arXiv:2304.04981v1 [econ.TH] 11 Apr 2023

订单流拍卖中的或有费用

MAX RESNICK[A]

摘要：许多早期的订单流拍卖设计在订单于链上执行时处理订单付款，而不是在订单于拍卖中获胜时处理。此类拍卖中的支-付仅在订单执行时发生，从而为赢得订单的一方创造了一个免费期权。此类拍卖中的出价确定的是该期权的行权价，而不是期权费。本文建立了一个简单的订单流拍卖模型，并比较了或有费用、预付款以及二者的混合形式。结果表明，在均衡状态下，付款中取决于执行的部分越大，拍卖的执行概率越低、收入越低，且有效价差越大。声誉系统可以充当负的或有费用，部分缓解其不利影响；然而，除非该系统经过完美校准，否则或有费用的一些不良特性仍会存在。结果表明，订单流拍卖的设计者应尽可能避免或有费用。

关键词：拍卖、区块链、订单流、链上、期权

[A]ROOKLABS, MAX@ROOK.FI2023年4月12日 RESNICK 谨此感谢 Flashbots 提供的资助，该资助支持了本研究。感谢 Quintus Kilbourn 和 Mallesh Pai 提出的宝贵意见。

假设你坐进一家只需为所吃食物付费的餐厅。你会点多少食物？又会浪费多少？你可以阅读菜单，选出听起来最美味的菜品。但在做决定之前，你难道不更愿意把菜单上的每一道菜都点一遍，看看哪一道最诱人吗？在这种情况下，厨房已经准备好的其他每一道菜都会被浪费，但由于你在选择这顿饭时掌握了更多信息，你或许会感到稍微满意一些。

这种“吃多少付多少”的机制通常称为或有费用。根据商品售出后披露的信息决定是否支付的款项，在某些情况下很有用，最常见的是买方最初受到预算约束或风险厌恶时。例如，律师通常只有胜诉后才收取法律费用Rubinfeld 和 Scotchmer (1993）；Clermont 和 Currivan(1977）；Miceli 和 Segerson (1991），而油田地块拍卖通常既包含预付款，也包含或有费用Haile 等人 (2010）；Hendricks 和 Porter (1988）；Hendricks 等人 (1993），只有公司找到石油时才需支付。不过，MEV 搜索者既不特别风险厌恶，也不受预算约束。他们通常能赚取可观利润，完全可以将其中一部分再投资于订单流的预付成本。此外，每个时段为订单流支付的金额相对于总利润可能很小，这意味着执行方差会在较长时间内相互抵消。

或有费用会侵蚀期权的价值，因为它们会降低执行期权后获利的可能性。预付款属于沉没成本，因此，在其他条件相同的情况下，执行一个预先支付了100美元费用的订单，与执行一个预先支付了1美元费用的订单，获利程度是一样的，其他条件相同。但是，一旦加入或有费用，执行期权不仅必须能够获利，而且获利金额还必须足以弥补或有费用。

当订单流拍卖中或有费用在出价金额中占比较高时，提高出价会通过增加或有费用而使期权贬值。这可能导致一场逐底竞争：竞标者为赢得订单流而提高出价，但在此过程中将或有费用提高到一个程度，使得执行该订单几乎永远不值得。

我通过一个简单模型来演示这一点，在该模型中，一笔订单流被单独拿出来进行拍卖。竞标者观察该订单并提出报价。在选出中标者后，会揭示影响执行该订单价值的新信息（标的资产的价格发生更新）。随后，中标者根据这一信息决定是否执行该订单。

我比较了该模型在纯或有支付和纯预付支付机制下的均衡。在纯或有支付机制中，在完全竞争的拍卖中，均衡报价高到使执行期权几乎从不被执行，因此，所有收入都消失了。在预付机制中，收入等于期权的

预期价值，并且不会影响执行概率。预付支付与或有支付的混合机制中，预付部分占比更高的组合在执行概率、收入和有效价差指标方面表现更优。当模型扩展为允许在没有中标者输入的情况下以一定概率执行或失败时，只要中标者选择以正概率执行，结果也类似。

1. 模型

假设正在拍卖一笔交易 t 。为简化起见，假设它是一笔限价卖单。因此，执行该订单的权利就是购买该交易所卖出资产的期权。对订单流拍卖中的搜索者而言，该交易的价值将线性取决于外部参考价格 S_1 的变动，而该价格只有在拍卖结束后才会公布。具体而言，条件执行下该交易的价值作为 S_1 的函数为

$$S_1 - K$$

其中，K 是限价订单t的行权价。假设S_1 具有紧致连通支撑集。

我们将考察两种相似的拍卖形式：一种是在赢得拍卖时无条件付款，另一种则只有在交易实际执行时才付款。

无条件机制的运作方式如下：

(1) 投标者提交投标价 $b_1, \ldots, b_n$. (2) 提交最高投标价的投标者获胜并支付其投标价 b(3) 中标者观察 S_1 ，然后决定是否执行交易。

中标者的收益为：

$$V_i = \begin{cases} S_1 - K - b & \text{Executed} \\ -b & \text{Not Executed} \end{cases}$$

所有其他竞标者都一无所获，也无需支付任何费用。

条件机制与此类似，不同之处在于，只有交易执行时才支付中标价：

（1）竞标者观察S_0并提交报价b_1,。 . . ，b_n（2）提交最高报价的竞标者获胜。（3）中标者观察S_1 ，然后决定是否执行交易。如果执行交易，他将支付自己的报价b。

中标者的收益为：

$$V_i = \begin{cases} S_1 - K - b & \text{Executed} \\ 0 & \text{Not Executed} \end{cases}$$

1.1. 扩展内容

我们通过引入参数 $\alpha \in [0,1]$, 来表示无论是否执行都会支付的中标报价部分，将该模型扩展到这两种博弈的混合形式。（$1-\alpha$）b 在订单执行时支付。在存在执行失败对应付款以外的外部惩罚时，该模型尤其具有代表性。例如，许多项目都有会惩罚未执行交易的搜索者的声誉系统；然而，这些声誉系统可能难以调节，因而对搜索者的惩罚力度可能不够（或者在某些情况下可能过重）。在这一扩展模型中，中标者关于 α 的收益函数为：

$$V_i = \begin{cases} S_1 - K - b & \text{Executed} \\ \alpha b & \text{Not Executed} \end{cases}$$

我们增加第二个扩展，用于对以下情形建模：即使搜索者竞标获胜，也可能无法完全控制交易的执行。我们引入参数 p 和q，其中p 表示无论获胜搜索者输入什么，交易都会执行的概率；q 表示无论获胜搜索者输入什么，交易都会失败的概率。 $1-p\ -q$ 表示执行结果由搜索者决定的概率。

2. 结果

在全文中，我们考察拍卖的竞争均衡，即假设搜索者之间的竞争会消除所有利润，从而达到零利润条件。尽管这些博弈看起来相似，但它们的竞争均衡却截然不同。先从预付款博弈说起。注意，根据零利润条件，中标价将等于期权的预期价值：

$$\mathbb{E}\max(S_1 - K, 0)$$

但在或有费用博弈中，如果我们计算赢得拍卖的价值，就会发现它取决于 b。中标者只有在以下情况下才会执行。

$$S_1 - K > b \iff S_1 - (K+b) > 0.$$

因此，在或有费用博弈中，赢得拍卖的收益是

$$\max(S_1 - K - b, 0).$$

同样，中标者的收益应满足零利润条件。但是，

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[\max(S_1 - K - b, 0)] = 0 \\ \iff &P(S_1 - K - b \geq 0) = 0 \\ \iff &\max(\text{Support}(S_1)) - K \leq b \end{aligned}$$

因此，在均衡中，次高出价高到足以完全侵蚀订单流的价值，获胜者执行交易永远无利可图。我们在定理 1 中总结这些结果：

定理1. 在预付博弈中，竞争均衡出价恰好等于期权价值 $b = \mathbb{E}$最大值$(S_1 - K, 0)$。执行概率为 $P(S_1 > K)$，预期收入为 $P(S_1 > K)\mathbb{E}$最大值$(S_1 - K, 0)$。

在或有费用 游戏中，竞争性均衡出价为 $b = \max($支撑集$(S_1)) - K$。执行概率为0，预期收入为0。

2.1. 扩展

现在我们考虑这两种博弈的混合情形。第 1 期执行订单的独占权价值可以视为一份看涨期权。

$$C_K(S_1) = I_{S_1 \geq K}(S_1 - K),$$

其中，$I_{s_1 \geq K}$ 是$s_1 \geq K$的指示函数。因此，期望值为：

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[C_K(S_1)] &= P(S_1 \geq K)(\mathbb{E}[S_1 | S_1 > K] - K) \\ &= (1 - F(K)) \left(\int_K^\infty \frac{f(x)}{1 - F(K)} dx - K \right) \end{aligned}$$

现在我们考虑这样一种情形：中标者（记为w）无论是否执行订单都支付 αb，并在执行订单时额外支付$(1 - \alpha)b$。这会使期权的行权价平移$(1 - \alpha)b$。获胜者的期望效用为：

$$\mathbb{E}[U_w] = (1 - F(K + (1 - \alpha)b)) \left(\int_{K + (1-\alpha)b}^\infty \frac{f(x)}{1 - F(K + (1 - \alpha)b)} dx - K - (1 - \alpha)b \right) - \alpha b. \tag{1}$$

根据零利润条件，均衡报价是以下方程的解：

$$\alpha b = (1 - F(K + (1 - \alpha)b)) \left(\int_{K + (1-\alpha)b}^\infty \frac{f(x)}{1 - F(K + (1 - \alpha)b)} dx - K - (1 - \alpha)b \right). \tag{2}$$

注意，（1）在 $b = 0$ 时为正，并且当 $b \to \infty$ 时最终为负，根据全概率定律。因此我们可以使用一个括区间零点查找器来求解（2）。

我们将 2 中 b^* 的解记为；于是，执行概率可写为：

$$P(\text{Execution}) = (1 - F(K + (1-\alpha)b^*(\alpha)) \tag{3}$$

有效价差是给定订单执行这一条件下 $S_1 - K$ 的期望值。给定 $S_1 > K + (1-\alpha)b^*(\alpha)$ 时，S_1 的条件概率密度函数为：

$$f_{S_1|S_1>K+(1-\alpha)b^*} = \frac{f(x)}{1 - F(K + (1-\alpha)b^*(\alpha))},$$

当 $S_1 > K + (1-\alpha)b^*(\alpha)$ 时成立，否则为 0。将其乘以有效价差并积分，得到

$$\begin{aligned} E[S_1 - K | S_1 > K + (1-\alpha)b^*(\alpha)] &= \int_{K+(1-\alpha)b^*(\alpha)}^{\infty} (x-K) f_{S_1|S_1>K+(1-\alpha)b^*}(x)dx \\ &= \frac{\int_{K+(1-\alpha)b^*(\alpha)}^{\infty} (x-K) f(x)dx}{1 - F(K + (1-\alpha)b^*(\alpha))} \end{aligned}$$

拍卖收入由预付款 $\alpha b^*(\alpha)$ 和或有费用$(1-\alpha)b^*(\alpha)$ 构成，后者乘以执行概率 $1 - F(K + (1-\alpha)b^*(\alpha))$。

$$\alpha b^*(\alpha) - (1 - F(K + (1-\alpha)b^*(\alpha))(1-\alpha)b^*(\alpha)$$

均匀分布情形的结果见附录第4节，图示可见图1。图2 展示了贝塔分布的若干种参数化结果。

定理 2. 以下结论成立

(1) 订单执行的概率随 α 单调递增。*(2)* 拍卖收入随 α 单调递增。*(3)* 有效价差随 α 单调递减。

证明。 (1) 可由 3 立即推出

$$P(\text{Execution}) = (1 - F(K + (1-\alpha)b^*(\alpha))$$

注意，$(1-\alpha)$ 随 α 递减，而 $b^*(\alpha)$ 随 α 递减，因此 $K + (1-\alpha)b^*(\alpha)$ 随 α 递减。所以 $F(K + (1-\alpha)b^*(\alpha))$ 随 α 递减，因为 F 是累积分布函数，因此单调递增。最后再反转一次，可得 $1 - F(K + (1-\alpha)b^*(\alpha))$ 随 α 递增。

(2) 源自零利润条件。中标者预期支付的金额必须等于其获得的期权价值。由于或有

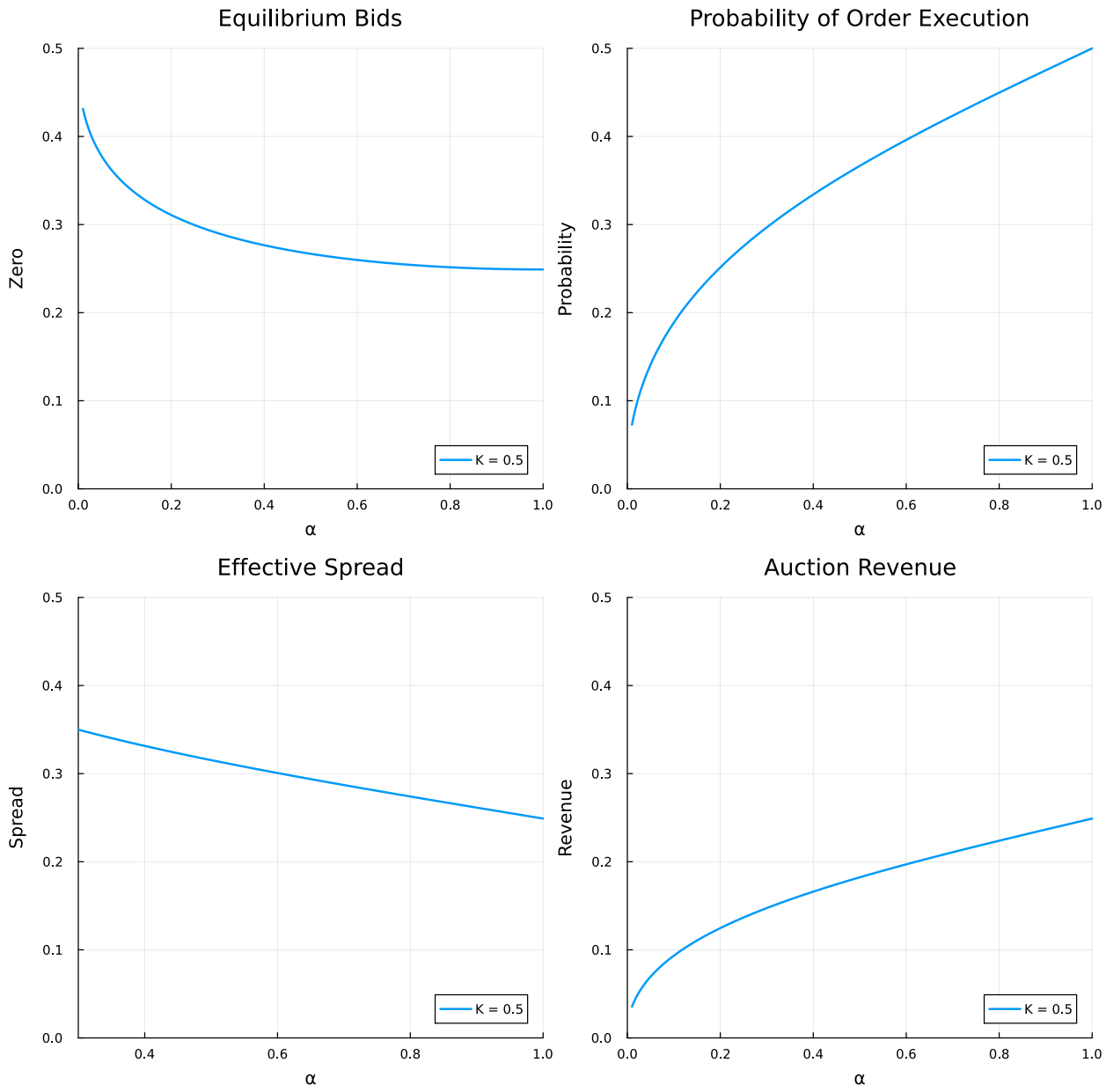


图 1。$S_1 \sim U[0,1], K = .5$ 的结果

费用会按比例侵蚀期权的价值$b^*(\alpha)$，而该比例随 α 收入的增加而下降，因此必须随 α 增加。

(3) 是随着 α 增加，消除S_1 的支撑集中最靠近K 的较小区域所产生的结果。结果是，平均执行质量随 α 增加。■

2.2. 扩展至非自愿执行和失败

现在，我们将模型扩展到这样一种情况：以概率p，执行自动进行；以概率 q 执行失败；以概率 $1-p-q$ 该

是否执行由中标者自行选择。在这种情况下，中标者的预期效用为：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[U_w] &= p(\mathbb{E}[S_1] - K - (1-\alpha)b) \\ &\quad + (1-p-q)(1-F(K+(1-\alpha)b))\left(\int_{+}^{\infty} K_{(1-\alpha)b} f(x)\,1-F(K+(1-\alpha)b)dx - K - (1-\alpha)b\right) \\ &\quad - \alpha b\end{aligned}$$

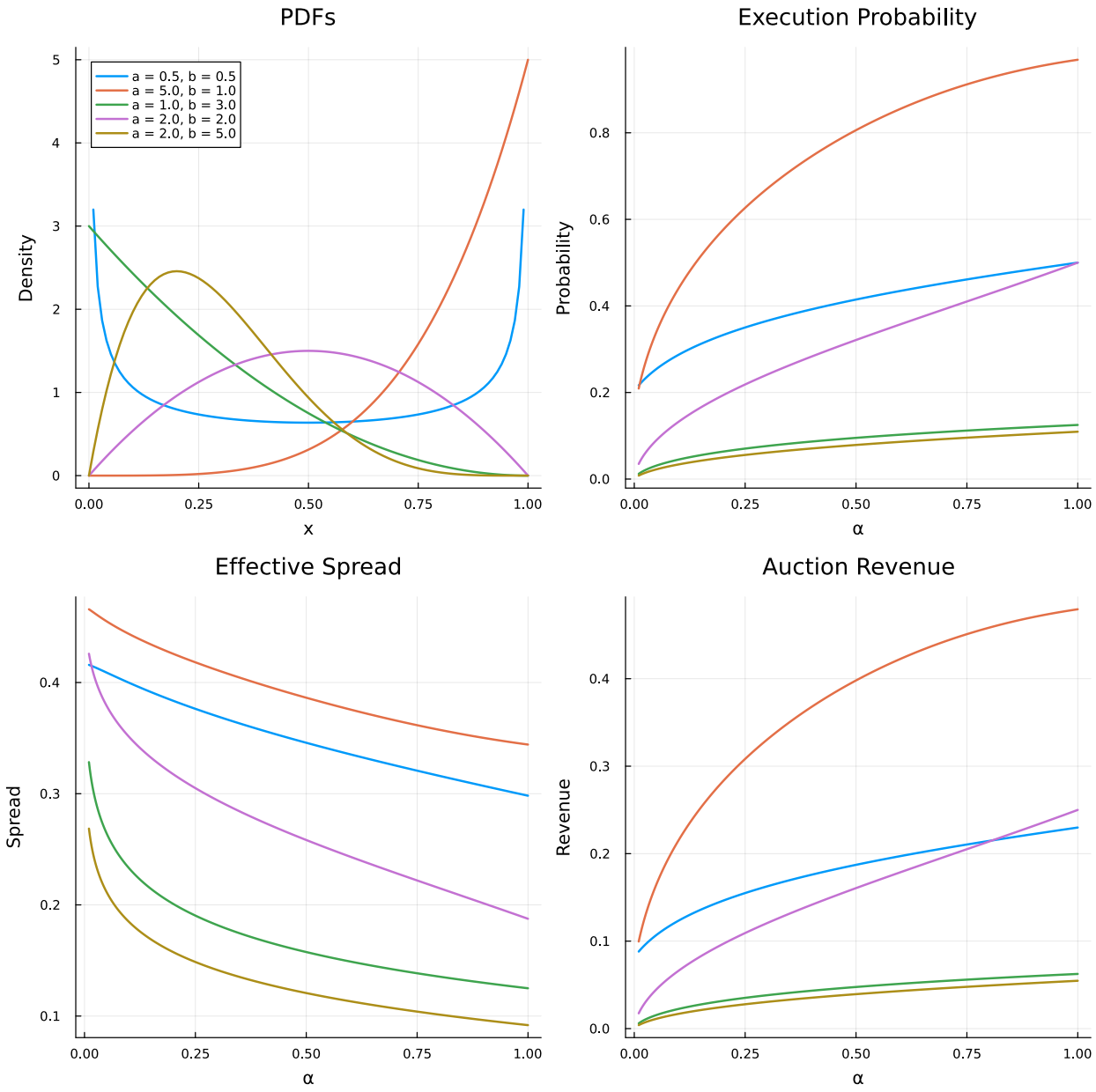


图 2. $S_1 \sim [a、b], K = .5$ 的结果

这也可以通过括区间零点查找器求解。与之前一样，令 b^* 表示该解，我们可以将执行概率写作

$$P(\text{Execution}) = p + (1 - p - q)(1 - F(K + (1 - \alpha)b^*(\alpha))$$

但当 $p + q < 1$ 时，通过修改F和 α，即可将其化为上一节中的模型。修改F 的过程包括在行权价 K 以下加入概率质量q（即自动失败的概率），然后除以 $1+q$对分布进行归一化。修改 α 的过程则是设定 $\alpha' = \alpha + p(1 - \alpha)$。

因此，只要 $p + q < 1$，上一节的见解在此仍然成立。

3. 讨论

本文主要研究 MEV 订单流拍卖支付结构。声誉系统可充当负向的或有费用：未执行订单造成的后果不是金钱损失，而是声誉损害；这也可能提升拍卖表现。我们讨论了声誉系统在 MEV 拍卖中的潜力与局限。

声誉系统可以通过惩罚不良行为，激励参与者提升市场效率与稳定性。当声誉受到影响时，参与者可能更愿意执行订单，即使附带费用在经济上并不划算。

然而，声誉系统也存在局限：

操纵： 容易受到旨在抬高声誉评分的策略性行为影响，例如串谋、使用虚假账户或利用漏洞，这些行为可能削弱系统的效力。

复杂性： 设计并实施准确、透明、公平且能抵御操纵的声誉系统，可能会增加整体拍卖机制的复杂性。

执行： 执行声誉惩罚颇具挑战，因为在去中心化环境或准入壁垒较低的市场中，参与者可能使用新身份重新进入，从而规避声誉惩罚。

权衡： 引入声誉系统会在拍卖设计中带来一些权衡，例如竞争减少，或新参与者的准入壁垒提高，这可能抵消执行率提升和有效价差缩小所带来的益处。

总而言之，声誉系统具有潜在优势，但也存在局限。MEV 订单流拍卖的设计者应权衡其优势、挑战与取舍。未来研究可以探讨 MEV 订单流拍卖中声誉系统的最优设计，并考察这些系统如何与支付结构相互作用，以实现预期结果。

3.1. 结论

这一简明的订单流拍卖模型揭示了不同支付结构——或有费用、预付款及其组合——对关键结果的影响。研究发现，或有费用支付越高，成交概率越低，收入越少，有效价差越大。

这些见解对订单流拍卖设计具有重要意义，表明应关注预付款，而非或有费用。过分强调或有费用可能会引发逐底竞争，从而损害用户和订单流提供方的利益。

未来的研究可以通过纳入多个订单或多个待执行区块来扩展该模型，并探讨关于竞标者风险厌恶程度和预算约束的更现实假设。

参考文献

克莱蒙，凯文·M.和约翰·D.·柯里文，“改进或有费用”，《康奈尔法律评论》，1977，*63*，529。**海尔，菲利普、肯尼斯·亨德里克斯和罗伯特·波特**，“近期美国海上石油和天然气租赁竞标：进展报告”，《国际工业组织杂志》，2010，*28*（4），390–396。**亨德里克斯，肯尼斯和罗伯特·H.·波特**，“关于信息不对称条件下拍卖的实证研究”，《美国经济评论》，1988，第865–883页。**、和谷夫·谭**，“拥有知情买方时石油和天然气租赁的最优销售策略”，《美国经济评论》，1993，*83*（2），234–239。**米塞利，托马斯·J.和凯瑟琳·塞格森**，“律师或有费用：对诉讼和事故预防的影响”，《法律研究杂志》，1991，*20*（2），381–399。**鲁宾菲尔德，丹尼尔·L.和苏珊·斯科奇默**，“律师或有费用：经济学分析”，《兰德经济学杂志》，1993，*24*（3），343–356。

4. 均匀分布情形下的闭式解

令 $K = 1/2$，并且 $S_1 \sim U[0,1]$ 为便于说明，我们可以显式地解出（1）关于 b^*

$$\alpha b = (1 - F(K + (1-\alpha)b)) \left(\int_{K+(1-\alpha)b}^{\infty} \frac{f(x)}{1 - F(K + (1-\alpha)b)} dx - K - (1-\alpha)b \right)$$

$$\alpha b = (1 - 1/2 - (1-\alpha)b) \left(\int_{1/2+(1-\alpha)b}^{1} \frac{1}{1 - 1/2 - (1-\alpha)b} dx - 1/2 - (1-\alpha)b \right)$$

$$\alpha b = 1 - 1/2 - (1-\alpha)b + (1 - 1/2 - (1-\alpha)b)(-1/2 - (1-\alpha)b)$$

$$\alpha b = -2(1-\alpha)b + 1/4 + (1-\alpha)b + (1-\alpha)^2 b^2$$

$$\alpha b = -(1-\alpha)b + 1/4 + (1-\alpha)^2 b^2$$

$$1/4 = (1-\alpha)^2 b^2 - (1-\alpha)b - \alpha b$$

$$0 = ((1-\alpha)^2) b^2 - b + \frac{1}{4}$$

$$b = \frac{1 \pm \sqrt{1 - (1-\alpha)^2}}{2(1-\alpha)^2}$$

这里应取负号分支，因此 $b^*(\alpha)$ 的公式为 ：

$$b^*(\alpha) = \frac{1 - \sqrt{1 - (1-\alpha)^2}}{2(1-\alpha)^2}$$

执行概率随后为

$$1/2 - \frac{1 - \sqrt{1 - (1-\alpha)^2}}{2(1-\alpha)}$$

拍卖收入为

$$\alpha \frac{1 - \sqrt{1 - (1-\alpha)^2}}{2(1-\alpha)^2} + (1-\alpha) \left(1/2 - \frac{1 - \sqrt{1 - (1-\alpha)^2}}{2(1-\alpha)} \right) \frac{1 - \sqrt{1 - (1-\alpha)^2}}{2(1-\alpha)^2}$$