arXiv:2304.04975v2 [math.AP] 5 Jul 2023

平面斜坡海滩上非线性长波爬高的逆问题

阿列克谢 Rybkin、Efim Pelinovsky 和 Noah Palin MER

Abstract. 我们提出了一种简单而有效的显式方法，通过岸线处的观测数据恢复非线性浅水系统的初始数据。随后，我们将该方法应用于海啸波逆问题。

1. Introduction

海啸波在海岸上的波浪爬高过程，是海啸科学中的一个非常重要的问题，通常在浅水近似框架下进行研究 [18]。当长涌浪抵岸并形成巨浪时，也会出现类似问题 [10]。从数学角度看，这是一个非线性偏微分方程组的柯西问题，其初始条件在海啸波源处（例如地震震中）给定。也就是说，在给定初始水体位移和速度场的情况下，求出岸线的运动。不幸的是，位移数据甚至从未可得，因此会改用某些初始数据模型（参见例如 [22]）。

与此同时，全球大多数港口安装的验潮仪都以数字形式采集数据。这自然引出了一个逆问题：给定特定地点读取的数据，如何还原海啸波源的特征。历史上，人们首先采用等时线方法处理这一问题 [20] （参见 [15, 24, 25, 33]，尤其是 K. Satake 的综述 [29]，其中介绍了当代数值方法及相关文献）。

本说明讨论平坦倾斜海滩上的长波波浪爬高逆问题。已有大量文献致力于直接问题，即求解非线性浅水方程的各种显式解，并根据波源中已知的初始波计算波浪爬高特征。例如参见 [1]-[12],[14],[16]-[19],[21],[23],[26]-[32]以及其中引用的文献。在我们的工作中，当能够通过移动岸线确定波源特征时，我们求解逆问题。更具体地说，给定地震发生的时间和岸线的运动方程（岸线方程），估计海啸波源的尺度。这在线性理论中不会是多大的问题，但波浪爬高过程本质上是非线性的，这带来了真正的挑战，因为从地球物理学和数学的角度来看，非线性背景下的逆问题都尤其缺乏深入理解。本文所做的是

Date: 2023 年 7 月。*Key words and phrases.* 浅水波方程、Carrier-Greenspan 变换、海啸波逆问题。AR 和 NP 部分得到 NSF 项目 DMS-2009980 的资助。EP 部分得到俄罗斯联邦科学与高等教育部国家研究型大学高等经济学院动力系统与应用实验室项目 ag. 075-15-2022-1101 的资助。

寻找一种能够通过适当的霍多图变换有效线性化，同时仍保留大部分重要特征的模型。我们采用一个广为人知的、描述（无限延伸的）斜坡海滩上一维非线性浅水系统的模型，并证明，著名的 Carrier-Greens 霍多图变换可以将其转化为线性模型；在附加若干温和假设的情况下（从物理角度看，这些假设是可以接受的，事实上也很常见），该模型的逆问题可以借助阿贝尔变换显式求解。这为识别和处理更复杂得多的模型提供了便利的框架，也有助于快速评估在更一般的情形下需要了解和完成哪些工作。

2. Shallow water equations (SWE)

海啸波是一种黏性流体运动，由纳维–斯托克斯方程描述。这是一个高度非线性 3+1 （三个空间导数和一个时间导数）系统，即使采用数值方法分析也公认十分困难。在某些假设条件下（例如无涡量、无摩擦、无色散、速度场为一维、波长与水深之比很小等），该系统可以简化为 2+1 一阶方程组，称为浅水方程（ SWE） [13]。我们还假设海底地形是一片无限延伸的倾斜平面海滩，并沿y 轴无限延伸（见图 1）。

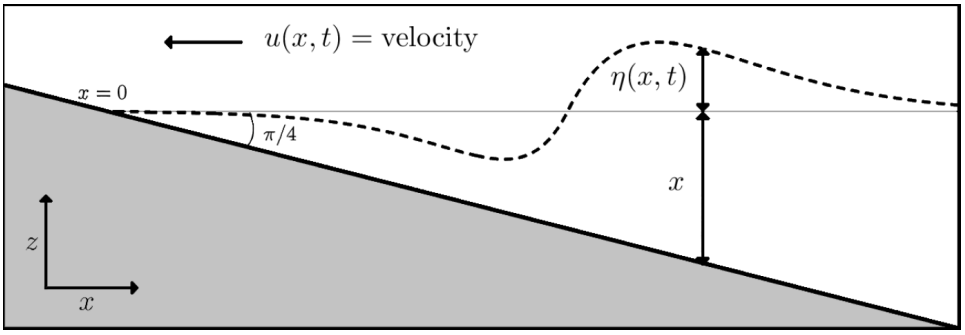

Figure 1. 平面海滩示意图，其中 x-z 平面上的 $\eta(x,t)$ 是相对于未扰动水位 $z=0$ 的水面高程，而 $H(x,t) = x+\eta(x,t)$ 是扰动后的总水深。未扰动岸线位于 $x=0, z=0$。

SWE 可以简化为一个 1+1 系统，用无量纲变量表示为 [13]

$$\begin{array}{ll} \partial_t\eta + \partial_x[(x+\eta)u] = 0 & \text{(continuity equation)} \\ \partial_t u + u\partial_x u + \partial_x\eta = 0 & \text{(momentum equation)} \end{array}, \tag{2.1}$$

其中： $\eta(x,\ t)$ 是相对于未扰动水面的水面高程 $z=0$ (未扰动水深)。它不必具有确定的符号（可以为正或为负）； $u(x,\ t)$ 是沿 z 轴方向取平均的流速。由于正 x轴指向离岸方向， $u<0$ 和 $u>0$ 通常[1] 分别对应入射波（即向岸移动）和出射波（即从岸边移开）。

请注意，在物理学文献中，（2.1）通常以有量纲单位给出，其中重力加速度 g 和斜率 α 会明确出现。

[1]在某些情况下，入射波可能会产生 $u>0$.的区域

代换 $\widetilde{x}=(H_0/\alpha)\ x,\quad \widetilde{t}=\sqrt{H_0/g}\ t/\alpha,\ \widetilde{\eta}=H_0\eta,\quad \widetilde{u}=\sqrt{H_0 g}\ u$，其中 H_0 是一个典型高度（或长度），可将我们的系统（2.1）转换为有量纲形式。

由于 $H(x,\ t)=x+\eta(x,\ t)$ 是沿主轴 x 的总（水面扰动后）水深。从图 1 可知，方程

$$x+\eta(x,t)=0\ \ \text{(shoreline equation in physical plane)} \tag{2.2}$$

描述岸线（湿/干边界）的运动，其解 $x_0(t)$ 描述海啸波的爬升与回落（退落）。

我们关注的是(2.1)的初值问题（IVP），其中

$$\eta(x,0)=\eta_0(x),\ \ u(x,0)=u_0(x)\qquad \text{(initial conditions)} \tag{2.3}$$

并将这类初始条件（IC）称为标准初始条件。

初值问题（IVP）（2.1）-（2.3）引起了极大的关注（参见引言中引用的文献）。系统（2.1）具有二次非线性，但其主要特征是可以利用Carrier-Greenspan（CG）霍多格拉夫（变换）将其线性化，该变换最初在 [5]中提出。我们采用 [6]中给出的版本：

$$\begin{array}{ll}\varphi(\sigma,\tau)=u(x,t), & \psi(\sigma,\tau)=\eta(x,t)+u^2(x,t)/2\\ \sigma^2=x+\eta(x,t), & \tau=(t-u(x,t))/2\end{array}, \tag{2.4}$$

从而将 (2.1) 转化为一个线性双曲型系统，而该系统又可化为波动方程

$$\partial_\tau^2\psi=\partial_\sigma^2\psi+\sigma^{-1}\partial_\sigma\psi. \tag{2.5}$$

注意，简单的尺度变换 $\tau=\lambda/2$ 将（2.5）变为 [6] 中的形式。我们的形式对于我们的目的更为方便。

初始条件（2.3）变换如下。设 $x=\gamma(\sigma)$满足方程 $x+\eta_0(x)=\sigma^2$。在霍多格拉夫平面（σ,τ）中，（2.3）变为

$$\varphi|_\Gamma=\varphi_0(\sigma),\ \psi|_\Gamma=\psi_0(\sigma), \tag{2.6}$$

其中，$\Gamma=\{(\sigma,\ -u_0(\gamma(\sigma))/2)\mid \sigma\geq 0\}$ 是$(\sigma,\ \tau)$平面上的一条曲线，且 $\varphi_0(\sigma)=u_0(\gamma(\sigma))\quad \psi_0(\sigma)=\eta_0(\gamma(\sigma))+u_0(\gamma(\sigma))^2/2$.

因此，带有线性初始条件（IC）(2.3)的非线性系统(2.1)被转换为线性波动方程(2.5)，该方程初始化于一条（非线性）曲线 [27, 28]上；σ^2 为距底部的波高，τ 为延迟时间，φ 为流速，ψ 为波能量。众所周知，CG速hodograph 的主要优点在于，由(2.2)给出的移动岸线（干湿边界）$x_0(t)$现在固定于 $\sigma=0$；其主要缺点是该曲线为非线性的，用于求解线性系统初值问题（IVP）的常用方法失效。$u_0(x)=0$（无初始速度）时，后一个问题并不存在。事实上，Γ 变为一条垂直线（σ,0），且(2.6)中的初始条件为

$$\varphi(\sigma,0)=0,\quad \psi(\sigma,0)=\eta_0(\gamma(\sigma)). \tag{2.7}$$

注意，在(2.1)中，$t\geq 0$ 但 x 的符号不定，而在(2.5) 中，$\sigma\geq 0$，但 τ 不必为正。还要注意，$\sigma=0$ 是 (2.5) 的一个正则奇点，在岸线处造成了一些计算困难。最后我们强调，只要CG 速 hodograph 可逆，即当 $\det\partial(\sigma,\tau)/\partial(x,t)\neq 0$ 时，它就有效。回想一下（例如见 [28]），只要波不破碎，后一个条件就成立。我们将始终假设这一条件。

3. The shoreline equation

在本节中，我们关注所谓的岸线方程，即将 $\varphi(0,\tau)$、 $\psi(0,\tau)$ 与 $\varphi(\sigma,0)$ $=\varphi_0(\sigma)$、 $\psi(\sigma,0)$ $=\psi_0(\sigma)$联系起来的显式方程。当然，这是一个经典的柯西问题，但 τ 不必为正。利用汉克尔变换的标准技巧，我们可以推导出

$$\psi(0,\tau)=\frac{d}{d\tau}\operatorname{sgn}\tau\left[\int_0^{|\tau|}\frac{s\psi_0(s)}{\sqrt{\tau^2-s^2}}dx-\tau\int_0^{|\tau|}\frac{s\varphi_0(s)}{\sqrt{\tau^2-s^2}}ds\right], \tag{3.1}$$

这就是针对带符号时间 τ 调整后的经典泊松公式。这些公式可以方便地用阿贝尔变换对 [9] 表示。

$$(\mathcal{A}f)(x)=\int_0^x\frac{f(s)ds}{\sqrt{x^2-s^2}},\quad (\mathcal{A}^{-1}f)(x)=\frac{2}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{sf(s)ds}{\sqrt{x^2-s^2}}.$$

由于（3.1）中的负值 τ 仅可能出现在超临界流 $[1,2]$ 中（例如，初始时刻发生极端回落时），因此我们可以放心地假设 $\tau\geq 0$。那么

$$\begin{aligned}\psi(0,\tau)&=\frac{d}{d\tau}\int_0^\tau\frac{s\psi_0(s)}{\sqrt{\tau^2-s^2}}dx-\tau\frac{d}{d\tau}\int_0^\tau\frac{s\varphi_0(s)}{\sqrt{\tau^2-s^2}}ds-\int_0^\tau\frac{s\varphi_0(s)}{\sqrt{\tau^2-s^2}}ds\\&=\frac{\pi}{2}\left[\mathcal{A}^{-1}\psi_0-\tau\mathcal{A}^{-1}\varphi_0\right]-\mathcal{A}\left(s\varphi_0\right).\end{aligned}$$

应用阿贝尔变换，我们得到

$$\left(\mathcal{A}\Psi\right)(\sigma)=\frac{\pi}{2}\left[\psi_0(\sigma)-\mathcal{A}\tau\left(\mathcal{A}^{-1}\varphi_0\right)(\sigma)\right]-\left(\mathcal{A}^2s\varphi_0\right)(\sigma),$$

其中我们回顾一下， ψ_0 是 σ的函数。现在我们来计算上文中出现的重复阿贝尔变换。记作

$$K_n(x,s)=\int_s^x\frac{t^ndt}{\sqrt{(t^2-s^2)(x^2-t^2)}},\quad n=0,2,$$

这是一个椭圆积分。通过交换积分顺序，可得

$$\left(\mathcal{A}^2s\varphi_0\right)(\sigma)=\int_0^\sigma s\varphi_0(s)K_0(\sigma,s)ds.$$

另一种重复变换是通过对最内层积分进行分部积分，然后交换积分次序而得到的。

$$\mathcal{A}\tau\left(\mathcal{A}^{-1}\varphi_0\right)(\sigma)=\sigma\varphi_0(0)+\int_0^\sigma K_2(\sigma,s)\varphi_0'(s)ds.$$

Thus

$$\begin{aligned}&\psi_0(\sigma)+\int_0^\sigma\left[\partial_sK_2(\sigma,s)-\frac{2s}{\pi}K_0(\sigma,s)\right]\varphi_0(s)\,ds \\&=\frac{2}{\pi}(\mathcal{A}\Psi)(\sigma),\quad\text{(shoreline equation)}.\end{aligned} \tag{3.2}$$

该方程是求解海啸波逆问题的基础。在不同形式下，并针对特定的 ψ_0， φ_0 它会出现在例如 [5], [6], [16], [28], [30] 中。

4. Inverse problem

现在我们关注以下逆问题。给定一个倾斜平面地形，并假设初始速度为零[2] [18]。 $u_0(x) = 0$，假设我们已知岸线的运动规律 $x_0(t)$。求初始位移 $\eta_0(x)$。在本节中，我们将给出这一问题的完整解答。也就是说，我们将展示(2.4)和(3.2)如何提供一个明确且完全初等的过程，从$x_0(t)$恢复 $\eta_0(x)$。

由 (2.4) 可知，如果 $t = 0$ 那么 $\tau = 0$ 且 $\varphi_0(\sigma) = \varphi(\sigma, 0) = 0$。因此 (3.2) 简化为

$$\psi_0(\sigma) = (2/\pi)(\mathcal{A}\Psi)(\sigma). \tag{4.1}$$

另请注意， $dx_0(t)/dt = v_0(t)$ 是岸线速度。显然， $v_0(t) = u(x_0(t), t)$，且在岸线处 ($\sigma = 0$)，CG 速 hodograph (2.4) 可写为

$$\begin{array}{cc} \varphi(0,\tau) = v_0(t), & \psi(0,\tau) = \eta(x_0(t), t) + v_0(t)^2/2 \\ x_0(t) + \eta(x_0(t), t) = 0, & \tau = (t - v_0(t))/2 \end{array}. \tag{4.2}$$

逆问题现按如下方式求解:

(1) 根据岸线数据 $x_0(t)$，计算 (4.1) 中的 $\Psi(\tau)$。由 (4.2) 可知， $\Psi(\tau) = \psi(0, \tau)$ 可（隐式地）由下式求得

$$\Psi(\tau) = -x_0(t) + v_0(t)^2/2, \quad \tau = (t - v_0(t))/2.$$

(2) 由 (4.1) 得到 $\psi(\sigma, 0) = \psi_0(\sigma)$。

(3) 将 $\tau = 0$ ($\sigma \geq 0$) 代入 (2.4)，得到关于初始位移 $\eta_0(x)$ 的（隐式）方程:

$$\eta_0(x) = \psi_0(\sigma), \quad \sigma = \sqrt{x + \eta_0(x)}.$$

篇幅限制使我们无法在此展示数值实验。不过，由于正问题已经得到充分验证 [4]，且逆问题不包含额外近似，因此后者与前者同样准确，无须对我们的算法进行数值测试。尽管如此，这类数值计算对于地球物理应用（海啸问题）仍有意义，我们将在别处给出。

5. Conclusions

上述步骤 1–3 提供了一种运行顺畅的算法，可在初始速度为零的假设下求解海啸波的逆问题。对于初始位移为零而初始速度非零的情形，也应存在类似算法。$u_0(x)$ 和 $\eta_0(x)$ 均非零的通常情形[3] 当然也备受关注。然而，与平底情形不同，对于倾斜海底上的行波，目前尚无严格的描述，因此只能得到近似结果。我们认为，重要情形 $u_0(x) = -\eta_0(x)/\sqrt{x}$ 和$u_0(x)^2 \ll 1$ 或许可以成功处理，但岸线方程 (3.2) 会变为一个弗雷德霍姆积分方程，不再有显式解。我们希望在别处继续研究这一问题。

[2]这种假设在海啸问题中很常见：此时底部位移由 Okada 地震模型[3]给出（在浅水理论框架下，这等价于水面的位移）。这种情形对应于波向岸边传播，且常用于实验室实验。

更复杂的 U 形和 V 形海底地形也可以处理。事实上，我们认为，如果相应的正问题可以线性化（例如，参见 [7],[11],[26],[28] 中的相关情形），那么逆问题就可以通过封闭形式求解。一般幂函数形状海湾的研究仍在进行中。

最实际的问题是海滩为平面，且具有 $x \leq L$ $L > 0$[4]的情况。此时，逆问题要求求出 L处的波。其基础问题是一个边界问题，在这种情况下应采用 [1],[28] 的技术推导岸线方程。

References

[1] Antuono, M. 和 Brocchini, M. 非线性浅水方程的边值问题。应用数学研究，119（2007），73-93。[2] Antuono, M. 和 Brocchini, M. 在物理空间中求解非线性浅水方程。J. Fluid Mech，643（2010），207–232。[3] Aydın, Baran 关于测地平面中长波方程的开放边界条件。Phys. Lett. A, 384(13)（2020），126258，7页。[4] Bueler-Faudree, T., Delamere, S., Dutykh, D., Rybkin, A., Suleimani, A.：适用于平面倾斜海滩的快速浅水波求解器。SoftwareX 17，100983（2022）。[5] Carrier, G. 和 Greenspan, H. 倾斜海滩上的有限振幅水波。J. Fluid Mech.，01（1958），97–109。[6] Carrier, G., Wu, T. 和 Yeh, H. 平坦海滩上的海啸波浪爬高与退落。J. Fluid Mech.，475（2003），79–99。[7] Bjørnestad, M. 和 Kalisch, H. 线性剪切流与平坦海滩上的浅水动力学。Physics of Fluids，29(7)（2017）：073602。[8] Bjørnestad, M. 和 Kalisch, H. 陡峭海岸剖面上的极端波浪爬高。AIP Advances，10(10)（2020），第105205页。[9] Deans, S. 拉东变换与阿贝尔变换。《变换与应用手册》第二版（2000），8-1–8-51。[10] Didenkulova, I. 和 Pelinovsky, E. 非线性双曲系统中的巨浪（浅水框架）。Nonlinearity，24(3)（2011），R1-R18。[11] Didenkulova, I. 和 Pelinovksy, E. 抛物线横截面的倾斜水道中的非线性波演化与波浪爬高。Physics of Fluids，23(8)（2011），第086602页。[12] Dobrokhotov, S. Yu., Nazaikinskii, V.E. 和 Tolchennikov, A.A. 浅滩波浪爬高线性问题中解的边界值的一致渐近式。Math. Notes，101(5-6)（2017），802-814。[13] Johnson, R. S. 水波数学理论现代导论。应用数学剑桥丛书。剑桥大学出版社，剑桥，1997。xiv+445 页。ISBN：0-521-59832-X[14] Hartle, H., Rybkin, A., Pelinovsky, E. 和 Nicolsky, D. 倾斜U形与V形海湾中波浪爬高的稳健计算。Pure Appl. Geophys. 178(12)（2021），5017–5029。[15] Kaistrenko, V. M.：海啸源重建的逆问题，《海啸波》，萨哈林综合研究所论文集，29（1972），82–92。[16] Kanoglu, U. 倾斜海滩上长波的非线性演化及波浪爬高—退落。J. Fluid Mech.，513（2004），363–372。[17] Kanoglu, U. 和 Synolakis, C. 非线性浅水波方程的初值问题解。Physical Review Letters，97（2006），148501。[18] Levin, B. 和 Nosov, M.《海啸物理学》。Springer，第二版（2016）。[19] Madsen, P. 和 Schaffer, H. 平坦海滩上海啸波浪爬高的解析解：单波、N波与瞬态波。J. Fluid Mech.，645（2010），27-57。[20] Miyabe, N.：基于验潮记录数据对三陆海啸的研究，《东京大学地震研究所通报》增刊，1（1934），112–126。

[4]原因之一是，只有当波接近岸线且灾难性事件即将发生时，我们才可以忽略色散。

[21] Nicolsky, D., Pelinovsky, E., Raz, A., and Rybkin. 非线性浅水方程的一般初值问题：长波在倾斜海滩和海湾上的波浪爬高。Physics Letters A, 382(38) (2018), 2738–2743. [22] Okada, Y.：半空间中由剪切断层和张性断层引起的内部变形，Bull. Seismol. Soc. Am., 82 (1992), 1018–1040. [23] Pedersen, Geir K. 幂律几何渠道中线性浅水方程的渐近、收敛及精确截断级数解。SIAM J. Appl. Math., 81(2) (2021), 285–303. [24] Piatanesi, A., Tinti, S., and Pagnoni, G.：利用数值有限元格林函数进行海啸波形反演，Natural Hazards and Earth System Science, 1 (2001), 187–194. [25] C. Pires and P. M. A. Miranda 伴随方法在海啸源参数反演中的敏感性 Natural Hazards and Earth System Sciences, 3 (2003), 341–351. [26] Rybkin, A., Pelinovsky, E., and Didenkulova. 任意横截面海湾中的非线性波浪爬高：Carrier-Greenspan 方法的推广。J. Fluid Mech., 748 (2014), 416–432 C12012, doi:10.1029/2008JC004932. [27] Rybkin, A. 一种求解双曲系统的方法：初始数据位于非特征流形上，并应用于浅水波方程。Applied Mathematics Let- ters
93, 72 78 2019 10 1016 2019 02 003 – ( ). https://doi.org/ . /
[28]
j.aml. . . Rybkin, A., Nicolsky, D., Pelinovsky, E., Buckel, M. 具有任意初始和边界条件的浅水系统的广义 Carrier-Greenspan 变换。Water Waves 3, 267–296 (2021).
https://doi.org/10.1007/s42286-020-00042-w [29] Satake, K. 海啸的反问题。海啸、火山及其灾害的复杂性 (2021), 71–89. [30] Shimozono, T. 均匀斜坡上长波动力学的核表示：长波的核表示。Proc. A., 476(2241) (2020), 20200333, 25 pp. [31] Stefanakis,Themistoklis S; Dias, Fr´ed´eric; and Dutykh, Denys. 共振波相互作用引起的局部爬高放大。Phys. Rev. Lett. 107 (2011), 124502. [32] Synolakis, C. 孤立波的波浪爬高。J. Fluid Mech., 185 (1987), 523–545. [33] V. V. Voronin, T. A. Voronina, and V. A. Tcheverda 初始海啸波形重建的反演方法 Nat. Hazards Earth Syst. Sci., 15 (2015), 1251–1263.

Alexei Rybkin, Department of Mathematics and Statistics, University of Alaska Fairbanks, PO Box 756660, Fairbanks, AK 99775.*Email address*: arybkin@alaska.edu

Efim Pelinovsky, NSE and Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod, Russia
Email address: Pelinovsky@gmail.com

Noah Palmer, Department of Mathematics and Statistics, University of Alaska Fairbanks, PO Box 756660, Fairbanks, AK 99775*Email address*: njpalmer@alaska.edu