theta_i &= \mu(q^{2i-d} - q^{d-2i}) && (0 \le i \le d),\\
\theta_i^* &= \delta^* + \mu^* q^{2i-d} && (0 \le i \le d),\\
\varphi_i &= -\mu\mu^* q^{2i-d-1}(q^i - q^{-i})(q^{d-i+1} - q^{i-d-1}) && (1 \le i \le d),\\
\phi_i &= \mu\mu^* q^{2i-d-1}(q^i - q^{-i})(q^{d-i+1} - q^{i-d-1}) && (1 \le i \le d).
\end{aligned}$$

证明。由引理18.1和19.5。 □

引理 21.3 假设 A, A^* 是二部的，且具有对偶 q-Krawtchouk 型。那么

$$\begin{aligned}
&q^{2i} \ne 1 \qquad (1 \le i \le d),\\
&q^{2i} \ne -1 \qquad (1 \le i \le d-1),\\
&\mu \ne 0,\\
&\mu^*,\ h^* \text{ not both zero.}
\end{aligned}$$

证明。由引理 18.3 和 21.1 得出。 □

令 $(\{a_i\}_{i=0}^d; \{x_i\}_{i=1}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d)$ 表示与参数数组 (126) 对应的 A, A^* 的 TD/D 序列。

引理 21.4 下列结论成立:

(i) A, A^* 是二部的，且具有对偶 q-Krawtchouk 型，满足 $\mu^* = 0$，当且仅当

$$\begin{aligned}
a_i &= 0 && (0 \le i \le d),\\
x_i &= \mu^2 q^{2i-d-1}(q^i - q^{-i})(q^{d-i+1} - q^{i-d-1}) && (1 \le i \le d),\\
\theta_i^* &= \delta^* + h^* q^{d-2i} && (0 \le i \le d);
\end{aligned}$$

(ii) A, A^* 是二部的，且具有对偶 q-Krawtchouk 型，满足 $h^* = 0$，当且仅当

$$\begin{aligned}
a_i &= 0 && (0 \le i \le d),\\
x_i &= \mu^2 q^{d-2i+1}(q^i - q^{-i})(q^{d-i+1} - q^{i-d-1}) && (1 \le i \le d),\\
\theta_i^* &= \delta^* + \mu^* q^{2i-d} && (0 \le i \le d)。
\end{aligned}$$

证明。由引理 19.7 和 21.1。 □

22 二部且具有 Krawtchouk 型的 Leonard 对

在第18 节中，我们描述了二部 Leonard 对。在第 20 节中，我们描述了 Krawtchouk 型的 Leonard 对。在本小节中，我们描述既是二部的又具有 Krawtchouk 型的 Leonard 对。

在本小节中，设 A, A^* 是 $\mathbb{F}$ 上具有 II 型参数数组的 Leonard 对

$$(\{\theta_i\}_{i=0}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d; \{\varphi_i\}_{i=1}^d; \{\phi_i\}_{i=1}^d). \tag{128}$$

用下式表示相应的主数据

$$(\delta, \mu, h, \delta^*, \mu^*, h^*, \tau). \tag{129}$$

引理 22.1 Leonard 对 A, A^* 是二部的且具有 Krawtchouk 型，当且仅当

$$\delta = 0, \qquad h = 0, \qquad h^* = 0, \qquad \tau = 0.$$

证明。由引理 18.5 和 20.4 可得。 □

引理 22.2 Leonard 对 A, A^* 是二部的且具有 Krawtchouk 型，当且仅当

$$\begin{aligned}
\theta_i &= \mu(i - d/2) && (0 \le i \le d),\\
\theta_i^* &= \delta^* + \mu^*(i - d/2) && (0 \le i \le d),\\
\varphi_i &= -\mu\mu^* i(d - i + 1)/2 && (1 \le i \le d),\\
\phi_i &= \mu\mu^* i(d - i + 1)/2 && (1 \le i \le d).
\end{aligned}$$

证明。由引理 18.5 和 20.6 得出。 □

引理 22.3 假设 Leonard 对 A, A^* 是二部的，且具有 Krawtchouk 型。那么

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Char}(\mathbb{F}) \text{ is equal to } 0 \text{ or greater than } d,\\
&\mu \ne 0, \qquad \mu^* \ne 0.
\end{aligned}$$

证明。由引理 20.7 和 22.1 得出 □

令 $(\{a_i\}_{i=0}^d; \{x_i\}_{i=1}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d)$ 表示与参数数组 (128) 对应的 A, A^* 的 TD/D 序列。

引理 22.4 Leonard 对 A, A^* 是二部的且具有 Krawtchouk 型，当且仅当

$$\begin{aligned}
a_i &= 0 && (0 \le i \le d),\\
x_i &= \mu^2 i(d - i + 1)/4 && (1 \le i \le d)\ ,\\
\theta_i^* &= \delta^* + \mu^*(i - d/2) && (0 \le i \le d)\ 。
\end{aligned}$$

证明。使用引理 18.5 和 20.8。 □

23 双对偶 q-Krawtchouk 型的近二部 Leonard 对

在本小节中，我们确定了对偶 q-Krawtchouk 型的近二部 Leonard 对，并描述了它们的二部收缩。

在本小节中，设 A, A^* 表示一个定义在 $\mathbb{F}$ 上、具有双对偶 q-Krawtchouk 型的 Leonard 对。设

$$(\{\theta_i\}_{i=0}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d; \{\varphi_i\}_{i=1}^d; \{\phi_i\}_{i=1}^d) \tag{130}$$

表示 A, A^* 的一个参数数组，并设

$$(\{a_i\}_{i=0}^d; \{x_i\}_{i=1}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d) \tag{131}$$

表示相应的 TD/D 序列。设

$$(\delta, \mu, h, \delta^*, \mu^*, h^*, \tau) \tag{132}$$

表示与参数数组 (130) 对应的主要 q-数据。由引理 19.4 可知，$\mu^* h^* = 0$ 和 $\tau = 0$。根据引理18.1 和 (98)，我们给出一个定义。

定义 23.1 定义 δ', μ', h', τ' 为 $\mathbb{F}$ 中满足下列条件的标量

$$\delta' = 0, \qquad \mu' + h' = 0, \qquad \mu' h' = \mu h, \qquad \tau' = 0. \tag{133}$$

定义 23.2 按如下方式定义 $\mathbb{F}$ 中的标量 $\{\theta_i'\}_{i=0}^d$、$\{\varphi_i'\}_{i=1}^d$、$\{\phi_i'\}_{i=1}^d$。

(i) 如果 $\mu^* = 0$，则

$$\begin{aligned}
\theta_i' &= \mu' q^{2i-d} + h' q^{d-2i} && (0 \le i \le d),\\
\varphi_i' &= \mu' h^* q^{d-2i+1}(q^i - q^{-i})(q^{d-i+1} - q^{i-d-1}) && (1 \le i \le d),\\
\phi_i' &= h' h^* q^{d-2i+1}(q^i - q^{-i})(q^{d-i+1} - q^{i-d-1}) && (1 \le i \le d)
\end{aligned}$$

(ii) 若 $h^* = 0$，则

$$\begin{aligned}
\theta_i' &= \mu' q^{2i-d} + h' q^{d-2i} && (0 \le i \le d),\\
\varphi_i' &= h' \mu^* q^{2i-d-1}(q^i - q^{-i})(q^{d-i+1} - q^{i-d-1}) && (1 \le i \le d),\\
\phi_i' &= \mu' \mu^* q^{2i-d-1}(q^i - q^{-i})(q^{d-i+1} - q^{i-d-1}) && (1 \le i \le d).
\end{aligned}$$

引理 23.3 令 F 表示 A 的平坦部分。那么，$A - F$ 的特征值为 $\{\theta_i'\}_{i=0}^d$。

证明。我们可以假设 A, A^* 是规范化TD/D形式。矩阵 $A - F$ 显示于(26)中。定义一个矩阵 $B \in \mathrm{Mat}_{d+1}(\mathbb{F})$，其 (i, i)-项为 θ_i'（对于 $0 \le i \le d$），且 $(i, i-1)$-项为1（对于 $1 \le i \le d$）。B 的所有其他项均为零。定义上三角矩阵 $P \in \mathrm{Mat}_{d+1}(\mathbb{F})$，其 (i, j)-项

$$P_{i,j} = \frac{\varphi_1' \varphi_2' \cdots \varphi_j'}{\varphi_1' \varphi_2' \cdots \varphi_i'} \frac{\eta_{d-j}^*(\theta_i^*)}{\eta_{d-i}^*(\theta_i^*)}$$

对于 $0 \le i \le j \le d$。注意 $P_{i,\ i} = 1$ 对于 $0 \le i \le d$。因此 P 可逆。通过矩阵乘法，我们可以直接得出

$$(A - F)P = PB.$$

矩阵 $A - F$和 B相似，因此它们具有相同的特征值。 B 的特征值为 $\{\theta'_i\}_{i=0}^d$。结论得证。□

引理 23.4 参照定义 23.2，以下各项等价：

(i) $\{\theta'_i\}_{i=0}^d$ 两两不同；(ii) $q^{2i} \ne -1$ 对于 $1 \le i \le d-1$。

证明。对于 $0 \le i,\ j \le d$,

$$\theta'_i - \theta'_j = \mu'(q^{i-j} - q^{j-i})(q^{d-i-j} + q^{i+j-d}).$$

因此，对于 $0 \le i < j \le d$, $\theta'_i \ne \theta'_j$ 当且仅当 $q^{2(j-i)} \ne 1$ 且 $q^{2(d-i-j)} \ne -1$。由 (69)，$q^{2(i-j)} \ne 1$ 对于 $0 \le i < j \le d$。因此，$\theta'_i \ne \theta'_j$ 对于 $0 \le i < j \le d$ 当且仅当 $q^{2(d-i-j)} \ne -1$ 对于$0 \le i < j \le d$ 当且仅当 $q^{2i} \ne -1$ 对于 $1 \le i \le d-1$。□

引理 23.5 参照引理 23.4，假设等价条件 (i) 和 (ii) 成立。则以下结论成立：

(i) 序列

$$(\{\theta'_i\}_{i=0}^d; \{\theta^*_i\}_{i=0}^d; \{\varphi'_i\}_{i=1}^d; \{\phi'_i\}_{i=1}^d) \tag{134}$$

是 $\mathbb{F}$ 上的一个参数数组；

(ii) 序列

$$(\delta', \mu', h', \delta^*, \mu^*, h^*, \tau') \tag{135}$$

是与参数数组 (134) 对应的主 q-数据；

(iii) 参数数组 (134) 是二部的，且具有对偶 q-Krawtchouk 型。

证明。(i)、(ii) 使用引理 13.1 和引理 13.2。
(iii) 根据引理 21.2。 □

引理 23.6 对于 $1 \le i \le d$，我们有 $\varphi_i \phi_i = \varphi'_i \phi'_i$。

证明。使用引理 16.1。 □

命题 23.7 令 F 表示 A 的平坦部分。那么以下各项等价:

(i) Leonard 对 A, A^* 是近二部的;
(ii) $A-F$ 可对角化; (iii) $A-F$ 无重数;
(iv) 对于 $1 \leq i \leq d-1$, $q^{2i} \neq -1$ 。

设 (i)–(iv) 成立。则 A, A^* 的二部收缩具有参数数组 (134).

证明. (i) $\Rightarrow$ (ii) 根据定义 8.2, $A-F, A^*$ 是一个 Leonard 对。由此以及定义 3.1, $A-F$ 可对角化。
(ii) $\Rightarrow$ (iii) 我们不妨假设 $A-F$ 是不可约三对角矩阵。现在使用引理 2.2。

(iii) $\Rightarrow$ (iv) 根据引理 23.3, $\{\theta_i'\}_{i=0}^d$ 是 $A-F$ 的特征值。由于 $A-F$ 无重数, 这些特征值两两不同。由此以及引理 23.4, 我们得到 (iv) (iv) $\Rightarrow$(i) 注意, 根据引理 23.5(i), (134) 是 $\mathbb{F}$ 上的参数数组。现在使用引理 8.12 和引理 23.6。□

定义 23.8 若 $q^{2i} \neq -1$ for$1 \leq i \leq d-1$, 则称 Leonard 对 A, A^* 是强化的。

推论 23.9 Leonard 对 A, A^* 是近二部的, 当且仅当 A, A^* 是强化的。在此情形下, A, A^* 的二部收缩具有强化的对偶 q-Krawtchouk 型, 其参数数组为 (134)。

证明。由引理 23.5(iii) 和命题 23.7 得出。 □

我们有一条评论。

引理 23.10 假设 q 不是单位根, 则 A, A^* 是强化的。

24 Krawtchouk 型的 Leonard 对是近二部的

在本小节中, 我们证明Krawtchouk 型 Leonard 对是近二部的, 并描述其二部收缩。

在本小节中, 令 A、A^* 表示一个定义在 $\mathbb{F}$ 上的 Krawtchouk 型 Leonard 对, 并具有参数数组

$$(\{\theta_i\}_{i=0}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d; \{\varphi_i\}_{i=1}^d; \{\phi_i\}_{i=1}^d) \tag{136}$$

以及相应的 TD/D 序列

$$(\{a_i\}_{i=0}^d; \{x_i\}_{i=1}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d). \tag{137}$$

Let

$$(\delta, \mu, h, \delta^*, \mu^*, h^*, \tau) \tag{138}$$

表示与参数数组 (136) 相对应的主数据。根据引理 18.5 和 (103)，我们作如下定义。

定义 24.1 定义标量 δ', μ', h', τ'，使其属于 $\mathbb{F}$，满足

$$\delta' = 0, \qquad h' = 0, \qquad \tau' = 0, \qquad \mu'^2 = \mu^2 - \frac{4\tau^2}{\mu^{*2}}. \tag{139}$$

定义 24.2 定义标量

$$\begin{aligned} \theta'_i &= \mu'(i - d/2) && (0 \le i \le d), \\ \varphi'_i &= -\mu'\mu^* i(d - i + 1)/2 && (1 \le i \le d), \\ \phi'_i &= \mu'\mu^* i(d - i + 1)/2 && (1 \le i \le d)。 \end{aligned}$$

引理 24.3 以下结论成立：

(i) 序列

$$(\{\theta'_i\}_{i=0}^d; \{\theta^*_i\}_{i=0}^d; \{\varphi'_i\}_{i=1}^d; \{\phi'_i\}_{i=1}^d) \tag{140}$$

是 $\mathbb{F}$ 上的参数数组；

(ii) 序列

$$(\delta', \mu', h', \delta^*, \mu^*, h^*, \tau') \tag{141}$$

是与参数数组 (140) 对应的主数据；

(iii) 参数数组 (140) 是二部的，并且具有 Krawtchouk 型。

证明。(i)、(ii) 根据引理20.7注意到 $\mu' \neq 0$。现在使用引理14.1和引理14.2。(iii) 根据引理 22.2。 □

引理 24.4 对于 $1 \le i \le d$，我们有 $\varphi_i \phi_i = \varphi'_i \phi'_i$。

证明。使用引理 16.2。 □

命题 24.5 Leonard 对 A, A^* 是近二部的。A, A^* 的二部收缩具有 Krawtchouk 型参数数组 (140)。

证明。根据引理24.3，序列 (140) 是 $\mathbb{F}$ 上的参数数组，它是二部的，并且具有Krawtchouk 型。现在使用引理 8.12 和 24.4。□

25 近二部 Leonard 对的分类

在本小节中，我们对直径至少为 3 的近二部 Leonard 对进行分类。在第 8 小节中，我们看到本质二部的 Leonard 对是近二部的。在第 23 小节中，我们证明， q-Krawtchouk 型的对偶 Leonard 对 A, A^* 是近二部的，当且仅当 A, A^* 是强化的；在这种情况下， A, A^* 的二部收缩具有强化的对偶 q-Krawtchouk 型。在第 24 小节中，我们证明 Krawtchouk 型的 Leonard 对是近二部的，且其二部收缩具有 Krawtchouk 型。现在我们陈述分类结果。

定理 25.1 设 A, A^* 表示一个直径为 $d \geq 3$ 的 $\mathbb{F}$ 上的 Leonard 对。那么，当且仅当以下 (i)–(iii) 中至少一项成立时， A, A^* 是近二部的：

(i) A, A^* 是本质二部的；

(ii) A, A^* 具有强化的对偶 q-Krawtchouk 型；

(iii) A, A^* 具有 Krawtchouk 型。

证明。首先假设 (i)–(iii) 中至少一项成立。若 (i) 成立，则根据注 8.3， A, A^* 是近二部的。若 (ii) 成立，则根据推论 23.9， A, A^* 是近二部的。若 (iii) 成立，则根据命题 24.5， A, A^* 是近二部的。一个方向的证明就此完成。接下来假设 A, A^* 是近二部的，并令 B, A^* 表示 A, A^* 的二部收缩。根据引理 5.3，我们不妨假设 A, A^* 处于规范化 TD/D 形式。令

$$(\{\theta_i\}_{i=0}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d; \{\varphi_i\}_{i=1}^d; \{\phi_i\}_{i=1}^d), \qquad (\{\theta_i'\}_{i=0}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d; \{\varphi_i'\}_{i=1}^d; \{\phi_i'\}_{i=1}^d) \tag{142}$$

分别表示 A、 A^* 和 B、 A^* 的参数数组。由引理 17.13， B、 A^* 不具有 III 型$^-$。回想一下， A、 A^* 与 B、 A^* 具有相同的类型。因此， A、 A^* 的类型为 I、II 或 III$^+$。

首先假设 A、 A^* 具有 I 型。对于 (142) 中的参数数组，令

$$(\delta, \mu, h, \delta^*, \mu^*, h^*, \tau), \qquad (\delta', \mu', h', \delta^*, \mu^*, h^*, \tau')$$

表示相应的主 q-数据。由引理 8.11 和 16.1，我们有 (98)–(100)。由于 B、 A^* 是二部的，由引理18.1 可得

$$\tau' = 0, \qquad \mu' + h' = 0.$$

由上述说明,

$$\tau(\mu + h) = 0, \tag{143}$$

$$\tau^2 + (\mu + h)^2 \mu^* h^* = 0. \tag{144}$$

首先假设 $\mu + h = 0$。然后根据(144)， $\tau = 0$。现在根据引理17.1， A， A^* 是本质二部的。接下来假设 $\mu + h \neq 0$。根据(143)， $\tau = 0$。由此以及 (144)， $\mu^* h^* = 0$。因此A， A^* 根据引理19.4具有对偶 q-Krawtchouk 型。根据推论 23.9， A， A^* 是强化的。

我们已经证明， A, A^* 或者是本质二部的，或者是强化的对偶 q-Krawtchouk 型。

接下来假设 A, A^* 为 II 型。对于 (142) 中的参数数组，令

$$(\delta, \mu, h, \delta^*, \mu^*, h^*, \tau), \qquad (\delta', \mu', h', \delta^*, \mu^*, h^*, \tau')$$

表示相应的主数据。由引理 8.11 和 16.2，得到 (101)–(103)。由于 B, A^* 是二部的，由引理 18.5 可知

$$\tau' = 0, \qquad h' = 0.$$

由上述说明，

$$h = 0, \tag{145}$$

$$(\mu^2 - \mu'^2)h^* = 0, \tag{146}$$

$$4\tau^2 = (\mu^2 - \mu'^2)\big(\mu^{*2} + (d-1)^2 h^{*2}\big). \tag{147}$$

首先假设 $h^* = 0$。那么由引理 20.4， A, A^* 为 Krawtchouk 型。接下来假设 $h^* \neq 0$。那么由 (146)， $\mu^2 - \mu'^2 = 0$。由此及 (147)，得到 $\tau = 0$。由上述说明及引理 17.5， A, A 是本质二部的。我们已经证明， A, A^* 或者是本质二部的，或者是 Krawtchouk 型。

接下来假设 A, A^* 为 III$^+$ 型。对于 (142) 中的参数数组，令

$$(\delta, s, h, \delta^*, s^*, h^*, \tau), \qquad (\delta', s', h', \delta^*, s^*, h^*, \tau')$$

表示相应的主数据。由引理 8.11 和 16.3，得到 (104)–(106)。由于 B, A^* 是二部的，由引理 18.9 可知

$$\tau' = 0, \qquad s' = 0.$$

由这些说明，

$$\tau + sh^* = 0, \qquad \tau - sh^* = 0.$$

由 (92) 得 $h^* \neq 0$ ，因此 $\tau = 0$ 和 $s = 0$。由此以及引理 17.9， A, A^* 是本质二部的。□

26 具有强化的对偶 q-Krawtchouk 型的二部 Leonard 对的近二部扩张

在定理 25.1 中，我们对直径为 $d \geq 3$的近二部Leonard对进行了分类。我们的下一个目标是描述给定的直径为 $d \geq 3$ 的二部Leonard对 B、 A^* 的近二部扩张 A、 A^* 。鉴于定理 25.1及其上文的讨论，我们可以假设 B、 A^* 具有强化的对偶 q-Krawtchouk型或Krawtchouk型。在本小节中，我们假设 B、 A^* 具有强化的对偶 q-Krawtchouk 型。在第 27 节中，我们假设 B、 A^* 具有 Krawtchouk 型。

在本小节的其余部分，我们假设 B, A^* 具有强化的对偶 q-Krawtchouk 型。令

$$(\{\theta'_i\}_{i=0}^d; \{\theta^*_i\}_{i=0}^d; \{\varphi'_i\}_{i=1}^d; \{\phi'_i\}_{i=1}^d) \tag{148}$$

表示 B, A^* 的一个参数数组。令

$$(\delta', \mu', h', \delta^*, \mu^*, h^*, \tau') \tag{149}$$

表示与参数数组 (148) 对应的主要 q-数据。根据引理 21.1,

$$\delta' = 0, \qquad \mu' + h' = 0, \qquad \mu^* h^* = 0, \qquad \tau' = 0. \tag{150}$$

由引理 19.6 可知, $\mu' h' \neq 0$。

定理 26.1 对于标量 $\delta, \mu, h, \tau \in \mathbb{F}$, 以下条件等价:

(i) 序列

$$(\delta, \mu, h, \delta^*, \mu^*, h^*, \tau) \tag{151}$$

是 B, A^* 的近二分扩张 A, A^* 的主要 q-数据;

(ii) 满足以下条件:

$$\mu \neq 0, \tag{152}$$
$$\mu \neq \pm\sqrt{-1}\mu' q^i \qquad (1 - d \leq i \leq d - 1), \tag{153}$$
$$\tau = 0, \tag{154}$$
$$h = \mu' h' / \mu. \tag{155}$$

假设 (i) 和 (ii) 成立。那么 A, A^* 具有强化的对偶 q-Krawtchouk 型。

证明. (i) $\Rightarrow$ (ii) 令

$$(\{\theta_i\}_{i=0}^d; \{\theta^*_i\}_{i=0}^d; \{\varphi_i\}_{i=1}^d; \{\phi_i\}_{i=1}^d) \tag{156}$$

表示与主 q-数据 (151) 对应的 A, A^* 的参数数组。由引理 8.13, $\varphi_i \phi_i = \varphi'_i \phi'_i$ 对于 $1 \leq i \leq d$。由此及引理 16.1, (98)–(100) 成立。由 (98) 且由于 $\mu' h' \neq 0$, 得到 (152)。由此及 (98), 得到 (155)。由 (99) 和 (150),

$$\tau(\mu + h) = 0. \tag{157}$$

若 $\mu + h \neq 0$, 则由 (157) 得到 $\tau = 0$ 。若 $\mu + h = 0$, 则由 (100) 和 (150) 得到 $\tau = 0$ 。因此我们得到 (154)。由引理 13.2, $\mu \neq h q^{2i}$ 对于 $1 - d \leq i \leq d - 1$。由此以及 (150)、(155), 得到 (153)。我们已证明 (152)–(155) 成立。

(ii) $\Rightarrow$ (i) 我们首先证明 (69)–(73) 成立。由于 (149) 是一个 primary q-数据, 故 (69) 和 (71) 成立。由 (150) 得到 $h' = -\mu'$。由此以及 (153)、(155), 我们得到 (70)。由 (150) 得到 $\mu^* h^* = 0$。根据引理 21.3, μ^* 和 h^* 不可能同时为零。由 (152), $\mu \neq 0$。由 (155), 有 $h \neq 0$ 。由 (154), $\tau = 0$。综上可得 (72) 和 (73)。

我们已经证明 (69)–(73) 成立。因此 (151) 是一个 primary q-数据。由 (64)、(66)、(67) 定义标量$\{\theta_i\}_{i=0}^d$、 $\{\varphi_i\}_{i=1}^d$、 $\{\phi_i\}_{i=1}^d$ 。根据引理 13.1 和引理 13.2，序列

$$(\{\theta_i\}_{i=0}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d; \{\varphi_i\}_{i=1}^d; \{\phi_i\}_{i=1}^d) \tag{158}$$

是对应于 (151) 的 $\mathbb{F}$ 上的参数数组。由 (150) 和 (152)–(155)，我们得到 (98)–(100) 成立。由此以及引理 16.1， $\varphi_i\phi_i = \varphi_i'\phi_i'$ 对于 $1 \le i \le d$。由此以及引理 8.13，存在 B, A^* 的一个近二分扩张 A, A^*，其参数数组为 (158)。根据构造，序列 (151) 是 A, A^* 的一个初级 q-数据。

假设 (i) 和 (ii) 成立。由引理 19.4 和 (150)、(154)，我们发现 A, A^* 具有对偶 q-Krawtchouk 型。此外，由于 B, A^* 是强化的，因此 A, A^* 也是强化的。□

我们的下一个目标是用矩阵描述 B、 A^* 的近二部扩张。在此描述中，我们将使用以下矩阵。

定义26.2令 $K \in \mathrm{Mat}_{d+1}(\mathbb{F})$ 表示其(i,i)-项对于 $0 \le i \le d$ 为 q^{2i-d} 的对角矩阵。

根据引理5.3，我们可以假设 B, A^* 处于规范化 TD/D 形式：

$$B = \begin{pmatrix} 0 & x_1' & & & & \mathbf{0} \\ 1 & 0 & x_2' & & & \\ & 1 & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & x_d' \\ \mathbf{0} & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^* = \mathrm{diag}(\theta_0^*, \theta_1^*, \ldots, \theta_d^*).$$

定理 26.3给定标量 δ、 μ、 h、 $\tau \in \mathbb{F}$，它们满足定理26.1中的等价条件(i) 和(ii)。令 A、A^* 表示 B、A^* 的近二分扩张，其具有主 q-数据(δ、 μ、 h、 δ^*、 μ^*、 h^*、 τ)。

(i) 假设 $\mu^* = 0$。那么

$$A = B + (\mu + h)K + \delta I.$$

(ii) 假设 $h^* = 0$。那么

$$A = B + (\mu + h)K^{-1} + \delta I.$$

证明。根据引理 8.10，Leonard对 A、A^* 处于规范化 TD/D形式。令 $(\{a_i\}_{i=0}^d; \{x_i\}_{i=1}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d)$ 表示 A、A^* 的 TD/D 序列。由引理 19.7 可见，

$$a_i = \begin{cases} \delta + (\mu + h)q^{2i-d} & \text{if } \mu^* = 0, \\ \delta + (\mu + h)q^{d-2i} & \text{if } h^* = 0 \end{cases} \qquad (0 \le i \le d).$$

根据这些评论和定义 26.2，我们得出该结果。 □

27 具有 Krawtchouk 型的二部 Leonard 对的近二部扩张

在本小节中，我们描述具有 Krawtchouk 型的给定二部 Leonard 对 B, A^* 的近二部扩张 A, A^*。令

$$(\{\theta'_i\}_{i=0}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d; \{\varphi'_i\}_{i=1}^d; \{\phi'_i\}_{i=1}^d) \tag{159}$$

表示 B, A^* 的一个参数数组。令

$$(\delta', \mu', h', \delta^*, \mu^*, h^*, \tau') \tag{160}$$

表示与参数数组 (159) 对应的主数据。根据引理 22.1,

$$\delta' = 0, \qquad h' = 0, \qquad h^* = 0, \qquad \tau' = 0. \tag{161}$$

定理 27.1 对于标量 δ, μ, h, τ，在 $\mathbb{F}$ 中下列条件等价:

(i) 序列

$$(\delta, \mu, h, \delta^*, \mu^*, h^*, \tau) \tag{162}$$

是 B, A^* 的一个近二分扩张 A, A^* 的主数据;

(ii) 满足以下条件:

$$\mu \neq 0, \tag{163}$$
$$h = 0, \tag{164}$$
$$4\tau^2 = (\mu^2 - \mu'^2)\mu^{*2}. \tag{165}$$

假设 (i) 和 (ii) 成立。则 A, A^* 具有 Krawtchouk 型。

证明。(i) $\Rightarrow$ (ii) 设

$$(\{\theta_i\}_{i=0}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d; \{\varphi_i\}_{i=1}^d; \{\phi_i\}_{i=1}^d) \tag{166}$$

表示与(162)对应的 A, A^* 的参数数组。由引理8.13，$\varphi_i\phi_i = \varphi'_i\phi'_i$对于 $1 \leq i \leq d$。由此及引理 16.2，(101)–(103)成立。由(101)和(161)可得(164)。由此及(81)可得(163)。由(103)、(161)、(164)可得(165)。

(ii) $\Rightarrow$ (i) 我们首先证明 (80)–(84) 成立。由于 (160) 是 II 型主数据，因此 (80) 和 (82) 成立。由 (163) 和 (164) 可得 (81)。由 (161)、(164)、(165) 可得 (83) 和 (84)。我们已经证明 (80)–(84) 成立。因此，(162) 是 II 型主数据。由 (75)、(77)、(78) 定义标量 $\{\theta_i\}_{i=0}^d$、$\{\varphi_i\}_{i=1}^d$、$\{\phi_i\}_{i=1}^d$。根据引理 14.1 和 14.2，序列

$$(\{\theta_i\}_{i=0}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d; \{\varphi_i\}_{i=1}^d; \{\phi_i\}_{i=1}^d) \tag{167}$$

是对应于 II 型主数据 (162) 的参数数组。由 (161) 和 (163)–(165)，可得 (101)–(103)。由此以及引理16.2，$\varphi_i\phi_i = \varphi'_i\phi'_i$ 对于 $1 \leq i \leq d$。

由此以及引理 8.13，存在 B的近二分扩张 A， A^*，其参数数组为 (167)。根据构造，(162) 是 A的主数据。

假设 (i)和(ii)成立。由(161) 和(164)，我们有 $h = 0$ 和 $h^* = 0$。由此以及引理 20.4，Leonard对 A、A^* 具有 Krawtchouk 型。□

我们的下一个目标是用矩阵描述 B、A^* 的近二部扩张。在此描述中，我们将使用以下矩阵。

定义 27.2 定义对角矩阵 $H \in \mathrm{Mat}_{d+1}(\mathbb{F})$，其 (i,i)-项为 $2i - d$ for$0 \leq i \leq d$。

根据引理5.3，我们可以假设 B, A^* 处于规范化 TD/D 形式：

$$B = \begin{pmatrix} 0 & x_1' & & & \mathbf{0} \\ 1 & 0 & x_2' & & \\ & 1 & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot & x_d' \\ \mathbf{0} & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^* = \mathrm{diag}(\theta_0^*, \theta_1^*, \ldots, \theta_d^*).$$

定理 27.3 给定标量 δ、μ、h、$\tau \in \mathbb{F}$，它们满足定理 27.1 中的等价条件 (i) 和 (ii)。令 A、A^* 表示具有主数据 (δ、μ、h、δ^*、μ^*、h^*、τ) 的 B、A^* 的近二分扩张。那么

$$A = B + (\tau/\mu^*)H + \delta I.$$

证明。根据引理 8.10，Leonard对 A, A^* 处于规范化 TD/D 形式。令 $(\{a_i\}_{i=0}^d; \{x_i\}_{i=1}^d; \{\theta_i^*\}_{i=0}^d)$表示 A, A^* 的 TD/D 序列。根据引理 20.8，

$$a_i = \delta + (2i - d)\tau/\mu^* \qquad (0 \leq i \leq d).$$

根据这些评论和定义 27.2，我们得到该结果。 □

参考文献

[1] H. Alnajjar，来自 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 等距生成元的 Leonard 对，Dirasat, Pure Sciences 37 (2010) 31–35。[2] H. Alnajjar，B. Curtin，与量子仿射代数$U_q(\mathfrak{sl}_2)$相关的一族三对角对，Electron. J. Linear Algebra 13 (2005) 1–9。[3] J. M. P. Balmeceda，J. P. Maralit，来自李代数 $\mathfrak{sl}_2$标准基所构造的 Leonard 对的 Leonard 三元组，Linear Algebra Appl. 437 (2012) 1961–1977。[4] E. Bannai，Et. Bannai，T. Ito，R. Tanaka，《代数组合学》，De Gruyter，2021。[5] E. Bannai，T. Ito，《代数组合学 I：关联方案》，Benjamin/Cummings Publishing Co. Inc.，Menlo Park，CA，1984。

[6] P. Baseilhac，与三对角代数相关的可积结构，Nuclear Phys. B 705 (2005) 605–619。[7] P. Baseilhac，量子可积模型中的变形 Dolan-Grady 关系，Nuclear Phys. B 709 (2005) 491–521。[8] P. Baseilhac，Onsager 代数的 q-变形类比：超越 Bethe Ansatz 方法，Nuclear Phys. B 754 (2006) 309–328。[9] P. Baseilhac，一族三对角对及相关对称函数，J. Phys. A 39 (2006) 11773–11791。[10] P. Baseilhac，S. Belliard，Onsager 方法中的半无限 XXZ 链，Nuclear Phys. B 873 (2013) 550–584。[11] P. Baseilhac，K. Koizumi， XXZ 开放自旋链中 Onsager 对称性的变形类比，J. Stat. Mech. Theory E.，P10005，15 页，2005。[12] P. Baseilhac，K. Koizumi，从 q-Onsager 代数表示理论得到的 XXZ 开放自旋链的精确谱，J. Stat. Mech. Theory E.，P09006，27 页，2007。[13] G. Benkart，P. Terwilliger，量子仿射代数 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$及其 Borel 子代数的不可约模，J. Algebra 282 (2004) 172–194。[14] S. Bockting-Conrad， q-Racah 型三对角对、双降算子 ψ以及量子代数 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$，Linear Algebra Appl. 445 (2014) 256–279。[15] S. Bockting-Conrad，P. Terwilliger，伪装形式的代数 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$，Linear Algebra Appl. 459 (2014) 548–585。[16] G. M. F. Brown，完全二部/二部 Leonard 对以及 Bannai/Ito 型 Leonard 三元组，Electron. J. Linear Algebra 26 (2013) 258–299。[17] J. S. Caughman IV，N. Wolff，支持自旋模型的距离正则图的 Terwilliger 代数，J. Algebraic Combin. 21 (2005) 289–310。[18] B. Curtin，自旋 Leonard 对，Ramanujan J. 13 (2007) 319–332[19] B. Curtin，K. Nomura，距离正则图上自旋模型的一些公式，J. Comb. Theory B 75 (1999) 206–236。[20] Ph. Delsarte，编码理论关联方案的代数方法，Philips Res. Rep. Suppl. 10 (1973)。[21] B. Hartwig，三个两两相邻的 Leonard 对，Linear Algebra Appl. 408 (2005) 19–39。[22] B. Hartwig，四面体代数及其有限维不可约模，Linear Algebra Appl. 422 (2007) 219–235。[23] H. Huang，类型为 $(C_1^\vee, C_1)$ 的泛 DAHA 的有限维不可约模，Linear and Multilinear Algebra (2020) 1–28，DOI 10.1080/03081087.2020.1817297。[24] H. Huang，类型为 $(C_1^\vee, C_1)$ 的泛 DAHA 与 Leonard 三元组，Comm. Algebra 49 (2021) 1255–1273。[25] P. Iliev，P. Terwilliger，Rahman 多项式与李代数 $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$，Trans. Amer. Math. Soc. 364 (2012) 4225–4238。[26] T. Ito，H. Rosengren，P. Terwilliger， q-四面体代数的赋值模，Linear Algebra Appl. 451 (2014) 107–168。

≁[27] T.Ito,P.Terwilliger, 三对角对与量子仿射代数 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$，Ramanujan J. 13 (2007) 39–62.[28] T. Ito,P. Terwilliger， q-Racah 型三对角对，J. Algebra 322 (2009) 68–93.[29] T. Ito,P. Terwilliger，三点 $\mathfrak{sl}_2$ 环代数的有限维不可约模，Comm.Algebra 36(2008)4557–4598.[30] J. H.Lee， Q-多项式距离正则图与秩一双仿射 Hecke 代数，Linear AlgebraAppl. 439(2013) 3184–3240.[31] J. H. Lee,H.Tanaka，对偶极图、秩一 nil-DAHA 与非对称对偶q-Krawtchouk 多项式，SIGMA 14 (2018),009, 27pp.[32] D. Leonard，正交多项式、对偶性与关联方案，SIAM J.Math. Anal.13(1982) 656–663.[33] W. Liu，削弱空间偏序集 $\mathcal{A}_q(N,M)$，Linear AlgebraAppl. 506 (2016) 244–273.[34] W.J.Martin,H. Tanaka，交换关联方案，Eur. J. Combin. 30 (2009) 1497– 1525.[35] K. Nomura, P. Terwilliger，平衡 Leonard对，Linear Algebra Appl.420 (2007) 51–69.[36] K. Nomura, P. Terwilliger，Leonard 对的仿射变换，Electron.J. LinearAlgebra 16 (2007) 389–418.[37] K. Nomura,P. Terwilliger，Krawtchouk 多项式、李代数 $\mathfrak{sl}_2$与 Leonard对，Linear AlgebraAppl. 437 (2012) 345–375.[38] K. Nomura, P. Terwilliger，类型 $(C_1^\vee, C_1)$ 的泛 DAHA 与 q-Racah型 Leonard对，Linear Algebra Appl.533 (2017) 14–83.[39] K. Nomura,P.Terwilliger，全二部三对角对，Electron.J. LinearAlgebra 37 (2021) 434–491.[40] K. Nomura, P. Terwilliger，幂等元系统，Algebraic Comb.4 (2021) 329–357.[41] K. Nomura, P.Terwilliger，Leonard 对、自旋模型与距离正则图，J. Combin.Theory A 177(2021) 105312.[42] K. Nomura, P. Terwilliger，Leonard 对的相容性与伴随对象，Electron. J. LinearAlgebra, 37 (2022) 404–456.[43] H. Tanaka，联系两个 Leonard 系统的双线性型，Linear AlgebraAppl. 431 (2009)1726–1739.[44] P. Terwilliger，一致偏序集的关联代数，载于编码理论与设计理论第一部分：编码理论，IMA 数学及其应用丛书第 20 卷，Springer，纽约，1990 年，第 193–212页.[45] P. Terwilliger，Leonard 对与 Leonard 系统导论，S¯urikaisekikenky¯ushioK-oky¯uroku1109(1999) 67–79（代数组合学，京都，1999）[46] P.Terwilliger，关于另一个特征基而言均为三对角的两个线性变换，Linear AlgebraAppl. 330 (2001), 149–203.[47] P.Terwilliger，Leonard 对导论，J. Comp. Appl.Math. 153 (2003) 463–475.[48] P.Terwilliger，关于另一个特征基而言均为三对角的两个线性变换；TD-D与LB-UB 标准形，J. Algebra 291 (2005) 1–45。

[49] P. Terwilliger，Leonard 对与 q-Racah 多项式，Linear Algebra Appl. 387 (2004)235–276.[50] P. Terwilliger，正交多项式Askey 方案的代数方法，《正交多项式与特殊函数》，数学讲义，1883，Springer，柏林，2006，第255–330 页；arXiv:math/0408390.[51] P. Terwilliger，关于 Leonard系统分类的注记，GraphsCombin. 37 (2021)1687–1748.[52] C. Worawannotai，对偶极图、量子代数 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 以及对偶 q-Krawtchouk 型的Leonard 系统，Linear Algebra Appl. 438 (2013) 443–497。

野村和正：

东京医科齿科大学，Kohnodai，市川市，272-0827，日本。

电子邮件：knomura@pop11.odn.ne.jp

保罗·特威利格：

威斯康星大学数学系，林肯大道480号，麦迪逊，威斯康星州53706，美国

电子邮件：terwilli@math.wisc.edu