arXiv:2304.05001v1 [math.RA] 11 Apr 2023

[1]

一类左对称共形代数的一维中心扩张与单一性

ZHONGYIN XU 和 洪艳勇

摘要。本文介绍了前 Gel'fand-Dorfman 代数的定义，并给出了若干构造。此外，我们证明，一类称为二次左对称共形代数的左对称共形代数与前 Gel'fand-Dorfman 代数一一对应。随后，我们从前 Gel'fand-Dorfman 代数的角度，研究二次左对称共形代数的单一性及其由一维中心给出的中心扩张。我们证明，在某些条件下，二次左对称共形代数由一维中心给出的中心扩张可由前 Gel'fand-Dorfman 代数上的四个双线性型刻画。我们还给出了若干从前 Gel'fand-Dorfman 代数构造简单二次左对称共形代数的方法。

1. 引言

李共形代数这一概念由 V.Kac引入于 [15] ， 旨在为共形场论中手征场的算符乘积展开的奇异部分提供公理化描述。李共形代数与顶点代数 [15], 、满足局域性的无限维李代数 [16] 以及非线性演化方程理论中的哈密顿形式体系[2]有着密切联系。有限李共形代数的结构理论和表示理论已经得到了充分发展（见 [7, 4, 5]）。

基于 [3], 中给出的、通过李共形代数和左对称代数的概念对顶点代数进行的等价刻画，[12] 中引入了左对称共形代数的定义，以研究形式分布李代数上是否存在相容的左对称代数结构。注意，左对称共形代数是一类在 [23]中引入的特殊左对称伪代数。与经典情形类似，左对称共形代数的共形交换子是一个李共形代数。此外，作为自由 $\mathbb{C}[\partial]$-模的有限左对称共形代数自然可以给出共形杨-巴克斯特方程和共形 S-方程的解 [11]。关于左对称共形代数已有一些研究。例如，[13], 给出了左对称共形双代数理论，[26] 提出了一般的上同调理论，[18, 22]则研究了李共形代数 W(a, b) 上相容的左对称共形代数结构。

显然，有限维左对称共形代数的理论尚未得到充分发展。例如，迄今为止，有限维单左对称共形代数还没有完整的分类。正如 [7] 所示，有限维单李共形代数要么秩为 1，要么

[1]洪艳勇是通讯作者。2020年数学学科分类号。17A30、17D25、17B60。关键词和短语。左对称共形代数、前Novikov 代数、前 Gel'fand-Dorfman 代-数、Novikov-Poisson 代数、中心扩张。

同构于与某个有限维单李代数相关的当前李共形代数。然而，与李共形代数的分类不同，存在秩为 2 且非当前的单左对称共形代数（见例 4.8）。因此，似乎很难给出有限维单左对称共形代数的完整分类。注意到，类似于二次李共形代数[24], ，二次左对称共形代数的定义见 [12]。文献 [12] 中证明了，二次左对称共形代数 $R = \mathbb{C}[\partial]R$ 等价于四元组（V, $*_1$, $\circ$, $*_2$），其中（V, $\circ$）是一个左对称代数，并且 $*_1$, $*_2$, $\circ$ 满足 9 个恒等式。受文献[14], 中对二次李共形代数单一性的研究启发，一个自然的想法是研究二次左对称共形代数的单一性，由此我们可以构造并给出许多有限维单左对称共形代数。

另一方面，中心扩张的研究对于有限左对称共形代数的分类也非常重要。由于 $\mathbb{C}[\partial]$ 是主理想整环，与[15], 中李共形代数的情形类似，有限左对称共形代数的刻画可归结为以下问题：

- 分类作为 $\mathbb{C}[\partial]$-模的有限左对称共形代数。
- 刻画所得有限左对称共形代数的中心位于挠元中的中心扩张。

受 [10], 中二次李共形代数中心扩张研究的启发，研究二次左对称共形代数的中心扩张是自然且有意义的。

在研究二次左对称共形代数的单性和中心扩张时，我们首先要处理一个问题，即代数结构 $(V, *_1, \circ, *_2)$ 过于复杂，难以研究。受[8], 中给出的前 Novikov 代数定义的启发（它等价于一类特殊的二次左对称共形代数，见[9]），我们引入前 Gel'fand-Dorfman 代数的定义，并证明二次左对称共形代数 $R = \mathbb{C}[\partial]V$ 等价于前 Gel'fand-Dorfman 代数 $(V, \lhd, \rhd, \circ)$。注意，左对称 Poisson 代数和 Novikov-Poisson 代数都是前 Gel'fand-Dorfman 代数。基于这种对应关系，我们研究了二次左对称共形代数的一维中心扩张的单一性和中心扩张，其中中心为$\mathbb{C}c_\beta$，且 $\partial c_\beta = \beta c_\beta, \beta \in \mathbb{C}$。我们给出了二次左对称共形代数为单代数的若干必要条件和充分条件。特别地，我们证明，若一个 Novikov-Poisson 代数是单代数，则相应的二次左对称共形代数也是单代数。这可用于构造许多单左对称共形代数。此外，我们证明，在许多情况下，二次左对称共形代数的一维中心扩张由相应前 Gel'fand-Dorfman 代数上的四个双线性型决定。这将有助于我们计算二次左对称共形代数的一维中心扩张，其中中心为$\mathbb{C}c_\beta$。文中还给出了若干例子。

本文安排如下。第 2 节回顾左对称代数、左对称共形代数、二次左对称共形代数和

前 Novikov 代数的一些基本定义。我们引入前 Gel'fand-Dorfman 代数的定义，并证明二次左对称共形代数等价于前 Gel'fand-Dorfman 代数。文中还给出了一些前 Gel'fand-Dorfman 代数的构造。第 3 节研究二次左对称共形代数的一维中心扩张 $\mathbb{C}c_\beta$。第 4 节致力于考察二次左对称共形代数的单一性。文中给出了二次左对称共形代数为单代数的一些必要条件和充分条件，还给出了一些单左对称共形代数的例子。

本文中，我们分别用 $\mathbb{C}$、$\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{Z}_+$ 表示复数集、整数集和非负整数集。所有向量空间和张量积均取在复数域 $\mathbb{C}$ 上。对于任意向量空间 V，我们用 $V[\lambda]$ 表示系数取自 V 的 λ 多项式集合。

2. 二次左对称共形代数的一种新的等价刻画

本节将回顾二次左对称共形代数的一些基本定义和事实[12]，并通过引入前 Gel'fand-Dorfman 代数的定义，给出二次左对称共形代数的一种新的等价刻画。我们还将介绍前 Gel'fand-Dorfman 代数的一些构造。

我们首先回顾左对称代数和 Novikov 代数的定义。

定义2.1.左对称代数A 是一个在 $\mathbb{C}$ 上的向量空间，带有一个双线性乘积"$\circ$"：$A\times A\to A$，满足以下条件：

(1) $$(a\circ b)\circ c-a\circ(b\circ c)=(b\circ a)\circ c-b\circ(a\circ c),\quad \text{for all } a,b,c\in A.$$

若乘积"$\circ$"还满足（对所有 a、b、c $\in$ A）：

(2) $$(a\circ b)\circ c=(a\circ c)\circ b,$$

则（A, $\circ$）称为 Novikov 代数。

接下来，我们回顾左对称共形代数的定义。

定义 2.2。[12] 左对称共形代数 R 是一个 $\mathbb{C}[\partial]$-模，带有一个 λ-乘积 $\cdot_\lambda\cdot$ 它定义了一个从 $R\times R\to R[\lambda]$ 的 $\mathbb{C}$-双线性映射，满足

$$\partial a_\lambda b=-\lambda a_\lambda b,\ a_\lambda\partial b=(\partial+\lambda)a_\lambda b,\quad \text{(conformal sesquilinearity)}$$
$$(a_\lambda b)_{\lambda+\mu}c-a_\lambda(b_\mu c)=(b_\mu a)_{\lambda+\mu}c-b_\mu(a_\lambda c),\quad \text{(left-symmetry)}$$

对所有的 a、b、c $\in$ R，记作 $(R,\cdot_\lambda\cdot)$。

若一个左对称共形代数作为 $\mathbb{C}[\partial]$-模是有限生成的，则称其为有限的；否则称其为无限的。左对称共形代数 R 的一个 $\mathbb{C}[\partial]$-子模 I 若满足 $I_\lambda R\subseteq I[\lambda]$ 且 $R_\lambda I\subseteq I[\lambda]$，则称 I 为理想。若左对称共形代数 R 非平凡且没有真理想，则称 R 为单代数。

设 $(R,\cdot_\lambda\cdot)$ 是左对称共形代数。对任意 a, b $\in$ R，定义 $a_\lambda b=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}a_{(n)}b$，其中 $a_{(n)}b\in R$。令 Coeff(R) 为以 a_n（a $\in$ R，n $\in\mathbb{Z}$）为基的向量空间对由以下元素在 $\mathbb{C}$ 上张成的子空间取商所得的商空间：

$$(\alpha a)_n-\alpha a_n,\quad (a+b)_n-a_n-b_n,\quad (\partial a)_n+na_{n-1},\quad \text{where } a,b\in R,\alpha\in\mathbb{C},n\in\mathbb{Z}.$$

定义 Coeff(R) 上的运算如下:

$$a_m \circ b_n = \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} \binom{m}{j} (a_{(j)}b)_{m+n-j}. \tag{3}$$

则（系数环(复数域)， ∘）是一个左对称代数（见 [12]）。

例 2.3. 设 (A, ∘) 是一个左对称代数。于是我们可以自然地定义一个左对称共形代数 CurL = $\mathbb{C}[\partial] \otimes$ L，其 λ-乘积为:

$$a_\lambda b = a \circ b, \quad \text{for all } a, b \in L.$$

CurL 称为与 L 相关联的流左对称共形代数。

例2.4.[12] 设R = $\mathbb{C}[\partial]$L 是一个作为 a$\mathbb{C}[\partial]$-模的秩为一的左对称共形代数，其 λ-乘积为:

$$L_\lambda L = (\partial + \lambda + c)L, \quad \text{for some } c \in \mathbb{C}.$$

我们将其记为 R_c。

接下来，我们将介绍一类特殊的左对称共形代数。 .

定义 2.5. 如果存在某个向量空间 V，使得 R = $\mathbb{C}[\partial]$V，且对于任意 u, v ∈ V，则称 [12] (R, $\cdot_\lambda$) 为二次左对称共形代数,

$$u_\lambda v = \partial w_1 + w_2 + \lambda w_3, \tag{4}$$

其中 w_1,w_2,w_3 ∈ V。

命题 2.6。 [12, 定理 3。7] 一个二次左对称共形代数 R = $\mathbb{C}[\partial]$V，带有 λ-乘积:

$$a_\lambda b = \partial(a *_1 b) + a \circ b + \lambda(a *_2 b), \text{ for all } a, b \in V,$$

等价于四元组 (V, $*_1$, ∘, $*_2$)，其中“ $*_1$”和“ $*_2$”是 V 上的两个运算，(V, ∘) 是一个左对称代数，并且它们满足以下相容条件：对所有 a, b, c ∈ V,

$$(a *_1 b) *_1 c - (a *_2 b) *_1 c + a *_1 (b *_1 c) + a *_2 (b *_1 c) = (b *_1 a) *_1 c + b *_1 (a *_2 c), \tag{5}$$

$$(a *_1 b) *_1 c + a *_1 (b *_2 c) = (b *_1 a) *_1 c - (b *_2 a) *_1 c + b *_1 (a *_1 c) + b *_2 (a *_1 c), \tag{6}$$

$$(a *_1 b) *_2 c - (a *_2 b) *_2 c + a *_2 (b *_1 c) = (b *_1 a) *_2 c, \tag{7}$$

$$2(a *_1 b) *_2 c - (a *_2 b) *_2 c + a *_2 (b *_2 c) = 2(b *_1 a) *_2 c - (b *_2 a) *_2 c + b *_2 (a *_2 c), \tag{8}$$

$$(a *_1 b) *_2 c = (b *_1 a) *_2 c - (b *_2 a) *_2 c + b *_2 (a *_1 c), \tag{9}$$

$$(a \circ b) *_1 c - a \circ (b *_1 c) - a *_1 (b \circ c) = (b \circ a) *_1 c - b \circ (a *_1 c) - b *_1 (a \circ c), \tag{10}$$

$$\begin{aligned}&(a *_1 b) \circ c - (a \circ b) *_2 c - (a *_2 b) \circ c + a \circ (b *_1 c) + a *_2 (b \circ c)\\ &= (b *_1 a) \circ c - (b \circ a) *_2 c + b \circ (a *_2 c),\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}&(a *_1 b) \circ c - (a \circ b) *_2 c + a \circ (b *_2 c)\\ &= (b *_1 a) \circ c - (b \circ a) *_2 c - (b *_2 a) \circ c + b \circ (a *_1 c) + b *_2 (a \circ c).\end{aligned} \tag{12}$$

为了更好地研究二次左对称共形代数，我们回顾预诺维科夫代数的定义。

定义 2.7。 [8] 设 A 是一个配备二元运算“ $\triangleleft$ ”和“ $\triangleright$ ”的向量空间。若对所有 a、b 和 $c \in A$，它们满足以下等式

$$a \triangleright (b \triangleright c) = (a \triangleright b + a \triangleleft b) \triangleright c + b \triangleright (a \triangleright c) - (b \triangleright a + b \triangleleft a) \triangleright c, \tag{14}$$

$$a \triangleright (b \triangleleft c) = (a \triangleright b) \triangleleft c + b \triangleleft (a \triangleleft c + a \triangleright c) - (b \triangleleft a) \triangleleft c, \tag{15}$$

$$(a \triangleleft b + a \triangleright b) \triangleright c = (a \triangleright c) \triangleleft b, \tag{16}$$

$$(a \triangleleft b) \triangleleft c = (a \triangleleft c) \triangleleft b, \tag{17}$$

则 $(A, \triangleleft, \triangleright)$ 称为前 Novikov 代数。

回顾一下,

定义 2.8. [20] Novikov 代数 $(A, *)$ 的一个表示是一个三元组 (M, l_A, r_A)，其中 M 是一个向量空间，且 $l_A, r_A : A \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(M)$ 是满足以下条件的线性映射

$$l_A(a * b - b * a)v = l_A(a)l_A(b)v - l_A(b)l_A(a)v, \tag{18}$$

$$l_A(a)r_A(b)v - r_A(b)l_A(a)v = r_A(a * b)v - r_A(b)r_A(a)v, \tag{19}$$

$$l_A(a * b)v = r_A(b)l_A(a)v, \tag{20}$$

$$r_A(a)r_A(b)v = r_A(b)r_A(a)v, \tag{21}$$

对所有 $a, b \in A$ 和 $v \in M$。

For一个前 Novikov 代数$(A, \triangleleft, \triangleright)$，定义线性映射 $L_{\triangleright}, R_{\triangleleft} : A \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(A)$ 如下

$$L_{\triangleright}(a)(b) := a \triangleright b, \quad R_{\triangleleft}(a)(b) := b \triangleleft a, \quad \text{for all } a, b \in A.$$

命题 2.9. [8, 命题 3.31] 设$(A, \triangleleft, \triangleright)$ 是一个前 Novikov 代数。二元运算

$$* : A \otimes A \to A, \quad a * b := a \triangleleft b + a \triangleright b \quad \textit{for all } a, b \in A, \tag{22}$$

定义了一个 Novikov 代数，称为 $(A, \triangleleft, \triangleright)$ 的伴随 Novikov 代数。此外，$(A, L_{\triangleright}, R_{\triangleleft})$ 是 $(A, *)$ 的表示。反之，设 A 是一个具有二元运算 $\triangleright$ 和 $\triangleleft$ 的向量空间。如果由公式 (22) 定义的 $(A, *)$ 是一个 Novikov 代数，且 $(A, L_{\triangleright}, R_{\triangleleft})$ 是 $(A, *)$ 的表示，那么 $(A, \triangleleft, \triangleright)$ 是一个前 Novikov 代数。

注 2.10. 由命题 2.9可知，前 Novikov 代数的幺半群是 Novikov 代数幺半群的后继者，按照 [1]。

定义 2.11. [19] 设 A 是一个向量空间。若 A 上存在一个二元运算“ $\cdot$ ”，满足

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b + b \cdot a) \cdot c,$$

对所有 $a, b, c \in A$ 都成立，则称 $(A, \cdot)$ 为一个 Zinbiel代数。

注 2.12. 注意，对于 Zinbiel代数 $(A, \cdot)$，对所有 $a, b, c \in A$,

$$a \cdot (b \cdot c) = b \cdot (a \cdot c).$$

命题 2.13. 设 $(A, \cdot)$ 是一个 Zinbiel代数，D 是 $(A, \cdot)$ 的一个导子，并且 $\xi \in \mathbb{C}$。在 A 上定义二元运算 $\triangleleft$ 和 $\triangleright$ 如下:

$$a \triangleleft b := D(b) \cdot a + \xi b \cdot a, \quad a \triangleright b := a \cdot D(b) + \xi a \cdot b, \quad \textit{for all } a, b \in A. \tag{23}$$

那么 $(A, \triangleleft, \triangleright)$ 是一个前 Novikov 代数。

证明。对所有 a, b, c ∈ A,

$$
\begin{aligned}
&a \triangleright (b \triangleright c) - (a \triangleright b + a \triangleleft b) \triangleright c - b \triangleright (a \triangleright c) + (b \triangleright a + b \triangleleft a) \triangleright c\\
=&a \triangleright (b \cdot D(c) + \xi b \cdot c) - (a \cdot D(b) + \xi a \cdot b + D(b) \cdot a + \xi b \cdot a) \triangleright c - b \triangleright (a \cdot D(c) + \xi a \cdot c)\\
&+ (b \cdot D(a) + \xi b \cdot a + D(a) \cdot b + \xi a \cdot b) \triangleright c = a \cdot D(b \cdot D(c) + \xi b \cdot c) + \xi a \cdot (b \cdot D(c) + \xi b \cdot c) - (a \cdot D(b) + \xi a \cdot b + D(b) \cdot a + \xi b \cdot a) \cdot D(c) - \xi(a \cdot D(b) + \xi a \cdot b + D(b) \cdot a + \xi b \cdot a) \cdot c - b \cdot D(a \cdot D(c) + \xi a \cdot c) - \xi b \cdot (a \cdot D(c) + \xi a \cdot c) + (b \cdot D(a) + \xi b \cdot a + D(a) \cdot b + \xi a \cdot b) \cdot D(c) + \xi(b \cdot D(a) + \xi b \cdot a + D(a) \cdot b + \xi a \cdot b) \cdot c = a \cdot (D(b) \cdot D(c) + b \cdot D^2(c) + \xi D(b) \cdot c + \xi b \cdot D(c)) + \xi a \cdot (b \cdot D(c)) + \xi^2 a \cdot (b \cdot c) - (a \cdot D(b) + \xi a \cdot b + D(b) \cdot a + \xi b \cdot a) \cdot D(c) - \xi(a \cdot D(b) + \xi a \cdot b + D(b) \cdot a + \xi b \cdot a) \cdot c - b \cdot (D(a) \cdot D(c) + a \cdot D^2(c) + \xi D(a) \cdot c + \xi a \cdot D(c)) - \xi b \cdot (a \cdot D(c) + \xi a \cdot c) + (b \cdot D(a) + \xi b \cdot a + D(a) \cdot b + \xi a \cdot b) \cdot D(c) + \xi(b \cdot D(a) + \xi b \cdot a + D(a) \cdot b + \xi a \cdot b) \cdot c = (a \cdot (D(b) \cdot D(c)) - (a \cdot D(b) + D(b) \cdot a) \cdot D(c)) + (a \cdot (b \cdot D^2(c)) - b \cdot (a \cdot D^2(c)) + ((b \cdot D(a) + D(a) \cdot b) \cdot c - b \cdot (D(a) \cdot D(c))) + \xi(a \cdot (D(b) \cdot c) - (a \cdot D(b) + D(b) \cdot a) \cdot c) + \xi(a \cdot (b \cdot D(c)) - (a \cdot b + b \cdot a) \cdot D(c)) - \xi(b \cdot (D(a) \cdot c) - (b \cdot D(a) + D(a) \cdot b) \cdot c) + \xi(a \cdot (b \cdot D(c)) - b \cdot (a \cdot D(c))) - \xi(b \cdot (a \cdot D(c)) - (b \cdot a + a \cdot b) \cdot D(c)) + \xi^2(a \cdot (b \cdot c) - (a \cdot b + b \cdot a) \cdot c) - \xi^2(b \cdot (a \cdot c) - (b \cdot a + a \cdot b) \cdot c) = 0
\end{aligned}
$$

因此（14）成立。其他等式也可以类似地验证。 □

注 2.14。 命题2.13 中当 $\xi = 0$ 的构造见[8]。

接下来，我们介绍一类称为前 Gel'fand-Dorfman 代数的新代数。

定义 2.15。设 $(A, \triangleleft, \triangleright)$ 是一个前 Novikov 代数，且 $(A, \circ)$ 是一个左对称代数。若它们满足以下相容条件

$$c \triangleleft (a \circ b - b \circ a) - a \circ (c \triangleleft b) - (b \circ c) \triangleleft a = -b \circ (c \triangleleft a) - (a \circ c) \triangleleft b, \tag{24}$$

$$(a \circ b - b \circ a) \triangleright c + (a \triangleleft b + a \triangleright b) \circ c = a \triangleright (b \circ c) - b \circ (a \triangleright c) + (a \circ c) \triangleleft b, \tag{25}$$

对所有 a, b, c ∈ V 均成立，则称四元组 $(V, \triangleleft, \triangleright, \circ)$ 为一个前 Gel'fand-Dorfman 代数。

为了理解这个定义，我们回顾 Gel'fand-Dorfman 代数及其表示的定义。

定义 2.16. [24] 设 $(A, *)$ 是一个 Novikov 代数，$(A, [\cdot, \cdot])$ 是一个李代数。若它们还满足以下相容条件

$$[a * b, c] - [a * c, b] + [a, b] * c - [a, c] * b - a * [b, c] = 0, \quad \text{for all } a, b, c \in A, \tag{26}$$

则称 $(A, *, [\cdot, \cdot])$ 为 Gel'fand-Dorfman 代数。

注 2.17. 注意，在[24]中，这种代数称为 Gel'fand-Dorfman 双代数。为避免与由代数和余代数构成的通常双代数的定义相混淆，我们将其称为 Gel'fand-Dorfman 代数，如 [17]所示。

定义 2.18. [21] 设 $(A, *, [\cdot,\cdot])$ 是一个 Gel'fand-Dorfman 代数，V 是一个向量空间，并配有一个双线性映射 $\rho_A: A \to End_{\mathbb{C}}(V)$ 以及两个线性映射 $l_A, r_A: A \to End_{\mathbb{C}}(V)$。若 (V, l_A, r_A, ρ_A) 是 $(A, *, [\cdot,\cdot])$ 的一个表示，当且仅当 (V, ρ_A) 是李代数 $(A, [\cdot,\cdot])$ 的一个表示，(V, l_A, r_A) 是 Novikov 代数 $(A, *)$ 的一个表示，并且

$$\rho_A(a)l_A(b)v + \rho_A(b*a)v + l_A([b,a])v - r_A(a)\rho_A(b)v - l_A(b)\rho_A(a)v = 0,$$
$$\rho_A(a)r_A(b)v - \rho_A(b)r_A(a)v - r_A(b)\rho_A(a)v + r_A(a)\rho_A(b)v - r_A([a,b])v = 0,$$

对所有的 $a, b \in A, v \in V$。

我们给出 Gel'fand-Dorfman 代数与前 Gel'fand-Dorfman 代数之间的关系如下。

命题 2.19。设 $(A, \lhd, \rhd, \circ)$ 是一个前 Gel'fand-Dorfman 代数。定义

$$a * b = a \lhd b + a \rhd b, \quad [a,b] = a \circ b - b \circ a, \quad \textit{for all } a, b \in A. \tag{27}$$

则 $(A, *, [\cdot,\cdot])$ 是一个 Gel'fand-Dorfman 代数，称为 $(A, \lhd, \rhd, \circ)$ 的关联 Gel'fand-Dorfman 代数。此外，$(A, L_{\rhd}, R_{\lhd}, L_{\circ})$ 是 Gel'fand-Dorfman 代数 $(A, *, [\cdot,\cdot])$ 的一个表示。

反之，设 A 是一个带有二元运算 $\rhd$、$\lhd$ 和 $\circ$ 的向量空间。若由式 (27) 定义的 $(A, *, [\cdot,\cdot])$ 是一个 Gel'fand-Dorfman 代数，且 $(A, L_{\rhd}, R_{\lhd}, L_{\circ})$ 是 $(A, *, [\cdot,\cdot])$ 的一个表示，则 $(A, \lhd, \rhd, \circ)$ 是一个前 Gel'fand-Dorfman 代数。

证明。直接验证即可。 □

注 2.20。根据命题2.19，前 Gel'fand-Dorfman 代数的幺半群是 Gel'fand-Dorfman 代数的幺半群的后继者，意义见 [1]。

因此，命题 2.6 可借助前 Gel'fand-Dorfman 代数改写如下。

定理 2.21. 具有 λ 乘积的二次左对称共形代数 $R = \mathbb{C}[\partial]V$

$$a_\lambda b = \partial(b \lhd a) + a \circ b + \lambda(a \rhd b + b \lhd a), \quad \textit{for all } a, b \in V, \tag{28}$$

等价于一个前 Gel'fand-Dorfman 代数 $(V, \lhd, \rhd, \circ)$。我们称 $R = \mathbb{C}[\partial]V$ 为与 $(V, \lhd, \rhd, \circ)$ 对应的二次左对称共形代数。

证明. 由命题 2.6，令 $a *_1 b = b \lhd a$，$a *_2 b = a \rhd b + b \lhd a$，其中任意 $a, b \in A$。可以直接验证，(5)-(10) 等价于 $(V, \lhd, \rhd)$ 是一个前 Novikov 代数，而 (11)-(13) 等价于 (24) 和 (25)。证毕。□

注 2.22. 设 $R = \mathbb{C}[\partial]V$ 是与前 Gel'fand-Dorfman 代数 $(V, \lhd, \rhd, \circ)$ 对应的二次左对称共形代数。根据系数代数的定义，Coeff(R) 可视为 $V \otimes \mathbb{C}[t,$ 其中 $t^{-1}]$ 的乘积定义如下

$$(a \otimes t^m) \circ (b \otimes t^n) = m(a \rhd b) \otimes t^{m+n-1} - n(b \lhd a) \otimes t^{m+n-1} + (a \circ b) \otimes t^{m+n}, \quad a, b \in V, m, n \in \mathbb{Z}.$$

存在一种自 然构造方法，可通过前 Novikov 代数构造前 Gel'fand-Dorfman 代数。

命题 2.23. 设 $(A, \lhd, \rhd)$ 是一个前 Novikov 代数。在 A 上定义运算“ $\circ$ ”b y

$$a \circ b := k(a \rhd b - b \lhd a), \quad \textit{for all } a, b \in A \textit{ and some fixed } k \in \mathbb{C}. \tag{29}$$

那么，$(A, \lhd, \rhd, \circ)$ 是一个前 Gel'fand-Dorfman 代数。

证明。 我们只需验证（A， $\circ$）是左对称代数，并且（24）、（25）成立。设 a、b、 $c \in A$。首先，我们验证（A， $\circ$）是左对称代数。

$$\begin{aligned}
&(a\circ b)\circ c - a\circ(b\circ c) - (b\circ a)\circ c + b\circ(a\circ c)\\
=&k^2\big((a\rhd b - b\lhd a)\rhd c - c\lhd(a\rhd b - b\lhd a) - a\rhd(b\rhd c - c\lhd b) + (b\rhd c - c\lhd b)\lhd a\\
&-(b\rhd a - a\lhd b)\rhd c + c\lhd(b\rhd a - a\lhd b) + b\rhd(a\rhd c - c\lhd a) - (a\rhd c - c\lhd a)\lhd b\big)\\
=&k^2\Big(((a\rhd b + a\lhd b)\rhd c - a\rhd(b\rhd c) + b\rhd(a\rhd c) - (b\rhd a + b\lhd a)\rhd c)\\
&+(c\lhd(b\lhd a + b\rhd a) - b\rhd(c\lhd a) + (b\rhd c - c\lhd b)\lhd a)\\
&-(c\lhd(a\lhd b + a\rhd b) - a\rhd(c\lhd b) + (a\rhd c - c\lhd a)\lhd b)\Big)\\
=&0.
\end{aligned}$$

其次，我们验证（24）。

$$\begin{aligned}
&c\lhd(a\circ b - b\circ a) - a\circ(c\lhd b) - (b\circ c)\lhd a + b\circ(c\lhd a) + (a\circ c)\lhd b\\
=&k(c\lhd(a\rhd b - b\lhd a - b\rhd a + a\lhd b) - a\rhd(c\lhd b) + (c\lhd b)\lhd a - (b\rhd c - c\lhd b)\lhd a\\
&+b\rhd(c\lhd a) - (c\lhd a)\lhd b + (a\rhd c - c\lhd a)\lhd b)\\
=&k((c\lhd(a\lhd b + a\rhd b) - a\rhd(c\lhd b) + (a\rhd c - c\lhd a)\lhd b)\\
&-(c\lhd(b\lhd a + b\rhd a) - b\rhd(c\lhd a) + (b\rhd c - c\lhd b)\lhd a))\\
=&0.
\end{aligned}$$

类似地，可以验证（25）。 □

接下来，我们将利用命题 2.23 通过 Zinbiel代数构造前 Gel'fand-Dorfman 代数。

推论 2.24. 设 (A, ·) 是一个 Zinbiel代数， D 是 (A, ·) 上的一个导子， 且 $\xi, \mathrm{k} \in \mathbb{C}$。定义

$$a\lhd b := D(b)\cdot a + \xi b\cdot a,\ a\rhd b := a\cdot D(b) + \xi a\cdot b,$$
$$a\circ b := k(a\cdot D(b) - D(a)\cdot b + \xi(a\cdot b - b\cdot a)),$$

对所有 a, b $\in$ A。则 (A, $\lhd, \rhd, \circ$) 是一个前 Gel'fand-Dorfman 代数。

我们回顾左对称 Poisson 代数和 Novikov-Poisson 代数的定义。

定义 2.25.[12, 25] 给定一个带有两个二元运算“ $\circ$ ”和“ $\cdot$ ”的向量空间 A。三元组 (A, ·, $\circ$)称为左对称Poisson 代数，如果(A, $\circ$)是左对称代数，(A, ·) 是交换结合代数，并且它们满足相容性条件

$$(a\cdot b)\circ c = a\cdot(b\circ c), \tag{30}$$
$$(a\circ b)\cdot c - a\circ(b\cdot c) = (b\circ a)\cdot c - b\circ(a\cdot c),\ \text{for all } a, b, c\in A. \tag{31}$$

特别地，如果(A, $\circ$)是一个 Novikov 代数，那么三元组 (A, ·, $\circ$) 被称为 Novikov-Poisson 代数。

命题 2.26. 设 (A, ·, $\circ$) 是一个左对称 Poisson 代数。定义

$$a\lhd b := a\cdot b,\ \ a\rhd b := 0,\ \ \textit{for all } a, b\in A.$$

那么，(A, $\lhd, \rhd, \circ$) 是一个前 Gel'fand-Dorfman 代数。

证明。 显然，或者可参见 [12, 推论 3。9]。 □

最后，我们给出一个 Novikov-Poisson 代数的例子。

例 2.27.设 $(V,\cdot)$ 是一个交换结合代数，D是 $(V,\cdot)$ 的导子。在 V 上定义运算“ $\circ$”为

$$x\circ y = x\cdot D(y),\quad \text{for all } x,y\in V.$$

那么，$(V,\cdot,\circ)$ 构成一个 Novikov-Poisson 代数。此构造见 [25, 引理 2.1]。

例如，设 $(V = \mathbb{C}[t,t^{-1}],\cdot)$ 为 Laurent 多项式代数，D 是由 $D(t^i) = it^i$ 对所有 $i\in\mathbb{Z}$ 定义的导子。在 V 上定义运算“ $\circ$”为

$$t^i\circ t^j = t^i\cdot D(t^j) = jt^{i+j},\quad \text{for all } i,j\in\mathbb{Z}.$$

那么 $(V,\cdot,\circ)$ 是一个 Novikov-Poisson 代数。

3. 一维 二次左对称共形代数的中心扩张

本节将研究以一维中心 c_β 为中心的二次左对称共形代数的中心扩张，其中 $\partial c_\beta = \beta c_\beta$。记 c_0 为 c。

定义 3.1. 设 R 是一个左对称共形代数，C 是一个阿贝尔左对称共形代数，即对所有 c, $d\in C$，均有 $c_\lambda d = 0$。若存在左对称共形代数的短正合列

$$C \rightarrowtail \widehat{R} \twoheadrightarrow R, \tag{32}$$

b b b 且 $C_\lambda R = R_\lambda C = 0$，则称 R 是 R 通过 C 的中心扩张。

设 R_1 和 R_2 是 R 的两个复数域中心扩张。若存在左对称共形代数同态 $\varphi: R_1\to R_2$，使得下图交换，则称 R_1 与 R_2 等价：

(33)

$$\begin{array}{ccccc} C & \rightarrowtail & \widehat{R}_1 & \twoheadrightarrow & R \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \| \\ C & \rightarrowtail & \widehat{R}_2 & \twoheadrightarrow & R \end{array}$$

下面，我们研究 R 是二次左对称共形代数且 $C\in = \mathbb{C}c_\beta$ 的情形。

b b 由于 R 是自由的 $\mathbb{C}[\partial]$-模，我们有 $R = R\oplus\mathbb{C}c_\beta$，作为 $\mathbb{C}[\partial]$-模。注意，$c_{\beta\lambda}R$ =b b $R_\lambda c_\beta = 0$。在 R 上定义 λ-乘积如下：

$$\widehat{a_\lambda b} = a_\lambda b + \alpha_\lambda(a,b)c_\beta,\quad \text{for all } a,b\in R,$$

其中，$\cdot_\lambda\cdot$ 是 R 上的 λ-乘积，$\alpha_\lambda(\cdot,\cdot)$ 是从 $R\times R$ 到 $\mathbb{C}[\lambda]$ 的 $\mathbb{C}$-双线性映射。根据左对称共形代数的定义，当且仅当 $\alpha_\lambda(\cdot,\cdot)$ 满足以下条件时，R 是左对称共形代数：

$$\alpha_\lambda(\partial a,b) = -\lambda\alpha_\lambda(a,b),\qquad \alpha_\lambda(a,\partial b) = (\lambda+\beta)\alpha_\lambda(a,b), \tag{34}$$

$$\alpha_{\lambda+\mu}(a_\lambda b,c) - \alpha_\lambda(a,b_\mu c) = \alpha_{\lambda+\mu}(b_\mu a,c) - \alpha_\mu(b,a_\lambda c), \tag{35}$$

$\widehat{}$对所有 a、b、c $\in R$。因此，这样的 R 完全由满足以下条件的 $\alpha_\lambda(\cdot,\ \cdot)$（34）和（35）所确定。于是，如果相应的中心扩张等价，我们就称 $\alpha_\lambda(\cdot,\ \cdot)$ 与 $\alpha'_\lambda(\cdot,\ \cdot)$ 等价。

Let R_1 和 R_2 是 R的两个中心扩张$\widehat{R}$ 由 $\mathbb{C}c_\beta$ 确定 $\alpha_\lambda(\cdot,\cdot)$ 和 $\alpha'_\lambda(\cdot,\cdot)$ 分别给出。设 $\mathbb{C}_\beta = \mathbb{C}$ 是一个 $\mathbb{C}[\partial]$-模，其中 $\partial k = \beta k$ 对所有 $k \in \mathbb{C}$均成立。根据中心扩张等价的定义，φ 在（33）中的形式如下:

$$\varphi(a+c) = a + c + \phi(a)c_\beta,\quad a \in R, c \in \mathbb{C}c_\beta,$$

b b，其中 $\phi : \mathrm{R} \to \mathbb{C}_\beta$ 是一个 $\mathbb{C}[\partial]$-模同态。此外，$\varphi : \mathrm{R}_1 \to \mathrm{R}_2$ 是左对称共形代数的同态，当且仅当 ϕ满足 $\alpha_\lambda(\mathrm{a}, \mathrm{b}) = \alpha'_\lambda(\mathrm{a}, \mathrm{b}) + \phi(\mathrm{a}_\lambda \mathrm{b})$，对所有 $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{R}$ 均成立。因此，$\alpha_\lambda(\cdot, \cdot)$ 与 $\alpha'_\lambda(\cdot,\cdot)$ 等价，当且仅当 ϕ 满足 $\alpha_\lambda(\mathrm{a}, \mathrm{b}) = \alpha'_\lambda(\mathrm{a}, \mathrm{b}) + \phi(\mathrm{a}_\lambda \mathrm{b})$，对所有 $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{R}$ 均成立。

根据 [26]，中建立的左对称共形代数的一般上同调理论，易知 $\alpha_\lambda(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathrm{H}^2(\mathrm{R}, \mathbb{C}_\beta)$ 中的一个 2-余循环，而 $\phi : \mathrm{R} \to \mathbb{C}_\beta$ 是一个 1-余边界。因此，根据上述讨论，作为 $\mathbb{C}[\partial]$-模为自由模的左对称共形代数 R 通过一维中心 $\mathbb{C}c_\beta$ 进行的中心扩张，在等价意义下由第二上同调群 $\mathrm{H}^2(\mathrm{R}, \mathbb{C}_\beta)$ 刻画。

下文中，对于一个前 Gel'fand-Dorfman 代数 $(\mathrm{V}, \lhd, \rhd, \circ)$，记

$$a * b = a \rhd b + a \lhd b,\quad a \star b = a \rhd b + b \lhd a,\ \text{for all } a, b \in V.$$

注意到 $(\mathrm{V}, *)$ 是一个 Novikov 代数。

定理 3.2. 设 $\mathrm{R} = \mathbb{C}[\partial]\mathrm{V}$ 是与前 Gel'fand-Dorfman 代数 $(\mathrm{V}, \lhd, \rhd, \circ)$ 相对应的二次左对称共形代数。设 $\mathrm{R} = \mathrm{R} \oplus \mathbb{C}c_\beta$ 是 R 通过 $\mathbb{C}c_\beta$ 进行的中心扩张，其 λ-乘法如下

$$\widehat{a_\lambda b} = \partial(b \lhd a) + a \circ b + \lambda(a \star b) + \alpha_\lambda(a, b)c_\beta,\quad \textit{for all } a, b \in V. \tag{36}$$

$_n$假设对于所有 $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{V}$，都有 $\alpha_\lambda(\mathrm{a}, \mathrm{b}) = \mathrm{P}\ \lambda^i \alpha_i(\mathrm{a}, \mathrm{b})$，其中 $\alpha_i(\cdot,\cdot) : \mathrm{V} \times \mathrm{V} \to \mathbb{C}$ 且$_{i=0}\alpha_n(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \neq 0$ 对某些 $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{V}$ 成立。那么我们有

$_3$(1) 假设对于所有 $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{V}$，都有 $\alpha_\lambda(\mathrm{a}, \mathrm{b}) = \mathrm{P}\ \lambda^i \alpha_i(\mathrm{a}, \mathrm{b})$。那么对于所有 $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c} \in \mathrm{V}$，$_{i=0}$

$$\alpha_3(\mathrm{a} * \mathrm{b}, \mathrm{c}) = \alpha_3(\mathrm{b} * \mathrm{a}, \mathrm{c}) = \alpha_3(\mathrm{a}, \mathrm{c} \lhd \mathrm{b}) = \alpha_3(\mathrm{b}, \mathrm{a} \rhd \mathrm{c}), \tag{37}$$

$$\alpha_2(a * b, c) - \alpha_2(a, c \lhd b) - \beta\alpha_3(a, c \lhd b) - \alpha_3(a, b \circ c) = \alpha_3(b \circ a, c) - \alpha_3(a \circ b, c), \tag{38}$$

$$2\alpha_2(\mathrm{a} * \mathrm{b}, \mathrm{c}) - \alpha_2(\mathrm{b} * \mathrm{a}, \mathrm{c}) - \alpha_2(\mathrm{a}, \mathrm{b} \star \mathrm{c}) = 3\alpha_3(\mathrm{b} \circ \mathrm{a}, \mathrm{c}) - 3\alpha_3(\mathrm{a} \circ \mathrm{b}, \mathrm{c}), \tag{39}$$

$$\alpha_1(\mathrm{a} * \mathrm{b}, \mathrm{c}) - \alpha_1(\mathrm{a}, \mathrm{c} \lhd \mathrm{b}) - \beta\alpha_2(\mathrm{a}, \mathrm{c} \lhd \mathrm{b}) - \alpha_2(\mathrm{a}, \mathrm{b} \circ \mathrm{c}) = \alpha_2(\mathrm{b} \circ \mathrm{a}, \mathrm{c}) - \alpha_2(\mathrm{a} \circ \mathrm{b}, \mathrm{c}), \tag{40}$$

$$\alpha_1(\mathrm{a} * \mathrm{b}, \mathrm{c}) - \alpha_1(\mathrm{b} * \mathrm{a}, \mathrm{c}) - \alpha_1(\mathrm{a}, \mathrm{b} \star \mathrm{c}) + \alpha_1(\mathrm{b}, \mathrm{a} \star \mathrm{c}) = 2\alpha_2(\mathrm{b} \circ \mathrm{a}, \mathrm{c}) - 2\alpha_2(\mathrm{a} \circ \mathrm{b}, \mathrm{c}), \tag{41}$$

$$\begin{aligned}&\alpha_0(\mathrm{a} * \mathrm{b}, \mathrm{c}) - \alpha_0(\mathrm{a}, \mathrm{c} \lhd \mathrm{b}) + \alpha_0(\mathrm{b}, \mathrm{a} \star \mathrm{c}) - \beta\alpha_1(\mathrm{a}, \mathrm{c} \lhd \mathrm{b}) - \alpha_1(\mathrm{a}, \mathrm{b} \circ \mathrm{c})\\ &= \alpha_1(\mathrm{b} \circ \mathrm{a}, \mathrm{c}) - \alpha_1(\mathrm{a} \circ \mathrm{b}, \mathrm{c}),\end{aligned} \tag{42}$$

$$\alpha_0(\mathrm{a} \circ b, c) - \beta\alpha_0(a, c \lhd b) - \alpha_0(a, b \circ c) = \alpha_0(b \circ a, c) - \beta\alpha_0(b, c \lhd a) - \alpha_0(b, a \circ c). \tag{43}$$

(2) 若 $\mathrm{n} > 3$,

$$\alpha_n(a * b, c) = \alpha_n(a, b \star c) = \alpha_n(a, b \lhd c) = \alpha_n(a, b \rhd c) = 0,\quad \textit{for all } a, b, c \in V. \tag{44}$$

(3) $\alpha_\lambda(\cdot,\cdot)$一个d $\alpha'_\lambda(\cdot,\cdot)$等价，当且仅当存在一个线性映射 $\phi: V \to \mathbb{C}$ 使得

$$\alpha_\lambda(a,b) = \alpha'_\lambda(a,b) + \beta\phi(b \lhd a) + \lambda\phi(a \star b) + \phi(a \circ b), \quad \text{for all } a,b \in V. \tag{45}$$

证明。注意，由共形半双线性，λ-乘积在 R 上由以下元素$a_\lambda b$对所有 a、$b \in V$所确定。令 a、b、$c \in V$。由（34）、（35）变为

$$\begin{aligned} &-\mu\alpha_{\lambda+\mu}(b \lhd a, c) + \lambda\alpha_{\lambda+\mu}(a \rhd b, c) + \alpha_{\lambda+\mu}(a \circ b, c) \\ &-(\lambda+\beta)\alpha_\lambda(a, c \lhd b) - \mu\alpha_\lambda(a, b \star c) - \alpha_\lambda(a, b \circ c) \\ &= -\lambda\alpha_{\lambda+\mu}(a \lhd b, c) + \mu\alpha_{\lambda+\mu}(b \rhd a, c) + \alpha_{\lambda+\mu}(b \circ a, c) \\ &-(\mu+\beta)\alpha_\mu(b, c \lhd a) - \lambda\alpha_\mu(b, a \star c) - \alpha_\mu(b, a \circ c). \end{aligned} \tag{46}$$

注意，$\alpha_\lambda(a,b) = \sum_{i=0}^{n} \lambda^i \alpha_i(a,b)$。如果 $n > 3$，比较 $\lambda^2\mu^{n-1}$ 和 $\lambda^{n-1}\mu^2$, 的系数，我们得到

$$\begin{aligned} &n\alpha_n(a*b,c) - \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n(b*a,c) = 0, \\ &\frac{n(n-1)}{2}\alpha_n(a*b,c) - n\alpha_n(b*a,c) = 0. \end{aligned}$$

由于$n > 3$，我们得到 $\alpha_n(a*b,c) = 0$ 对所有$a,b,c \in V$。然后通过比较$\lambda\mu^n$ 和 λ^{n+1}的系数，我们得到对于所有 $a,b,c \in V$,

$$\alpha_n(b, a \star c) = \alpha_n(a, c \lhd b) = 0.$$

因此，$\alpha_n(a,b \rhd c) = 0$ 对于所有 $a, b, c \in V$。

若 $n \le 3$，将 $\alpha_\lambda(a,b) = \sum_{i=0}^{3} \lambda^i \alpha_i(a,b)$ 代入 (46)，并比较 λ^4、$\lambda\mu^3$,$\lambda^2\mu^2$、λ^3、$\lambda^2\mu$、λ^2、$\lambda\mu$、λ 和 $\lambda^0\mu^0$, 的系数，可得 (38)-(43) 和

$$\alpha_3(a \rhd b, c) - \alpha_3(a, c \lhd b) = -\alpha_3(a \lhd b, c), \tag{47}$$

$$-3\alpha_3(b \lhd a, c) + \alpha_3(a \rhd b, c) = -\alpha_3(a \lhd b, c) + 3\alpha_3(b \rhd a, c) - \alpha_3(b, a \star c), \tag{48}$$

$$-3\alpha_3(b \lhd a, c) + 3\alpha_3(a \rhd b, c) = -3\alpha_3(a \lhd b, c) + 3\alpha_3(b \rhd a, c). \tag{49}$$

直接验证可知，47）—（49）等价于（37）。因此，在这种情况下，$\alpha_\lambda(\cdot,\cdot)$是一个2-余循环，当且仅当（37）—（43）成立。

注意，一个 $\mathbb{C}[\partial]$-模同态 $\varphi: R \to \mathbb{C}_\beta$ 可由限制线性映射 $\varphi|_V: V \to \mathbb{C}_\beta$确定。因此，当且仅当存在一个$\mathbb{C}$-线性映射 $\phi: V \to \mathbb{C}_\beta$ 使得 $\alpha(\cdot,\cdot)$ 与 $\alpha'(\cdot,\cdot)$ 等价。

$$\alpha_\lambda(a,b) = \alpha'_\lambda(a,b) + \phi(a_\lambda b) = \alpha'_\lambda(a,b) + \beta\phi(b \lhd a) + \lambda\phi(a \star b) + \phi(a \circ b), \quad \text{for all } a,b \in V.$$

证明完成。 □

注3.3. 应当指出，对于二次左对称共形代数 $R = \mathbb{C}[\partial]V$，当 V 是无限维时，可能不存在上界 n，使得$\alpha_\lambda(a,b) = \sum_{i=0}^{n} \lambda^i \alpha_i(a,b)$ 对所有 $a, b \in V$.

推论 3.4. 设 $(V, \lhd, \rhd, \circ)$ 是有限维前 Gel'fand-Dorfman 代数，且 $V = V * V$ 或 $V = V \star V$ 或 $V = V \lhd V$ 或 $V = V \rhd V$。设 $R = \mathbb{C}[\partial]V$ 是相应的二次 b 左对称共形代数。假设 $R = R \oplus \mathbb{C}c_\beta$ 是 $(R, \cdot_\lambda)$ 的中心扩张

3，其 λ-乘积由 (36) 定义。那么对所有 a, b $\in$ V， α_λ(a, b) = P $\lambda^i\alpha_i$(a, b)，其中所有 i=0$\alpha_i(\cdot,\cdot)$: V $\times$V $\to \mathbb{C}$ 均为满足 (37)-(43) 的双线性型。此外， $\alpha_\lambda(\cdot,\cdot)$ 与 $\alpha'_\lambda(\cdot,\cdot)$ 等价，当且仅当对 i = 2, 3， $\alpha_i(\cdot,\cdot) = \alpha'_i(\cdot,\cdot)$，且存在一个线性映射 ϕ : V $\to \mathbb{C}$，使得

$$\alpha_1(a,b) = \alpha'_1(a,b) + \phi(a \triangleright b + b \triangleleft a), \tag{50}$$

$$\alpha_0(a,b) = \alpha'_0(a,b) + \beta\phi(b \triangleleft a) + \phi(a \circ b), \quad \textit{for all } a,b \in V. \tag{51}$$

n证明。 由于 $R = \mathbb{C}[\partial]V$ 是有限的，存在某个 $n \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $\alpha_\lambda(a,b) = \sum_{i=0}^{n} \lambda^i\alpha_i(a,b)$ 对所有 $a,b \in V$。于是，该推论直接由定理 3.2得出。 □

推论 3.5. 设 (V, ·, ∘)是一个有限维左对称 Poisson代数，其中V = V·V，且R = $\mathbb{C}[\partial]$V是相应的二次左对称共形代数。设 bR = R $\oplus \mathbb{C}c_\beta$ be是 (R, $\cdot_\lambda$·) 的一个中心扩张，其 λ-乘积定义为

$$\widehat{a_\lambda b} = \partial(a \cdot b) + a \circ b + \lambda(a \cdot b) + \alpha_\lambda(a,b)c_\beta, \tag{52}$$

2其中 a, b $\in$ V 且 α_λ(a, b) $\in \mathbb{C}[\lambda]$。那么对于所有 a, b $\in$V， α_λ(a, b) = P $\lambda^i\alpha_i$(a, b)，其中所有i=0$\alpha_i(\cdot,\cdot)$: V $\times$ V $\to \mathbb{C}$ 均为双线性型，满足

$$\alpha_2(a \cdot b, c) = \alpha_2(a, c \cdot b), \tag{53}$$

$$\alpha_2(a \circ b, c) - \alpha_1(a, c \cdot b) - \beta\alpha_2(a, c \cdot b) - \alpha_2(a, b \circ c) = -\alpha_1(a \cdot b, c) + \alpha_2(b \circ a, c), \tag{54}$$

$$2\alpha_2(a \circ b, c) - \alpha_1(a, c \cdot b) = 2\alpha_2(b \circ a, c) - \alpha_1(b, c \cdot a), \tag{55}$$

$$\begin{aligned} &\alpha_1(a \circ b, c) - \alpha_0(a, c \cdot b) - \beta\alpha_1(a, c \cdot b) - \alpha_1(a, b \circ c) \\ &= -\alpha_0(a \cdot b, c) + \alpha_1(b \circ a, c) - \alpha_0(b, c \cdot a), \end{aligned} \tag{56}$$

$$\alpha_0(a \circ b, c) - \beta\alpha_0(a, c \cdot b) - \alpha_0(a, b \circ c) = \alpha_0(b \circ a, c) - \beta\alpha_0(b, c \cdot a) - \alpha_0(b, a \circ c), \tag{57}$$

对所有 a,b,c $\in$ V。此外， $\alpha_\lambda(\cdot,\cdot)$ 当且仅当 $\alpha_2(\cdot,\cdot) = \alpha'_2(\cdot,\cdot)$ 且存在一个线性映射 ϕ : V $\to \mathbb{C}$ 使得

$$\alpha_1(a,b) = \alpha'_1(a,b) + \phi(a \cdot b), \tag{58}$$

$$\alpha_0(a,b) = \alpha'_0(a,b) + \beta\phi(a \cdot b) + \phi(a \circ b), \quad \textit{for all } a,b \in V. \tag{59}$$

证明。 由推论3.4可直接得到。 □

推论 3.6. 设 (V, $\triangleleft, \triangleright, \circ$) 是一个前 Gel'fand-Dorfman 代数，且 V = V $*$ V 或 V = V $\star$V 或 V = V $\triangleleft$ V 或 V = V $\triangleright$ V，其中对任意 a, b $\in$ V，有 a $\circ$ b = k(a $\triangleright$ b − b $\triangleleft$ a)，且某个固定的 k $\in \mathbb{C}$。令 R = $\mathbb{C}[\partial]$ V 为相应的二次左对称共形代数，且 bR = R $\oplus \mathbb{C}c_\beta$ be 为 (R, $\cdot_\lambda$·) 的中心扩张，其 λ-乘积定义为 乐彩

$$\widehat{a_\lambda b} = \partial(b \triangleleft a) + k(a \triangleright b - b \triangleleft a) + \lambda(a \star b) + \alpha_\lambda(a,b)c_\beta, \quad \textit{for all } a, b \in V, \tag{60}$$

3，其中 α_λ(a, b) $\in \mathbb{C}[\lambda]$。那么对于所有 a, b $\in$V， α_λ(a, b) = P $\lambda^i\alpha_i$(a, b)，其中所有 $\alpha_i(\cdot,\cdot)$: i=0V $\times$V $\to \mathbb{C}$ 均为满足 (37)-(43) 的双线性型，其中 a $\circ$ b = k(a $\triangleright$b −b $\triangleleft$a)，对所有 a, b $\in$V 均成立。

证明。在这种情况下，(46) 变为

$$
\begin{aligned}
&-\mu\alpha_{\lambda+\mu}(b*a,c)+\lambda\alpha_{\lambda+\mu}(a*b,c)+k\alpha_{\lambda+\mu}(a*b-b*a,c)\\
&-(\lambda+\beta)\alpha_{\lambda}(a,c\triangleleft b)-\mu\alpha_{\lambda}(a,b\star c)-k\alpha_{\lambda}(a,b\triangleright c-c\triangleleft b)\\
&=-(\mu+\beta)\alpha_{\mu}(b,c\triangleleft a)-\lambda\alpha_{\mu}(b,a\star c)-k\alpha_{\mu}(b,a\triangleright c-c\triangleleft a).
\end{aligned}
\tag{61}
$$

令 α_λ(a,b) $=\mathrm{P}_{n_{a,}=0}^{b}\lambda^i\alpha_i$i (a,b)对任意 a, b $\in$ V，其中 $n_{a,b}$ 是取决于 a和b 的非负整数。在此情况下，对于固定的 a,b, c $\in$ V，我们可以假设式（61）中出现的所有 $\alpha_\lambda(\cdot,\cdot)$ 的次数存在一个上界。因此，我们假设对于式（61）中出现的所有 $\alpha_\lambda(\cdot,\cdot)$，都有 $=\mathrm{P}_n$ i$_{=0}$ $\lambda^i\alpha_i(\cdot,\cdot)$。然后，类似于定理 3.2证明中的讨论，我们有 α_n(a$*$b, c) = α_n(b$*$a, c) = α_n(a, b $\star$c) = α_n(b, a $\star$c) = α_n(a, b $\triangleright$c) = α_n(a,c $\triangleleft$ b) =α_n(b,c$\triangleleft$a) = α_n(b, a$\triangleright$c) = 0 如果 n $>$ 3。然后，通过重复这一过程，我们还得到 α_m(a$*$b,c) = α_m(b$*$a, c) = α_m(a,b$\star$c) =α_m(b, a $\star$c) = α_m(a, b $\triangleright$c) = α_m(a, c $\triangleleft$b) = α_m(b, c$\triangleleft$a) = α_m(b, a$\triangleright$ c) = 0 对于所有n $\geq$m $>$ 3。因此， α_m(a $*$ b, c) = α_m(a, b $\star$ c) = α_m(a, b$\triangleleft$ c) = α_m(a, b$\triangleright$ c) = 0 对于所有 a,b,c $\in$V 以及 m $>$ 3。然后根据V = V $*$V 或V = V $\star$V 或V = V $\triangleleft$V或 V = V $\triangleright$V，我们可以假设 α_λ(a,b) = P$_3$ i$_{=0}$ $\lambda^i\alpha_i$(a, b)。于是由定理 3.2 可直接推出。□

注 3.7. 注意，推论 3.6 在 V 为无限维时也成立。

推论 3.8. 设 (V, $\triangleleft$,$\triangleright$) 是一个前 Novikov 代数，且 V = V$*$V 或 V = V$\star$V 或 V = V$\triangleleft$V 或 V = V$\triangleright$V。设 R = $\mathbb{C}[\partial]$V 是相应的二次左对称共形代数，并且 R = R $\oplus\mathbb{C}$c$_\beta$ 是 (R, $\cdot_\lambda$) 的中心扩张，其 λ-乘积定义为

$$
\widehat{a_\lambda b}=\partial(b\triangleleft a)+\lambda(a\star b)+\alpha_\lambda(a,b)\mathfrak{c}_\beta,\quad \textit{for all } a,\,b\in V,
\tag{62}
$$

3 其中 α_λ(a, b) $\in$ $\mathbb{C}[\lambda]$。则对所有 a, b $\in$V， α_λ(a, b) = P $\lambda^i\alpha_i$(a, b)，其中所有 $\alpha_i(\cdot,\cdot)$: i$_{=0}$V $\times$V $\to\mathbb{C}$ 均为满足 (37) 的双线性型，并且

$$
\alpha_2(a*b,c)-\alpha_2(a,c\triangleleft b)-\beta\alpha_3(a,c\triangleleft b)=0, \tag{63}
$$

$$
2\alpha_2(a*b,c)-\alpha_2(b*a,c)-\alpha_2(a,b\star c)=0, \tag{64}
$$

$$
\alpha_1(a*b,c)-\alpha_1(a,c\triangleleft b)-\beta\alpha_2(a,c\triangleleft b)=0, \tag{65}
$$

$$
\alpha_1(a*b,c)-\alpha_1(b*a,c)-\alpha_1(a,b\star c)+\alpha_1(b,a\star c)=0, \tag{66}
$$

$$
\alpha_0(a*b,c)-\alpha_0(a,c\triangleleft b)+\alpha_0(b,a\star c)-\beta\alpha_1(a,c\triangleleft b)=0, \tag{67}
$$

$$
\beta\alpha_0(a,c\triangleleft b)=\beta\alpha_0(b,c\triangleleft a), \tag{68}
$$

对所有 a， b， c $\in$V. 特别地，当 $\beta=0$，(63)-(68) 与之相同

$$
\alpha_2(a*b,c)=\alpha_2(a,c\triangleleft b), \tag{69}
$$

$$
\alpha_2(a*b,c)=\alpha_2(b*a,c)+\alpha_2(a,b\triangleright c), \tag{70}
$$

$$
\alpha_1(a*b,c)=\alpha_1(a,c\triangleleft b), \tag{71}
$$

$$
\alpha_1(a,b\triangleright c)=\alpha_1(b,a\triangleright c), \tag{72}
$$

$$
\alpha_0(a*b,c)-\alpha_0(a,c\triangleleft b)+\alpha_0(b,a\star c)=0, \tag{73}
$$

对所有 a、b、c ∈V。此外， $\alpha_\lambda(\cdot,\cdot)$等价于 $\alpha'_\lambda(\cdot,\cdot)$，当且仅当 $\alpha_i(\cdot,\cdot) = \alpha'_i(\cdot,\cdot)$ 对于i = 2、3，并且存在一个线性映射 $\phi : V \to \mathbb{C}$，使得

$$\alpha_1(a,b) = \alpha'_1(a,b) + \phi(a \star b), \tag{74}$$

$$\alpha_0(a,b) = \alpha'_0(a,b) + \beta\phi(b \triangleleft a), \quad \textit{for all } a,b \in V. \tag{75}$$

证明。 由推论 3.6 当 $k = 0$。 □

推论 3.9.设 $(V, \triangleleft, \triangleright)$是一个前Novikov 代数，且$R = \mathbb{C}[\partial]V$ 是相应的二次左对称共形代数。若存在元素e ∈V，使得对于所有a ∈V，都有 a ∗e = a 且 a ◁ e = a，则 $H^2(R, \mathbb{C}_\beta) = 0$ with $\beta \neq 0$。

证明。显然，V ∗ V = V。令 b = e 出现在 (63)、(65)、(67) 和 (68) 中。于是，对于所有 a, c ∈V，我们得到 α_3(a, c) =α_2(a, c) = 0, α_1(a, c) = $\frac{1}{\beta}\alpha_0$(e, b ⋆c) 和 α_0(a, c) = α_0(e, c ◁a)。因此，$\alpha_3(\cdot,\cdot) = \alpha_2(\cdot,\cdot) = 0$。令 ϕ(a) = $\frac{1}{\beta}\alpha_0$(e, a) 如推论 3.8 中所示。于是我们可以使 $\alpha_1(\cdot,\cdot)$ 和$\alpha_0(\cdot,\cdot)$ 为零。因此，$H^2(R, \mathbb{C}_\beta) = 0$。 □

命题 3.10.设 $(V, \triangleleft, \triangleright)$是一个前Novikov代数，且$R = \mathbb{C}[\partial]V$ 是相应的二次左对称共形代数。设 $\alpha_i(\cdot,\cdot)$ (i = 0,1, 2,3)是满足 (37)、(69)-(73) 的双线性型，其中任意 a, b, c ∈V。令 $\eta_i(\cdot,\cdot) : Coeff(R) \times Coeff(R) \to \mathbb{C}$ 为 Coeff(R) 上的双线性型，定义如下:

$$\begin{aligned}
\eta_0(a \otimes t^m, b \otimes t^n) &= \alpha_0(a,b)\delta_{m+n+1,0},\\
\eta_1(a \otimes t^m, b \otimes t^n) &= m\alpha_1(a,b)\delta_{m+n,0},\\
\eta_2(a \otimes t^m, b \otimes t^n) &= m(m-1)\alpha_2(a,b)\delta_{m+n-1,0},\\
\eta_3(a \otimes t^m, b \otimes t^n) &= m(m-1)(m-2)\alpha_3(a,b)\delta_{m+n-2,0}.
\end{aligned}$$

对所有a,b ∈V和m, n ∈ $\mathbb{Z}$。那么 η_i (i = 0, 1, 2, 3) 均为左对称代数 Coeff(R) 的 2-余循环。

证明。令 α_λ(a,b) = P_3 $i_{=0}$ $\lambda^i\alpha_i$(a,b)对所有 a,b ∈V 成立。根据推论 3.8，存在一个由一维中心 $\mathbb{C}c_0$ 给出的R的中心扩张 R（见式（62））。记 c_0 为c。那么系数代数Coeff(bR)是 Coeff(R) ⊕$\mathbb{C}$c ⊗ t^{-1}，其非平凡乘积为

$$\begin{aligned}
(a \otimes t^m)\widehat{\circ}(b \otimes t^n) &= (a \circ b) \otimes t^{m+n} + m(a \triangleright b) \otimes t^{m+n-1} - n(b \triangleleft a) \otimes t^{m+n-1}\\
&\quad +(\alpha_0(a,b)\delta_{m+n+1,0} + m\alpha_1(a,b)\delta_{m+n,0} + m(m-1)\alpha_2(a,b)\delta_{m+n-1,0}\\
&\quad +m(m-1)(m-2)\alpha_3(a,b)\delta_{m+n-2,0})\mathfrak{c} \otimes t^{-1}.
\end{aligned}$$

因此，Coeff(bR) 是 Coeff(R) 的一个中心扩张，其中心为一维的 $\mathbb{C}$c ⊗ t^{-1}。注意， $\alpha_i(\cdot,\cdot)$（i = 0, 1,2,3）彼此独立。因此，根据 [6] 中给出的左对称代数上同调理论， η_i (i = 0,1,2,3) 是 Coeff(R) 的 2-余循环。□

接下来，我们给出几个例子来计算 $H^2(R, \mathbb{C})$，其中 $\mathbb{C} = \mathbb{C}_0$。

例 3.11。 设 $R_c = \mathbb{C}[\partial]L$ 是例2.4中给出的左对称共形代数。显然，R_c 是一个一维左对称 Poisson 代数（$V = \mathbb{C}L$， ·， ∘）所对应的二次左对称共形代数，其中该代数定义如下:

$$L \cdot L = L, \; L \circ L = cL. \tag{76}$$

因此，由推论 3.5, (53)-(57) 与 $\beta = 0$ 以及一些单计算，可得到 (1) 若$c \neq 0$,

$$\alpha_2(L,L) = 0,\ \alpha_1(L,L) = A,\ \alpha_0(L,L) = cA,$$

对于任意 A $\in \mathbb{C}$。

(2) 如果 c $= 0$,

$$\alpha_3(L,L) = 0,\ \alpha_2(L,L) = A,\ \alpha_1(L,L) = B,\ \alpha_0(L,L) = 0,$$

对于任意 A、B $\in \mathbb{C}$。

这与 [12]中的命题 3.4所得结果相同。若 c $= 0$，通过选取推论 3.5 中定义为 ϕ (L) $=$ B 的线性映射 $\phi : V \to \mathbb{C}$，我们可以使 $\alpha_1(\cdot,\cdot)$在等价意义下为零。因此，根据推论 3.5，R_0 被一维中心 $\mathbb{C}$c扩张的所有等价类均为 R_0(A)，其非平凡 λ-乘积如下所示:

$$L_\lambda L = (\partial + \lambda)L + A\lambda^2 c,$$

对于所有 A $\in \mathbb{C}$，b b。注意，如果 $A_1 \neq A_2$, , 那么 $R_0(A_1)$ 与 $R_0(A_2)$ 不等价。因此，在这种情况下，$\dim H^2(R_0, \mathbb{C}) = 1$。类似地，当 c , 0 时，我们可以得到 $\dim H^2(R_c, \mathbb{C}) = 0$。

例 3.12. 设R $= \mathbb{C}[\partial]$ L $\oplus \mathbb{C}[\partial]$ W 是左对称共形代数，其 λ-乘积如下:

$$L_\lambda L = (\partial + \lambda)L,\ L_\lambda W = (\partial + 2\lambda)W, \tag{77}$$

$$W_\lambda W = 0,\ W_\lambda L = 0, \tag{78}$$

接下来，我们计算 $H^2(R, \mathbb{C})$。

实际上，R 是对应于一个二维前 Gel'fand-Dorfman 代数 (V $= \mathbb{C}$L $\oplus \mathbb{C}$W, $\lhd, \rhd, \circ$) 的二次左对称共形代数，由以下给出

$$\begin{aligned}
&L \lhd L = L,\ L \circ L = 0,\ L \rhd L = 0,\\
&W \lhd L = W,\ L \circ W = 0,\ L \rhd W = W,\\
&L \lhd W = 0,\ W \circ L = 0,\ W \rhd L = 0,\\
&W \lhd W = 0,\ W \circ W = 0,\ W \rhd W = 0.
\end{aligned}$$

显然，$V \lhd V = V$。因此，由推论 3.4，经过一些简单的计算，我们得到

$$\begin{aligned}
&\alpha_3(L,W) = A, \alpha_2(L,L) = B, \alpha_1(L,L) = C, \alpha_1(L,W) = D,\\
&\alpha_3(L,L) = \alpha_3(W,L) = \alpha_3(W,W) = \alpha_2(L,W) = \alpha_2(W,L) = \alpha_2(W,W)\\
=\ &\alpha_1(W,L) = \alpha_0(L,L) = \alpha_0(W,L) = \alpha_0(L,W) = \alpha_1(W,W) = \alpha_0(W,W) = 0,
\end{aligned}$$

对于任意 A、B、复数域、D, $\in \mathbb{C}$。

选取推论 3.4 中的线性映射 $\phi : V \to \mathbb{C}$，使其满足 ϕ(L) $=$ 复数域和 ϕ(W) $=$ D 2，从而令 $\alpha_1(\cdot,\cdot)$ 和 $\alpha_0(\cdot,\cdot)$ 在等价意义下为零。因此，根据推论 3.4，R 以一维中心 $\mathbb{C}$c 为中心的所有中心扩张等价类 b 均为 R(A, B)，其 λ-乘积如下:

$$\begin{aligned}
&L_\lambda L = (\partial + \lambda)L + B\lambda^2 c,\ L_\lambda W = (\partial + 2\lambda)W + A\lambda^3 c,\\
&W_\lambda W = 0,\ W_\lambda L = 0,
\end{aligned}$$

对于所有 A, B $\in \mathbb{C}$, b b。注意，若 (A_1, B_1) , (A_2,B_2)，则 $R(A_1,B_1)$ 与 $R(A_2,B_2)$ 不等价。因此，在这种情况下，$\dim H^2(R,\mathbb{C}) = 2$ 。

例 3.13. 设 $R^1 = L_{i\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}[\partial] x_i$ 是一个无限维左对称共形代数，其λ-乘积如下所示：

$$x_{i\lambda}x_j = (\partial + \lambda + 1)x_{i+j}, \quad \text{for all } i, j \in \mathbb{Z}.$$

接下来，我们计算 $H^2(R_1, \mathbb{C})$。

显然，R_1 是与无限维前 Gel'fand-Dorfman 代数 $V = L_{i\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}x_i$ 相对应的二次左对称共形代数，其运算“ $\triangleleft$ ”、“$\triangleright$”和“ $\circ$ ”定义如下：

$$x_i \triangleleft x_j = x_{i+j}, \quad x_i \triangleright x_j = 0,$$
$$x_i \circ x_j = x_{i+j}, \quad \text{for all } i, j \in \mathbb{Z}.$$

根据推论 3.6 和一些单的计算，我们得到

$$\alpha_3(x_i, x_j) = 0, \tag{79}$$
$$\alpha_2(x_i, x_{j+k}) = \alpha_2(x_{i+j}, x_k) = \alpha_2(x_j, x_{i+k}), \tag{80}$$
$$\alpha_2(x_{i+j}, x_k) = \alpha_1(x_{i+j}, x_k) - \alpha_1(x_i, x_{j+k}), \tag{81}$$
$$\alpha_1(x_j, x_{i+k}) = \alpha_1(x_i, x_{j+k}), \tag{82}$$
$$\alpha_1(x_i, x_{j+k}) = \alpha_0(x_{i+j}, x_k) + \alpha_0(x_j, x_{i+k}) - \alpha_0(x_i, x_{j+k}), \tag{83}$$
$$\alpha_0(x_j, x_{i+k}) = \alpha_0(x_i, x_{j+k}), \tag{84}$$

对于任意的 i, j, k $\in \mathbb{Z}$。由 (80)，我们得到 $\alpha_2(x_i, x_{j+k}) = \alpha_2(x_{i+j+k}, x_0) = \alpha_2(x_0, x_{i+j+k})$。因此，设 $\alpha_2(x_i, x_{j+k}) = \alpha_2(x_0, x_{i+j+k}) = f(i+j+k)$，其中 f 是某个复值函数。此外，令 k = 0，得到 $\alpha_2(x_i, x_j) = f(i+j)$。然而，在 (81) 中令 j = 0，得到 f (i + k) = 0。因此，对所有 i $\in \mathbb{Z}$，f (i) = 0 。类似地，设 $\alpha_1(x_i, x_0) = \alpha_1(x_0, x_i) = g(i)$，其中 g 是某个复值函数。此外，由 (83) 和 (84)，有 $\alpha_1(x_{i+j}, x_k) = \alpha_1(x_i, x_{j+k}) = \alpha_0(x_{i+j}, x_k)$。因此，$\alpha_0(x_i, x_j) = \alpha_1(x_i, x_j) = g(i+j)$。通过在定理 3.2 中取线性映射 $\phi: V \to \mathbb{C}$，定义为对所有 i $\in \mathbb{Z}$，$\phi(x_i) = g(i)$，可使 $\alpha_1(\cdot,\cdot)$ 和 $\alpha_0(\cdot,\cdot)$ 在等价意义下为零。因此，R 的所有以一维中心 $\mathbb{C}$c 为核的中心扩张等价类均为 R(f) = R $\oplus \mathbb{C}$c，其 λ-乘积如下：

$$x_{i\lambda}x_j = (\partial + \lambda + 1)x_{i+j},$$

对所有 i、j $\in \mathbb{Z}$。因此，$\dim H^2(R, \mathbb{C}) = 0$。

令 $R^2 = L_{i\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}[\partial] x_i$ 为无限维左对称共形代数，其 λ-乘积如下：

$$x_{i\lambda}x_j = (\partial + \lambda)x_{i+j}, \quad \text{for all } i, j \in \mathbb{Z}.$$

由推论 3.6 以及一些简单的计算，我们得到

$$\alpha_3(x_i, x_j) = 0, \tag{85}$$
$$\alpha_2(x_i, x_{j+k}) = \alpha_2(x_{i+j}, x_k) = \alpha_2(x_j, x_{i+k}), \tag{86}$$
$$\alpha_1(x_i, x_{j+k}) = \alpha_1(x_{i+j}, x_k) = \alpha_1(x_j, x_{i+k}), \tag{87}$$
$$\alpha_0(x_i, x_{j+k}) = \alpha_0(x_{i+j}, x_k) + \alpha_0(x_j, x_{i+k}), \tag{88}$$

对于任意i、j、k $\in \mathbb{Z}$。类似于上述讨论，我们得到 $\alpha_2(x_i,x_j) = f(i+j)$， $\alpha_1(x_i, x_j) = g(i+j)$ 以及 $\alpha_0(x_i,x_j) = 0$ 对于所有 i、j $\in \mathbb{Z}$ 以及某些复函数 f 和 g。

因此，通过选择推论 3.8中由 $\phi(x_i) = g(i)$（对所有i $\in \mathbb{Z}$）定义的线性映射 ϕ:V $\to \mathbb{C}$，我们可以使 $\alpha_1(\cdot,\cdot)$在等价意义下为零。 consequently，R_2 由一维中心 $\mathbb{C}$c扩张的所有等价 b类都是 $R_2(f) = R_2 \oplus \mathbb{C}c$，其$\lambda$-乘积如下：

$$x_{i\lambda}x_j = (\partial + \lambda)x_{i+j} + f(i+j)\lambda^2 c,$$

b对所有i,j $\in \mathbb{Z}$ 以及所有复值函数f。注意，如果 $f_1 \neq f_2$, 那么 $R_2(f_1)$ 不等价于 $bR_2(f_2)$。因此，$\dim H^2(R_2, \mathbb{C}) = \infty$。

4. 二次左对称共形代数的单一性

在本节中，我们将研究二次左对称共形代数的单一性。

对于与左对称代数L 相关联的当前型左对称共形代数 $R = \mathbb{C}[\partial]L$，很容易看出，$R = \mathbb{C}[\partial]L$是单的当且仅当 L是单的。因此，在下文中，我们始终假设二次左对称共形代数不是当前型的。

定义 4.1. 前 Novikov代数 $(V, \lhd, \rhd)$ 的子空间I称为 V 的理想，如果对于所有 a $\in$ I 和b $\in$ V，都有 a $\lhd$b、b $\lhd$ a、a $\rhd$ b、b $\rhd$ a $\in$ I。

任意非零前 Novikov 代数 V 都有两个平凡理想 0 和 V。若理想 I 是 $(V, \lhd, \rhd)$ 的真理想，则称其为真理想。若前 Novikov 代数 $(V, \lhd, \rhd)$ 非平凡且没有真理想，则称其为单。

前 Gel'fand-Dorfman代数 $(V, \lhd, \rhd, \circ)$中的理想I称为真理想，如果I 既是 $(V, \lhd, \rhd)$ 的真理想，也是 $(V, \circ)$ 的真理想。若 V非平凡且没有真理想，则称前 Gel'fand-Dorfman 代数 $(V, \lhd, \rhd, \circ)$ 为单。

接下来，我们给出二次左对称共形代数为单的若干必要条件。

命题 4.2. 设 $R = \mathbb{C}[\partial]V$ 是与前 Gel'fand-Dorfman 代数 $(V, \lhd, \rhd, \circ)$ 相对应的二次左对称共形代数。如果 $R = \mathbb{C}[\partial]V$ 是单的，则 $(V, \lhd, \rhd, \circ)$ 是单的。

证明。 假设 I 是（$V, \lhd, \rhd, \circ$) 的真理想。由（28），可知 $\mathbb{C}[\partial]I$ 是 $R = \mathbb{C}[\partial]V$的真理想。这与 R的单性矛盾。因此命题成立。 □

引理 4.3. 设 $(V, \lhd, \rhd)$ 是一个单前 Novikov 代数。那么，并非对所有 a,b $\in$ V 都有 a $\rhd$ b = –b $\lhd$ a。

证明。 若 $a \rhd b = -b \lhd a$ 对所有 $a,b \in V$都成立，则由（16）和（17），可得

$$c \lhd (a \lhd b - b \lhd a) = (c \lhd a) \lhd b = (c \lhd b) \lhd a = c \lhd (b \lhd a - a \lhd b).$$

因此，对于所有 a、b、c $\in$V，都有 (c $\lhd$b) $\lhd$a = 0。于是，(V $\lhd$V) $\lhd$V = 0。注意，在这种情况下，V $\lhd$V 是 $(V, \lhd, \rhd)$ 的一个理想。由于 $(V, \lhd, \rhd)$ 是单的，我们得到 V $\lhd$ V = 0，这是不可能的。因此，对于所有 a、b $\in$V，a $\rhd$b = –b $\lhd$a 不成立。□

定理 4.4。设 $(V, \lhd, \rhd, \circ)$ 是一个前 Gel'fand-Dorfman 代数。对所有 a、b $\in V$，令 a $\star$ b = a $\rhd$ b + b $\lhd$ a。如果 $(V, \lhd, \rhd)$ 是一个单的前 Novikov 代数，且 V = V $\star$ V，那么与 $(V, \lhd, \rhd, \circ)$ 对应的二次左对称共形代数 R = $\mathbb{C}[\partial]V$ 是单的。

n 证明。设 I 是 R 的非零理想，且 $\beta = P\, f_i(\partial)a_i \in I \setminus \{0\}$，其中 $a_i \in V (0 \le i \le n)$ $i=0$ 线性无关，且 $f_i(\partial) \in \mathbb{C}[\partial] \setminus \{0\}$。假设 $f_m(\partial)$、 $\cdots$、$f_l(\partial)$ 的次数在这些 $f_i(\partial)$ 中最大，且 $f_m(\partial)$、 $\cdots$、$f_l(\partial)$ 的首项系数分别为 k_m、 $\cdots$、k_l。设 $f_m(\partial)$ 的次数为 j。假设 $f_g(\partial)$、 $\cdots$、$f_h(\partial)$ 是这些 $f_i(\partial)$ 中次数为 j $-$ 1 的多项式，其首项系数分别为 k_g、 $\cdots$、k_h。对于任意 a $\in V$,

$$
\begin{aligned}
a_\lambda \beta &= \sum_{i=0}^{n} f_i(\partial + \lambda)(\partial(a_i \lhd a) + a \circ a_i + \lambda(a \star a_i)), \\
\beta_\lambda a &= \sum_{i=0}^{n} f_i(-\lambda)(\partial(a \lhd a_i) + a_i \circ a + \lambda(a_i \star a)).
\end{aligned} \tag{89}
$$

根据(89)中 λ^{j+1} 的系数，我们得到w_1 = a $\star$ t $\in$ I以及w_2 = t $\star$ a $\in$ I，其中 t = $k_m a_m + \cdots + k_l a_l$, 对所有 a $\in$ V。令$U_1 = \{t\}$ 和 $W = \{b | b \star a = a \star b = 0$，对所有 a $\in V\}$。注意 t , 0。

我们断言，存在某个非零元素 w $\in$ V $\cap$ I。若w_1 或w_2 不为零，则结论显然成立。若a $\star$ t = t $\star$ a = 0，即 $U_1 \subseteq W$，则通过比较(89) 中 λ^j 的系数，我们得到 ∂(t $\lhd$ a) + a $\circ$ t + a $\star$ c $\in$ I以及 ∂(a $\lhd$ t) + t $\circ$ a $-$ c $\star$ a $\in$ I，其中c = $k_g a_g + \cdots + k_h a_h$，对所有 a $\in$ V 均成立。显然，t $\lhd$ a 和 a $\lhd$ t中至少有一个不为零，因为 $(V, \lhd, \rhd)$ 是单的。令 u = a $\circ$ t + a $\star$ c 且 v = t $\circ$ a $-$ c $\star$ a。那么对于任意 b $\in$ V，我们得到

$$
\begin{aligned}
b_\lambda(\partial(t \lhd a) + u) =& (\lambda + \partial)\big(\partial((t \lhd a) \lhd b) + b \circ (t \lhd a) + \lambda(b \star (t \lhd a))\big) \\
&+ \partial(u \lhd b) + b \circ u + \lambda(b \star u), \\
b_\lambda(\partial(a \lhd t) + v) =& (\lambda + \partial)\big(\partial((a \lhd t) \lhd b) + b \circ (a \lhd t) + \lambda(b \star (a \lhd t))\big) \\
&+ \partial(v \lhd b) + b \circ v + \lambda(b \star v), \\
(\partial(t \lhd a) + u)_\lambda b =& -\lambda\big(\partial(b \lhd (t \lhd a)) + (t \lhd a) \circ b + \lambda((t \lhd a) \star b)\big) \\
&+ \partial(b \lhd u) + u \circ b + \lambda(u \star b), \\
(\partial(a \lhd t) + v)_\lambda b =& -\lambda\big(\partial(b \lhd (a \lhd t)) + (a \lhd t) \circ b + \lambda((a \lhd t) \star b)\big) \\
&+ \partial(b \lhd v) + v \circ b + \lambda(v \star b).
\end{aligned} \tag{90}
$$

因此，通过分别比较（90）式中 λ^2和 λ的系数，我们得到 b $\star$ (t $\lhd$ a)、b $\star$ (a $\lhd$ t)、(t $\lhd$ a) $\star$ b、(a $\lhd$ t) $\star$ b $\in$ I 以及 ∂((t $\lhd$ a) $\lhd$ b) + b $\circ$ (t $\lhd$ a) + b $\star$ u, ∂((a $\lhd$ t) $\lhd$ b) + b $\circ$ (a $\lhd$ t) + b $\star$ v, ∂(b $\lhd$ (t $\lhd$ a)) + (t $\lhd$ a) $\circ$ b $-$ u $\star$ b, ∂(b $\lhd$ (a $\lhd$ t)) + (a $\lhd$ t) $\circ$ b $-$ v $\star$ b $\in$ I。然后，由 a $\star$ t = t $\star$ a = 0，我们得到 b $\star$ (t $\rhd$ a)、 b $\star$ (a $\rhd$ t)、 (t $\rhd$ a) $\star$ b、 (a $\rhd$ t) $\star$ b $\in$ I。令 U_2 = {t $\rhd$ a、 t $\lhd$ a、 a $\rhd$ t、 a $\lhd$ t| for all a $\in V$}。如果 b $\star$ (t $\lhd$ a)、b $\star$ (a $\lhd$ t)、(t $\lhd$ a) $\star$ b、(a $\lhd$ t) $\star$ b、b $\star$ (t $\rhd$ a)、b $\star$ (a $\rhd$ t)、(t $\rhd$ a) $\star$ b 和 (a $\rhd$ t) $\star$ b 中有一个非零，则结论成立。否则 $U_2 \subseteq W$。重复上述步骤，可得到 U_3, U4, $\cdots$、U_n, $\cdots$。如果某个 U_n 中存在非零元素 w，使得对于某个 b $\in$ V，有 w $\star$ b , 0 或 b $\star$ w , 0，则结论成立。否则所有 $U_i \subseteq W$。因此存在一个递增序列

$$U_1 \subseteq U_1 + U_2 \subseteq U_1 + U_2 + U_3 \subseteq \cdots \subseteq V.$$

由于（$V, \triangleleft, \triangleright$）是单的，我们得到 $W = V$。因此 $a \triangleleft b = -b \triangleright a$ 对所有 $a,b \in V$均成立。根据引理 4.3，这是不可能的。因此，该断言成立。

假设 w 是 V ∩ I 中的非零元素。由于对任意 b ∈ V,

$$b_\lambda w = \partial(w \triangleleft b) + b \circ w + \lambda(b \star w),$$
$$w_\lambda b = \partial(b \triangleleft w) + w \circ b + \lambda(w \star b),$$

由 ∂(w ◁ b) + b ∘ w ∈ I、 ∂(b ◁ w) + w ∘ b ∈ I、 b ⋆ w ∈ I和w ⋆ b ∈ I的 λ^0 和 λ 的系数，我们得到。因此，我们得到 ∂(b ▷ w) − b ∘ w ∈ I以及 ∂(w ▷ b) − w ∘ b ∈ I。令U = {w ◁ b, b ◁ w, b ▷ w, w ▷ b|，其中对所有b ∈ V}均成立。对于所有u ∈ U，以及某个v ∈V，我们有 ∂u + v ∈ I。根据

$$b_\lambda(\partial u + v) = (\lambda + \partial)(\partial(u \triangleleft b) + b \circ u + \lambda(b \star u)) + \partial(v \triangleleft b) + b \circ v + \lambda(b \star v),$$
$$(\partial u + v)_\lambda b = -\lambda(\partial(b \triangleleft u) + u \circ b + \lambda(u \star b)) + \partial(b \triangleleft v) + v \circ b + \lambda(v \star b),$$

由 λ^2 和 λ 的系数，我们分别得到 b ⋆ u ∈ I、u ⋆ b ∈ I、 ∂(u ◁ b) + b ∘ u + b ⋆ v ∈ I 以及 ∂(b ◁ u) + u ∘ b − v ⋆ b ∈ I。于是我们得到 ∂(b ▷ u) − b ∘ u −b ⋆ v ∈ I 和∂(u▷b)−u∘b+v⋆b ∈ I。因此，令 H_1 = {u◁b, b◁u, b▷u, u▷b|，对所有 b ∈ V、u ∈ U}，并作归纳推理，可得 H2, ⋯, H_n, ⋯ 以及一个递增序列

$$U \subseteq H_1 + U \subseteq U + H_1 + H_2 \subseteq \cdots \subseteq V.$$

由于 V 是单的，对于所有 v ∈ V 以及某个 c ∈ V，我们有 ∂v +c ∈ I。因此，由

$$b_\lambda(\partial v + c) = (\lambda + \partial)(\partial(v \triangleleft b) + b \circ v + \lambda(b \star v)) + \partial(c \triangleleft b) + b \circ c + \lambda(b \star c),$$

由 λ^2 的系数可得 b ⋆ v ∈ I，对于所有 b、v ∈ V。由于 V ⋆ V = V 且I是一个$\mathbb{C}[\partial]$-模，可以得到 V ⊂ I，进而 I = R。因此，R 是单的。□

例 4.5。 设 $R_c = \mathbb{C}[\partial]L$ 为例 2.4中给出的左对称共形代数。注意，与 $(V = \mathbb{C}L, \triangleleft, \triangleright, \circ)$ 对应的前 Gel'fand-Dorfman 泊松代数定义如下:

$$L \triangleleft L = L,\ L \triangleright L = 0,\ L \circ L = cL. \tag{91}$$

显然，$(V, \triangleleft, \triangleright)$ 是单的且 $V = V \star V$。因此，根据定理 4.4，R_c 对于任意$c \in \mathbb{C}$。

在下文中，我们研究与“▷”平凡的前 Gel’fand-Dorfman代数(V, ◁, ▷, ∘) 相关的二次左对称共形代数的单一性。

命题 4.6. 设 (V, ◁, ▷, ∘) 是一个“▷”平凡的单前 Gel’fand-Dorfman 代数。若存在元素 a ∈ V，使得对于所有非零 b ∈ V，都有 a ◁ b , 0 或 b ◁ a , 0，则与 (V, ◁, ▷, ∘) 相对应的二次左对称共形代数 R = $\mathbb{C}[\partial]$ V 是单的。

证明。 假设与定理 4.4的证明相同，对于任意 $b \in V$，有

$$b_\lambda \beta = \sum_{i=0}^{n} f_i(\partial + \lambda)(\partial(a_i \triangleleft b) + b \circ a_i + \lambda(a_i \triangleleft b)). \tag{92}$$

由于存在元素 $a \in V$，使得对于所有非零的 $b \in V$，$a \lhd b, 0$ 或 $b \lhd a, 0$，因此存在非零元素 $a \lhd t$ 或 $t \lhd a \in V \cap I$，其中 $t = k_m a_m + \cdots + k_l a_l \in V$。将这个非零元素记为 w。对于所有 $c \in V$，

$$c_\lambda w = \partial(w \lhd c) + c \circ w + \lambda(w \lhd c),$$
$$w_\lambda c = \partial(c \lhd w) + w \circ c + \lambda(c \lhd w).$$

于是，通过系数可得 $w \lhd c \in I$、$c \lhd w \in I$，以及 $c \circ w \in I$、$w \circ c \in I$；对于 λ 和 λ^0，分别由其系数得出。令 $W = \{w \lhd c、c \lhd w、c \circ w、w \circ c | ，其中 a \in V\}$。则 $W \subseteq I$。对于所有 $d \in W$ 和 $b \in V$，

$$b_\lambda d = \partial(d \lhd b) + b \circ d + \lambda(d \lhd b),$$
$$d_\lambda b = \partial(b \lhd d) + d \circ b + \lambda(b \lhd d).$$

于是，$b \lhd d \in I$，$d \lhd b \in I$，$d \circ b \in I$，且 $b \circ d \in I$。因此 $V \subseteq I$，因为 $(V, \lhd, \circ)$ 是单的。因此，$R = \mathbb{C}[\partial]V = I$，即 R 是单的。□

注4.7. 注意到，存在一些自然条件可以确保存在一个元素$a \in V$，使得对于所有$b \in V$，都有 $a \lhd b, 0$ 或$b \lhd a, 0$。例如，$(V, \lhd)$有一个右单位元（分别地，左单位元），即存在一个元素$e \in V$，使得对于所有 $a \in V$，都有$a \lhd e = a$（分别地，$e \lhd a = a$）。

例4.8. 设 $(V = \mathbb{C}L \oplus \mathbb{C}W, \lhd, \rhd, \circ)$ 是一个二维前 Gel'fand-Dorfman 代数，其中"$\rhd$"取平凡形式，如下所示：

$$L \lhd L = L, \quad W \lhd L = W, \quad L \lhd W = W \lhd W = 0,$$
$$L \circ L = 0, \quad L \circ W = W \circ L = h_1 L, \quad W \circ W = k_1(L + W),$$

其中 $h_1, k_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$。注意，$(V, \lhd, \rhd, \circ)$ 是单代数，且 L 是 $(V, \lhd)$ 的右单位元。

设 $R = \mathbb{C}[\partial]V$ 是相应的二次左对称共形代数，其λ-乘积如下所示：

$$L_\lambda L = (\partial + \lambda)L, \; L_\lambda W = h_1 L + (\partial + \lambda)W,$$
$$W_\lambda L = h_1 L, \; W_\lambda W = k_1 L + k_1 W,$$

其中 $h_1, k_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$。由命题 4.6，$R$ 是单的。

命题4.9. 若 Novikov-Poisson 代数 $(V, \cdot, \circ)$ 是单代数，则与 $(V, \cdot, \circ)$ 对应的二次左对称共形代数 $R = \mathbb{C}[\partial]V$ 也是单的。

证明。假设与定理4.4 的证明中的假设相同，并比较(89)中 λ^{j+1} 的系数，我们得到$w = b \cdot t \in I$，其中 $t = k_m a_m + \cdots + k_l a_l$，对所有 $b \in V$均成立。我们断言存在某个非零元素 $w \in V \cap I$。若存在某个 $b \in V$，使得$w = b \cdot t$ 不为零，则结论成立。若 $b \cdot t = 0$ 对所有 $b \in V$ 均成立，则通过比较 (89)中 $\circ$ 的系数，我们得到 $b + c \cdot b \in I$以及 $t \circ b - b \cdot c \in I$，其中 $c = k_g a_g + \cdots + k_h a_h$，对任意 $b \in V$ 均成立。若$b \circ t + c \cdot b = t \circ b - b \cdot c = 0$，则有

$$b \circ t = -c \cdot b = -b \cdot c = -t \circ b$$

对所有 b ∈V。令 W =t ∘V。注意，对所有 b, d ∈V,

$$(t\circ b)\circ d=-(b\circ t)\circ d=-(b\circ d)\circ t\in W,$$
$$d\circ(t\circ b)=(d\circ t)\circ b+t\circ(d\circ b)-(t\circ d)\circ b\in W,$$
$$(t\circ b)\cdot d=(t\cdot d)\circ b=0=d\cdot(t\circ b).$$

因此，W 是 (V, ·, ∘) 的理想。于是 W = 0 或 W = V。若 W = 0，则 ℂt 是 (V, ·, ∘) 的理想。若 dimV ≥ 2，则根据 (V, ·, ∘) 的单性，这是不可能的。当 dimV = 1 时，V = ℂt。由于 t · t = t ∘ t = 0，V 是平凡的，这也与 (V, ·, ∘) 的单性相矛盾。因此，W = V。

另一方面，通过比较第二个方程（89）中 λ^{j-1} 的系数，我们得到 $\partial(b\cdot c)+e\in I$ 对所有 $b\in V$ 以及某个 $e\in V$。由于对所有 b，$d\in V$,

$$(\partial(b\cdot c)+e)_\lambda d=-\lambda(\partial(d\cdot(b\cdot c))+(b\cdot c)\circ d+\lambda(d\cdot(b\cdot c)))+\partial(d\cdot e)+e\circ d+\lambda(d\cdot e),$$

比较 λ^2 的系数可得 d · (b · c) ∈I。由于 V · c = t ∘ V = V，存在某些 b, d ∈V，使得 d · (b · c) , 0。因此我们得到一个非零元素 w ∈I ∩V。对于所有 b ∈V,

$$b_\lambda w=\partial(w\cdot b)+b\circ w+\lambda(w\cdot b),$$
$$w_\lambda b=\partial(b\cdot w)+w\circ b+\lambda(b\cdot w).$$

分别比较 λ 和 λ^0 的系数，容易发现对于所有 b ∈V，都有 w·b ∈I、b ∘w ∈I 和 w∘b ∈I。由于 (V, ·, ∘) 是单的，因此 V ⊆I。由于 I 是一个 $\mathbb{C}[\partial]$-模，可得 I = R。因此 R 是单的。□

推论 4.10. 设 (V, ·, ∘) 是一个 Novikov-Poisson 代数，且 R = ℂ[∂]V 是相应的二次左对称共形代数。那么，当且仅当 (V, ·, ∘) 是单的时，R = ℂ[∂]V 是单的。

证明。 由命题4.2 和 4.9可直接得出。 □

显然，对于一个 Novikov-Poisson 代数 (V, ·, ∘)，如果Novikov 代数 (V, ∘)是单的，那么 (V, ·, ∘) 也是单的。注意，带有幂等元的单Novikov代数上的Novikov-Poisson代数的分类已在 [25] 中给出。因此，这样的分类结果将提供许多无限单左对称共形代数。我们给出如下一个例子。

例 4.11。 设 $(V,\cdot,\circ)$ 是例 2.27 中给出的 Novikov-Poisson 代数。由于 $(V,\circ)$ 是单的，$(V,\cdot,\circ)$ 是单的。设 $R=\mathbb{C}[\partial]V=\oplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathbb{C}[\partial]x_i$ 为相应的二次左对称共形代数，其定义如下:

$$x_{i\lambda}x_j=(\partial+\lambda+j)x_{i+j},\quad\text{for all } i,j\in\mathbb{Z}.$$

由命题 4.9，R 是单的。

致谢 作者谨向程明白教授致以谢意，感谢其富有成效的讨论。 声明 伦理审批 不适用。利益冲突作者声明不存在利益冲突。作者贡献Z.Xu 撰写了第3节和第4节，Y. Hong 撰写了引言和第2节。所有作者均审阅了稿件。

资金支持 本研究得到国家自然科学基金（编号：12171129、11871421）、浙江省自然科学基金（编号：LY20A010022）以及杭州师范大学科学研究基金（编号：2019QDL012）的资助。
数据和材料的可用性 不适用。

参考文献

[1] C. Bai、O. Bellier、L. Guo、X. Ni，运算的分拆、Manin 积与 Rota-Baxter 算子，Int. Math. Res. Not. 3（2013），485–524。5，7[2] A. Barakat、A. De sole、V. Kac，哈密顿方程理论中的 Poisson 顶点代数，Japan. J. Math., 4（2009），141–252。1[3] B. Bakalov、V. Kac，场代数，Int. Math. Res. Not., 3（2003），123–159。1[4] B. Bakalov、V. G. Kac、A. A. Voronov，共形代数的上同调，Comm. Math. Phys. 200（1999），561–598。1[5] S. Cheng、V. Kac，共形模，Asian J. Math., 1（1997），181–193。1[6] A. Dzhumadil'daev，右对称代数的上同调与变形，J. Math. Sciences, 93（1999），836–876。14[7] A. D'Andrea、V. Kac，有限共形代数的结构理论，Sel. Math., New Ser., 4（1998），377–418。1[8] Y. Hong、C. Bai、L. Guo，通过 Novikov 双代数的仿射化与 Koszul 对偶构造无限维李双代数，即将发表于 Comm. Math. Phys.，2023。2，5，6[9] Y. Hong、C. Bai、L. Guo，微分反对称无穷小双代数、Novikov 双代数与李共形双代数，预印本。2[10] Y. Hong，一类李共形代数的中心扩张与共形导子，Linear Multilin- lear Algebra, 70（2022），3577–3598。2[11] Y. Hong、C. Bai，共形经典 Yang-Baxter 方程、S-方程与 𝒪-算子，Lett. Math. Phys., 110（2020），885–909。1[12] Y. Hong、F. Li，左对称共形代数与顶点代数，J. Pure Appl. Algebra, 219（2015），3543–3567。1，2，3，4，8，9，15[13] Y. Hong、F. Li，关于左对称共形双代数，J. Algebra Appl., 14（2015），1450079。1[14] Y. Hong、Z. Wu，二次李共形代数的单性，Comm. Algebra, 45（2017），141–150。2[15] V. G. Kac，初学者的顶点代数，No. 10，American Mathematical Soc.，1998。1，2[16] V. Kac，局域性的思想，载于《几何、群与代数的物理应用与数学方面》，H.-D. Doebner 等编（World Scientific Publishing，新加坡，1997），16–32。1[17] P. Kolesnikov、B. Sartayev、A. Orazgaliev，Gel'fand-Dorfman 代数、导出恒等式与幺半群的 Manin 积。J. Algebra, 539（2019），260–284。6[18] D. Liu、Y. Hong、H. Zhou、N. Zhang，李共形代数 W(a, b) 上相容左对称共形代数结构的分类，Comm. Algebra, 46（2018），5381-5398。1[19] J.-L. Loday，Leibniz 上同调的杯积与对偶 Leibniz 代数，载于：Math. Scand. Vol.77，斯特拉斯堡路易·巴斯德大学，1995，189–196。5[20] J. M. Osborn，Novikov 代数的模，Contemp. Math. 184（1995），327–327。5[21] J. Wen、Y. Hong，Gel'fand-Dorfman 双代数的扩张结构，即将发表于 Acta Math. Sin. -English Ser.（2022）。7[22] H. Wu、Y. Hong，W(a, b) 上的相容左对称共形代数，Comm. Algebra, 50（2022），2954–2972。1[23] Z. Wu，分次左对称伪代数，Comm. Algebra, 43（2015），3869–3897。1[24] X. Xu，二次共形超代数，J. Algebra, 231（2000），1–38。2，6[25] X. Xu，Novikov-Poisson 代数，J. Algebra, 190（1997），253–279。8，9，21[26]J. Zhao、B. Hou，左对称共形代数的上同调及其应用，arXiv:2210.00466。

1, 10

数学学院，杭州师范大学，杭州，311121，中国 邮箱地址：
Xzy@stu.hznu.edu.cn

数学学院，杭州师范大学，杭州，311121，中国 电子邮件地址：
yyhong@hznu.edu.cn