arXiv:2304.05000v1 [math.RA] 11 Apr 2023

[1]

左对称共形代数的代数构造

ZHONGYIN XU 和 洪延勇

摘要。设R是一个左对称共形代数，Q 是一个 $\mathbb{C}[\partial]$-模。我们引入了左对称共形代数的统一积概念，并应用它构造对象 $\mathcal{H}^2_R$(Q,R)，以描述和分类直和 E = R ⊕ Q 上的所有左对称共形代数结构，其中E 是一个 $\mathbb{C}[\partial]$-模，且R 是 E 的子代数；在同构意义下，其在R 上的限制为恒等映射。此外，当 Q、R是自由 $\mathbb{C}[\partial]$-模且 rankQ = 1时，我们详细研究了 $\mathcal{H}^2_R$(Q,R)。我们还研究了交叉积和双交叉积等一些特殊的积。

1. 引言

V. Kac 在 [16, 17] 中提出的李共形代数概念，是对二维共形场论中手征场算符乘积展开奇异部分的公理化描述。它是研究顶点代数 [16] 以及满足局域性条件的无限维李代数 [15]的结构理论、 [9], 表示理论[7, 8] 和上同调理论 [6] 的有用工具。有限李共形代数的结构理论、表示理论和上同调理论已经发展得相当完善。另一方面，左对称共形代数的概念是在 [12] 中提出的，旨在探究形式分布李代数上是否存在相容的左对称代数结构。值得注意的是，左对称伪代数的概念是在 [20]中提出的。左对称共形代数的共形交换子是李共形代数，而作为自由 $\mathbb{C}[\partial]$-模的有限左对称共形代数可以自然地给出共形杨–巴克斯特方程和共形 S-方程 [11]的解。此外，左对称共形双代数理论在 [13], 中建立；李共形代数 $W(a,b)$ 上相容的左对称共形代数结构在 [18, 21], 中进行了研究，一类左对称共形代数的中心扩张与单性在 [22], 中得到了研究，而一般的上同调理论则在 [23]中给出。

本文拟研究左对称共形代数的如下结构问题:

$\mathbb{C}[\partial]$-分裂扩张结构问题：给定一个左对称共形代数 R 和一个 $\mathbb{C}[\partial]$-模 Q。令 E = R ⊕ Q，其中直和是 $\mathbb{C}[\partial]$-模的直和。描述并分类 E 上所有使得 R 成为 E 的子代数的左对称共形代数结构，按在 R 上限制为恒等映射的同构进行分类。

从左对称共形代数的角度来看，这个问题既自然又重要，即如何从给定的左对称共形代数构造出一个更大的左对称共形代数。类似的

[1]通信作者：Y. Hong（yyhong@hznu.edu.cn）。2010年数学主题分类。17A30，17A60，17B60，17B69，17D25。关键词和短语。左对称共形代数、扩张结构、统一积、双交叉积、交叉积。

群、结合代数、Hopf 代数、李代数、莱布尼茨代数、左对称代数、李-2 代数、李共形代数等方面的类似问题[1, 3, 4, 2, 5, 10, 19, 14] 也分别得到了研究。需要指出的是，当$R = \{0\}$时，这个问题很难，因为它等价于对给定秩的所有左对称共形代数进行分类。请注意，根据困难以完整分类秩为 2 的无挠左对称共形代数，参见 [18, 21]中的结果。因此，本文始终假设R，0。

该问题涉及左对称共形代数结构理论中的许多重要问题。例如，它包括以下问题：

$\mathbb{C}[\partial]$-分裂扩张问题：给定两个左对称共形代数R和Q。描述并分类所有如下形式的$\mathbb{C}[\partial]$- 分裂左对称共形代数正合序列，按等价关系分类：

$$0 \to R \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} Q \to 0. \tag{1}$$

注意，$\mathbb{C}[\partial]$-分裂序列意味着 E $\cong$ R $\oplus$ Q 是一个 $\mathbb{C}[\partial]$-模。如果 R 上的 λ-积是平凡的，那么这个问题就等同于左对称共形代数 Q 的 $\mathbb{C}[\partial]$-分裂中心扩张问题。根据 [23]，已知所有这类在等价意义下的 $\mathbb{C}[\partial]$-分裂中心扩张都可由第二上同调群 H^2(Q, R) 刻画。因此，研究 $\mathbb{C}[\partial]$-分裂扩张结构问题是有意义的，并且有助于探究左对称共形代数的结构理论。本文引入左对称共形代数的统一积概念，并用它构造对象 $\mathcal{H}^2_R$(Q, R)，从而为 $\mathbb{C}[\partial]$-分裂扩张结构问题给出理论解答。此外，当 R 是一个 $\mathbb{C}[\partial]$-模自由且 Q 是一个秩为一的 $\mathbb{C}[\partial]$-模自由时，我们详细研究 $\mathcal{H}^2_R$(Q, R)。我们还研究了交叉积和双交叉积等一些特殊积。需要指出的是，$\mathbb{C}[\partial]$-分裂扩张问题中的任意 E 都同构于 R 与 Q 的一个交叉积。我们还构造对象 $\mathcal{HC}^2$(Q, R)，用以刻画 $\mathbb{C}[\partial]$-分裂扩张问题中的所有 E。

本文组织如下。第2节回顾左对称共形代数的相关定义和结果。第3节介绍左对称共形代数的统一积概念，并构造一个对象 $\mathcal{H}^2_R$(Q,R)，从而为 $\mathbb{C}[\partial]$-分裂扩张结构问题给出理论上的解答。第4节详细研究当R是自由 $\mathbb{C}[\partial]$-模且Q 是秩为1 的自由 $\mathbb{C}[\partial]$-模时的统一积。第5节介绍统一积的一些特殊情形，如交叉积和双交叉积，并详细给出一些例子。

在本文中，我们用 $\mathbb{C}$ 表示复数集。所有向量空间和张量积均取在复数域 $\mathbb{C}$上。对于任意向量空间 V，我们用 V[λ] 表示系数属于 V 的 λ 多项式集合。

2. Preliminaries

在本节中，我们回顾关于左对称共形代数的一些基本定义和事实。这些事实可参阅 [12, 16]。

定义 2.1. 左对称共形代数 R 是一个 $\mathbb{C}[\partial]$-模，带有一个 $\cdot_\lambda\cdot$乘积，它是从 $R\times R\to R[\lambda]$ 到 $\mathbb{C}$ 的双线性映射，并满足

（共形半线性） $$\partial a_\lambda b=-\lambda a_\lambda b,\ a_\lambda\partial b=(\partial+\lambda)a_\lambda b,$$

(left-symmetry) $$(a_\lambda b)_{\lambda+\mu}c-a_\lambda(b_\mu c)=(b_\mu a)_{\lambda+\mu}c-b_\mu(a_\lambda c),$$

对于 a、b、$c\in R$。我们将其记为 $(R,\cdot_\lambda\cdot)$ 或 R。

李共形代数R 是一个 $\mathbb{C}[\partial]$-模，带有一个 λ-括号 $[\cdot_\lambda\cdot]$，它是一个从 $R\times R\to R[\lambda]$ 的 $\mathbb{C}$-双线性映射，满足

（共形半线性） $$[\partial a_\lambda b]=-\lambda[a_\lambda b],\ [a_\lambda\partial b]=(\partial+\lambda)[a_\lambda b],$$

（雅可比恒等式） $$[a_\lambda[b_\mu c]]=[[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c]-[b_\mu[a_\lambda c]],\quad a,b,c\in R.$$

例2.2.设 (L, ∘)是一个左对称代数。则在 $\mathrm{CurL}=\mathbb{C}[\partial]\otimes L$ 上存在一个自然的左对称共形代数结构，其 λ-乘积为

$$a_\lambda b=a\circ b,\ a,b\in L.$$

命题2.3。 [12, 定理 3。2] 设 $R=\mathbb{C}[\partial]x$ 是一个左对称共形代数，作为一个自由且秩为1的 $\mathbb{C}[\partial]$-模。则 R 同构于具有 λ-乘法的左对称共形代数，该乘法如下分为三种情形:

(i) $x_\lambda x=0$; (ii) $x_\lambda x=x$; (iii)$x_\lambda x=(\partial+\lambda+c)x$, 对任意 $c\in\mathbb{C}$。

命题2.4。[12, 命题 2。5] 设 $(R,\cdot_\lambda\cdot)$ 是一个左对称共形代数。则我们可以在 R 上定义一个李共形代数结构，其具有如下的 λ-括号

(2) $$[a_\lambda b]=a_\lambda b-b_{-\lambda-\partial}a,\quad a,b\in R.$$

将这个李共形代数记为 g(R)，称其为 R的次伴随李共形代数，而 R 是李共形代数 g(R) 上的一个相容的左对称共形代数结构。

下文中，我们回顾左对称共形代数上的双模定义。

定义2.5. 设 R 是一个左对称共形代数，V是一个 $\mathbb{C}[\partial]$-模。如果存在两个 $\mathbb{C}$-线性映射$R\otimes V\to V[\lambda]$、$a\otimes v\to a_\lambda v$ 和 $V\otimes R\to V[\lambda]$、$v\otimes a\to v_\lambda a$，使得 V 是 R 的双模（或 R-双模），则称 V 是 R 的双模。

(3) $$(\partial a)_\lambda v=-\lambda a_\lambda v,\ (\partial v)_\lambda a=-\lambda v_\lambda a,$$

(4) $$a_\lambda(\partial v)=(\lambda+\partial)a_\lambda v,\ v_\lambda(\partial a)=(\lambda+\partial)v_\lambda a,$$

(5) $$(a_\lambda b)_{\lambda+\mu}v-a_\lambda(b_\mu v)=(b_\mu a)_{\lambda+\mu}v-b_\mu(a_\lambda v),$$

(6) $$(a_\lambda v)_{\lambda+\mu}b-a_\lambda(v_\mu b)=(v_\mu a)_{\lambda+\mu}b-v_\mu(a_\lambda b),$$

对所有 $a、b\in R$ 和 $v\in V$ 成立。

定义 2.6.设U和 V 是两个 $\mathbb{C}[\partial]$-模。从 U 到 V的左共形线性映射是一个 $\mathbb{C}$-线性映射 $\varphi: U\to V[\lambda]$，记作 φ_λ，满足对于所有 $a\in U$，都有 $\varphi_\lambda(\partial a)=-\lambda\varphi_\lambda a$。从 U 到 V 的右共形线性映射是一个 $\mathbb{C}$-线性映射 $\psi: U\to V[\lambda]$，记作 ψ_λ，使得

使得对于所有 \(a\in U\)， $\psi_\lambda(\partial a) = (\partial + \lambda)\psi_\lambda a$。右共形线性映射通常简称为共形线性映射。

此外，设 \(W\) 也是一个 \(\{v1\}\)-模。从 \(U \times V \to W\) 到 \(\mathbb{C}\) 的共形双线性映射是一个 \(\mathbb{C}\)-双线性映射 \(f : U \times V \to W[\lambda]\)，记作 $f_\lambda(\cdot,\cdot)$，满足 $f_\lambda(\partial a, b) = -\lambda f_\lambda(a, b)$ 且 $f_\lambda(a, \partial b) = (\lambda + \partial) f_\lambda(a, b)$，对所有 \(a \in U\) 和 \(b \in V\) 成立。

用 Cend(V) 表示从 V 到 V 的所有共形线性映射构成的 $\mathbb{C}$-向量空间。它具有如下典范的 $\mathbb{C}[\partial]$-模结构：

$$(\partial\varphi)_\lambda = -\lambda\varphi_\lambda, \quad \varphi \in Cend(V). \tag{7}$$

注2.7. 设 R 是一个左对称共形代数，V是一个 $\mathbb{C}[\partial]$-模。设 l和 r 是两个 $\mathbb{C}[\partial]$-模同态：$R \to Cend(V)$。对所有$a \in R$和$v \in V$，定义 $a_\lambda v = l(a)_\lambda v$ 以及$v_\lambda a = r(a)_{-\lambda-\partial}v$。那么容易看出，当且仅当满足以下条件时，V 是一个 R-双模：

$$l(a_\lambda b)_{\lambda+\mu}v - l(a)_\lambda(l(b)_\mu v) = l(b_\mu a)_{\lambda+\mu}v - l(b)_\mu(l(a)_\lambda v), \tag{8}$$

$$r(b)_{-\lambda-\mu-\partial}(l(a)_\lambda v) - l(a)_\lambda(r(b)_{-\mu-\partial}v) = r(b)_{-\lambda-\mu-\partial}(r(a)_{-\mu-\partial}v) - r(a_\lambda b)_{-\mu-\partial}v, \tag{9}$$

对所有 $a, b \in R$ 和 $v \in V$。因此，我们也将该双模记为 (V, l, r)。

定义2.8. 设 R 为左对称共形代数。称共形线性映射 $T_\lambda : R \to R[\lambda]$ 为共形半拟中心，如果 T 满足

$$T_{-\lambda-\mu-\partial}(a_\lambda b - b_\mu a) = a_\lambda T_{-\mu-\partial}(b) - b_\mu T_{-\lambda-\partial}(a), \quad a, b \in R. \tag{10}$$

注2.9. 对于任意 $b \in R$，都存在与之对应的共形半拟中心 T^b_λ，其定义为 $T_{b\lambda}(a) = a_{-\lambda-\partial}b$，其中对所有 $a \in R$ 均成立。我们称 $T_{b\lambda}$ 为 R 的内共形半拟中心映射，并用 CS QInn(R) 表示 R 的所有内共形半拟中心映射构成的向量空间。

定义2.10. 设 R 为左对称共形代数。R 的扭曲共形导子是 $(D_\lambda, g_\lambda(\cdot,\partial))$，其中 $g_\lambda(\cdot,\partial) : R \to \mathbb{C}[\lambda,\partial]$ 是左共形线性映射，$D_\lambda : R \to R[\lambda]$ 是满足下式的共形线性映射，对所有 $a, b \in R$ 均成立

$$D_\lambda(a)_{\lambda+\mu}b + g_{-\lambda-\partial}(a, -\lambda-\mu)D_{\lambda+\mu}(b) = D_\lambda(a_\mu b) - a_\mu(D_\lambda(b)).$$

特别地，对于一个扭曲共形导子$(D_\lambda, g_\lambda(\cdot,\partial))$，如果$g_\lambda(\cdot,\partial)$ 是平凡的，则 D_λ 被称为 R 的共形导子。

命题 2.11。设 $R = \mathbb{C}[\partial]L$是一个左对称共形代数，其 λ-乘积定义为 $[L_\lambda L] = (\lambda + \partial + c)L$，其中 $c \in \mathbb{C}$。则 R 的所有共形导子均为零。

证明。令D_λ 为 R的共形导子。设 $D_\lambda L = a(\lambda,\partial)L$，其中某个 $a(\lambda,\partial) \in \mathbb{C}[\lambda,\partial]$。然后

$$D_\lambda(L)_{\lambda+\mu}L = D_\lambda(L_\mu L) - L_\mu(D_\lambda(L))$$

等价于

$$a(\lambda, -\lambda-\mu)(\lambda+\mu+\partial+c) = (\lambda+\mu+\partial+c)a(\lambda,\partial) - a(\lambda,\mu+\partial)(\mu+\partial+c). \tag{11}$$

设 $a(\lambda,\partial) = \sum_{i=0}^{n} a_i(\lambda)\partial^i$ 且 $a_n(\lambda) \neq 0$。则假设 $n > 1$，若我们令 ∂中的次数 n 项相等，便得到

$$(\lambda - n\mu)a_n(\lambda) = 0,$$

得到矛盾。因此 $a(\lambda,\partial) = a_1(\lambda)\partial + a_0(\lambda)$. 然后（11）变为

$$a_1(\lambda)\lambda(-\lambda - 2\mu - 2\partial - c) = -a_0(\lambda)(\mu + \partial + c). \tag{12}$$

存在。因此，$a_1(\lambda) = a_0(\lambda) = 0$。因此，R 的所有共形导子均为零。 □

定义 2.12. 设 R 为左对称共形代数，Q 为 $\mathbb{C}[\partial]$-模，且 E 为 $= R \oplus Q$，其中直和是 $\mathbb{C}[\partial]$-模的和。对于一个 $\mathbb{C}[\partial]$-模同态 $\phi : E \to E$，我们考虑如下图表:

$$\begin{array}{ccccc} R & \xrightarrow{i} & E & \xrightarrow{\pi} & Q \\ \downarrow{\scriptstyle Id} & & \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \downarrow{\scriptstyle Id} \\ R & \xrightarrow{i} & E & \xrightarrow{\pi} & Q \end{array}$$

其中，π：E $\to$ Q 是E $=$ R $\oplus$ Q到 Q的典范投影，而i：R $\to$ E 是包含映射。若 $\mathbb{C}[\partial]$-模同态 ϕ：E $\to$ E使 R保持不变（分别地，使Q共保持不变），则上述图表的左方（分别地，右方）交换。设 $\cdot_\lambda \cdot$ 和 $\circ_\lambda$是E上的两个左对称共形代数结构，且二者都包含R作为左对称共形子代数。若存在一个保持 R 不变的左对称共形代数同构 ϕ：$(E, \cdot_\lambda \cdot) \to (E, \circ_\lambda)$，则称 $(E, \cdot_\lambda \cdot)$ 和 $(E, \circ_\lambda)$ 等价，记作 $(E, \cdot_\lambda \cdot) \equiv (E, \circ_\lambda)$。

若存在一个左对称共形代数同构 $\phi : (E, \cdot_\lambda \cdot) \to (E, \circ_\lambda)$，它稳定 R 并共稳定 Q，则称 $(E, \cdot_\lambda \cdot)$ 和 $(E, \circ_\lambda)$ 上同调等价，记作 $(E, \cdot_\lambda \cdot) \approx (E, \circ_\lambda)$】【。

不难看出，“ ≡ ”和“ ≈ ”是 E 上所有包含 R 作为左对称共形子代数的左对称共形代数结构集合上的等价关系。我们分别将通过“ ≡ ”和“ ≈ ”得到的所有等价类的集合记为 CExtd(E, R) 和 CExtd′(E, R)。因此，CExtd(E, R) 是 $\mathbb{C}[\partial]$-分裂扩张结构问题的分类对象，而 CExtd′(E, R) 则给出了 E $= R \oplus Q$ 上所有包含 R 作为子代数的左对称共形代数结构的分类，其中同构保持 R 并余保持 Q。

3. 左对称共形代数的统一积

本节将介绍左对称共形代数的统一积概念，并将其用于构造一个对象，从而为 $\mathbb{C}[\partial]$-分裂扩张结构问题提供理论解答。

定义 3.1. 设 R 是一个左对称共形代数，Q 是一个 $\mathbb{C}[\partial]$-模。R 由 Q 扩张的扩张数据是一个系统 $\Omega(R, Q) = (\varphi, \psi, l, r, g_\lambda(\cdot,\cdot), \circ_\lambda)$，由四个 $\mathbb{C}[\partial]$-模同态和两个共形双线性映射组成，如下所示:

$$\begin{aligned} &l, r : R \to Cend(Q),\ \varphi, \psi : Q \to Cend(R), \\ &g_\lambda(\cdot,\cdot) : Q \times Q \to R[\lambda],\ \circ_\lambda : Q \times Q \to Q[\lambda]. \end{aligned}$$

设 $\Omega(R, Q) = (\varphi, \psi, l, r, g_\lambda(\cdot,\cdot), \circ_\lambda)$ 是一个扩张数据。我们将 $R \natural_{\Omega(R,Q)} Q = R \natural Q$ 记为$\mathbb{C}[\partial]$-模 R $\oplus$ Q，其上具有自然的 $\mathbb{C}[\partial]$-模作用： $\partial(a + x) = \partial a + \partial x$，以及双线性

映射 $\cdot_\lambda \cdot : (\mathrm{R}\oplus\mathrm{Q}) \times (\mathrm{R}\oplus\mathrm{Q}) \to (\mathrm{R}\oplus\mathrm{Q})[\lambda]$ 定义如下：

$$(13)\quad (\mathrm{a}+\mathrm{x})_\lambda(b+y) = (a_\lambda b + \varphi(x)_\lambda b + \psi(y)_{-\lambda-\partial}a + g_\lambda(x,y)) + (x\circ_\lambda y + l(a)_\lambda y + r(b)_{-\lambda-\partial}x)$$

对所有 $\mathrm{a},\mathrm{b}\in\mathrm{R}, \mathrm{x},\mathrm{y}\in\mathrm{Q}$，若 $\mathrm{R}\natural\mathrm{Q}$ 是一个左对称共形代数，其 λ-积由 (13) 给出，则称 $\mathrm{R}\natural\mathrm{Q}$ 为 R 与 $\Omega(\mathrm{R},\mathrm{Q})$ 的统一积。在这种情况下，扩张数据 $\Omega(\mathrm{R},\mathrm{Q}) = (\varphi,\psi,\mathrm{l},\mathrm{r}, g_\lambda(\cdot,\cdot),\circ_\lambda)$ 称为 Q 对 R 的左对称共形扩张结构。于是，用 $\mathrm{L}(\mathrm{R},\mathrm{Q})$ 表示 Q 对 R 的所有左对称共形扩张结构的集合。

由 (13)，在 $R\natural Q$ 中，对所有 $a,b\in R$ 以及 $x,y\in Q$，有以下关系：

$$(14)\quad \begin{aligned} &a_\lambda y = \psi(y)_{-\lambda-\partial}a + l(a)_\lambda y,\quad x_\lambda b = \varphi(x)_\lambda b + r(b)_{-\lambda-\partial}x,\\ &x_\lambda y = g_\lambda(x,y) + x\circ_\lambda y. \end{aligned}$$

接下来，我们给出 充分必要条件，使 $R\natural Q$ 成为一个左对称共形代数，其 λ-积由 (13) 定义。

定理 3.2。 设 R 是一个左对称共形代数，Q 是一个 $\mathbb{C}[\partial]$-模，且 $\Omega(R, Q)$是 R 通过 Q 的扩张数据。则以下陈述等价：(i) $\mathrm{R}\natural\mathrm{Q}$ 是一个左对称共形代数，其 λ-乘积由 (13)给出。(ii) 对所有 $\mathrm{a}, b\in\mathrm{R}$ 以及 $\mathrm{x}, y, z\in\mathrm{Q}$，都满足以下相容条件：

(LC1) $(\varphi(x)_\lambda a - \psi(x)_\lambda a)_{\lambda+\mu}b + \varphi(r(a)_\mu x - l(a)_\mu x)_{\lambda+\mu}b = \varphi(x)_\lambda(a_\mu b)$
$- a_\mu(\varphi(x)_\lambda b) - \psi(r(b)_{-\lambda-\partial}x)_{-\mu-\partial}a,$

(LC2) $r(b)_{-\lambda-\mu-\partial}(r(a)_\mu x - l(a)_\mu x) = r(a_\mu b)_{-\lambda-\partial}x - l(a)_\mu(r(b)_{-\lambda-\partial}x),$

(LC3) $\psi(x)_{-\lambda-\mu-\partial}(a_\lambda b - b_\mu a) = a_\lambda(\psi(x)_{-\mu-\partial}b) - b_\mu(\psi(x)_{-\lambda-\partial}a) + \psi(l(b)_\mu x)_{-\lambda-\partial}a$
$- \psi(l(a)_\lambda x)_{-\mu-\partial}b,$

(LC4) $l(a_\lambda b)_{\lambda+\mu}x - l(b_\mu a)_{\lambda+\mu}x = l(a)_\lambda(l(b)_\mu x) - l(b)_\mu(l(a)_\lambda x),$

(LC5) $\psi(y)_{-\lambda-\mu-\partial}(\psi(x)_\mu a - \varphi(x)_\mu a) + g_{\lambda+\mu}(l(a)_\lambda x, y) - a_\lambda(g_\mu(x,y)) - \psi(x\circ_\mu y)_{-\lambda-\partial}a$
$= g_{\lambda+\mu}(r(a)_{-\mu-\partial}x, y) - \varphi(x)_\mu(\psi(y)_{-\lambda-\partial}a) - g_\mu(x, l(a)_\lambda y),$

(LC6) $(l(a)_\lambda x)\circ_{\lambda+\mu} y + l(\psi(x)_{-\lambda-\partial}a)_{\lambda+\mu}y - l(a)_\lambda(x\circ_\mu y) = l(\varphi(x)_\mu a)_{\lambda+\mu}y$
$+ (r(a)_{-\mu-\partial}x)\circ_{\lambda+\mu} y - r(\psi(y)_{-\lambda-\partial}a)_{-\mu-\partial}x - x\circ_\mu (l(a)_\lambda y),$

(LC7) $(g_\lambda(x,y) - g_\mu(y,x))_{\lambda+\mu}a + \varphi(x\circ_\lambda y - y\circ_\mu x)_{\lambda+\mu}a = \varphi(x)_\lambda(\varphi(y)_\mu a) - \varphi(y)_\mu(\varphi(x)_\lambda a)$
$+ g_\lambda(x, r(a)_{-\mu-\partial}y) - g_\mu(y, r(a)_{-\lambda-\partial}x),$

(LC8) $r(a)_{-\lambda-\mu-\partial}(x\circ_\lambda y - y\circ_\mu x) = r(\varphi(y)_\mu a)_{-\lambda-\partial}x - r(\varphi(x)_\lambda a)_{-\mu-\partial}y$
$+ x\circ_\lambda (r(a)_{-\mu-\partial}y) - y\circ_\mu (r(a)_{-\lambda-\partial}x),$

(LC9) $\psi(z)_{-\lambda-\mu-\partial}g_\lambda(x,y) + g_{\lambda+\mu}(x\circ_\lambda y, z) - \varphi(x)_\lambda g_\mu(y,z) - g_\lambda(x, y\circ_\mu z)$
$= \psi(z)_{-\lambda-\mu-\partial}g_\mu(y,x) + g_{\lambda+\mu}(y\circ_\mu x, z) - \varphi(y)_\mu g_\lambda(x,z) - g_\mu(y, x\circ_\lambda z),$

(LC10) $l(g_\lambda(x,y))_{\lambda+\mu}z + (x\circ_\lambda y)\circ_{\lambda+\mu} z - r(g_\mu(y,z))_{-\lambda-\partial}x - x\circ_\lambda (y\circ_\mu z)$
$= l(g_\mu(y,x))_{\lambda+\mu}z + (y\circ_\mu x)\circ_{\lambda+\mu} z - r(g_\lambda(x,z))_{-\mu-\partial}y - y\circ_\mu (x\circ_\lambda z).$

证明。 由于 φ， ψ， l， r 是 $\mathbb{C}[\partial]$-模同态，且 $g_\lambda(\cdot,\ \cdot)$， $\circ_\lambda$ 是共形双线性映射，因此（13）中的共形半线性自然成立。

定义

$$F(a+x,b+y,c+z)=((a+x)_\lambda(b+y))_{\lambda+\mu}(c+z)-(a+x)_\lambda((b+y)_\mu(c+z))$$
$$-((b+y)_\mu(a+x))_{\lambda+\mu}(c+z)+(b+y)_\mu((a+x)_\lambda(c+z)),\quad a,b,c\in R,\ \ x,y,z\in Q.$$

注意，R ⊲ Q 是左对称共形代数，当且仅当对于所有 a、b、c ∈ R 以及 x、y、z ∈ Q，都有 F(a + x, b + y, c + z) = 0。

因此，我们只需证明，对于所有 a、b、c ∈ R 以及 x、y、z ∈ Q，F(a + x, b + y, c + z) = 0 成立，当且仅当（LC1）–（LC10）成立。根据左对称共形代数的左对称性，对于所有 a、b、c ∈ R 以及 x、y、z ∈ Q，F(a + x, b + y, c + z) = 0 成立，当且仅当

$$F(a,b,c)=0,\ F(x,b,c)=0,\ F(a,b,z)=0,$$
$$F(a,y,z)=0,\ F(x,y,c)=0,\ F(x,y,z)=0,$$

对于所有 a、b、c ∈ R 以及 x、y、z ∈ Q，均满足。

注意，对于所有 a, b, c ∈ R，F(a, b, c) = 0 当且仅当 R 是左对称共形代数。由于

$$\begin{aligned}&F(a,x,y)\\=&(\psi(x)_{-\lambda-\partial}a+l(a)_\lambda x)_{\lambda+\mu}y-a_\lambda(g_\mu(x,y)+x\circ_\mu y)\\&-(\varphi(x)_\mu a+r(a)_{-\mu-\partial}x)_{\lambda+\mu}y+x_\mu(\psi(y)_{-\lambda-\partial}a+l(a)_\lambda y)\\=&(\psi(y)_{-\lambda-\mu-\partial}(\psi(x)_{-\lambda-\partial}a)+g_{\lambda+\mu}(l(a)_\lambda x,y))+((l(a)_\lambda x)\circ_{\lambda+\mu}y+l(\psi(x)_{-\lambda-\partial}a)_{\lambda+\mu}y)\\&-((a_\lambda(g_\mu(x,y))+\psi(x\circ_\mu y)_{-\lambda-\partial}a)+l(a)_\lambda(x\circ_\mu y))\\&-((\psi(y)_{-\lambda-\mu-\partial}(\varphi(x)_\mu a)+g_{\lambda+\mu}(r(a)_{-\mu-\partial}x,y))+(l(\varphi(x)_\mu a)_{\lambda+\mu}y+(r(a)_{-\mu-\partial}x)\circ_{\lambda+\mu}y))\\&+(\varphi(x)_\mu(\psi(y)_{-\lambda-\partial}a)+g_\mu(x,l(a)_\lambda y))+(r(\psi(y)_{-\lambda-\partial}a)_{-\mu-\partial}x+x\circ_\mu(l(a)_\lambda y))\\=&0,\end{aligned}$$

F(a, x, y) = 0 当且仅当 (LC5) 和 (LC6) 成立。类似地，可以得到以下结果：F(x, a, b) = 0 当且仅当 (LC1) 和 (LC2) 成立；F(a, b, x) = 0 当且仅当 (LC3) 和 (LC4) 成立；F(x, y, a) = 0 当且仅当 (LC7) 和 (LC8) 成立；F(x, y, z) = 0 当且仅当 (LC9) 和 (LC10) 成立。于是证明完毕。

□

注 3.3. 事实上，(LC2) 和 (LC4) 表明 (*Q*,*l*,*r*) 是 *R* 的双模。此外，(LC1)、(LC3)、(LC6) 和 (LC8) 是定义左对称共形代数匹配对的相容条件（见 [13, 定理 3.14]).

推论 3.4. 设 Ω(R, Q) = (φ, ψ, l, r, $g_\lambda(\cdot,\cdot)$, $\circ_\lambda$) 是 R 通过 Q 的左对称共形扩张结构。定义共形双线性映射 $\triangleleft_\lambda : Q \times g(R) \to Q[\lambda]$，使得 $x \triangleleft_\lambda a = r(a)_{-\lambda-\partial}x - l(a)_{-\lambda-\partial}x$；$\triangleright_\lambda : Q \times g(R) \to g(R)[\lambda]$，使得 $x \triangleright_\lambda a = \varphi(a)_\lambda x - \psi(a)_\lambda x$；$f_\lambda : Q \times Q \to g(R)[\lambda]$，使得 $f_\lambda(x, y) = g_\lambda(x, y) - g_{-\lambda-\partial}(y, x)$；以及 $\{\cdot_\lambda \cdot\} : Q \times Q \to Q[\lambda]$，使得 $\{x_\lambda y\} = x \circ_\lambda y - y \circ_{-\lambda-\partial} x$，其中对所有 a ∈ R 及 x, y ∈ Q 均成立。那么 Ω(g(R), Q) = ($\triangleleft_\lambda, \triangleright_\lambda, f_\lambda, \{\cdot_\lambda \cdot\}$) 是 g(R) 通过 Q 的李共形扩张结构（见 [14, 定义 3.1]）。

证明。设 R ⊲⊳ Q 是R 和Ω(R,Q) 的统一积。那么 g(R ⊲⊳ Q) 上的 λ-括号由下式给出

$$\begin{aligned}
& [(a+x)_\lambda (b+y)] \\
= \;& (a+x)_\lambda (b+y) - (b+y)_{-\lambda-\partial}(a+x) \\
= \;& (a_\lambda b - b_{-\lambda-\partial}a + (\varphi(x)_\lambda b - \psi(x)_\lambda b) - (\varphi(y)_{-\lambda-\partial}a - \psi(y)_{-\lambda-\partial}a) + g_\lambda(x,y) - g_{-\lambda-\partial}(y,x)) \\
& +(x \circ_\lambda y - y \circ_{-\lambda-\partial} x + (l(a)_\lambda y - r(a)_\lambda y) - (l(b)_{-\lambda-\partial}x - r(b)_{-\lambda-\partial}x)) \\
= \;& ([a_\lambda b] + x \triangleright_\lambda b - y \triangleright_{-\lambda-\partial} a + f_\lambda(x,y)) + (\{x_\lambda y\} + x \triangleleft_\lambda b - y \triangleleft_{-\lambda-\partial} a), \quad a,b \in R, x,y \in Q.
\end{aligned}$$

因此，Ω(g(R), Q) = ($\triangleleft_\lambda, \triangleright_\lambda$, f_λ, $\{\cdot_\lambda \cdot\}$) 是 g(R) 关于 Q 的李共形扩张结构。 □

我们给出一个左对称共形扩张结构的示例。更多示例将在第5节中给出。

例3.5. [13, 命题 3.7] 设Ω(R, Q) = (φ, ψ,l,r, $g_\lambda(\cdot,\cdot), \circ_\lambda$) 是左对称共形代数R通过一个 $\mathbb{C}[\partial]$-模Q 的扩张数据，其中 φ、ψ、$g_\lambda(\cdot,\cdot)$ 和 $\circ_\lambda$ 都是平凡的。将此扩张数据简记为 Ω(R,Q) = (l, r)。那么，当且仅当 (Q, l, r)是一个 R-双模，即满足 (LC2) 和(LC4)时，Ω(R,Q)是R通过 Q 的左对称共形扩张结构。相应的统一积 R ⊲⊳ Q，记作 R ⊲⊳$_{l,r}$Q，被称为 R和 Q 的半直积。R ⊲⊳$_{l,r}$Q 上的 λ-积定义如下

$$(a+x)_\lambda (b+y) = a_\lambda b + l(a)_\lambda x + r(b)_{-\lambda-\partial} y,$$

对所有的 a, b ∈ R 和 x, y ∈ Q。

不难看出，R 是 R ⊲⊳ Q 的左对称共形子代数。因此，对于任意的 Ω(R, Q)，R 与 Ω(R, Q) 的统一积满足 $\mathbb{C}[\partial]$-分裂扩张结构问题中的条件。接下来，我们证明任何包含 R 作为子代数的左对称共形代数 E =R ⊕ Q 都与一个统一积同构。

定理 3.6. 设 R 是一个左对称共形代数，Q 是一个 $\mathbb{C}[\partial]$-模。令 E = R⊕Q，其中直和是 $\mathbb{C}[\partial]$-模的和。假设 (E, $\cdot_\lambda$) 是一个包含 R 作为子代数的左对称共形代数。那么，存在 R 通过 Q 的一个左对称共形扩张结构 Ω(R, Q) = (φ, ψ, l, r, $g_\lambda(\cdot,\cdot), \circ_\lambda$)，使得作为左对称共形代数，E ≅ R ⊲⊳ Q，且该同构保持 R 并余保持 Q，其中 R ⊲⊳ Q 是 R 与 Ω(R, Q) 的统一积。

证明。由于E = R ⊕ Q，存在一个典范的 $\mathbb{C}[\partial]$-模同态 p: E → R，使得对于所有 a ∈R，都有 p(a) = a。因此，我们定义 R关于 Q的延拓数据Ω(R, Q) = (φ, ψ, l,r, $g_\lambda(\cdot,\cdot), \circ_\lambda$) 如下:

$$\begin{aligned}
& \varphi_\cdot Q \to Cend(R),\ \varphi(x)_\lambda a := p(x_\lambda a), \\
& \psi : Q \to Cend(R),\ \psi(x)_\lambda a := p(a_{-\lambda-\partial}x), \\
& l : R \to Cend(Q),\ l(a)_\lambda x := a_\lambda x - p(a_\lambda x), \\
& r : R \to Cend(Q),\ r(a)_\lambda x := x_{-\lambda-\partial}a - p(x_{-\lambda-\partial}a), \\
& g_\lambda(\cdot,\cdot) : Q \times Q \to R[\lambda],\ g_\lambda(x,y) := p(x_\lambda y), \\
& \circ_\lambda : Q \times Q \to Q[\lambda],\ x \circ_\lambda y := x_\lambda y - p(x_\lambda y),
\end{aligned}$$

对于所有 a ∈ R 以及 x、y ∈ Q。通过与 [14, 定理 2.4], 中类似的证明，可以证明 Ω(R, Q) = $(\varphi, \psi, l, r, g_\lambda(\cdot,\cdot), \circ_\lambda)$ 是一个左对称共形结构，并且 E ≅ R ⊲ Q 作为左对称共形代数，稳定 R 并共同稳定 Q。

□

定义 3.7. 设 R 是一个左对称共形代数，Q 是一个 $\mathbb{C}[\partial]$-模。若存在一对 $\mathbb{C}[\partial]$-模同态 (u, v)，其中 u: Q → R，v ∈ $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}[\partial]}$(Q)，使得左对称共形扩张结构 Ω(R, Q) = $(\varphi, \psi, l, r, g_\lambda(\cdot,\cdot), \circ_\lambda)$ 可由另一个相应的扩张结构 Ω′(R, Q) = $(\varphi', \psi', l', r', g'_\lambda(\cdot,\cdot), \circ'_\lambda)$ 按如下方式通过 (u, v) 得到:

(15) $\psi(x)_{-\lambda-\partial}a + u(l(a)_\lambda x) = a_\lambda u(x) + \psi'(v(x))_{-\lambda-\partial}a,$

(16) $v(l(a)_\lambda x) = l'(a)_\lambda v(x),$

(17) $\varphi(x)_\lambda a + u(r(a)_{-\lambda-\partial}x) = u(x)_\lambda a + \varphi'(v(x))_\lambda a,$

(18) $v(r(a)_{-\lambda-\partial}x) = r'(a)_{-\lambda-\partial}v(x),$

(19) $g_\lambda(x,y) + u(x \circ_\lambda y) = u(x)_\lambda u(y) + \varphi'(v(x))_\lambda u(y) + \psi'(v(y))_{-\lambda-\partial}u(x) + g'_\lambda(v(x), v(y)),$

(20) $v(x \circ_\lambda y) = r'(u(y))_{-\lambda-\partial}v(x) + l'(u(x))_\lambda v(y) + v(x) \circ'_\lambda v(y),$

对于所有 a, b ∈ R 以及 x, y ∈ Q，若 Ω(R, Q) 和 Ω′(R, Q) 等价，则称它们等价，并记作 Ω(R, Q) ≡ Ω′(R, Q)。特别地，若 v = Id，则称 Ω(R, Q) 和 Ω′(R, Q) 上同调等价，并记作 Ω(R, Q) ≈ Ω′(R, Q)。

引理 3.8. 设 Ω(R, Q) = $(\varphi, \psi, l, r, g_\lambda(\cdot,\cdot), \circ_\lambda)$ 和 Ω′(R, Q) = $(\varphi', \psi', l', r', g'_\lambda(\cdot,\cdot), \circ'_\lambda)$ 是 R 的两个由 Q 扩张得到的左对称共形扩张结构，且 R ⊲ Q、R ⊲ ′Q 是相应的统一积。因此，R ⊲ Q ≡ R ⊲ ′Q 当且仅当 Ω(R, Q) ≡ Ω′(R, Q)。此外，R ⊲ Q ≈ R ⊲ ′Q 当且仅当 Ω(R, Q) ≈ Ω′(R, Q)。

证明. 设 τ : R ⊲ Q → R ⊲ ′Q 是一个保持 R 不变的左对称共形代数同态。由于 τ 保持 R 不变，因此 τ(a) = a 对所有 a ∈ R 都成立。因此，对所有 a ∈ R 和 x ∈ Q，令 τ(a + x) =(a + u(x)) +v(x)，其中 u: Q → R、v: Q → Q 是两个线性映射。类似于 [14, 引理 3.6], 中的证明，不难验证，τ 是左对称共形代数同构，当且仅当 u 是一个 $\mathbb{C}[\partial]$-模同态、v ∈ $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}[\partial]}$(Q)，且 (15)-(20) 成立。此外，容易看出，左对称共形代数同构 τ 与 Q 余稳定，当且仅当 u 是一个 $\mathbb{C}[\partial]$-模同态、v = Id_Q，且 (15)-(20) 成立。□

定理 3.9. 设 R 是一个左对称共形代数，Q 是一个 $\mathbb{C}[\partial]$-模，且 E = R⊕Q，其中直和是 $\mathbb{C}[\partial]$-模的和。那么我们有
(i) 令 $\mathcal{H}^2_R$(Q, R) := L(R, Q)/ ≡。则映射

(21) $$\mathcal{H}^2_R(Q,R) \to CExtd(E,R),\ \overline{\Omega(R,Q)} \mapsto (R\natural Q, \cdot_\lambda \cdot)$$

是双射，其中 $\Omega(\overline{R, Q})$ 是 Ω(R, Q) 在 ≡ 下的等价类。
(ii) 令 $\mathcal{H}^2$(Q, R) := L(R, Q)/ ≈。则映射

(22) $$\mathcal{H}^2(Q,R) \to CExtd'(E,R),\ \overline{\overline{\Omega(R,Q)}} \mapsto (R\natural Q, \cdot_\lambda \cdot)$$

是双射，其中 $\Omega(\overline{\overline{R, Q}})$ 是 Ω(R, Q) 在 ≈ 下的等价类。

证明。 由定理 3.2、定理 3.6 和引理 3.8可得。 □

注 3.10. 根据定理 3.9， $\mathcal{H}^2_R(Q, R)$ 刻画了 $E = R \oplus Q$ 上所有包含 R 作为子代数的左对称共形代数结构，模去保持 R 不变的同构。因此，$\mathcal{H}^2_R(Q, R)$ 为 $\mathbb{C}[\partial]$-分裂扩张结构问题提供了理论解答。最后， $\mathcal{H}^2(Q, R)$ 刻画了 $E = R \oplus Q$ 上所有包含 R 作为子代数、模去保持 R 不变且共稳定 Q 的同构的左对称共形代数结构。

4. 统一积，其中 $Q = \mathbb{C}[\partial]x$

本节中，我们研究 R 是自由 $\mathbb{C}[\partial]$-模且 Q 是秩为 1 的自由 $\mathbb{C}[\partial]$-模时的一般统一积。设 $Q = \mathbb{C}[\partial]x$。

定义 4.1. 设 $R = \mathbb{C}[\partial]V$ 是一个左对称共形代数，且是一个自由 $\mathbb{C}[\partial]$-模。R 的旗数据是一个六元组 $(h_\lambda(\cdot,\partial), k_\lambda(\cdot,\partial), D_\lambda, T_\lambda, M(\lambda,\partial), P(\lambda,\partial))$，其中 $P(\lambda,\partial) \in \mathbb{C}[\lambda,\partial]$， $M(\lambda,\partial) \in R[\lambda]$， $h_\lambda(\cdot,\partial) : R \to \mathbb{C}[\lambda,\partial]$ 和 $k_\lambda(\cdot,\partial) : R \to \mathbb{C}[\lambda,\partial]$ 是两个左共形线性映射， $D_\lambda : R \to R[\lambda]$ 和 $T_\lambda : R \to R[\lambda]$ 是共形线性映射，并满足以下条件，其中对所有 $a, b \in V$ 均成立：

(23) $(D_\lambda(a) - T_\lambda(a))^{\lambda+\mu}b + (k^\mu(a, -\lambda-\mu) - h^\mu(a, -\lambda-\mu))D^{\lambda+\mu}(b) = D_\lambda(a^\mu b) - a^\mu(D_\lambda(b)) - k^{-\lambda-\mu-\partial}(b,\mu+\partial)T^{-\mu-\partial}(a)$, $(k^\mu(a, -\lambda-\mu) - h^\mu(a, -\lambda-\mu))k^{-\lambda-\mu-\partial}(b, \partial) = k_{-\lambda-\partial}(a^\mu b, \partial) - k^{-\lambda-\mu-\partial}(b, \mu+\partial)h^\mu(a, \partial)$,(24) $T^{-\lambda-\mu-\partial}(a_\lambda b - b^\mu a) = a_\lambda T^{-\mu-\partial}(b) - b^\mu T_{-\lambda-\partial}(a) + h^\mu(b, \lambda+\partial)T_{-\lambda-\partial}(a)$ (25)$- h_\lambda(a,\mu+\partial)T^{-\mu-\partial}(b), h^{\lambda+\mu}(a_\lambda b - b^\mu a, \partial) = h^\mu(b, \lambda+\partial)h_\lambda(a,\partial) - h_\lambda(a,\mu+\partial)h^\mu(b,\partial)$, (26) $T^{-\lambda-\mu-\partial}(T^\mu(a) - D^\mu(a)) + h_\lambda(a, -\lambda-\mu)M(\lambda+\mu,\partial) - P(\mu, \lambda+\partial)T_{-\lambda-\partial}(a)(27)- a_\lambda M(\mu, \partial) = k_\lambda(a, -\lambda-\mu)M(\lambda+\mu,\partial) - D^\mu(T_{-\lambda-\partial}(a)) - h_\lambda(a,\mu+\partial)M(\mu,\partial), h_\lambda(a, -\lambda-\mu)P(\lambda+\mu, \partial) + h^{\lambda+\mu}(T_{-\lambda-\partial}(a), \partial) - P(\mu, \lambda+\partial)h_\lambda(a, \partial) = h^{\lambda+\mu}(D^\mu(a), \partial)(28)+ k_\lambda(a, -\lambda-\mu)P(\lambda+\mu, \partial) - k^{-\mu-\partial}(T_{-\lambda-\partial}(a), \partial) - h_\lambda(a, \mu+\partial)P(\mu, \partial), (M(\lambda, \partial) - M(\mu, \partial))^{\lambda+\mu}a + (P(\lambda, -\lambda-\mu) - P(\mu, -\lambda-\mu))D^{\lambda+\mu}(a) = D_\lambda(D^\mu(a))(29)- D^\mu(D_\lambda(a)) + k^{-\lambda-\mu-\partial}(a, \lambda+\partial)M(\lambda,\partial) - k^{-\lambda-\mu-\partial}(a,\mu+\partial)M(\mu, \partial),(P(\lambda, -\lambda-\mu) - P(\mu, -\lambda-\mu))k^{-\lambda-\mu-\partial}(a, \partial) = k_{-\lambda-\partial}(D^\mu(a), \partial) - k^{-\mu-\partial}(D_\lambda(a), \partial)(30)+ k^{-\lambda-\mu-\partial}(a, \lambda+\partial)P(\lambda,\partial) - k^{-\lambda-\mu-\partial}(a,\mu+\partial)P(\mu, \partial),T^{-\lambda-\mu-\partial}(M(\lambda,\partial) - M(\mu,\partial)) + (P(\lambda, -\lambda-\mu) - P(\mu, -\lambda-\mu))M(\lambda+\mu, \partial)$ (31)$= D_\lambda(M(\mu, \partial)) - D^\mu(M(\lambda,\partial)) + P(\mu, \lambda+\partial)M(\lambda,\partial) - P(\lambda,\mu+\partial)M(\mu, \partial),h^{\lambda+\mu}(M(\lambda,\partial) - M(\mu, \partial), \partial) + (P(\lambda, -\lambda-\mu) - P(\mu, -\lambda-\mu))P(\lambda+\mu, \partial)$ (32)$= k_{-\lambda-\partial}(M(\mu,\partial), \partial) - k^{-\mu-\partial}(M(\lambda,\partial),\partial) + P(\mu, \lambda+\partial)P(\lambda,\partial) - P(\lambda, \mu+\partial)P(\mu, \partial)$.

我们将左对称共形代数 R 的所有旗标数据组成的集合记为 $\mathcal{FLC}(R)$。

命题 4.2. 设 $R = \mathbb{C}[\partial]V$ 是一个左对称共形代数，且是自由的 $\mathbb{C}[\partial]$-模； $Q = \mathbb{C}[\partial]x$ 是一个秩为 1 的自由 $\mathbb{C}[\partial]$-模。那么，R 由 Q 扩张得到的所有左对称共形扩张结构所构成的集合 L(R, Q) 与 $\mathcal{FLC}(R)$ 之间存在一个双射。

证明. 给定一个左对称共形扩张结构 $\Omega(R, Q) = (\varphi, \psi, l, r, g_\lambda(\cdot,\cdot), \circ_\lambda)$。由于 $Q = \mathbb{C}[\partial]x$ 是一个秩为 1 的自由 $\mathbb{C}[\partial]$- 模，我们令

$$l(a)_\lambda x = h_\lambda(a,\partial)x,\ r(a)_\lambda x = k_\lambda(a,\partial)x,\ \varphi(x)_\lambda a = D_\lambda(a),$$
$$\psi(x)_\lambda a = T_\lambda(a),\ x \circ_\lambda x = P(\lambda,\partial)x,\ g_\lambda(x,x) = M(\lambda,\partial),$$

其中，$P(\lambda,\partial) \in \mathbb{C}[\lambda,\partial]$、$M(\lambda,\partial) \in R[\lambda]$、$h_\lambda(\cdot,\partial) : R \to \mathbb{C}[\lambda,\partial]$ 和$k_\lambda(\cdot,\partial) : R \to \mathbb{C}[\lambda,\partial]$ 是左共形线性映射，$D_\lambda : R \to R[\lambda]$和 $T_\lambda : R \to R[\lambda]$是共形线性映射。直接验证可知，定理 3.2 中的条件（LC1）–（LC10）等价于（23）–（32）。

□

与 R 的旗数据 $(h_\lambda(\cdot,\partial), k_\lambda(\cdot,\partial), D_\lambda, T_\lambda, M(\lambda,\partial), P(\lambda,\partial))$ 相对应的左对称共形代数是 $\mathbb{C}[\partial]$-模 $R \oplus \mathbb{C}[\partial]x$，其 λ-乘积如下：

$$(a + x)_\lambda (b + x) = a_\lambda b + T_{-\lambda-\partial}(a) + D_\lambda(b) + M(\lambda,\partial)) + (h_\lambda(a,\partial) + k_{-\lambda-\partial}(b,\partial) + P(\lambda,\partial))x, \quad (33)$$

对所有 $a, b \in V$。将这个左对称共形代数记为 $LC(R, \mathbb{C}[\partial]x | h_\lambda(\cdot,\partial), k_\lambda(\cdot,\partial), D_\lambda, T_\lambda, M(\lambda,\partial), P(\lambda,\partial))$。

定理 4.3. 设 $R = \mathbb{C}[\partial]V$ 是一个作为 $\mathbb{C}[\partial]$-模自由的左对称共形代数，且 $Q = \mathbb{C}[\partial]x$ 是一个秩为 1 的自由 $\mathbb{C}[\partial]$-模。令 $E = R \oplus Q$，其中直和是 $\mathbb{C}[\partial]$-模的和。于是我们得到

(1) $CExtd(E, R) \cong \mathcal{H}^2_R(Q,R) \cong \mathcal{FLC}(R)/\equiv$，其中“$\equiv$”是集合$\mathcal{FLC}(R)$上的等价关系，定义如下：

$$(h_\lambda(\cdot,\partial), k_\lambda(\cdot,\partial), D_\lambda, T_\lambda, M(\lambda,\partial), P(\lambda,\partial)) \equiv (h'_\lambda(\cdot,\partial), k'_\lambda(\cdot,\partial), D'_\lambda, T'_\lambda, M'(\lambda,\partial), P'(\lambda,\partial))$$

当且仅当 $h_\lambda(\cdot,\partial) = h'_\lambda(\cdot,\partial)$、$k_\lambda(\cdot,\partial) = k'_\lambda(\cdot,\partial)$，并且存在 $\omega \in R$ 和 $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$，使得对所有 $a \in V$:

$$D_\lambda(a) = \beta D'_\lambda(a) + \omega_\lambda a - k_{-\lambda-\partial}(a,\partial)\omega, \quad (34)$$
$$T_{-\lambda-\partial}(a) = \beta T'_{-\lambda-\partial}(a) + a_\lambda\omega - h_\lambda(a,\partial)\omega, \quad (35)$$
$$M(\lambda,\partial) = \omega_\lambda\omega + \beta^2 M'(\lambda,\partial) + \beta T'_{-\lambda-\partial}(\omega) + \beta D'_\lambda(\omega) - P(\lambda,\partial)\omega, \quad (36)$$
$$P(\lambda,\partial) = k'_{-\lambda-\partial}(\omega,\partial) + h'_\lambda(\omega,\partial) + \beta P'(\lambda,\partial). \quad (37)$$

$\mathcal{FLC}(R)/\equiv$ 与 $CE\ xtd(E, R)$ 之间的双射由

$$\overline{(h_\lambda(\cdot,\partial), k_\lambda(\cdot,\partial), D_\lambda, T_\lambda, M(\lambda,\partial), P(\lambda,\partial))} \to LC(R, \mathbb{C}[\partial]x | h_\lambda(\cdot,\partial), k_\lambda(\cdot,\partial), D_\lambda, T_\lambda, M(\lambda,\partial), P(\lambda,\partial)). \quad (38)$$

(2) $CE\ xtd'(E, R) \cong \mathcal{H}^2(Q,R) \cong \mathcal{FLC}(R)/\approx$，其中“$\approx$”是集合$\mathcal{FLC}(R)$上的等价关系，如下：

$$(h_\lambda(\cdot,\partial), k_\lambda(\cdot,\partial), D_\lambda, T_\lambda, M(\lambda,\partial), P(\lambda,\partial)) \approx (h'_\lambda(\cdot,\partial), k'_\lambda(\cdot,\partial), D'_\lambda, T'_\lambda, M'(\lambda,\partial), P'(\lambda,\partial))$$

当且仅当 $h_\lambda(\cdot,\partial) = h'_\lambda(\cdot,\partial)$，$k_\lambda(\cdot,\partial) = k'_\lambda(\cdot,\partial)$，并且存在 $\omega \in R$，使得 (34)-(37) 对 $\beta = 1$ 成立。$\mathcal{FLC}(R)/\approx$ 与 $CExtd'(E, R)$ 之间的双射由下式给出。

$$\overline{(h_\lambda(\cdot,\partial), k_\lambda(\cdot,\partial), D_\lambda, T_\lambda, M(\lambda,\partial), P(\lambda,\partial))} \to LC(R, \mathbb{C}[\partial]x | h_\lambda(\cdot,\partial), k_\lambda(\cdot,\partial), D_\lambda, T_\lambda, M(\lambda,\partial), P(\lambda,\partial)). \quad (39)$$

证明。由于 u: Q $\to$ R 是一个 $\mathbb{C}[\partial]$-模同态，且 v 是定义 3.7 中 Q 的一个 $\mathbb{C}[\partial]$-模自同构，我们令 u(x) $= \omega$ 并令 v(x) $= \beta$x，其中 $\omega \in$ R 且 $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$。因此，我们可以直接由引理 3.8、定理 3.9 和命题 4.2 得出此定理。□

若 $(h_\lambda(\cdot,\partial), k_\lambda(\cdot,\partial), D_\lambda, T_\lambda, M(\lambda,\partial), P(\lambda,\partial)) \in \mathcal{FLC}(R)$，其中 $h_\lambda(\cdot,\partial)$、$k_\lambda(\cdot,\partial)$ 且 T_λ 平凡，则将此旗数据记为 $(D_\lambda, M(\lambda,\partial), P(\lambda,\partial))$。R 的所有此类旗数据的集合记为 $\mathcal{DFLC}_1(R)$。在此情形下，注意到 D_λ 是 R 的一个共形导子。根据定理 4.3，$(D_\lambda, M(\lambda,\partial), P(\lambda,\partial)) \equiv (D'_\lambda, M'(\lambda,\partial), P'(\lambda,\partial))$ 当且仅当存在一对 $(\beta,\omega) \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \times R$，使得对所有 $a \in V$，

$$D_\lambda(a) = \beta D'_\lambda(a) + \omega_\lambda a, \tag{40}$$

$$0 = a_\lambda \omega, \tag{41}$$

$$M(\lambda,\partial) = \omega_\lambda \omega + \beta^2 M'(\lambda,\partial) + \beta D'_\lambda(\omega) - P(\lambda,\partial)\omega, \tag{42}$$

$$P(\lambda,\partial) = \beta P'(\lambda,\partial). \tag{43}$$

此外，当且仅当 (40)-(43) 在$\beta = 1$成立时，$(D_\lambda, M(\lambda,\partial), P(\lambda,\partial)) \approx (D'_\lambda, M'(\lambda,\partial), P'(\lambda,\partial))$。将所有形如 $(D_\lambda, 0, P(\lambda,\partial))$ 的旗标数据的集合记为 $\mathcal{DDFLC}_1(R)$。

若 $(h_\lambda(\cdot,\partial), k_\lambda(\cdot,\partial), D_\lambda, T_\lambda, M(\lambda,\partial), P(\lambda,\partial)) \in \mathcal{FLC}(R)$，且 $P(\lambda,\partial) = 0$、$h_\lambda(\cdot,\partial)$，并且 T_λ 平凡，则将此旗数据记为 $(k_\lambda(\cdot,\partial), D_\lambda, M(\lambda,\partial))$。R 中所有 $k_\lambda(\cdot,\lambda)$, 0 的此类旗数据组成的集合记为 $\mathcal{DFLC}_2(R)$。在这种情况下，注意 D 是 R 的一个扭曲共形导子。根据定理 4.3，$(k_\lambda(\cdot,\partial), D_\lambda, M(\lambda,\partial)) \equiv (k'_\lambda(\cdot,\partial), D'_\lambda, M'(\lambda,\partial))$ 当且仅当存在一对 $(\beta,\omega) \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \times R$，使得对所有 $a \in V$，

$$D_\lambda(a) = \beta D'_\lambda(a) + \omega_\lambda a - k_{-\lambda-\partial}(a,\partial)\omega, \tag{44}$$

$$0 = a_\lambda \omega, \tag{45}$$

$$M(\lambda,\partial) = \omega_\lambda \omega + \beta^2 M'(\lambda,\partial) + \beta D'_\lambda(\omega), \tag{46}$$

$$0 = k'_{-\lambda-\partial}(\omega,\partial). \tag{47}$$

此外，$(k_\lambda(\cdot,\partial), D_\lambda, M(\lambda,\partial)) \approx (k'_\lambda(\cdot,\partial), D'_\lambda, M'(\lambda,\partial))$ 当且仅当 (44)-(47) 在$\beta = 1$下成立。

推论 4.4. 设 R 是一个自由 $\mathbb{C}[\partial]$-模上的左对称共形代数。若 $h_\lambda(\cdot,\partial)$ 在 R 的任意旗数据中都是平凡的，并且 R 的所有共形半拟中心都是内的，则

$$CExtd(E,R) \cong H^2_R(Q,R) \cong (DFLC_1(R)/\equiv) \cup (DFLC_2(R)/\equiv) \tag{48}$$

and

$$CExtd'(E,R) \cong H^2(Q,R) \cong (DFLC_1(R)/\approx) \cup (DFLC_2(R)/\approx). \tag{49}$$

此外，若不存在非零元素 $b \in R$，使得对所有 $a \in R$ 都有 $a_\lambda b = 0$，则

$$CExtd(E,R) \cong H^2_R(Q,R) \cong (DDFLC_1(R)/\equiv_1) \cup (DFLC_2(R)/\equiv_2),$$

其中 $(D_\lambda, 0, P(\lambda,\partial)) \equiv_1 (D'_\lambda, 0, P'(\lambda,\partial))$ 当且仅当存在 $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 使得

$$D_\lambda(a) = \beta D'_\lambda(a),\ P(\lambda,\partial) = \beta P'(\lambda,\partial),$$

并且 $(\mathrm{k}_\lambda(\cdot,\partial), \mathrm{D}_\lambda, \mathrm{M}(\lambda,\partial)) \equiv_2 (\mathrm{k}'_\lambda(\cdot,\partial), \mathrm{D}'_\lambda, \mathrm{M}'(\lambda,\partial))$ 当且仅当 $\mathrm{k}_\lambda(\cdot,\partial) = \mathrm{k}'_\lambda(\cdot,\partial)$ 且存在 $\beta \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ 使得

$$D_\lambda(a) = \beta D'_\lambda(a),\ M(\lambda,\partial) = \beta^2 M'(\lambda,\partial),$$

and

$$CExtd'(E,R) \cong H^2(Q,R) \cong DDFLC_1(R) \cup DFLC_2(R).$$

证明。由 (25)，T_λ 是一个共形半拟中心。由于 R 的所有共形半拟中心都是内的，因此存在某个 $\mathrm{b} \in \mathrm{R}$，使得对所有 $\mathrm{a} \in \mathrm{R}$，都有 $\mathrm{T}_{-\lambda-\partial}(\mathrm{a}) = \mathrm{a}_\lambda\mathrm{b}$。由定理 4.3，我们可以令 $\mathrm{T}_\lambda = 0$。于是，由 (27) 和 (28) 可得 $\mathrm{k}_\lambda(\mathrm{a}, -\lambda-\mu)\mathrm{M}(\lambda+\mu, \partial) + \mathrm{a}_\lambda\mathrm{M}(\mu, \partial) = 0$，且 $\mathrm{k}_\lambda(\mathrm{a}, -\lambda-\mu)\mathrm{P}(\lambda+\mu, \partial) = 0$。因此，我们得到两种情况：(1) $\mathrm{k}_\lambda(\cdot,\partial) = 0$；(2) $\mathrm{k}_\lambda(\cdot,\partial) \neq 0, \mathrm{P}(\lambda,\partial) = 0$。那么，第一个结论可由定理 4.3 直接得到。

现在考虑 R 中也不存在非零元素 b，使得对所有 $\mathrm{a} \in \mathrm{R}$ 都有 $\mathrm{a}_\lambda\mathrm{b} = 0$。若 $\mathrm{k}_\lambda(\cdot,\partial) = 0$，则由 (27) 可知，对所有 $\mathrm{a} \in \mathrm{R}$，都有 $\mathrm{a}_\lambda\mathrm{M}(\mu, \partial) = 0$。因此，$\mathrm{M}(\mu, \partial) = 0$。此外，我们还可以由 (41) 和 (45) 得到 (40)-(43) 和 (44)-(47) 中的 $\omega = 0$。于是，由定理 4.3 可得第二个结论。□

5. 统一积的特殊情形与示例

本节将介绍左对称共形代数的一些重要且有趣的积，例如交叉积和双交叉积，它们都是统一积的特殊情形。

5.1. 左对称共形代数的交叉积。

设 R 是一个左对称共形代数，Q 是一个 $\mathbb{C}[\partial]$-模。设 $\Omega(\mathrm{R}, \mathrm{Q}) = (\varphi, \psi, \mathrm{l}, \mathrm{r}, \mathrm{g}_\lambda(\cdot,\cdot), \circ_\lambda)$ 是 R 通过 Q 的一个扩张数据，其中 l 和 r 均为平凡映射。我们将此扩张数据简记为 $\Omega(\mathrm{R}, \mathrm{Q}) = (\varphi, \psi, \mathrm{g}_\lambda(\cdot,\cdot), \circ_\lambda)$。那么，$\Omega(\mathrm{R}, \mathrm{Q}) = (\varphi, \psi, \mathrm{g}_\lambda(\cdot,\cdot), \circ_\lambda)$ 是 R 通过 Q 的一个左对称共形扩张结构，当且仅当 $(\mathrm{Q}, \circ_\lambda)$ 是一个左对称共形代数，且对所有 $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{R}$ 以及 $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \in \mathrm{Q}$，下列条件都成立：

(C1) $(\varphi(x)_\lambda a - \psi(x)_{-\mu-\partial}a)_{\lambda+\mu}b = \varphi(x)_\lambda(a_\mu b) - a_\mu(\varphi(x)_\lambda b),$

(C2) $\psi(x)_{-\lambda-\mu-\partial}(a_\lambda b - b_\mu a) = a_\lambda(\psi(x)_{-\mu-\partial}b) - b_\mu(\psi(x)_{-\lambda-\partial}a),$

(C3) $\psi(y)_{-\lambda-\mu-\partial}(\psi(x)_{-\lambda-\partial}a - \varphi(x)_\mu a) - a_\lambda(g_\mu(x,y)) - \psi(x\circ_\mu y)_{-\lambda-\partial}a = -\varphi(x)_\mu(\psi(y)_{-\lambda-\partial}a),$

(C4) $(g_\lambda(x,y) - g_\mu(y,x))_{\lambda+\mu}a + \varphi(x\circ_\lambda y - y\circ_\mu x)_{\lambda+\mu}a = \varphi(x)_\lambda(\varphi(y)_\mu a) - \varphi(y)_\mu(\varphi(x)_\lambda a),$

(C5) $\psi(z)_{-\lambda-\mu-\partial}g_\lambda(x,y) + g_{\lambda+\mu}(x\circ_\lambda y, z) - \varphi(x)_\lambda g_\mu(y,z) - g_\lambda(x, y\circ_\mu z)$
$= \psi(z)_{-\lambda-\mu-\partial}g_\mu(y,x) + g_{\lambda+\mu}(y\circ_\mu x, z) - \varphi(y)_\mu g_\lambda(x,z) - g_\mu(y, x\circ_\lambda z).$

我们将相应的统一积 $\mathrm{R}\natural\mathrm{Q}$ 记作 $\mathrm{R}\natural^g_{\varphi,\psi}\mathrm{Q}$，并称其为 R 和 Q 的交叉积。$\mathrm{R}\natural^g_{\varphi,\psi}\mathrm{Q}$ 上的 λ-积由下式给出，其中 $\mathrm{a},\mathrm{b} \in \mathrm{R}$ 且 $\mathrm{x},\mathrm{y} \in \mathrm{Q}$：

$$(a+x)_\lambda(b+y) = (a_\lambda b + \varphi(x)_\lambda b + \psi(y)_{-\lambda-\partial}a + g_\lambda(x,y)) + x\circ_\lambda y.$$

显然，R 是 $\mathrm{R}\natural^g_{\varphi,\psi}\mathrm{Q}$ 的理想。

命题5.1.设 R 和Q 是两个左对称共形代数。令E $=\mathrm{R}\oplus\mathrm{Q}$，其中直和是 $\mathbb{C}[\partial]$-模的和。若 E 具有左对称共形代数结构，且R是 E 的理想，则 E 同构于R 和 Q 的交叉积$\mathrm{R}\natural_{\varphi,\psi}^{g}\mathrm{Q}$。

证明。由定理 3.6可直接得出。 □

因此，左对称共形代数的交叉积有助于研究引言中提出的 $\mathbb{C}[\partial]$-分裂扩张问题。根据命题 5.1，$\mathbb{C}[\partial]$-分裂扩张问题中的任意 E 都同构于交叉积 $\mathrm{R}\natural_{\varphi,\psi}^{g}\mathrm{Q}$。注意，R 和 Q 的所有交叉积都满足 $\mathbb{C}[\partial]$-分裂扩张问题中的条件。因此，在 $\mathbb{C}[\partial]$-分裂扩张问题中，E 上的所有左对称共形代数结构，都可以由 R 和 Q 的所有交叉积（在保持 R 且余保持 Q 的同构意义下）描述。根据引理 3.8 和定理 3.9，$\mathbb{C}[\partial]$-分裂扩张问题可由 $\mathcal{H}^2(\mathrm{Q},\mathrm{R})\cong\mathrm{L}(\mathrm{R},\mathrm{Q})/\approx$回答，其中这些左对称共形扩张结构中的$\mathrm{l}、\mathrm{r}=0$和 $\circ_\lambda$ 是 Q 上的 λ-积，简记为 $\mathcal{HC}^2(\mathrm{Q},\mathrm{R})$。

接下来，我们考虑这样的情形：$\mathrm{R}=\mathbb{C}[\partial]\mathrm{V}$ 是一个作为 $\mathbb{C}[\partial]$-模自由的左对称共形代数，而 $\mathrm{Q}=\mathbb{C}[\partial]\mathrm{x}$ 是一个作为 $\mathbb{C}[\partial]$-模自由且秩为一的左对称共形代数。由定理 4.3，$\mathcal{HC}^2(\mathrm{Q},\mathrm{R})$ 可由 R 的旗标数据刻画，其中 $\mathrm{h}_\lambda(\cdot,\partial)=\mathrm{k}_\lambda(\cdot,\partial)=0$，且给定 $\mathrm{P}(\lambda,\partial)$。注意，对于 R 与 $\mathrm{Q}=\mathbb{C}[\partial]\mathrm{x}$ 的交叉积，在 R 的任一旗数据中，T_λ 都是 R 的共形半拟中心。

命题 5.2. 设 $\mathrm{R}=\mathbb{C}[\partial]\mathrm{V}$ 是一个作为 $\mathbb{C}[\partial]$-模自由的左对称共形代数，$\mathrm{Q}=\mathbb{C}[\partial]\mathrm{x}$ 是一个作为 $\mathbb{C}[\partial]$-模自由且秩为一的左对称共形代数。假设不存在非零元素 b，使得对所有 a $\in\mathrm{R}$ 都有 $\mathrm{a}_\lambda\mathrm{b}=0$。那么 $\mathcal{HC}^2(\mathrm{Q},\mathrm{R})\cong\mathcal{FLC}(\mathrm{R})/\approx$，其中 $\approx$ 是 $\mathcal{FLC}(\mathrm{R})$ 上由下式给出的等价关系：

$$(0,0,D_\lambda,T_\lambda,M(\lambda,\partial),P(\lambda,\partial))\approx(0,0,D'_\lambda,T'_\lambda,M'(\lambda,\partial),P(\lambda,\partial))$$

当且仅当存在 $\omega\in\mathrm{R}$，使得$\mathrm{T}_\lambda(\mathrm{a})=\mathrm{T}'_\lambda(\mathrm{a})+\mathrm{a}_{-\lambda-\partial}\omega$，并且 $\mathrm{D}_\lambda(\mathrm{a})=\mathrm{D}'_\lambda(\mathrm{a})+\omega_\lambda\mathrm{a}$，对所有$\mathrm{a}\in\mathrm{V}$。此外，若 R 的所有共形导子均为零，则 $\mathcal{HC}^2{}_\kappa(\mathrm{Q},\mathrm{R})\cong\mathcal{FLC}(\mathrm{R})/\approx$，其中 $\approx$ 是 $\mathcal{FLC}(\mathrm{R})$ 上的等价关系，定义为：

$$(0,0,D_\lambda,T_\lambda,M(\lambda,\partial),P(\lambda,\partial))\approx(0,0,D'_\lambda,T'_\lambda,M'(\lambda,\partial),P(\lambda,\partial))$$

当且仅当 $\mathrm{T}_\lambda-\mathrm{T}'_\lambda\in\mathrm{CQS}$ 共形拟中心内导子(R)。

证明。根据定理4.3，对于 $\mathcal{HC}^2(\mathrm{Q},\mathrm{R})$，我们只需证明：如果存在 $\omega\in\mathrm{R}$，使得对所有$\mathrm{a}\in\mathrm{V}$，都有$\mathrm{T}_\lambda(\mathrm{a})=\mathrm{T}'_\lambda(\mathrm{a})+\mathrm{a}_{-\lambda-\partial}\omega$，且 $\mathrm{D}_\lambda(\mathrm{a})=\mathrm{D}'_\lambda(\mathrm{a})+\omega_\lambda\mathrm{a}$，那么 $(0,0,\mathrm{D}_\lambda,\mathrm{T}_\lambda,\mathrm{M}(\lambda,\partial),\mathrm{P}(\lambda,\partial))\approx(0,0,\mathrm{D}'_\lambda,\mathrm{T}'_\lambda,\mathrm{M}'(\lambda,\partial),\mathrm{P}(\lambda,\partial))$。将对所有$\mathrm{a}\in\mathrm{V}$成立的$\mathrm{T}_\lambda(\mathrm{a})=\mathrm{T}'_\lambda(\mathrm{a})+\mathrm{a}_{-\lambda-\partial}\omega$以及$\mathrm{D}_\lambda(\mathrm{a})=\mathrm{D}'_\lambda(\mathrm{a})+\omega_\lambda\mathrm{a}$代入（27），我们得到

$$\begin{aligned}&T'_{-\lambda-\mu-\partial}(T'_{-\lambda-\partial}(a))-T'_{-\lambda-\mu-\partial}(D'_\mu(a))+D'_\mu(T'_{-\lambda-\partial}(a))+(T'_{-\lambda-\partial}(a))_{\lambda+\mu}\omega\\&+T'_{-\lambda-\mu-\partial}(a_\lambda\omega)-(D'_\mu(a))_{\lambda+\mu}\omega-T'_{-\lambda-\mu-\partial}(\omega_\mu a)+\omega_\mu(T'_{-\lambda-\partial}(a))+D'_\mu(a_\lambda\omega)\\&+(a_\lambda\omega)_{\lambda+\mu}\omega-(\omega_\mu a)_{\lambda+\mu}\omega+\omega_\mu(a_\lambda\omega)=a_\lambda(M(\mu,\partial))+P(\mu,\lambda+\partial)T'_{-\lambda-\partial}(a)+P(\mu,\lambda+\partial)a_\lambda\omega.\end{aligned}$$

于是，由左对称恒等式以及 T'_λ 是共形半拟中心，可得

$$a_\lambda(M(\mu,\partial))=a_\lambda(\omega_\mu\omega)+a_\lambda(M'(\mu,\partial))+a_\lambda(D'_\mu(\omega))+a_\lambda(T'_{-\mu-\partial}(\omega))-a_\lambda(P(\mu,\partial)\omega).$$

由于不存在非零元素 b，使得对于所有 a ∈ R 都有 $a_\lambda b = 0$，因此 $M(\mu, \partial) = \omega_\mu \omega + M'(\mu, \partial) + D'_\mu(\omega) + T'_{_\mu-\partial}(\omega) - P(\mu, \partial)\omega$。于是得到

$$(0, 0, D_\lambda, T_\lambda, M(\lambda, \partial), P(\lambda, \partial)) \approx (0, 0, D'_\lambda, T'_\lambda, M'(\lambda, \partial), P(\lambda, \partial)).$$

假设R 的所有共形导子均为零。根据定理 4.3以及上述讨论，我们只需证明：如果对于某个 $\omega \in R$，有$T^\mu(a) - T'_\mu(a) = a_{-\mu-\partial}\omega$，对所有 $a \in V$ 都成立，那么对于所有 $a \in V$，都有 $D_\lambda(a) = D'_\lambda(a) + \omega_\lambda a$。将$T^\mu(a) - T'_\mu(a) = a_{-\mu-\partial}\omega$ 对所有 a ∈ V 代入 (23)，我们得到

$$D_\lambda(a)_{\lambda+\mu}b - T'_\lambda(a)_{\lambda+\mu}b - (a_\mu\omega)_{\lambda+\mu}b = D_\lambda(a_\mu b) - a_\mu D_\lambda(b).$$

然后，由左对称恒等式可得。

$$((D_\lambda - \omega_\lambda)a)_{\lambda+\mu}b - T'_\lambda(a)_{\lambda+\mu}b = (D_\lambda - \omega_\lambda)(a_\mu b) - a_\mu((D_\lambda - \omega_\lambda)b).$$

注意到。

$$(D'_\lambda(a) - T'_\lambda(a))_{\lambda+\mu}b = D'_\lambda(a_\mu b) - a_\mu(D'_\lambda(b)).$$

于是我们有

$$(D'_\lambda - D_\lambda + \omega_\lambda)(a_\mu b) = ((D'_\lambda - D_\lambda + \omega_\lambda)a)_{\lambda+\mu}b + a_\mu((D'_\lambda - D_\lambda + \omega_\lambda)b).$$

因此，$D'_\lambda - D_\lambda + \omega_\lambda$ 是R的共形导子。由于 R 的所有共形导子均为零，我们得到 $D'_\lambda = D_\lambda - \omega_\lambda$。然后证明完成。

□

注 5.3. 根据命题2.3，对于命题 5.2 中的$P(\lambda, \partial)$，有三种可能性，即 $P(\lambda, \partial) = 0$、$P(\lambda, \partial) = c_1$ 或 $P(\lambda, \partial) = \partial + \lambda + c_2$，其中 $c_1 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ 且 $c_2 \in \mathbb{C}$。

最后，我们给出一个计算 $\mathcal{HC}^2(Q, R)$ 的例子。

例 5.4. 设 $R = \mathbb{C}[\partial]L \oplus \mathbb{C}[\partial]W$ 是一个左对称共形代数，其 λ-乘积如下：

$$L_\lambda L = 0, \quad L_\lambda W = W_\lambda L = L, \quad W_\lambda W = W \tag{50}$$

并且$Q = \mathbb{C}[\partial]x$是一个具有平凡 λ-乘积的左对称共形代数。设$D_\lambda L = D_1(\lambda, \partial)L + D_2(\lambda, \partial)W$，$D_\lambda W = d_1(\lambda, \partial)L + d_2(\lambda, \partial)W$，$T_\lambda L = T_1(\lambda, \partial)L + T_2(\lambda, \partial)W$ 以及 $T_\lambda W = t_1(\lambda, \partial)L + t_2(\lambda, \partial)W$，其中 $D_i(\lambda, \partial)$、$d_i(\lambda, \partial)$、$T_i(\lambda, \partial)$ 和$t_i(\lambda, \partial) \in \mathbb{C}[\lambda, \partial]$ 对于 i = 1、2。于是由 (25) 可得

$$T_2(-\lambda - \mu - \partial, \lambda + \partial)L = T_2(-\lambda - \mu - \partial, \mu + \partial)L, \tag{51}$$

$$t_2(-\lambda - \mu - \partial, \lambda + \partial)L = T_1(-\lambda - \mu - \partial, \mu + \partial)L + T_2(-\lambda - \mu - \partial, \mu + \partial)W, \tag{52}$$

$$t_1(-\lambda - \mu - \partial, \lambda + \partial)L + t_2(-\lambda - \mu - \partial, \lambda + \partial)W = t_1(-\lambda - \mu - \partial, \mu + \partial)L + t_2(-\lambda - \mu - \partial, \mu + \partial)W. \tag{53}$$

通过比较（52）中 W 的系数，我们得到 $T_2(-\lambda-\mu-\partial, \mu+\partial) = 0$；通过分别比较（53）中 L 和 W 的系数，$t_1(\lambda, \partial)$ 和 $t_2(\lambda, \partial)$ 的次数均为 0。因此，我们令 $t_1(\lambda, \partial) = t_1(\lambda)$，并令 $t_2(\lambda, \partial) = t_2(\lambda)$，其中 $t_1(\lambda)$ 和 $t_2(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$。然后，通过比较（52）中 L 的系数，我们得到 $T_1(\lambda, \mu + \partial) = T_1(\lambda) = t_2(\lambda)$，其中 $T_1(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$。

根据（23），我们得到

$$D_2(\lambda,-\lambda-\mu)L=-D_2(\lambda,\mu+\partial)L, \tag{54}$$

$$D_1(\lambda,-\lambda-\mu)L+D_2(\lambda,-\lambda-\mu)W-T_1(\lambda)L=D_1(\lambda,\partial)L+D_2(\lambda,\partial)W-d_2(\lambda,\mu+\partial)L, \tag{55}$$

$$\begin{aligned}&d_1(\lambda,-\lambda-\mu)L+d_2(\lambda,-\lambda-\mu)W-t_1(\lambda)L-t_2(\lambda)W\\&=d_1(\lambda,\partial)L+d_2(\lambda,\partial)W-d_1(\lambda,\mu+\partial)L-d_2(\lambda,\mu+\partial)W,\end{aligned} \tag{56}$$

$$d_2(\lambda,-\lambda-\mu)L-t_2(\lambda)L=D_1(\lambda,\partial)L+D_2(\lambda,\partial)W-D_1(\lambda,\mu+\partial)L-D_2(\lambda,\mu+\partial)W. \tag{57}$$

(54) 蕴含 $D_2(\lambda,\partial)=0$。通过比较(55)和(56) 中 L的系数里的$\mu\partial$ 的次数可知，$d_2(\lambda,\partial)$、$D_1(\lambda,\partial)$ 和$d_1(\lambda,\partial)$ 中 ∂ 的次数小于2。假设 $d_2(\lambda,\partial)=h_1(\lambda)\partial+h_0(\lambda)$，其中 $h_0(\lambda)$、$h_1(\lambda)\in\mathbb{C}[\lambda]$，并将其代入(56)。于是得到 $d_2(\lambda,-\lambda)=t_2(\lambda)$。类似地，可得到 $d_1(\lambda,-\lambda)=t_1(\lambda)$。假设 $D_1(\lambda,\partial)=k_1(\lambda)\partial+k_0(\lambda)$，其中 $k_0(\lambda)$、$k_1(\lambda)\in\mathbb{C}[\lambda]$，并将其代入(57)。由此可得 $h_1(\lambda)=k_1(\lambda)$。假设 $M(\lambda,\partial)=q_1(\lambda,\partial)L+q_2(\lambda,\partial)W$，其中 $q_1(\lambda,\partial)$、$q_1(\lambda,\partial)\in\mathbb{C}[\lambda,\partial]$。根据 (29)，我们得到

$$q_2(\lambda,-\lambda-\mu)-q_2(\mu,-\lambda-\mu)=D_1(\mu,\lambda+\partial)D_1(\lambda,\partial)-D_1(\lambda,\mu+\partial)D_1(\mu,\partial), \tag{58}$$

$$\begin{aligned}&q_1(\lambda,-\lambda-\mu)-q_1(\mu,-\lambda-\mu)=d_1(\mu,\lambda+\partial)D_1(\lambda,\partial)+d_2(\mu,\lambda+\partial)d_1(\lambda,\partial)\\&-d_1(\lambda,\mu+\partial)D_1(\mu,\partial)-d_2(\lambda,\mu+\partial)d_1(\mu,\partial).\end{aligned} \tag{59}$$

由于

$$D_1(\mu,\lambda+\partial)D_1(\lambda,\partial)-D_1(\lambda,\mu+\partial)D_1(\mu,\partial)=h_1(\lambda)h_1(\mu)(\lambda-\mu)\partial+h_1(\mu)k_0(\lambda)\lambda-h_1(\lambda)k_0(\mu)\mu,$$

通过比较 (58) 中 ∂ 的次数，可知 ∂ 在 $D_1(\lambda,\partial)$ 中的次数等于 0。因此，$h_1(\lambda)=0$，且 $q_2(\lambda,-\lambda-\mu)-q_2(\mu,-\lambda-\mu)=0$。于是，$\lambda$ 在 $q_2(\lambda,\partial)$ 中的次数等于 0。另一方面，由 (27) 得到

$$T_1(\mu)T_1(-\lambda-\mu-\partial)-D_1(\mu)T_1(-\lambda-\mu-\partial)-q_2(\mu,\lambda+\partial)=-T_1(-\lambda-\mu-\partial)D_1(\mu), \tag{60}$$

$$\begin{aligned}&t_1(\mu)T_1(-\lambda-\mu-\partial)+t_2(\mu)t_1(-\lambda-\mu-\partial)-d_1(\mu,-\lambda-\mu)T_1(-\lambda-\mu-\partial)\\&-d_2(\mu)t_1(-\lambda-\mu-\partial)-q_1(\mu,\lambda+\partial)=-t_1(-\lambda-\mu-\partial)D_1(\mu)-t_2(-\lambda-\mu-\partial)d_1(\mu,\partial).\end{aligned} \tag{61}$$

通过比较 (60) 中 μ 的次数，我们得到 $t_2(\lambda,\partial)=d_2(\lambda,\partial)=T_1(\lambda,\partial)=h_0(\lambda)\in\mathbb{C}$，并将其记作 h。于是 $q_2(\lambda,\partial)=h^2$。因此，我们得到 $q_1(\mu,\lambda+\partial)=d_1(-\lambda-\mu-\partial,\lambda+\mu+\partial)k_0(\mu)+hd_1(\mu,\lambda+\partial)$，且 (27) 自然成立。因此，我们有

$$\begin{aligned}&D_\lambda L=k_0(\lambda)L,\quad D_\lambda W=d_1(\lambda,\partial)L+hW,\\&T_\lambda L=hL,\quad T_\lambda W=d_1(\lambda,-\lambda)L+hW.\end{aligned}$$

假设 $d_1(\lambda,\partial)=p_1(\lambda)\partial+p_0(\lambda)$，其中 $p_0(\lambda)$、$p_1(\lambda)\in\mathbb{C}[\lambda]$。该旗数据 $(D_\lambda, T_\lambda, M(\lambda,\partial), P(\lambda,\partial))$ 由 $k_0(\lambda)$、$p_1(\lambda)$、$p_0(\lambda)$ 和 h 决定。因此，我们将该旗数据记为 $(k_0(\lambda)$、$p_1(\lambda)$、$p_0(\lambda)$、h)。假设在定理 4.3 中 $\omega=f(\partial)L+g(\partial)W$。则根据定理 4.3，$(k_0(\lambda)$、$p_1(\lambda)$、$p_0(\lambda)$、h$)\approx(k_0'(\lambda)$、$p_1'(\lambda)$、$p_0'(\lambda)$、h′) 当且仅当存在 $f(\partial)$ 和 $g(\partial)\in\mathbb{C}[\partial]$

使得

$$\begin{aligned} p_1(\lambda) &= p_1'(\lambda), \\ p_0(\lambda) &= p_0'(\lambda) + f(-\lambda), \\ h &= h' + g(-\lambda), \\ k_0(\lambda) &= k_0'(\lambda) + g(-\lambda), \\ h &= h' + g(\lambda + \partial). \end{aligned}$$

因此，$g(\partial) = g \in \mathbb{C}$。令$f(\partial) = p_0(-\partial)$且$g(\partial) = h$。于是我们有 $(k_0(\lambda), p_1(\lambda), p_0(\lambda), h) \approx (k(\lambda) = k_0(\lambda) - h, p_1(\lambda), 0, 0)$。注意到 $(k(\lambda), p_1(\lambda), 0, 0) \approx (k'(\lambda), p_1'(\lambda), 0, 0)$ 当且仅当$k(\lambda) = k'(\lambda)$ 且 $p_1(\lambda) = p_1'(\lambda)$。因此，$\mathcal{HC}^2(Q, R)$ 可以由所有形如 $(k(\lambda), p_1(\lambda), 0, 0)$ 的旗标数据描述，其中 $k(\lambda)$ 且 $p_1(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$。

5.2. 左对称共形代数的双交叉积。

设 $\Omega(R, Q) = (\varphi, \psi, l, r, g_\lambda(\cdot,\cdot), \circ_\lambda)$ 是左对称共形代数 R 由一个 $\mathbb{C}[\partial]$-模 Q 所作的扩张数据，其中 $g_\lambda(\cdot,\cdot)$ 是平凡的。将此扩张数据简记为 $(\varphi, \psi, l, r, \circ_\lambda)$。则 $\Omega(R, Q) = (\varphi, \psi, l, r, \circ_\lambda)$ 是 R 由 Q 所作的左对称共形扩张结构，当且仅当 $(Q, \circ_\lambda)$ 是一个左对称共形代数，且满足以下条件：

(1) R 是一个 Q-双模，在 $\varphi, \psi : Q \to Cend(R)$ 下。(2) Q 是一个 R-双模，在 $l, r : R \to Cend(Q)$ 下。(3) (LC1),(LC3), (LC6) 和 (LC8) 成立。

由此得到的统一积 $R \natural Q$，记作 $R \bowtie^{\varphi,\psi}_{l,r} Q$，称为 R 和 Q 的双交叉积。$R \bowtie^{\varphi,\psi}_{l,r} Q$ 上的 λ-积如下：对任意 $a,b \in R$ 和 $x,y \in Q$，均有：

$$(a + x)_\lambda (b + y) = (a_\lambda b + \varphi(x)_\lambda b + \psi(y)_{-\lambda-\partial} a) + (x \circ_\lambda y + l(a)_\lambda y + r(b)_{-\lambda-\partial} x).$$

注意，R 和 Q 都是 $R \bowtie^{\varphi,\psi}_{l,r} Q$ 的子代数。

命题 5.5. 设 R 和 Q 是两个左对称共形代数。令 $E = R \oplus Q$，其中直和是 $\mathbb{C}[\partial]$-模的和。若 E 是一个左对称共形代数，且 R 和 Q 是 E 的两个子代数，则 E 同构于左对称共形代数 R 和 Q 的双交叉积 $R \bowtie^{\varphi,\psi}_{l,r} Q$。

证明。 由定理 3.6可直接得到 □

事实上，左对称共形代数的双交叉积对于研究如下问题十分有用：描述并分类 $E = R \oplus Q$ 上的所有左对称共形代数结构，使得 R 和 Q 是 E 的两个子代数，并且在保持 R 不变且共同保持 Q 不变的同构意义下进行分类。根据命题 5.5 以及第 3 节所建立的一般理论，该问题可以通过 $\mathcal{H}^2(Q, R) = L(R, Q)/\approx$ 得到解决，其中这些左对称共形扩张结构 $g_\lambda(\cdot,\cdot) = 0$，并且 $\circ_\lambda$ 是 Q 上的 λ-积。为方便起见，我们将其记为 $\mathcal{HB}^2(Q, R)$。特别地，当 $Q = \mathbb{C}[\partial]x$ 且 R 是一个自由的 $\mathbb{C}[\partial]$-模时，$\mathcal{HB}^2(Q, R)$ 可以由 R 的旗标数据刻画，其中 $M(\lambda, \partial) = 0$ 根据定理 4.3。

最后，我们给出一个例子来计算 $\mathcal{HB}^2(Q, R)$。

例 5.6. 设 R $=\mathbb{C}[\partial]$L 是一个左对称共形代数，其 λ-乘积定义为 $L_\lambda L=(\lambda+\partial+c)L$，其中 $c\in\mathbb{C}$，且 Q $=\mathbb{C}[\partial]$W 是一个左对称共形代数，其 λ-乘积定义为 $W_\lambda W=(\lambda+\partial+\xi)W$，其中 $\xi\in\mathbb{C}$。

记 $h_\lambda(L,\partial)=h(\lambda,\partial)$、$k_\lambda(L,\partial)=k(\lambda,\partial)$、$D_\lambda(L)=D(\lambda,\partial)L$ 和 $T_\lambda(L)=T(\lambda,\partial)L$，其中 $h(\lambda,\partial)$、$k(\lambda,\partial)$、$D(\lambda,\partial)$ 和 $T(\lambda,\partial)\in\mathbb{C}[\lambda,\partial]$。注意，在此情形下，flay 数据 $(h_\lambda(\cdot,\partial),k_\lambda(\cdot,\partial),D_\lambda,T_\lambda,0,P(\lambda,\partial))$ 由 $h(\lambda,\partial)$、$k(\lambda,\partial)$、$D(\lambda,\partial)$ 和 $T(\lambda,\partial)$ 决定，其中 $P(\lambda,\partial)=\lambda+\partial+\xi$。我们将其简记为 $(h(\lambda,\partial),k(\lambda,\partial),D(\lambda,\partial),T(\lambda,\partial),\lambda+\partial+\xi)$。

由于 $L_\lambda L=(\lambda+\partial+c)L$，通过比较式 (26) 中 λ 的次数，我们得到 ∂ 在 $h(\lambda,\partial)$ 中的次数小于 2。假设 $h(\lambda,\partial)=h_1(\lambda)\partial+h_2(\lambda)$，其中 $h_1(\lambda)$ 且 $h_2(\lambda)\in\mathbb{C}[\lambda]$。将其代入 $(\lambda-\mu)h(\lambda+\mu,\partial)=h(\mu,\lambda+\partial)h(\lambda,\partial)-h(\lambda,\mu+\partial)h(\mu,\partial)$。由于 $h_1(\lambda+\mu)=h_1(\lambda)h_1(\mu)$，我们得到 $h_1(\lambda)$ 等于 1 或 0。若 $h_1(\lambda)=1$，则得到 $h_0(\lambda)=\alpha\lambda+\beta$，其中 $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ 且 $h(\lambda,\partial)=\partial+\alpha\lambda+\beta$。若 $h_1(\lambda)=0$，则得到 $h(\lambda,\partial)=0$。类似地，由式 (29) 可得，$D(\lambda,\partial)$ 等于 0 或 $\partial+\gamma\lambda+\delta$，其中 $\gamma,\delta\in\mathbb{C}$。

情况 1：$h(\lambda,\partial)=0$。

那么 (24) 变为 $k(\mu,-\lambda-\mu)k(-\lambda-\mu-\partial,\partial)=(\lambda+\mu+\partial+c)k(-\lambda-\partial,\partial)$。因此，通过比较 ∂ 的次数，可得 $k(\lambda,\partial)=0$。若 $D(\lambda,\partial)=0$，由 (23) 得 $T(\lambda,\partial)=0$。另一方面，若 $D(\lambda,\partial)=\partial+\gamma\lambda+\delta$，则 (23) 变为

$$-\lambda^2+((\gamma-2)\lambda+\delta)(\mu+\partial)+c(\gamma-1)\lambda+c\delta=(\lambda+\mu+\partial+c)T(\lambda,-\lambda-\mu).$$

通过比较$\mu\partial$的次数，∂在$T(\lambda,\partial)$中的次数等于 0；然后通过比较 λ的次数，λ在 $T(\lambda,\partial)$中的次数等于 1。因此，通过比较 ∂的系数，$T(\lambda,\partial)=(\gamma-2)\lambda+\delta$。最后，通过比较 λ^2 和 λ的系数，我们得到 $\gamma=1$ 和 $\delta=c$。由(27)可得$\xi=c$。如果$D_\lambda,0$，那么在定理4.3中令 $\omega=L$，可得 $(0,0,\partial+\lambda+c,-\lambda+c,\lambda+\partial+c)\approx(0,0,0,0,\lambda+\partial+c)$。因此，在这种情况下，旗标数据只有一个等价类，即 $(0,0,0,0,\lambda+\partial+c)$。

情形 2：$h(\lambda,\partial)=\partial+\alpha\lambda+\beta$。

然后，通过比较（24）中 λ 的次数，我们得到 ∂ 在 $k(\lambda,\partial)$ 中的次数小于 2。假设 $k(\lambda,\partial)=k_1(\lambda)\partial+k_0(\lambda)$，其中 $k_1(\lambda)$、$k_0(\lambda)\in\mathbb{C}[\lambda]$，并将其代入（24）。于是有

$$\begin{aligned}&-k_1(\mu)k_1(-\lambda-\mu-\partial)\lambda\partial-k_1(\mu)k_1(-\lambda-\mu-\partial)\mu\partial+k_0(\mu)k_1(-\lambda-\mu-\partial)\partial\\&-k_1(\mu)k_0(-\lambda-\mu-\partial)\lambda-k_1(\mu)k_0(-\lambda-\mu-\partial)\mu+k_0(\mu)k_0(-\lambda-\mu-\partial)\\&+(\lambda+\mu+\partial)(k_1(-\lambda-\mu-\partial)\partial+k_0(-\lambda-\mu-\partial))+(\partial+\alpha\mu+\beta)k_1(-\lambda-\mu-\partial)\mu\\(62)\quad&=(\lambda+\mu+\partial+c)(k_1(-\lambda-\partial)\partial+k_0(-\lambda-\partial)).\end{aligned}$$

如果$k_0(\lambda)=0$ 且 $k_1(\lambda)$不为 0，通过比较（62）中 $\lambda^{m+1}\partial$ 的系数，我们得到 $k_1(\lambda)=0$，其中 m 是 λ 在 $k_1(\lambda)$中的次数。因此，如果$k_0(\lambda)=0$，则有$k_1(\lambda)=0$。如果 $k_1(\mu)=0$，通过比较μ 的次数可得，μ在 $k_0(\mu)$ 中的次数小于 2。设 $k_0(\mu)=e\mu+f$，其中 e、f $\in\mathbb{C}$。通过比较 μ^2 的系数，我们得到e等于 -1 或 0。如果e $=0$，则f 等于 0或 c。如果 e $=-1$，则 f等于 c。设$k_1(\lambda)$ 和 $k_0(\lambda)$ 均不等于0，并且 λ 在$k_1(\lambda)$ 和 $k_0(\lambda)$ 中的最高次数分别为m 和 n。如果 m $\geq$ n，通过比较 $\lambda^{m+1}\partial$ 的系数，可得 $k_1(\mu)=0$。如果 m $<$ n，通过比较 λ^{n+1} 的系数，可得 $k_1(\mu)=0$。因此，$k(\lambda,\partial)$ 有三种情形。

子情形 1：$k(\lambda,\partial)=0$。

若 $D(\lambda,\partial)=0$，则有 $T(\lambda,\partial)=0$ 由（23）得出，这与比较系数矛盾

在 λ^2 （28）中。因此，我们得到 $D(\lambda,\partial) = \partial + \gamma\lambda + \delta$。将 $D(\lambda,\partial) = \partial + \gamma\lambda + \delta$ 代入（23），得到

$$\begin{aligned}&(\gamma-1)\lambda^2 + (1-\alpha)\gamma\mu^2 + (\gamma-1)\lambda\partial + (\delta-\beta)\partial + (3\gamma-\alpha\gamma-2)\lambda\mu\\&+(\delta-c+c\gamma-\beta\gamma)\lambda + (2\delta-\beta\gamma-\alpha\delta)\mu + (c-\beta)\delta + (1-\alpha)\mu\partial\\=\ &(\partial+\lambda+\mu+c)T(\lambda,-\lambda-\mu).\end{aligned} \tag{63}$$

比较（63）中 μ 的次数可知， ∂ in T (λ,∂) 的次数小于 2。因此，设 T (λ,∂) $= t_1(\lambda)\partial + t_0(\lambda)$，其中 $t_0(\lambda), t_1(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$。比较（63）中 μ^2 的系数，可得 $t_1(\lambda)$ 中 λ 的次数等于 0。令 $t_1(\lambda) = t_1$，其中 $t_1 \in \mathbb{C}$。将 T (λ,∂) $= t_1\partial + t_0(\lambda)$ 代入（25），得到

$$\begin{aligned}(\lambda^2+\lambda\partial+c\lambda-\mu^2-\mu\partial-c\mu)t_1 &= (\mu\partial+\partial^2+\alpha\lambda\partial+\beta\partial)t_1 + (\mu+\partial+\alpha\lambda+\beta)t_0(-\mu-\partial)\\&-(\lambda\partial+\partial^2+\alpha\mu\partial+\beta\partial)t_1 - (\lambda+\partial+\alpha\mu+\beta)t_0(-\lambda-\partial).\end{aligned} \tag{64}$$

若 $t_1 \neq 0$, 则 $t_0(\lambda) = t_1\lambda + t$ 比较系数 of λ^2 在（64）中，其中 $t_1, t \in \mathbb{C}$。比较μ 在（27）中的次数，可得 $t_1 = 0$，这与我们的假设矛盾。

如果 $t_1 = 0$，根据(64)，我们得到 $T(\lambda,\partial) = t_2\lambda + t_3$ 其中$t_2, t_3 \in \mathbb{C}$。比较(63)和 (27)中 λ^2、μ^2、 ∂ 、 λ 的系数及常数项，我们得到$t_2 = 0$、 $\gamma = \alpha = 1$、 $\beta = \delta - t_3, t_3^2 = t_3\xi$ 以及 $\beta(\delta - c) = 0$。通过比较(28) 中的常数项可知， $\beta(t_3 - \delta + \xi) = 0$。因此，如果 $\beta = 0$，则t_3 等于 δ，而 ξ 或0。如果 β， 0，则 $\delta = c$、$\beta = \xi$，且 $t_3 = c - \xi$ 等于 ξ 或 0。

因此，在这种情况下，我们得到以下结果。

当 $\xi = c = 0$ 时，任意旗数据都等于 $(\lambda+\partial, 0, \lambda+\partial, 0, \lambda+\partial)$。

当 $\xi = c, 0$时，任一旗数据等于以下形式之一：$(\lambda+\partial, 0, \lambda+\partial+\xi, \xi, \lambda+\partial+\xi)$、$(\lambda+\partial, 0, \lambda+\partial, 0, \lambda+\partial+\xi)$ 或 $(\lambda+\partial+\xi, 0, \lambda+\partial+\xi, 0, \lambda+\partial+\xi)$。

当 $\xi = 0$ 和 c 不为 0 时，任何旗数据都等于 $(\lambda+\partial, 0, \lambda+\partial, 0, \lambda+\partial)$。

当 ξ、0和 $c = 0$时，任意旗数据等于以下形式之一：$(\lambda+\partial, 0, \lambda+\partial+\xi, \xi, \lambda+\partial+\xi)$ 或 $(\lambda+\partial, 0, \lambda+\partial, 0, \lambda+\partial+\xi)$。

当 $c = 2\xi$、0 时，任意旗数据都等于以下形式之一：$(\lambda+\partial, 0, \lambda+\partial+\xi, \xi, \lambda+\partial+\xi)$、$(\lambda+\partial, 0, \lambda+\partial, 0, \lambda+\partial+\xi)$ 或 $(\lambda+\partial+\xi, 0, \lambda+\partial+2\xi, \xi, \lambda+\partial+\xi)$。

当 c ξ、 2ξ 和 c、 ξ 不等于 0 时，任意旗数据都等于以下形式之一：$(\lambda+\partial, 0, \lambda+\partial+\xi, \xi, \lambda+\partial+\xi)$ 或 $(\lambda+\partial, 0, \lambda+\partial, 0, \lambda+\partial+\xi)$。

子情形 2：$k(\lambda,\partial) = c$， 0。

如果 $D(\lambda,\partial) = 0$， 通过比较 (27) 中 ∂ 的次数，我们得到 T $(\lambda,\partial) = 0$，这将导致 (28) 无效。因此， $D(\lambda,\partial) = \partial + \gamma\lambda + \delta$，其中 $\gamma, \delta \in \mathbb{C}$。通过比较 (30) 中 λ 的系数，可得 $D(\lambda,\partial)$ $= \partial + \lambda + \delta$。然后，通过比较 (27) 中 λ 的次数，T (λ,∂) 中 ∂ 的次数小于 2。假设 T (λ,∂) $= t_1(\lambda)\partial + t_0(\lambda)$，其中对于 i $= 1, 2$， $t_i(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$。将其代入 (23)，可得

$$\begin{aligned}&(\lambda+\mu+\partial+c)(t_1(\lambda)\lambda + t_1(\lambda)\mu - t_0(\lambda)) + (c+\lambda+\mu-\alpha\mu-\beta)(\partial+\lambda+\mu+\delta)\\&= (\lambda+\mu+\partial+c)(\lambda+\partial+\mu) - (\lambda+\mu+\partial+\delta)(\mu+\partial+c) - c(t_1(-\mu-\partial)\partial + t_0(-\mu-\partial)).\end{aligned} \tag{65}$$

由.....的次数可知 λ 在 $t_1(\lambda)$ 中，通过比较 系数 μ^2 在（65）中的系数，等于 0。然后，通过比较 λ 在 $t_0(\lambda)$ 中的次数，得到其次数小于 2；通过比较 λ 在（65）中。假设

$T(\lambda,\partial) = t_1\partial + t_2\lambda + t_3$, 其中 $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{C}$。然后 (65) 变为

(66) $(t_1 - t_2)\lambda^2 + (t_1 + 1 - \alpha)\mu^2 + (2t_1 - \alpha + 1 - t_2)\lambda\mu + (t_1 - t_2)\lambda\partial$

(67) $+(t_1 + 1 - \alpha)\mu\partial + (ct_1 + c + \delta - \beta - t_3 - ct_2)\lambda + (ct_1 - t_3 + 2\delta + c - \alpha\delta - \beta - ct_2)\mu$
$+(-t_3 + \delta + c - \beta + ct_1 - ct_2)\partial + 2c\delta - \beta\delta = 0.$

由此可得 $t_2 = t_1$。取 $T(\lambda,\partial) = t_1(\partial + \lambda) + t_3$ 代入 (27)，可得

$$(t_1\lambda + \xi - t_3)(-t_1\lambda + t_3) = t_1^2\lambda\mu - t_1t_3\mu - t_1\lambda\mu + \delta t_1\mu.$$

因此，我们得到$t_1 = 0$ 和$t_3^2 = t_3\xi$。由（66），我们有 $\alpha = 1$，$c + \delta = t_3 + \beta$ 和（$2c - \beta$）$\delta = 0$。于是（28）变为

(68) $$(\beta - c)(\lambda + \mu + \partial + \xi) + (t_3 - \delta)(\lambda + \mu + \partial + \beta) = -ct_3.$$

若 $\beta = 0$，则 $t_3 = c = \xi$、0 和 $\delta = 0$。
If $\beta \neq 0$ 时，旗数据等于（$\lambda + \partial + \beta$, c, $\lambda + \partial + \delta$, c $+ \delta - \beta, \lambda + \partial +$ c）。
接下来我们考察 c 与 ξ 之间的关系。

若 $c = \xi$，0，那么有两种情况。若 $t_3 \neq 0$, 则 $\delta = \beta = 2c = 2t_3 = 2\xi$ 通过比较（68）中的常数项可得。如果 $t_3 = 0$ 且 δ，0，则有 $\beta = 2c = 2\delta$。于是，通过比较（68）中的常数项可得 $c = \xi = \beta$，这与我们的假设矛盾。因此，若$t_3 = 0$，则 $\delta = 0$ 且 $\beta = c$。

若 c，0 且 $\xi = 0$，则 $t_3 = 0$，$\delta = 0$ 并且 $\beta = c$ 因为比较（68）中的常数项可得 $\beta\delta = 0$；若 δ，0，则 $\beta = 2c = 0$，这与我们的假设矛盾。

若 c 与 ξ 不相等且二者均不为 0，则我们断言 $t_3 = 0$。事实上，若 $t_3 \neq 0$,，则 $t_3 = \xi$。通过比较（68）中的常数项，得到 $\beta(2t_3 - \delta) = 0$，这意味着$\delta = 2t_3 \neq 0$ 且 $\beta = 2c$。然而，$\beta - c = \delta - t_3$ 意味着 $c = \xi$，这与我们的假设矛盾。由 $t_3 = 0$ 可知 $\beta - c = \delta$。若 δ, 0，则 $\beta = \xi = 2c = 2\delta$。若 $\delta = 0$，则$\beta = c$。

因此，在这种情况下，我们有以下结果。

当 $c = \xi$、0 时，任意旗数据都等于以下形式之一：$(\lambda + \partial, c, \lambda + \partial, c, \lambda + \partial + c)$、$(\lambda + \partial + 2c, c, \lambda + \partial + 2c, c, \lambda + \partial + c)$ 和 $(\lambda + \partial + c, c, \lambda + \partial, 0, \lambda + \partial + c)$。

当 c , 0 且 $\xi = 0$ 时，任意旗数据都等于 $(\lambda + \partial + c, c, \lambda + \partial, 0, \lambda + \partial)$。

当 $\xi = 2c$, 0 时，任意旗数据都等于 $(\lambda + \partial + c, c, \lambda + \partial, 0, \lambda + \partial + \xi)$ 和 $(\lambda + \partial + 2c, c, \lambda + \partial + c, 0, \lambda + \partial + 2c)$。

当 ξ、c、2c 以及 c、ξ 均不为 0 时，任意旗数据都等于 $(\lambda + \partial + c, c, \lambda + \partial, 0, \lambda + \partial + \xi)$。

子情形 3: 最后，$k(\lambda,\partial) = -\lambda + c$. 由（30），我们得到

$$(\lambda + \partial + c)D(\mu, \lambda + \partial) = (\mu + \partial + c)D(\lambda, \mu + \partial),$$

这意味着 $D(\lambda,\partial)$不等于 $\partial + \gamma\lambda + \delta$。因此 $D(\lambda,\partial) = 0$，进而通过比较 (27)中 λ 的次数，$T(\lambda,\partial)$ 中 ∂ 的次数小于 2。此外，通过比较 (27) 中 ∂ 的次数，我们得到$T(\lambda,\partial) = 0$。由 (28) 可知，$\alpha = 1$ 和 $\xi = \beta = c$。因此，在这种情况下，任何旗数据都等于 $(\lambda + \partial + c, -\lambda + c, 0, 0, \lambda + \partial + c)$。

最后，我们将结果表述如下。显然，根据定理 4.3，在以下各情形中，下列几种旗标数据彼此不等价。

若 $\xi = c = 0$，则 $\mathcal{HB}^2(Q, R)$ 可由三种旗数据描述：$(0, 0, 0, 0, \lambda+\partial)$、$(\lambda+\partial, 0, \lambda+\partial, 0, \lambda+\partial)$ 和 $(\lambda+\partial, -\lambda, 0, 0, \lambda+\partial)$。

若 $\xi = c \neq 0$，则 $\mathcal{HB}^2(Q, R)$ 可由八种旗标数据描述：$(0, 0, 0, 0, \lambda+\partial+c)$, $(\lambda+\partial, 0, \lambda+\partial+c, c, \lambda+\partial+c)$, $(\lambda+\partial, 0, \lambda+\partial, 0, \lambda+\partial+c)$, $(\lambda+\partial+c, 0, \lambda+\partial+c, 0, \lambda+\partial+c)$, $(\lambda+\partial, c, \lambda+\partial, c, \lambda+\partial+c)$, $(\lambda+\partial+2c, c, \lambda+\partial+2c, c, \lambda+\partial+c)$, $(\lambda+\partial+c, c, \lambda+\partial, 0, \lambda+\partial+c)$ 和 $(\lambda+\partial+c, -\lambda+c, 0, 0, \lambda+\partial+c)$。

若 $\xi = 0$ 且 $c \neq 0$，则 $\mathcal{HB}^2(Q,R)$ 可由三类旗数据描述：$(0,0,0,0, \lambda+\partial)$、$(\lambda+\partial, 0, \lambda+\partial, 0, \lambda+\partial)$ 和 $(\lambda+\partial+c, c, \lambda+\partial, 0, \lambda+\partial)$。

若 $\xi \neq 0$ 且 $c = 0$，则 $\mathcal{HB}^2(Q,R)$ 可由三类旗数据描述：$(0,0,0,0, \lambda+\partial+\xi)$、$(\lambda+\partial, 0, \lambda+\partial+\xi, \xi, \lambda+\partial+\xi)$ 和 $(\lambda+\partial, 0, \lambda+\partial, 0, \lambda+\partial+\xi)$。

若 $c = 2\xi \neq 0$，则 $\mathcal{HB}^2(Q, R)$ 可由五类旗数据描述：$(0, 0, 0, 0, \lambda+\partial+\xi)$、$(\lambda+\partial, 0, \lambda+\partial+\xi, \xi, \lambda+\partial+\xi)$、$(\lambda+\partial, 0, \lambda+\partial, 0, \lambda+\partial+\xi)$、$(\lambda+\partial+\xi, 0, \lambda+\partial+2\xi, \xi, \lambda+\partial+\xi)$ 和 $(\lambda+\partial+2\xi, 2\xi, \lambda+\partial, 0, \lambda+\partial+\xi)$。

如果 $\xi = 2c \neq 0$，则 $\mathcal{HB}^2(Q, R)$ 可由五类旗标数据描述：$(0, 0, 0, 0, \lambda+\partial+2c)$、$(\lambda+\partial, 0, \lambda+\partial+2c, 2c, \lambda+\partial+2c)$、$(\lambda+\partial, 0, \lambda+\partial, 0, \lambda+\partial+2c)$、$(\lambda+\partial+2c, c, \lambda+\partial+c, 0, \lambda+\partial+2c)$ 以及 $(\lambda+\partial+c, c, \lambda+\partial, 0, \lambda+\partial+2c)$。

若 ξ、$2c$、ξ、c、c 2ξ和 ξ、c 均不等于0，则 $\mathcal{HB}^2(Q,R)$可由四类旗标数据描述：$(0, 0,0, 0, \lambda+\partial+\xi)$、$(\lambda+\partial, 0, \lambda+\partial+\xi, \xi, \lambda+\partial+\xi)$、$(\lambda+\partial, 0, \lambda+\partial, 0, \lambda+\partial+\xi)$ 和 $(\lambda+\partial+c, c, \lambda+\partial, 0, \lambda+\partial+\xi)$。

致谢。本研究得到国家自然科学基金（12171129）和浙江省自然科学基金（LY20A010022）的资助。

参考文献

[1] A. Agore、G. Militaru，扩张结构 I：群的层面，Algebr. Represent. Theory，17（2014），831-848。2[2] A. Agore、G.Militaru，李代数的扩张结构，Monatsh. Math.，174（2014），169-193。2[3] A. Agore、G. Militaru，扩张结构、伽罗瓦群与超可解结合代数，Monatsh. Math.，181（2016），1-33。2[4] A.Agore、G. Militaru，扩张结构 II：量子版本，J.Algebra，336（2011），321-341。2[5] A.Agore、G. Militaru，莱布尼茨代数的统一积。应用，Linear AlgebraAppl.，439（2013），2609-2633。2[6] B.Bakalov、V. Kac、A. Voronov，共形代数的上同调，Comm.Math. Phys.，200（1999），561C598。1[7] S.Cheng、V.Kac，共形模，AsianJ.Math.，1(1)（1997），181-193。1[8] S.Cheng、V.Kac、M. Wakimoto，共形模的扩张。载于：拓扑场论、原始形式及相关主题（京都），载于：Progress in Math.，第160卷，Birkh¨auser，Boston，（1998），第33-57页；q-alg/97090191[9] A. D'Andrea、V. Kac，有限共形代数的结构理论，Selecta.Math.New Ser.4（1998），377-418。1[10] Y. Hong，左对称代数的扩张结构与补的分类，ResultsMath.，74（2019），32。2[11] Y.Hong、C.Bai，共形经典杨-巴克斯特方程、S-方程与 $\mathcal{O}$-算子，Lett.Math.Phys.，110（2020），885-909。1[12] Y. Hong、F. Li，左对称共形代数与顶点代数，J. Pure Appl.Algebra，219（2015），3543-3567。1,2,3[13] Y. Hong、F. Li，关于左对称共形双代数，J.Algebra Appl.，14（2015），1450079。1, 7, 8

[14] Y. Hong、Y.Su, 《李共形代数的扩张结构》, 《代数表示论》, 20, （2017）, 209-230。2, 7, 9[15] V. Kac, 《局域性的思想》, 载于《几何、群与代数的物理应用和数学方面》, H.-D.Doebner等编（世界科学出版社, 新加坡, 1997）, 16-32。1[16] V.Kac, 《面向初学者的顶点代数》, 第2版, 美国数学会, 罗得岛州普罗维登斯, （1998）。1, 2[17] V. Kac, 《形式分布代数与共形代数》, 布里斯班数学物理大会, 7 月（1997）。1[18] D.Liu、Y. Hong、H.Zhou、N.Zhang, 《李共形代数 W(a, b)上相容的左对称共形代数结构的分类》, 《代数通讯》, 46（2018）, 5381-5398。1, 2[19] Y. Tan、Z. Wu, 《李2-代数的扩张结构》, 《数学》, 7（2019）, 556。2[20] Z. Wu, 《分次左对称伪代数》, 《代数通讯》, 43（2015）, 3869-3897。1[21] H. Wu、Y. Hong, 《W(a, b) 上相容的左对称共形代数》, 《代数通讯》, 50（2022）, 2954-2972。1, 2[22] Z.Xu、Y.Hong, 《一类左对称共形代数的一维中心扩张及其单性》, 预印本。1[23]J. Zhao、B.Hou, 《左对称共形代数的上同调及其应用》, arXiv:2210.00466。1

, 2

杭州师范大学数学学院, 中国杭州, 311121, 电子邮箱: Xzy@stu.hznu.edu.cn

杭州师范大学数学学院, 中国杭州, 311121, 电子邮箱: yyhong@hznu.edu.cn