arXiv:2304.05004v1 [q-fin.RM] 11 Apr 2023

高斯 copula 下的重尾风险：边缘变换的影响

作者：伊克拉姆吉特 达斯伊克拉姆吉特达斯和[1,a] 和 维姬 法森-哈特曼[2,b]

[1]新加坡科技设计大学工程系统与设计系，a*bikram@sutd.edu.sg*

[2]卡尔斯鲁厄理工学院随机过程研究所，b*vicky.fasen@kit.edu*

本文计算了边缘风险具有重尾特征且依赖结构为高斯 copula 时的多变量尾部风险概率。边缘重尾风险采用正则变差进行建模，由此得到一些有趣的结论。首先，随着阈值增大，我们注意到，尾部集合概率的衰减速率会因所考虑的尾部集合类型和高斯相关矩阵而异。其次，我们发现，尽管任何具有高斯 copula 的多变量模型都具有所谓的渐近尾部独立性质，但较重尾边缘变量下的联合尾部行为在结构上不同于高斯边缘变量下的联合尾部行为。我们通过示例和模拟说明所得结果。

1. 引言。 我们关注高斯 copula 下联合尾部风险事件的渐近概率，以及其对具有重尾和轻尾边缘分布的影响。传统上，风险变量采用多元正态分布建模；然而，正如在许多金融、保险和环境应用中观察到的那样，实践中的这些风险往往具有比正态分布相对更重的尾部[16, 38]。过去几十年来，*copula* 建模的普及，使得高斯依赖结构能够与任意边缘分布选择结合使用，尤其是重尾分布 [25, 32]。

文献中基于各种模型假设研究了尾部超越概率。对于常用的多元正态分布，此类近似是 Mills 比率的自然扩展，已有悠久的研究历史；参见 [6, 13, 14, 18, 19, 20, 34, 41]。对于重尾边缘分布，即使依赖结构不一定是高斯的，此类尾部近似在保险和金融风险管理中也极为有用，详见 [15, 25] ；关于本文用于建模重尾的多元正则变差概念，尤其可参见 [38], 。此外，我们还可参见 Asmussen 和 Rojas-Nandayapa [1] ，了解其在高斯 copula 下研究对数正态边缘分布的阈值超越概率；参见 Hua、Joe 和 Li [23], ，以及 Joe 和 Li [27] ，了解使用 copula 对具有正则变差边缘分布的多元分布建模；还可参见 Deo 和 Murthy [11], ，了解其使用大偏差方法计算一般损失函数的尾部风险，并举例说明高斯 copula 依赖结构。对于多元 copula，尾部依赖的概念也已得到广泛研究，参见 [17, 22, 26]。

进一步讨论之前，回顾一下，对于一个具有连续边缘分布 $F_1, \dots, F_d$ 的随机向量 $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_d) \sim F$，copula $C\colon [0,1]^d \to [0,1]$ 和生存 copula $\widehat{C}\colon [0,1]^d \to [0,1]$ 均为分布函数，分别满足 $F(\boldsymbol{x}) = \mathbb{P}(\boldsymbol{X} \le \boldsymbol{x}) = C(F_1(x_1) \dots, F_d(x_d))$，以及 $F(\boldsymbol{x}) = \mathbb{P}(\boldsymbol{X} > \boldsymbol{x}) = \widehat{C}(F_1(x_1) \dots, F_d(x_d))$，其中 $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$，且 $\overline{F_j} = 1 - F_j \, \forall j \in \{1, \dots, d\}$. 如果 Φ_Σ 定义了一个 d 元正态

AMS 2000 学科分类：主要分类：60G70、62H05；次要分类：91G70、62G32。关键词和短语：渐近尾部独立、高斯 copula、重尾、多元正则变异、多元风险、尾部风险。

分布，其所有边际均值为零、方差为一，且具有半正定相关矩阵 $\Sigma \in \mathbb{R}^{d\times d}$，而 Φ 表示标准正态分布函数，则

$$C_\Sigma(u_1,\dots,u_d) = \Phi_\Sigma(\Phi^{-1}(u_1),\dots,\Phi^{-1}(u_d)), \qquad 0 < u_1,\dots,u_d < 1,$$

定义了一个相关矩阵为 Σ 的高斯 copula。除非另有说明，本文中 $\boldsymbol{Z}$ 是一个取值于 $\mathbb{R}^d$、服从分布 Φ_Σ 的高斯随机向量。相比之下，$\boldsymbol{X}$ 是一个取值于 $\mathbb{R}^d$、具有重尾边际分布和高斯 copula C_Σ 的随机向量。

在 [42], Sibuya 证明，如果 $\boldsymbol{Z} = (Z_1, Z_2)$ 服从相关系数为任意 $\rho \in (-1,1)$ 的二元正态分布，其中 $Z_1, Z_2 \sim \Phi$，那么 Z_1 和 Z_2 是渐近（尾部）独立的，即

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(Z_1 > t | Z_2 > t) = 0. \tag{1.1}$$

如（1.1）所示，渐近独立性等价于 $\mathbb{P}(Z_1 > t, Z_2 > t) = o(\mathbb{P}(Z_2 > t))$当 $t \to \infty$ 时成立，这意味着同时越过较大阈值的联合概率，远低于单独越过同一阈值的概率。此外，对于相关系数为 $\rho \in (-1,1)$ 的二元高斯 copula $\widehat{\ }$，相应的生存 copula C_ρ 在 $u \to 0$ 时表现为 $C_\rho(u,u) = o(u)$，这表明无论边缘分布如何，渐近独立性均成立；参见 [22, 29]。对于重尾分布，在各种多元模型中，渐近独立性的存在或缺失推动了尾部依赖研究的不断发展，研究范围从尾部依赖系数 [3, 29] 延伸至隐正则变差 [33, 37] 等。

在重尾分布、高斯 copula 和渐近独立这一背景下，我们对两个相关问题给出了合理的解答。

(1) 问题：当边缘分布为重尾分布时，高斯 copula 及其参数对极端集合的尾部行为究竟有何影响?

答案：在第 $\boldsymbol{X}$ 节，我们针对具有高斯 copula 和正则变尾的随机向量3建立了其尾部行为的精确结果。对于集合

$$A = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d_+ : y_j > x_j \text{ for at least/ exactly } i \text{ components of } \boldsymbol{x}\}, \tag{1.2}$$

满足 $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots\dots, x_d) \in \mathbb{R}^d_+ := [0,\infty)^d$ 且 $1 \le i \le d$的情形，我们能够近似

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{X} \in tA) \sim t^{-\alpha_*}\ell_*(t)\mu_*(A)$$

当 t 较大时，其中 μ^* 是一个非零博雷尔测度，$\alpha_* > 0$ 和 $\ell_*(tx)/\ell_*(t) \to 1$（当 $t \to\infty$时）。$\mu^*(A)$ 和 ℓ_* 均取决于尾部集合的性质以及高斯相关矩阵；我们给出了一个显式表示。据我们所知，文献中尚未对此进行刻画，不过针对某些特定集合已有启发式近似和部分结果，参见 [23, 29]。

(2)问题：我们知道，高斯copula 允许渐近（尾部）独立，但我们能否断言，随着 $t \to \infty$,

$$\mathbb{P}(X_1 > tx_1, X_2 > tx_2) = o(\min_j(\mathbb{P}(X_j > tx_j))) \tag{1.3}$$

对于任何 $x_1, x_2 > 0$，这一点同样成立，这意味着联合越过阈值实际上比边际越过阈值更为罕见，即使这些阈值并不相等?

答案：我们观察到，在高斯 copula 依赖结构下，当边缘分布具有重尾时，式（1.3）确实成立；但当边缘分布为正态分布时，对于某些 (x_1, x_2) 取值则不成立，我们将在第 3.2 节进一步讨论。Furman 等人 [17], 提到："……所有经典的尾部依赖度量皆是如此，但他们考察的是 *copula* 主对角线上的尾部依赖程度，而这往往与 *copula* 定义域内极值的聚集情况相去甚远。"——我们的结果将进一步阐述渐近独立性和多元正则变差这两个概念。

这里我们谨慎地指出，毫无限制地在金融风险建模中使用高斯 copula [30]已经招致了一些严厉批评 [40]；参见 [7, 12, 28] 以了解更多讨论。对此，本文旨在帮助风险建模人员判断高斯 copula 是否适用于其特定的尾部风险度量。

本文结构如下。第 2节介绍一些预备知识，包括对 $\mathbb{R}^d_+$ 特殊锥上的多元正则变差以及多元高斯分布尾部的若干结果的讨论。本文的主要结果，即具有尾部等价的正则变差边缘分布和高斯 copula 的多元分布之尾部集合概率的渐近行为，将在第3节给出。除一般性结果外，我们还将在第3.1节提供若干示例。在第 3.2节中，我们通过比较二元高斯 copula 模型中的重尾与轻尾，讨论尾部依赖的结构。第 4节将通过模拟展示我们的结果。最后，我们将在第 5 节总结全文，并探讨其在风险管理应用中的潜在价值。

记号。本文通篇使用以下记号。指标集记为 $\mathbb{I}=\{1,\dots,d\}$。集合 $S\subseteq\mathbb{I}$的基数记为 $|S|$。向量运算均按分量进行，例如，对于向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_d)$ 和 $\boldsymbol{y}=(y_1,\dots,y_d)$，$\boldsymbol{x}\le\boldsymbol{y}$表示对于所有 j，$x_j\le y_j$。此外，关于 $\mathbb{R}^d$上的向量，我们还使用以下记号：$\mathbf{0}=\{0,\dots,0\}^\top$、$\mathbf{1}=(1,\dots,1)^\top$、$\boldsymbol{\infty}=(\infty,\dots,\infty)^\top$ 以及 $e_j=(0,\dots,1,\dots,0)^\top, j\in\mathbb{I}$，其中 e_j仅在第 j个坐标上有一个非零元素 1。对于序列 $\boldsymbol{x}_t=(x_t,1,\dots,x_{t,d})$ $\boldsymbol{y}_t=(y_t,1,\dots,y_{t,d})\in\mathbb{R}^d, t>0$，记号 $\boldsymbol{y}_t=\boldsymbol{x}_t+o(t)$ as $t\to\infty$表示，对于每个 $j\in\mathbb{I}$，$y_{t,j}-x_{t,j}=o(t)$ as $t\to\infty$。

对于给定的向量 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d$ 和 $S\subseteq\mathbb{I}$，我们用 $\boldsymbol{x}^\top$ 表示 $\boldsymbol{x}$ 的转置，用$\boldsymbol{x}_S\in\mathbb{R}^{|S|}$ 表示从 $\mathbb{I}\backslash S$ 中删除 $\boldsymbol{x}$ 的各分量后得到的向量。类似地，对于非空的 I，$J\subseteq\mathbb{I}$，Σ_{IJ}表示给定矩阵 $\Sigma\in\mathbb{R}^{d\times d}$的相应子矩阵；并且我们用 Σ_I 表示 Σ_{II}。事件 A 的示性函数记为 $\mathbb{1}_A$。此外，对于常数 $t>0$ 和集合 $A\subseteq\mathbb{R}^d_+$，我们用 $tA:=\{t\boldsymbol{x}:\ \boldsymbol{x}\in A\}$表示。对于随机向量$\boldsymbol{X}=(X_1,\dots\dots,X_d)$，若 $\boldsymbol{X}$的分布函数为 F，则记作 $\boldsymbol{X}\sim F$；此外，我们认为边际上，对于 $j\in\mathbb{I}$，$X_j\sim F_j$。最后，φ 和 Φ 分别表示标准正态分布的密度函数和分布函数。

2. 预备知识。 本节将讨论一些预备概念和结果。在第 2.1 节中，我们简要介绍（多元）正则变差，并给出我们感兴趣的模型的定义。在第2.2 节中，我们讨论多元正态分布尾部集合概率的渐近行为，并利用这些结果推导本文的主要结论。

2.1. 多元正则变差。 我们的目标是研究具有高斯 copula 依赖结构的重尾模型的尾部集合。对于重尾模型，我们假设其边缘分布具有正则变差性质，这是一种广泛用于对此类分布建模的方法。

定义 2.1。

(a) 可测函数 $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ 是 正则变差的（在 $+\infty$ 处），且具有某个固定的$\beta\in\mathbb{R}$ 若

$$\lim_{t\to\infty} f(tx)/f(t)=x^\beta,\qquad \forall x>0.$$

我们记作 $f\in\mathcal{RV}_\beta$，且若 $\beta=0$，则称 f 缓变。

(b) 若某个实值随机变量 $X\sim F$ 的尾部 $\bar{F}:=1-F\in\mathcal{RV}_{-\alpha}$ 对某个 $\alpha>0$ 成立，则称其在$+\infty$ 处具有正则变差性。

假设 X 在 $+\infty$ 处具有正则变异性，等价于存在一个可测函数 $b\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$，满足 $b(t) \to \infty$，其中 $t \to \infty$，使得

$$t\,\mathbb{P}(X > b(t)x) = t\,\overline{F}(b(t)x) \xrightarrow{t\to\infty} x^{-\alpha}, \quad \forall x > 0.$$

因此，我们有 $b \in \mathcal{RV}_{1/\alpha}$，而 b 的一个标准选取为

$$b(t) = F^{\leftarrow}(1 - 1/t) = \overline{F}^{\leftarrow}(1/t)$$

其中 $F^{\leftarrow}(x) = \inf\{y \in \mathbb{R} : \ F(y) \geq x\}$ 是 F的广义逆。一些众所周知的分布，如帕累托、Burr 分布、莱维分布、弗雷歇分布、Student's t，都属于正则变分布；参见 Embrechts、Klüppelberg 和 Mikosch [15]。关于正则变函数的详细讨论见 Bingham、Goldie 和 Teugels 的专著 [2]，关于正则变差分布的讨论见 Resnick [38, 39]。

由于我们特别关注具有高斯 copula 依赖结构的重尾随机向量 $\boldsymbol{X}$ in $\mathbb{R}^d$，我们定义如下。

定义 2.2。一个取值于 $\mathbb{R}^d$ 的随机向量 $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_d) \sim F$服从具有指数 $\alpha > 0$、尺度函数 b 和相关矩阵 Σ 的尾部正则变化的高斯 *copula* 分布，若满足以下条件：

(i) F_j 的分布函数 X_j 连续且严格递增，并满足$F_j \in \mathcal{RV}_{-\alpha}, \forall\, j \in \mathbb{I}$。**(ii)** 所有边缘分布均完全尾等价： $F_j(t)/F_1(t) \to 1$，当 $t \to \infty, \forall j \in \mathbb{I}$时。**(iii)** 函数 $b\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 可测，且当 $t \to \infty$时， $b(t) \sim F_1^{\leftarrow}(1/t)$。**(iv)** F 的联合分布函数 $\boldsymbol{X}$ 由下式给出

$$F(\boldsymbol{x}) = C_\Sigma(F_1(x_1), \ldots, F_d(x_d)), \quad \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d,$$

其中， C_Σ 表示相关矩阵为 $\Sigma \in \mathbb{R}^{d\times d}$的高斯 copula。

我们记作 $\boldsymbol{X} \in \mathrm{RVGC}(\alpha, b, \Sigma)$；若某些参数与上下文无关，则予以省略。

注 2.3. 当相关矩阵为如下给出的等相关矩阵时，

$$\Sigma_\rho = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \ldots & \rho \\ \rho & 1 & \ldots & \rho \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho & \ldots & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

其中 $-\frac{1}{d-1} < \rho < 1$（使 Σ_ρ正定），我们记作 $\boldsymbol{X} \in \mathrm{RVGC}(\alpha, b, \Sigma_\rho)$。后文的若干示例将使用此相关矩阵。

虽然我们对随机向量 $\boldsymbol{X}$ 仅假设其边缘正则变差，但最终我们会证明， $\boldsymbol{X}$ 在 $\mathbb{R}_+^d$ 的不同子锥上满足 多元正则变差 。我们感兴趣的子锥为

$$\mathbb{E}_d^{(i)} := \mathbb{R}_+^d \setminus \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}_+^d : y_{(i)} = 0\} = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}_+^d : y_{(i)} > 0\}, \qquad 1 \leq i \leq d,$$

其中， $y_{(1)} \geq y_{(2)} \geq \ldots \geq y_{(d)}$ 是 y_1、……、 y_d的降序顺序统计量。这里， $\mathbb{E}_d^{(1)}$ 是去除 $\{\mathbf{0}\}$ 后的正象限， $\mathbb{E}_d^{(2)}$ 是去除所有一维

去掉坐标轴后， $\mathbb{E}_d^{(3)}$ 是去掉所有二维坐标超平面的正象限，依此类推。显然，

$$\mathbb{E}_d^{(1)} \supset \mathbb{E}_d^{(2)} \supset \ldots \supset \mathbb{E}_d^{(d)}. \tag{2.1}$$

注意，对于任意 $1 \le i \le d$，集合 $\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}_+^d : \ y_{(i)} = 0\} \subseteq \mathbb{R}_+^d$ 是 $\mathbb{R}_+^d$ 中包含 $\mathbf{0}$ 的闭锥。此外，对于我们特别关注的形如 A （如（1.2））的集合，有$A \subset \mathbb{E}_d^{(i)}$。

定义 2.4. 设 $i \in \mathbb{I}$。如果存在正则变异函数 $b_i \in \mathcal{RV}_{1/\alpha_i}$、 $\alpha_i > 0$，以及一个在远离 $\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}_+^d : \ y_{(i)} = 0\}$ 的有界博雷尔集上有限的非零（博雷尔）测度 μ_i，使得随机向量 $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^d$ 在 $\mathbb{E}_d^{(i)}$ 上是多元正则变异的，则称其为

$$\lim_{t\to\infty} t\,\mathbb{P}\left(\frac{\boldsymbol{Y}}{b_i(t)} \in A\right) = \mu_i(A)$$

对于所有博雷尔集 $A \in \mathcal{B}(\mathbb{E}_d^{(i)})$ ，若其远离 $\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}_+^d : \ y_{(i)} = 0\}$ 且$\mu_i(\partial A) = 0$。我们记为 $\boldsymbol{Y} \in \mathcal{MRV}(\alpha_i, \ b_i, \ \mu_i, \ \mathbb{E}_d^{(i)})$；为方便起见，通常会省略一个或多个参数。

极限测度 μ_i 是 $-\alpha_i$ 阶齐次的，即对于任意$\lambda > 0$，都有 $\mu_i(\lambda A) = \lambda^{-\alpha_i}\mu_i(A)$。

注 2.5。此处采用的收敛类型是测度的 $\mathbb{M}$-收敛。可以在更一般的背景下讨论子锥$\mathbb{R}_+^d \setminus \mathbb{C}_0$ 上的多元正则变差，其中 $\mathbb{C}_0$ 是包含$\mathbf{0}$的闭锥。多元正则变差在$\mathbb{E}_d^{(i)}$ 上只是一个特殊例子。更多细节见 [8, 9, 24, 31]。

若 $\boldsymbol{Y} \in \mathcal{MRV}(\alpha_i, \ b_i, \ \mu_i, \ \mathbb{E}_d^{(i)})$， $\forall i \in \mathbb{I}$，则由式（2.1）可直接得出

$$\alpha_1 \le \alpha_2 \le \ldots \le \alpha_d \tag{2.2}$$

这意味着，适当尾部集合 $tA \subset \mathbb{E}_d^{(i)}$ 上的概率衰减速度不及当 $t \to \infty$ 时尾部集合 $tB \subset \mathbb{E}_d^{(i+1)}$ 上的衰减速度。DAS 和 FASEN-HARTMANN [8, 的命题 2.7]给出了正则变差在 $\mathbb{E}_d^{(i)}$ 上的另一种非常实用的刻画。

引理 2.6. 设 $\boldsymbol{Y}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个随机向量，并固定 $i \in \mathbb{I}$。假设 $\alpha_i > 0$、 $b_i \in \mathcal{RV}_{1/\alpha_i}$ 是可测函数，且 μ_i 是 $\mathcal{B}(\mathbb{E}_d^{(i)})$ 上的一个非零（博雷尔）测度，该测度在远离 $\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}_+^d : y_{(i)} = 0\}$ 的有界博雷尔集上是有限的。那么 $\boldsymbol{Y} \in \mathcal{MRV}(\alpha_i, \ b_i, \ \mu_i, \ \mathbb{E}_d^{(i)})$ 当且仅当

$$\lim_{t\to\infty} t\,\mathbb{P}\left(\frac{\boldsymbol{Y}}{b_i(t)} \in A_{\boldsymbol{x}_S}\right) = \mu_i(A_{\boldsymbol{x}_S})$$

对所有满足 $|S| \ge i$ 的集合 $S \subseteq \mathbb{I}$，以及所有满足 $\boldsymbol{x}_S =$ 的 $x_s > 0\ \forall s \in S$ $(x_s)_{s\in S}$，并且

$$A_{\boldsymbol{x}_S} = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}_+^d : y_s > x_s, \forall s \in S\} \tag{2.3}$$

满足 $\mu_i(\partial A_{\boldsymbol{x}_S}) = 0$。

上述定义的集合 $A_{\boldsymbol{x}_S}$ 通常称为矩形集。当然， $A_{\boldsymbol{x}_S} \in \mathcal{B}(\mathbb{E}_d^{(j)})$ 对于 $j = 1, \ldots, |S|$。

注记 2.7。
(a)如果 $\boldsymbol{Y} \in \mathcal{MRV}(\alpha_i, b_i, \mu_i, \mathbb{E}_d^{(i)})$ 对于 $i = 1, \ldots, d$ 并且 $\mu_{|S|}(A_{\boldsymbol{x}_S}) > 0$，则我们能够将概率近似为 $t \to \infty$

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{Y} \in tA_{\boldsymbol{x}_S}) \sim \frac{1}{b_{|S|}^{\leftarrow}(t)} \mu_{|S|}(A_{\boldsymbol{x}_S}),$$

其中 $b_{|S|}^{\leftarrow}(t) =$ 下确界$\{s \geq 0 : \quad b_{|S|}(s) \geq t\} \in \mathcal{RV}_{\alpha_{|S|}}$；参见 [2]。因此，若 $\alpha_i < \alpha_j$ 对某个 $1 \leq i < j \leq d$成立，则对于 S_1， $S_2 \subseteq \mathbb{I}$其中 $|S_1| = i$ 且 $|S_2| = j$，并且 $\mu_i(A_{\boldsymbol{x}_{S_1}}) > 0$， $\mu_j(A_{\boldsymbol{x}_{S_2}}) > 0$，我们有

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\mathbb{P}(\boldsymbol{Y} \in tA_{\boldsymbol{x}_{S_2}})}{\mathbb{P}(\boldsymbol{Y} \in tA_{\boldsymbol{x}_{S_1}})} = 0.$$

这意味着， $\mathbb{E}_d^{(i)}$ 中的集合与 $\mathbb{E}_d^{(j)}$ 中的集合，其概率衰减速率不同。

(b) 具有多元正则变差的优势在于 $\mathbb{E}_d^{(i)}$，我们不仅能估计矩形集$tA_{\boldsymbol{x}_S}$ 的尾概率，其中 $|S| \geq i$ 为 $t \to \infty$，实际上还能估计任意远离$\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}_+^d$ 的博雷尔集的尾概率：$y_{(i)} = 0\}$ 这些集合是 μ_i 连续集，例如，考虑以下集合

$$B_{\boldsymbol{x},i} = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}_+^d : y_j > x_j \text{ for at least } i \text{ components of } \boldsymbol{x}\}, \tag{2.4}$$

其中 $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d) > \boldsymbol{0}$ 且 $i \in \mathbb{I}$。注意，$B_{\boldsymbol{x},i} \in \mathcal{B}(\mathbb{E}_d^{(i)})$ 以及$B_{\boldsymbol{x},i}$ 不是矩形集。一个特殊情形是$B_{\boldsymbol{1},i} = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}_+^d : \quad y_{(i)} > 1\}$。

2.2. 多元正态分布的尾部行为。 本节刻画具有标准正态边缘分布、相关矩阵为 Σ 的多元正态随机变量 $\boldsymbol{Z}$ 的尾概率。要推导 $\mathbb{P}(\boldsymbol{X} \in tA_{\boldsymbol{x}_S})$ 在 $t \to \infty$时的尾概率近似，需要这一渐近行为，其中 $\boldsymbol{X} \in \text{RVGC}(\alpha, b, \Sigma)$。直接应用 Savage [41] 的多元 Mills 比率来近似高斯尾部集合时，要求高斯随机向量的相关矩阵 Σ 满足 $\Sigma^{-1}\boldsymbol{1} > \boldsymbol{0}$。Savage 结果的推广允许在 $\Sigma^{-1}\boldsymbol{1} > \boldsymbol{0}$ 不成立时，对 $\boldsymbol{t}$较大的情形下的 $\mathbb{P}(\boldsymbol{Z} > \boldsymbol{t})$ 进行近似；详情见 [14, 18, 20, 41, 43] 。我们的结果基于 Hashorva [18, 定理 3.4]中的思路。首先，我们陈述一个关于二次规划问题解的辅助结果。这为我们介绍高斯随机向量尾部集合的概率结果奠定了所需的记号和背景。

引理 2.8. 设 $\Sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$ 为正定相关矩阵。则二次规划问题

$$\mathcal{P}_{\Sigma^{-1}} : \min_{\{\boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{1}\}} \boldsymbol{z}^\top \Sigma^{-1} \boldsymbol{z} \tag{2.5}$$

具有唯一解 $\boldsymbol{e}^* = \boldsymbol{e}^*(\Sigma) \in \mathbb{R}^d$ 使得

$$\gamma := \gamma(\Sigma) := \min_{\{\boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{1}\}} \boldsymbol{z}^\top \Sigma^{-1} \boldsymbol{z} = \boldsymbol{e}^{*\top} \Sigma^{-1} \boldsymbol{e}^* > 1. \tag{2.6}$$

此外，以下结论成立：
(a) 若 $\Sigma^{-1}\boldsymbol{1} \geq \boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{e}^* = \boldsymbol{1}$.

(b) 存在唯一的非空指标集 $I := I(\Sigma) \subseteq \{1,\dots,d\} =: \mathbb{I}$，满足 $J := J(\Sigma) := \mathbb{I} \setminus I$，使得唯一解 e^* 由下式给出

$$e^*_I = \mathbf{1}_I, \qquad \textit{and} \qquad e^*_J = -[\Sigma^{-1}]^{-1}_{JJ}[\Sigma^{-1}]_{JI}\mathbf{1}_I = \Sigma_{JI}(\Sigma_I)^{-1}\mathbf{1}_I \geq \mathbf{1}_J,$$

而且，

$$\mathbf{1}_I\Sigma_I^{-1}\mathbf{1}_I = e^{*\top}\Sigma^{-1}e^* = \gamma > 1.$$

最后，$h_i := h_i(\Sigma) := e_i^\top \Sigma_I^{-1}\mathbf{1}_I > 0$ 对于 $i \in I$ 以及对于任意 $z \in \mathbb{R}^d$，以下等式成立：

$$z^\top \Sigma^{-1} e^* = z_I^\top \Sigma_I^{-1}\mathbf{1}_I.$$

引理2.8 取自 Hashorva [18, 命题 2.1] 以及 Hashorva 和 Hüsler [19,命题 2.5 和推论 2.7]。注意，若 $\Sigma^{-1}\mathbf{1} \geq \mathbf{0}$ 则 $|I| \geq 2$ 但不一定有 $|I| = d$。在下一个命题中（该命题与第 3 节的主要结果有关），引理 2.8 用于确定正态随机向量 Z 在某种特定递增阈值下的尾概率。

命题 2.9. 设 $Z \sim \Phi_\Sigma$ 为 $\mathbb{R}^d$ 中的正态随机向量，$d \geq 2$，其相关矩阵 $\Sigma \in \mathbb{R}^{d\times d}$ 为正定。定义以下量：
*(a)*参数 $\gamma = \gamma(\Sigma)$ $I = I(\Sigma)$、$e^* = e^*(\Sigma)$ 和 $h_i = h_i(\Sigma)$、$i \in I$ 是相对于二次规划问题 $\mathcal{P}_{\Sigma^{-1}}$ 的解定义的，如引理 *2.8* 所示。*(b)* 令 $J := \mathbb{I} \setminus I$。如果 $J \neq \emptyset$，定义 $Y_J \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}_J, \Sigma_J - \Sigma_{JI}\Sigma_I^{-1}\Sigma_{IJ})$；如果 $J = \emptyset$，则定义 $Y_J = \mathbf{0}$。*(c)* 定义 $l_\infty := \lim_{t\to\infty} t(\mathbf{1}_J - e^*_J)$，这是 $\mathbb{R}^{|I|}$ 中的一个向量，其分量或者为 *0*，或者为 $-\infty$。
设 $z \in \mathbb{R}^d$和 $\mathcal{L}, u : (0,\infty) \to (0,\infty)$ 为可测函数，使得 $u(t) \uparrow \infty$ 且$\log(\mathcal{L}(t))/u(t) \to 0$，当 $t \to \infty$。于是当 $t \to \infty$，

$$\mathbb{P}\left(Z > u(t)\mathbf{1} + \frac{z}{u(t)} + \frac{\log(\mathcal{L}(t))}{u(t)}\mathbf{1} + o\left(\frac{1}{u(t)}\right)\right)$$
$$= (1+o(1))\Upsilon u(t)^{-|I|}(\mathcal{L}(t))^{-\gamma}\exp\left(-\gamma\frac{u(t)^2}{2} - z^\top\Sigma^{-1}e^*\right),$$

其中

$$\Upsilon := \Upsilon(\Sigma) := \frac{\mathbb{P}(Y_J \geq l_\infty)}{(2\pi)^{|I|/2}|\Sigma_I|^{1/2}\prod_{i\in I} h_i}.$$

证明。根据Hashorva [18, 推论 3.3] 我们知道，对于 $x \in \mathbb{R}^d$，当 $t \to \infty$，

$$\mathbb{P}(Z > u(t)\mathbf{1} + x) = (1+o(1))\frac{\mathbb{P}(Y_J > l_\infty + x_J - \Sigma_{JI}\Sigma_I^{-1}x_I)}{(2\pi)^{|I|/2}|\Sigma_I|^{1/2}\prod_{i\in I} h_i}$$
$$\times u(t)^{-|I|}\exp\left(-\gamma\frac{u(t)^2}{2} - u(t)x^\top\Sigma^{-1}e^* - x^\top\Sigma^{-1}x\right).$$

定义 $x^{(t)} := \frac{z}{u(t)} + \frac{\log(\mathcal{L}(t))}{u(t)}\mathbf{1} + o\left(\frac{1}{u(t)}\right)$。因此，$\lim_{t\to\infty} x^{(t)} = \mathbf{0}$且有 $e^*_J \geq \mathbf{1}_J$由引理 2.8。因此，

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left(Y_J \geq u(t)(\mathbf{1}_J - e^*_J) + x_J^{(t)} - \Sigma_{JI}\Sigma_I^{-1}x_I^{(t)}\right) = \mathbb{P}(Y_J \geq l_\infty).$$

遵循 Hashorva 中定理 3.1 和推论 3.3 的证明所采用的类似论证[18],我们可以将 $\boldsymbol{x}$ 替换为 $\boldsymbol{x}^{(t)}$，并将 $\mathbb{P}(Y_J > \ell_\infty + \boldsymbol{x}_J - \Sigma_{JI}\Sigma_I^{-1}\boldsymbol{x}_I)$ 替换为 $\mathbb{P}(Y_J \geq \boldsymbol{l}_\infty)$ 以获得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\boldsymbol{Z} > u(t)\mathbf{1} + \frac{\boldsymbol{z}}{u(t)} + \frac{\log(\mathcal{L}(t))}{u(t)}\mathbf{1} + o\left(\frac{1}{u(t)}\right)\right) \\
&\qquad = \mathbb{P}\left(\boldsymbol{Z} > u(t)\mathbf{1} + \boldsymbol{x}^{(t)}\right) \\
&\qquad = (1+o(1))\Upsilon u(t)^{-|I|}\exp\left(-\gamma\frac{u(t)^2}{2} - u(t)\boldsymbol{x}^{(t)\top}\Sigma^{-1}\boldsymbol{e}^* - \boldsymbol{x}^{(t)\top}\Sigma^{-1}\boldsymbol{x}^{(t)}\right)
\end{aligned}$$

并且由于 $\boldsymbol{x}^{(t)} \to \mathbf{0}$ 和 $u(t)\boldsymbol{x}^{(t)} \sim \boldsymbol{z} + \log(\mathcal{L}(t))\mathbf{1}$ 当 $t \to \infty$ 时，我们得到上述结果为

$$\begin{aligned}
&= (1+o(1))\Upsilon u(t)^{-|I|}\exp\left(-\gamma\frac{u(t)^2}{2} - \boldsymbol{z}^\top\Sigma^{-1}\boldsymbol{e}^* - \log\mathcal{L}(t)\cdot\mathbf{1}^\top\Sigma^{-1}\boldsymbol{e}^*\right) \\
&= (1+o(1))\Upsilon u(t)^{-|I|}(\mathcal{L}(t))^{-\gamma}\exp\left(-\gamma\frac{u(t)^2}{2} - \boldsymbol{z}^\top\Sigma^{-1}\boldsymbol{e}^*\right),
\end{aligned}$$

其中，在最后一步中我们使用了 $\mathbf{1}^\top\Sigma^{-1}\boldsymbol{e}^* = \mathbf{1}_I\Sigma_I^{-1}\mathbf{1}_I = \gamma$ 引理 2.8中的结果。 □

3. 具有高斯 copula 的多元正则变差。 本节中，我们展示 $\boldsymbol{X} \in \mathrm{RVGC}(\alpha, b, \Sigma)$ 在不同子锥 $\mathbb{E}_d^{(i)} \subset \mathbb{R}_+^d$上的多元正则变差。我们首先计算此类随机向量 $\boldsymbol{X}$ 落入矩形集的概率。这在实践中尤其有用，因为许多尾部风险集合本质上是矩形的。关于 $\boldsymbol{X}$ 的多元正则变差的最终结果，使我们能够将这一结论推广到更一般的尾部集合。

定理 *3.1*。设 $\boldsymbol{X} \sim F$满足 $\boldsymbol{X} \in RVGC(\alpha, b, \Sigma)$，其中 Σ为正定。固定γ_S个非空集合 $S \subseteq \mathbb{I} = \{1, \ldots, d\}$，满足 $|S| \geq 2$，并令$\boldsymbol{e}^*$ Σ_S $\Upsilon_S = \Upsilon$ Σ_S $h_s^S = h_s$ Σ_S $s \in I_S$ 2 9 : (Σ_S), $I_S := I(\Sigma_S)$, e_S^*: ( ), : ( ) 和 : ( ) 按命题 中的定义（以及引理 *2.8* 中的定义）。令

$$A_{\boldsymbol{x}_S} = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}_+^d : y_s > x_s, \forall s \in S\} \tag{3.1}$$

对于 $\boldsymbol{x}_S = (x_s)_{s\in S}$，其中 $x_s > 0, \forall s \in S$ 为一个矩形集合。若 $\log(\ell(t)) = o(\sqrt{\log}(t))$ $ast \to \infty$，其中 $F_1(t) = (t^\alpha \ell(t))^{-1}$，则当 $t \to \infty$ 时，

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{X} \in tA_{\boldsymbol{x}_S}) = (1+o(1))\Upsilon_S(2\pi)^{\frac{\gamma_S}{2}}(2\alpha\log(t))^{\frac{\gamma_S - |I_S|}{2}}(b^{\leftarrow}(t))^{-\gamma_S}\prod_{s\in I_S} x_s^{-\alpha h_s^S}. \tag{3.2}$$

备注 3.2. 任何具有 $F_1 \in \mathcal{RV}_{-\alpha}$ 的分布 F_1 都可表示为 $F_1(t) = (t^\alpha \ell(t))^{-1}$，其中 $\ell \in \mathcal{RV}_0$。然而，对于我们的结果，我们还需要额外的假设$\log(\ell(t)) = o(\sqrt{\log(t)})$，当 $t \to \infty$ 时成立。幸运的是，许多正则变差分布都满足这一性质，特别是当 $\ell(t) \sim c$ 对某个常数 $c > 0$ 成立时，例如帕累托分布、Burr 分布、莱维分布、Student's t 和弗雷歇分布（参见 [15, 35]）。

定理的证明 3.1 需要建立正则变分布的分位数与正态分布分位数之间的关系，下面将推导这一关系。

引理 3.3. 设 F_α 为分布函数，满足 $F_\alpha(t) = (t^\alpha \ell(t))^{-1}$ 其中 $\ell \in \mathcal{RV}_0$对某个 $\alpha > 0$ 成立。假设 F_α 严格递增且连续。固定 $x > 0$，并对任意 $t > 0$定义

$$z_x(t) = \Phi^{-1}(F_\alpha(tx)) = \overline{\Phi}^{-1}(\overline{F}_\alpha(tx)).$$

然后，作为 $t \to \infty$,

$$z_x(t) = \sqrt{2\alpha \log(t)} + \frac{1}{\sqrt{2\alpha \log(t)}} \log\left(\frac{\ell(t)}{\sqrt{\log(t)}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2\alpha \log(t)}} \log\left(\frac{x^\alpha}{2\sqrt{\pi\alpha}}\right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{\log(t)}}\right).$$

证明。根据正态分位数近似（参见 de Haan 和 Ferreira [10, 第61页，例2。9], Embrechts、Klüppelberg 和 Mikosch [15, 第 145]），我们有 $t \to \infty$,

$$\overline{\Phi}^{-1}(t^{-1}) = \Phi^{-1}(1 - t^{-1}) = \sqrt{2\log(t)} - \frac{\log(\log(t)) + \log(4\pi)}{2\sqrt{2\log t}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\log(t)}}\right).$$

利用表示式 $F_\alpha(t) = {}^{1}_{t^\alpha \ell(t)}$，其中某个缓慢变化函数为 ℓ，我们得到

$$\begin{aligned} z_x(t) &= \overline{\Phi}^{-1}\left([(tx)^\alpha \ell(tx)]^{-1}\right) \\ &= \sqrt{2\alpha\log(tx) + 2\log(\ell(tx))} - \frac{\log(\log(tx(\ell(tx)^{1/\alpha}))) + \log(\alpha) + \log(4\pi)}{2\sqrt{2\alpha\log(tx) + 2\log(\ell(tx))}} \\ &\quad + o\left(\frac{1}{\sqrt{2\alpha\log(tx) + 2\log(\ell(tx))}}\right) \\ &=: A_t - B_t + C_t \quad \text{(say)}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

泰勒级数展开给出

$$\begin{aligned} A_t &= \sqrt{2\alpha\log(t)}\left(1 + \frac{\log(x) + \frac{1}{\alpha}\log(\ell(tx))}{\log(t)}\right)^{1/2} \\ &= \sqrt{2\alpha\log(t)}\left[1 + \frac{1}{2}\frac{\log(x)}{\log(t)} + \frac{1}{2\alpha}\frac{\log(\ell(tx))}{\log(t)} + o\left(\frac{1}{\log(t)}\right)\right] \\ &= \sqrt{2\alpha\log(t)} + \frac{\log(x^\alpha)}{\sqrt{2\alpha\log(t)}} + \frac{\log(\ell(t))}{\sqrt{2\alpha\log(t)}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\log(t)}}\right). \end{aligned}$$

注意，在最后一步中我们使用了 $\ell \in \mathcal{RV}_0$，因此，$\log(\ell(xt)) = \log(\ell(x)) + o(1)$ 作为 $t \to \infty$。类似地，根据泰勒级数展开，我们有

$$\begin{aligned} B_t &= \frac{\log(\log(t))}{2\sqrt{2\alpha\log t}} + \frac{\log(4\pi\alpha)}{2\sqrt{2\alpha\log t}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\log(t)}}\right) \\ &= \frac{\log(\sqrt{\log(t)})}{\sqrt{2\alpha\log t}} + \frac{\log(2\sqrt{\pi\alpha})}{\sqrt{2\alpha\log t}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\log(t)}}\right). \end{aligned}$$

显然 $C_t = o((\log(t))^{-1/2})$ 因为 $t \to \infty$。因此，结合 A_t、B_t、C_t 和（3.3）即可得到结果。□

证明定理 3.1。对于 $A_{\boldsymbol{x}_S}$，如定义于（3.1）中，我们有

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{X} \in tA_{\boldsymbol{x}_S}) = \mathbb{P}(X_s > tx_s, \forall s \in S) = \mathbb{P}\left(Z_s > z_{x_s}(t), \forall s \in S\right),$$

其中 $z_{x_s}(t) = \overline{\Phi}^{-1}(F_s(tx_s))$，$s \in S$，且 $\boldsymbol{Z}_S = (Z_s)_{s\in S} \sim \Phi_{\Sigma_S}$。根据尾等价，我们有 $F_s(t) \sim F_1(t) = (t^\alpha \ell(t))^{-1}$。定义 $\boldsymbol{z}_S := (\log(x_s^\alpha/2\sqrt{\pi\alpha}))_{s\in S}$并应用引理 3.3，可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\boldsymbol{X} \in tA_{\boldsymbol{x}_S}) \\
&= \mathbb{P}\left(\boldsymbol{Z}_S > \sqrt{2\alpha\log(t)}\mathbf{1} + \frac{\boldsymbol{z}_S}{\sqrt{2\alpha\log(t)}} + \frac{\log\left(\frac{\ell(t)}{\sqrt{\log(t)}}\right)}{\sqrt{2\alpha\log(t)}}\mathbf{1} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\log(t)}}\right)\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\boldsymbol{Z}_S > u(t)\mathbf{1} + \frac{\boldsymbol{z}_S}{u(t)} + \frac{\log(\mathcal{L}(t))}{u(t)}\mathbf{1} + o\left(\frac{1}{u(t)}\right)\right), \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

其中 $u(t) = \sqrt{2\alpha\log(t)}$，且 $\mathcal{L}(t) = \ell(t)\sqrt{\log(t)}$。由于根据假设，当 $t\to\infty$ 时，$\log(\ell(t)) = o(\sqrt{\log(t)})$，我们有 $\lim_{t\to\infty}\log(\mathcal{L}(t))/u(t) = 0$。利用命题 2.9 和 $h_s^S = e_s^\top \Sigma_S^{-1}\boldsymbol{e}_S^*, s \in S$，当 $t\to\infty$ 时可得，

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\boldsymbol{X} \in tA_{\boldsymbol{x}_S}) &= (1+o(1))\Upsilon_S(\sqrt{2\alpha\log(t)})^{-|I_S|}(\mathcal{L}(t))^{-\gamma_S}\exp\left(-\gamma_S\alpha\log(t) - \boldsymbol{z}_S^\top\Sigma_S^{-1}e_S^*\right) \\
&= (1+o(1))\Upsilon_S(2\alpha)^{-\frac{|I_S|}{2}}(\log(t))^{\frac{\gamma_S-|I_S|}{2}}(\ell(t))^{-\gamma_S} \\
&\qquad \times t^{-\alpha\gamma_S}\prod_{s\in I_S}\exp\left(-h_s^S\log\left(\frac{x_s^\alpha}{2\sqrt{\pi\alpha}}\right)\right) \\
&= (1+o(1))\Upsilon_S(2\alpha)^{-\frac{|I_S|}{2}}(\log(t))^{\frac{\gamma_S-|I_S|}{2}}(\ell(t)t^\alpha)^{-\gamma_S}(2\sqrt{\pi\alpha})^{\gamma_S}\prod_{s\in I_S}x_s^{-\alpha h_s^S} \\
&= (1+o(1))\Upsilon_S(2\pi)^{\frac{\gamma_S}{2}}(2\alpha\log(t))^{\frac{\gamma_S-|I_S|}{2}}(b^{\leftarrow}(t))^{-\gamma_S}\prod_{s\in I_S}x_s^{-\alpha h_s^S},
\end{aligned}$$

其中，在倒数第二个等式中，我们用到了 $\sum_{s\in I_S}h_s^S = \mathbf{1}_{I_S}^\top\Sigma_{I_S}^{-1}\mathbf{1}_{I_S} = \gamma_S$ 这是由引理 2.8得出的。 □

现在，我们可以给出本文的主定理，该定理刻画了 $\boldsymbol{X} \in \mathrm{RVGC}(\alpha, b, \Sigma)$ 在子空间 $\mathbb{E}_d^{(i)}$，$i = 1, \ldots\ldots, d$上的正则变差。

定理 3.4。设 $\boldsymbol{X} \sim F$满足 $\boldsymbol{X} \in RVGC(\alpha, b, \Sigma)$，其中 Σ为正定。假设当 $t\to\infty$ 时，$\log(\ell(t)) = o(\sqrt{\log(t)})$，且 $F_1(t) = (t^\alpha\ell(t))^{-1}$。对于任意非空集合$S \subseteq \mathbb{I} = \{1, \ldots, d\}$，令 $\gamma_S := \gamma(\Sigma_S)$、$I_S := I(\Sigma_S)$、$\boldsymbol{e}_S^* := \boldsymbol{e}^*(\Sigma_S)$、$\Upsilon_S := \Upsilon(\Sigma_S)$ 和 $h_s^S := h_s(\Sigma_S)$ $s \in I_S$如命题 2.9（及引理 2.8）中所定义。

(a) 令 $i = 1$。则 $\boldsymbol{X} \in \mathcal{MRV}(\alpha, b, \mu_1, \mathbb{E}_d^{(1)})$ 与

$$\mu_1([\mathbf{0}, \boldsymbol{x}]^c) = \sum_{j=1}^d x_j^{-\alpha}, \qquad \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^d.$$

(b) 令 $2 \le i \le d$。定义

$$\mathcal{S}_i := \left\{ S \subseteq \mathbb{I} : \ |S| \ge i, \mathbf{1}_{I_S} \Sigma_{I_S}^{-1} \mathbf{1}_{I_S} = \min_{\widetilde{S} \subseteq \mathbb{I}, |\widetilde{S}| \ge i} \mathbf{1}_{I_{\widetilde{S}}} \Sigma_{I_{\widetilde{S}}}^{-1} \mathbf{1}_{I_{\widetilde{S}}} \right\},$$

$$I_i := \arg\min_{S \in \mathcal{S}_i} |I_S|,$$

其中 I_i 不一定是唯一的。则 $\boldsymbol{X} \in \mathcal{MRV}(\alpha_i, b_i, \mu_i, \mathbb{E}_d^{(i)})$ 其中

$$\gamma_i = \gamma(\Sigma_{I_i}) = \mathbf{1}_{I_i}^\top \Sigma_{I_i}^{-1} \mathbf{1}_{I_i} = \min_{S \subseteq \mathbb{I}, |S| \ge i} \min_{\boldsymbol{x}_S \ge \mathbf{1}_S} \boldsymbol{x}_S^\top \Sigma_S^{-1} \boldsymbol{x}_S,$$

$$\alpha_i = \alpha \gamma_i,$$

$$b_i^{\leftarrow}(t) = (2\pi)^{-\frac{\gamma_i}{2}} (2\alpha \log(t))^{\frac{|I_i| - \gamma_i}{2}} (b^{\leftarrow}(t))^{\gamma_i},$$

且对于集合 $A_{\boldsymbol{x}_S} = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}_+^d : \ y_s > x_s, \ \forall s \in S\}$，其中 $x_s > 0, \ \forall s \in S \subseteq \mathbb{I}$ 且 $|S| \ge i$，我们有

$$\mu_i(A_{\boldsymbol{x}_S}) = \begin{cases} \Upsilon_S \prod_{s \in I_S} x_s^{-\alpha h_s^S} & \text{if } S \in \mathcal{S}_i \text{ and } |I_S| = |I_i|, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{3.5}$$

证明。

(a) 对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^d$，集合 $A = [\mathbf{0}, \boldsymbol{x}]^c$ 满足 $\mu_1(\partial A) = 0$，其中 μ_1 如上。根据容斥原理，

$$t\,\mathbb{P}\left(\frac{\boldsymbol{X}}{b(t)} \in [\mathbf{0}, \boldsymbol{x}]^c \right) \le \sum_{j=1}^d t\,\mathbb{P}(X_j > b(t) x_j) \overset{t \to \infty}{\longrightarrow} \sum_{j=1}^d x_j^{-\alpha}$$

根据定义。再次，根据容斥原理，

$$t\,\mathbb{P}\left(\frac{\boldsymbol{X}}{b(t)} \in [\mathbf{0}, \boldsymbol{x}]^c \right) \ge \sum_{j=1}^d t\,\mathbb{P}(X_j > b(t) x_j) - \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \ne k}}^d t\,\mathbb{P}(X_j > b(t) x_j, X_k > b(t) x_k)$$

$$\overset{t \to \infty}{\longrightarrow} \sum_{j=1}^d x_j^{-\alpha},$$

因为 $\mathbb{P}(X_j > b(t) x_j, X_k > b(t) x_k) = o(t)$ 对 $\rho_{jk} < 1$ 成立，其中 $\Sigma = ((\rho_{rs}))_{1 \le r, s \le d}$（参见 Hua、Joe 和 Li [23]）。因此，根据 Resnick [38, 引理 6.1] 或 Das 和 Fasen-Hartmann [8, 命题 2.7]，可得 $\boldsymbol{X} \in \mathcal{MRV}(\alpha, b, \mu_1, \mathbb{E}_d^{(1)})$。

(b) 设 $i \in \{2, \dots, d\}$。根据引理 2.6，只需证明

$$\lim_{t \to \infty} t \mathbb{P}\left(\frac{\boldsymbol{X}}{b_i(t)} \in A_{\boldsymbol{x}_S} \right) = \lim_{t \to \infty} b_i^{\leftarrow}(t) \mathbb{P}\left(\boldsymbol{X} \in t A_{\boldsymbol{x}_S} \right) = \mu_i(A_{\boldsymbol{x}_S}) \tag{3.6}$$

对于任意（矩形）集合 $A_{\boldsymbol{x}_S} = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}_+^d : \ y_s > x_s, \ \forall s \in S\}$ 其中 $S \subseteq \mathbb{I}, \ |S| \ge i$ 且 $x_s > 0$, $\forall s \in S$ 以及 $\mu_i(\partial A_{\boldsymbol{x}_S}) = 0$。

现在假设 $A_{\boldsymbol{x}_S}$ 是这样一个矩形集合。根据上文对 μ_i 的定义，对于任意这样的集合 $A_{\boldsymbol{x}_S}$，有 $\mu_i(\partial A_{\boldsymbol{x}_S}) = 0$。根据定理 3.1，可得

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{X} \in t A_{\boldsymbol{x}_S}) = (1 + o(1)) \Upsilon_S (2\pi)^{\frac{\gamma_S}{2}} (2\alpha \log(t))^{\frac{\gamma_S - |I_S|}{2}} (b^{\leftarrow}(t))^{-\gamma_S} \prod_{s \in I_S} x_s^{-\alpha h_s^S}.$$

此外，根据定义 $\gamma_i = \gamma_I$ $_i \le \gamma_S$ 对于任意满足 $|S| \ge i$ 的 $S \subseteq \mathbb{I}$。
情形 1：假设 $S \notin \mathcal{S}_i$。那么 $\gamma_i < \gamma_S$ 和 $\alpha_i = \alpha\gamma_i < \alpha\gamma_S$。因此，函数$g(t) := b_i^{\leftarrow}(t)\mathbb{P}(\boldsymbol{X} \in tA_{\boldsymbol{x}_S}) \in \mathcal{RV}_{\alpha_i - \alpha\gamma_S}$ 收敛到 0，并且我们有

$$\lim_{t\to\infty} b_i^{\leftarrow}(t)\mathbb{P}(\boldsymbol{X} \in tA_{\boldsymbol{x}_S}) = 0. \tag{3.7}$$

情形 2：假设 $S \in \mathcal{S}_i$ 和 $|I_S| > |I_i|$。那么 $\alpha_i = \alpha\gamma_S$ 也成立。尽管 $g \in \mathcal{RV}_0$ 我们有$g(t) \sim C(2\alpha\log(t))^{\frac{|I_i|-|I_S|}{2}}$，当 $t\to\infty$ 时成立，因此，（3.7）再次成立。情形 3：假设 $S \in \mathcal{S}_i$ 和 $|I_S| = |I_i|$。那么 $\alpha_i = \alpha\gamma_S$，因此，

$$\lim_{t\to\infty} b_i^{\leftarrow}(t)\mathbb{P}(\boldsymbol{X} \in tA_{\boldsymbol{x}_S}) = \Upsilon_S \prod_{s\in I_S} x_s^{-\alpha h_s^S}.$$

因此，情形 1–3 表明，对于矩形集合 $A_{\boldsymbol{x}_S}$（其中 $|S| \ge i$ 且 $\mu_i(\partial A_{\boldsymbol{x}_S}) = 0$），（3.6）成立，从而证明了该结果。 □

注 3.5. 注意，即使我们有 $S_1, S_2 \in \mathcal{S}_i$，也未必意味着$|I_{S_1}| \ne |I_{S_2}|$。这会影响同一子空间 $\mathbb{E}_d^{(i)}$ 中不同尾部集合的概率近似。考虑 $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^6$，其中 $\boldsymbol{X} \in \text{RVGC}(\alpha, \Sigma)$ </style}满足

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0.6 & \sqrt{2}\times 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 1 & \sqrt{2}\times 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}\times 0.6 & \sqrt{2}\times 0.6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.7 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7 & 1 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0.7 & 1 \end{pmatrix}.$$

对于 $\mathbb{E}_6^{(3)}$ 上的正则变差，我们可以检验出 $\mathcal{S}_3 = \{\{1,2\},\{4,5,6\}\}$，其中 $\gamma_3 = 1.25$。但是 $|\{1,2\}| = 2$和 $|\{4,5,6\}| = 3$，因此，$I_3 = \{1,2\}$和 $\alpha_3 = \alpha\gamma_3$。有趣的是，对于固定的$x_1$、$x_2$、$x_3$、$x_4$、$x_5$、$x_6 > 0$，我们既有 $g_1(t) = \mathbb{P}(X_1 > tx_1$、$X_2 > tx_2$、$X_3 > tx_3) \in \mathcal{RV}_{-\alpha_3}$，又有 $g_2(t) = \mathbb{P}(X_4 > tx_4$、$X_5 > tx_5$、$X_6 > tx_6) \in \mathcal{RV}_{-\alpha_3}$，然而，

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{P}(X_4 > tx_4, X_5 > tx_5, X_6 > tx_6)}{\mathbb{P}(X_1 > tx_1, X_2 > tx_2, X_3 > tx_3)} = 0,$$

因为 g_1 和 g_2 具有不同的缓慢变化分量。

除了矩形集之外，定理 3.4 还可用于计算形如 $B_{\boldsymbol{x},\,i}$ 的集合的渐近概率，该集合定义见（2.4）。我们在以下推论中将其形式化。

推论 3.6. 设定理3.4 中的假设和记号成立。对于$\boldsymbol{x} = (x_1,\ldots,x_d) > \boldsymbol{0}$和 $i \in \mathbb{I}$，定义集合

$$B_{\boldsymbol{x},i} = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}_+^d : y_j > x_j \textit{ for at least } i \textit{ components of } \boldsymbol{x}\}.$$

然后当 $t\to\infty$ 时，

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{X} \in tB_{\boldsymbol{x},i}) = (1+o(1))(2\pi)^{\frac{\gamma_i}{2}}(2\alpha\log(t))^{\frac{\gamma_i-|I_i|}{2}}(b^{\leftarrow}(t))^{-\gamma_i}\mu_i(B_{\boldsymbol{x},i}).$$

如果 $\alpha_{i+1} > \alpha_i$ 那么

$$\mu_i(B_{\boldsymbol{x},i}) = \sum_{\substack{S\in\mathcal{S}_i, |S|=i \\ |I_S|=|I_i|}} \Upsilon_S \prod_{s\in I_S} x_s^{-\alpha h_s^S}.$$

证明。该结果由定理3.4和容斥原理得出。 □

3.1. 示例。 接下来，我们通过几个示例详细阐述这些结果。在这些示例中，我们假设所有两两相关性 $\rho_{jk} \in (-1,1)\ \forall j \neq k$，以避免变量对完全依赖。我们还采用定理 b_i (或更准确地说 $b_i^{\leftarrow}$) 中所述的选择方式，并不在示例中明确说明。3.4。

例 3.7。这里我们进一步探讨 $d=3$ 取一般矩阵 Σ 的情形，尽管若不对参数作出进一步假设，显式条件和公式并不总是可得。设 $\boldsymbol{X}=(X_1,\ X_2,\ X_3) \in \mathbb{R}_+^3$ 具有相同的帕累托(α)边际分布，且$\boldsymbol{X} \in \mathrm{RVGC}(\alpha,\ b,\ \Sigma)$ 满足 $b(t)=t^{\frac{1}{\alpha}}$，并且

$$\Sigma=\begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{12} & 1 & \rho_{23} \\ \rho_{13} & \rho_{23} & 1 \end{pmatrix},$$

其中 $\rho_{jk} \in (-1,\ 1)\ \forall j \neq k$ 且 $|\Sigma|=1-\rho_{12}^2-\rho_{13}^2-\rho_{23}^2+2\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23}>0$。由于 Σ 的一阶和二阶主子式均为正，$|\Sigma|>0$ 保证 Σ 正定。此外，

$$\Sigma^{-1}=\frac{1}{|\Sigma|}\begin{pmatrix} 1-\rho_{23}^2 & \rho_{13}\rho_{23}-\rho_{12} & \rho_{12}\rho_{23}-\rho_{13} \\ \rho_{13}\rho_{23}-\rho_{12} & 1-\rho_{13}^2 & \rho_{12}\rho_{13}-\rho_{23} \\ \rho_{12}\rho_{23}-\rho_{13} & \rho_{12}\rho_{13}-\rho_{23} & 1-\rho_{12}^2 \end{pmatrix}.$$

首先，令 $\Sigma^{-1}\mathbf{1}>\mathbf{0}$ 并定义 $\boldsymbol{h}=\Sigma^{-1}\mathbf{1}$。然后，根据定理 3.4，可得$\boldsymbol{X} \in \mathcal{MRV}(\alpha_i,\ b_i,\ \mu_i,\ \mathbb{E}_3^{(i)})\ i=1,\ 2、3,$ 其中

$$\alpha_1=\alpha, \qquad \alpha_2=\alpha\gamma_2=\min_{1\le j\neq k\le 3}\frac{2\alpha}{1+\rho_{jk}}=\frac{2\alpha}{1+\rho_*}, \qquad \alpha_3=\alpha\gamma_3=\alpha\mathbf{1}^\top\Sigma^{-1}\mathbf{1}.$$

对于 $\rho^*=\max_{j\neq k}(\rho_{jk})$ 和 $\gamma_2=\frac{2}{1+\rho_*}$，当 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)>\mathbf{0}$ 时，我们有

$$\mu_1(\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}_+^3:\ y_j>x_j\})=x_j^{-\alpha}, \quad 1\le j\le 3,$$

$$\mu_2(\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}_+^3: y_j>x_j, y_k>x_k\})=\begin{cases} \frac{(1+\rho_*)^{3/2}}{2\pi(1-\rho_*)^{1/2}}(x_jx_k)^{-\frac{\alpha}{1+\rho_*}} & \text{if } \rho_{jk}=\rho_*, \\ 0 & \text{if } \rho_{jk}\neq\rho_*, \end{cases} \quad 1\le j\neq k\le 3,$$

$$\mu_3(\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}_+^3: y_1>x_1, y_2>x_2, y_3>x_3\})=\frac{(h_1h_2h_3)^{-1}}{(2\pi)^{3/2}|\Sigma|^{1/2}}x_1^{-\alpha h_1}x_2^{-\alpha h_2}x_3^{-\alpha h_3}.$$

因此，当 t 较大时，我们有

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{X}\in tB_{\boldsymbol{x},1})=\mathbb{P}(\boldsymbol{X}\in t\,[\mathbf{0},\boldsymbol{x}]^c)\sim t^{-\alpha}(x_1^{-\alpha}+x_2^{-\alpha}+x_3^{-\alpha}),$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\boldsymbol{X}\in tB_{\boldsymbol{x},2}) &=\mathbb{P}(X_j>tx_j, X_k>tx_k \text{ 其中某个 } j\neq k) \\ &\sim(2\pi)^{-\frac{\rho^*}{1+\rho_*}}(2\alpha\log(t))^{-\frac{\rho_*}{1+\rho_*}}t^{-\frac{2\alpha}{1+\rho_*}}\frac{(1+\rho_*)^{3/2}}{(1-\rho_*)^{1/2}}\sum_{\substack{1\le j<k\le 3\\ \rho_{jk}=\rho_*}}(x_jx_k)^{-\frac{\alpha}{1+\rho_*}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\boldsymbol{X}\in tB_{\boldsymbol{x},\ 3}) &=\mathbb{P}(\boldsymbol{X}\in t(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\infty})) \\ &\sim(2\pi)^{\frac{\gamma_3-3}{2}}(2\alpha\log(t))^{\frac{\gamma_3-3}{2}}t^{-\alpha\gamma_3}\frac{(h_1h_2h_3)^{-1}}{|\Sigma|^{1/2}}x_1^{-\alpha h_1}x_2^{-\alpha h_2}x_3^{-\alpha h_3}.\end{aligned}$$

对于一般矩阵 Σ，寻找关于 $|\Sigma|>0$ 和 $\boldsymbol{h}=\Sigma^{-1}\mathbf{1}>\mathbf{0}$ 的规则较为繁琐。此外，并非所有 $h_j>0$ 的情形都需要特别关注。在此，我们重点讨论 ρ_{jk} 的几个特定选择，以详细说明这些问题。

(a) 假设 $\Sigma = \Sigma_\rho$，即 $\rho_{jk} = \rho$、$\forall\, j \neq k$。那么，Σ 的正定性要求 $|\Sigma| = (1-\rho)^2(1+2\rho) > 0$，从而得到 $-\frac{1}{2} < \rho < 1$。此外，对于任意 $\rho < 1$，我们有 $\boldsymbol{h} = \Sigma^{-1}\mathbf{1} > \mathbf{0}$。这里 $h_i = \frac{1}{1+2\rho}$、$i = 1$、2、3。利用定理 3.4，我们有 $\boldsymbol{X} \in \mathcal{MRV}(\alpha_i,\ b_i,\ \mu_i,\ \mathbb{E}_3^{(i)})$、$i = 1$、2、3，其中

$$\alpha_1 = \alpha, \qquad \alpha_2 = \frac{2\alpha}{1+\rho}, \qquad \alpha_3 = \frac{3\alpha}{1+2\rho},$$

且对于 $\boldsymbol{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3) > \mathbf{0}$,

$$\mu_1(\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}_+^3 : y_j > x_j\}) = x_j^{-\alpha}, \quad 1 \le j \le 3,$$

$$\mu_2(\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}_+^3 : y_j > x_j, y_k > x_k\}) = \frac{(1+\rho)^{3/2}}{2\pi(1-\rho)^{1/2}}(x_j x_k)^{-\frac{\alpha}{1+\rho}}, \quad 1 \le j \ne k \le 3,$$

$$\mu_3(\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}_+^3 : y_j > x_j \text{ for all } j \in \mathbb{I}\}) = \frac{(1+2\rho)^{5/2}}{(2\pi)^{3/2}(1-\rho)}(x_1x_2x_3)^{-\frac{\alpha}{1+2\rho}}.$$

(b) 假设 $\rho_{12} = \rho$，$\rho_{13} = \rho_{23} = \sqrt{2}\rho$ 且 $\sqrt{2}|\rho| < 1$。Σ 的正定性要求

$|\Sigma| = 1 - 5\rho^2 + 4\rho^3 = (1-\rho)(1+\rho-4\rho^2) = 4(1-\rho)\left(\rho - \frac{1-\sqrt{17}}{8}\right)\left(\frac{1+\sqrt{17}}{8} - \rho\right) > 0$ 这意味着 $\rho \in \left(\frac{1-\sqrt{17}}{8}, \frac{1+\sqrt{17}}{8}\right) \approx (-0.39,\ 0.64)$。假设此条件成立。

(i) 另外，令 $\rho < \frac{1}{2\sqrt{2}-1} \approx 0.55$，则 $\Sigma^{-1}\mathbf{1} > \mathbf{0}$ 和

$$h_1 = h_2 = \frac{1-\sqrt{2}\rho}{1+\rho-4\rho^2} \quad \text{and} \quad h_3 = \frac{1-(2\sqrt{2}-1)\rho}{1+\rho-4\rho^2}. \tag{3.8}$$

因此，对于 $\rho \in (\frac{1-\sqrt{17}}{8}, \frac{1}{2\sqrt{2}-1})$，定理 3.4 得出结论：$\boldsymbol{X} \in \mathcal{MRV}(\alpha_i,\ b_i,\ \mu_i,\ \mathbb{E}_3^{(i)})$，$i = 1,\ 2,\ 3$，其中

$$\alpha_1 = \alpha, \qquad \alpha_2 = \frac{2\alpha}{1+\sqrt{2}\rho}, \qquad \alpha_3 = \alpha\frac{3-(4\sqrt{2}-1)\rho}{1+\rho-4\rho^2},$$

且 μ_1 与(a)部分中的相同。对于 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) > \mathbf{0}$ 和 $1 \le j < k \le 3$，我们得到

$$\mu_2(\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}_+^3 : y_j > x_j,\, y_k > x_k\}) = \begin{cases} \frac{(1+\sqrt{2}\rho)^{3/2}}{2\pi(1-\sqrt{2}\rho)^{1/2}}(x_1x_3)^{-\frac{\alpha}{1+\sqrt{2}\rho}}, & (j,k) = (1,3), \\ \frac{(1+\sqrt{2}\rho)^{3/2}}{2\pi(1-\sqrt{2}\rho)^{1/2}}(x_2x_3)^{-\frac{\alpha}{1+\sqrt{2}\rho}}, & (j,k) = (2,3), \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

and,

$$\mu_3(\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}_+^3 :\ y_1 > x_1, y_2 > x_2, y_3 > x_3\}) = \frac{(1+\rho-4\rho^2)^{5/2}}{(2\pi)^{3/2}(1-\sqrt{2}\rho)^2(1-(2\sqrt{2}-1)\rho)\sqrt{1-\rho}} x_1^{-\alpha h_1} x_2^{-\alpha h_2} x_3^{-\alpha h_3}.$$

由于 $\mu_2(\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}_+^3 :\ \ y_1 > x_1,\ \ y_2 > x_2\}) = 0$，我们无法近似尾概率 $\mathbb{P}(X_1 > tx_1,\ X_2 > tx_2)$ 由此，但我们可以使用定理 3.1 得到$t \to \infty$,

$$\mathbb{P}(X_1 > tx_1, X_2 > tx_2) \sim (2\pi)^{-\frac{\rho}{1+\rho}}(2\alpha\log(t))^{-\frac{\rho}{1+\rho}} t^{-\frac{2\alpha}{1+\rho}} \frac{(1+\rho)^{3/2}}{(1-\rho)^{1/2}}(x_1x_2)^{-\frac{\alpha}{1+\rho}}.$$

(ii) 设 $\rho \geq \frac{1}{2\sqrt{2}-1}$。则 $(\Sigma^{-1}\mathbf{1})_3 \leq 0$，见 (3.8)。因此，利用 $\rho \in \left[\frac{1}{2\sqrt{2}-1}, \frac{1+\sqrt{17}}{8}\right)$，由定理 3.4，我们有 $\boldsymbol{X} \in \mathcal{MRV}(\alpha_i, b_i, \mu_i, \mathbb{E}_3^{(i)})$ $i=1,2,3$，其中

$$\alpha_1 = \alpha, \qquad \alpha_2 = \frac{2\alpha}{1+\sqrt{2}\rho}, \qquad \alpha_3 = \frac{2\alpha}{1+\rho},$$

和 μ_1, μ_2 与(b)(i)部分中的相同。然而，在(b)(i)部分以及所有先前 $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}_+^3$的例子中，我们有 $I_3 = \mathbb{I} = \{1,2,3\}$，因此有 $\gamma_3 = \mathbf{1}^\top \Sigma^{-1}\mathbf{1}$；而在本例中，$I_3 = \{1,2\}$，从而得到 $\gamma_3 = \mathbf{1}_{\{1,2\}}^\top \Sigma_{\{1,2\}}^{-1}\mathbf{1}_{\{1,2\}}$，因此在 $\mathbb{E}_3^{(3)}$ 上出现了不同的行为。此外，对于 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) > \mathbf{0}$，我们有

$$\mu_3(\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}_+^3 : y_j > x_j \text{ for all } j \in \mathbb{I}\}) = \frac{(1+\rho)^{3/2}}{4\pi(1-\rho)^{1/2}}(x_1x_2)^{-\frac{\alpha}{1+\rho}}.$$

概率 $\mathbb{P}(\boldsymbol{X} \in tB_{\boldsymbol{x},i})$ 也与前面的例子略有不同，因此我们在下面详细说明。对于 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) > \mathbf{0}$ 且 t 较大时，我们有

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\boldsymbol{X} \in tB_{\boldsymbol{x},1}) &= \mathbb{P}(\boldsymbol{X} \in t\,[\mathbf{0}, \boldsymbol{x}]^c) \sim t^{-\alpha}(x_1^{-\alpha} + x_2^{-\alpha} + x_3^{-\alpha}),\\
\mathbb{P}(\boldsymbol{X} \in tB_{\boldsymbol{x},2}) &\sim (2\pi)^{-\frac{\sqrt{2}\rho}{1+\sqrt{2}\rho}}(2\alpha\log(t))^{-\frac{\sqrt{2}\rho}{1+\sqrt{2}\rho}} t^{-\frac{2\alpha}{1+\sqrt{2}\rho}}\\
&\qquad \times \frac{(1+\sqrt{2}\rho)^{3/2}}{(1-\sqrt{2}\rho)^{1/2}}\left[(x_1x_3)^{-\frac{\alpha}{1+\sqrt{2}\rho}} + (x_2x_3)^{-\frac{\alpha}{1+\sqrt{2}\rho}}\right],\\
\mathbb{P}(\boldsymbol{X} \in tB_{\boldsymbol{x},3}) &= \mathbb{P}(\boldsymbol{X} \in t\,(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\infty}))\\
&\sim (2\pi)^{-\frac{\rho}{1+\rho}}(2\alpha\log(t))^{-\frac{\rho}{1+\rho}} t^{-\frac{2\alpha}{1+\rho}} \frac{(1+\rho)^{3/2}}{2(1-\rho)^{1/2}}(x_1x_2)^{-\frac{\alpha}{1+\rho}}.
\end{aligned}$$

利用定理 3.1，我们可以对 $\mathbb{P}(X_1 > tx_1,\ X_2 > tx_2)$给出一个非平凡估计：

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 > tx_1, X_2 > tx_2) &\sim (2\pi)^{-\frac{\rho}{1+\rho}}(2\alpha\log(t))^{-\frac{\rho}{1+\rho}} t^{-\frac{2\alpha}{1+\rho}} \frac{(1+\rho)^{3/2}}{(1-\rho)^{1/2}}(x_1x_2)^{-\frac{\alpha}{1+\rho}}\\
&\sim 2\mathbb{P}(\boldsymbol{X} \in t\,(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\infty})).
\end{aligned}$$

最后一个等价关系显然可由我们的计算得出；这里我们对这一行为给出一种解释。设 $\boldsymbol{X} = (F_\alpha^{\leftarrow}(\Phi(Z_1))\ F_\alpha^{\leftarrow}(\Phi(Z_2))\ F_\alpha^{\leftarrow}(\Phi(Z_3)))$ 其中$\boldsymbol{Z} \sim \Phi_\Sigma$，且 F_α 表示帕累托(α)分布。于是

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\boldsymbol{X} \in t\,(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\infty})\right) &= \mathbb{P}(X_3 > tx_3 | X_1 > tx_1, X_2 > tx_2)\mathbb{P}(X_1 > tx_1, X_2 > tx_2)\\
&= \mathbb{P}(F_\alpha^{\leftarrow}(\Phi(Z_3)) > tx_3 | X_1 > tx_1, X_2 > tx_2)\mathbb{P}(X_1 > tx_1, X_2 > tx_2)\\
&\sim \mathbb{P}(Z_3 > 0)\mathbb{P}(X_1 > tx_1, X_2 > tx_2) \qquad (t \to \infty)\\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_1 > tx_1, X_2 > tx_2).
\end{aligned}$$

当 X_1 和 X_2 较大时，如果由于高相关系数的影响，Z_3 恰好为正，则正态随机变量 $Z_3 = \Phi^{-1}(F_\alpha(X_3))$ 也会较大；注意，$\rho \in (0.55,\ 0.64)$，因此，$\sqrt{2}\rho \in (0.78,\ 0.91)$。根据正态分布的对称性，这种情况发生的概率为 $1/2$。

因此，有趣的是，$\mathbb{E}_3^{(3)}$ 中尾部集合的概率衰减速率，事实证明与 $\mathbb{E}_3^{(2)}$ 中某类在 $\mathbb{E}_3^{(2)}$ 的正则变差下概率可忽略的尾部集合相同。

例 3.8. 假设 $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_d) \in \mathbb{R}^d, d \geq 2$，且 $\boldsymbol{X} \in \text{RVGC}(\alpha, b, \Sigma_\rho)$，其中 Σ_ρ 是具有 $-\frac{1}{d-1} < \rho < 1$ 的 d维等相关矩阵，这使得 Σ_ρ 正定。显然，$\underline{\Sigma_\rho^{-1}\mathbf{1}} > \mathbf{0}$。另外假设，当 $t \to \infty$ 时，$\log(\ell(t)) = o(\sqrt{\log(t)})$，其中 $F_1(t) = (t^\alpha \ell(t))^{-1}$。利用定理 3.4，我们有 $\boldsymbol{X} \in \mathcal{MRV}(\alpha_i, b_i, \mu_i, \mathbb{E}_d^{(i)})$ $i = 1, \ldots, d$，其中

$$\alpha_i = \frac{i\alpha}{1 + (i-1)\rho}, \quad i = 1, \ldots, d.$$

对于任意非空的 $S \subseteq \mathbb{I}$，且满足 $|S| = i$，我们有 $|\Sigma_S| = (1-\rho)^{i-1}(1 + (i-1)\rho)$。现在，对于$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d) > \mathbf{0}$，我们得到

$$\mu_1(\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}_+^d : y_j > x_j \text{ for some } j\}) = \mu_1(B_{\boldsymbol{x},1}) = \sum_{j=1}^d x_j^{-\alpha},$$

并且对于 $2 \leq i \leq d$，满足 $S \subseteq \mathbb{I}, |S| = i$，我们有

$$\mu_i(A_{\boldsymbol{x}_S}) = \mu_i(\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}_+^d : y_j > x_j, \forall j \in S\}) = \frac{(1 + (i-1)\rho)^{i-1/2}}{(2\pi)^{i/2}(1-\rho)^{(i-1)/2}} \prod_{j \in S} x_j^{-\frac{\alpha}{1+(i-1)\rho}}, \quad \text{and,}$$

$$\mu_i(B_{\boldsymbol{x},i}) = \frac{(1 + (i-1)\rho)^{i-1/2}}{(2\pi)^{i/2}(1-\rho)^{(i-1)/2}} \sum_{\substack{S \subseteq \mathbb{I} \\ |S| = i}} \prod_{j \in S} x_j^{-\frac{\alpha}{1+(i-1)\rho}}.$$

现在，概率 $\mathbb{P}(\boldsymbol{X} \in tA_{\boldsymbol{x}_S})$和 $\mathbb{P}(\boldsymbol{X} \in tB_{\boldsymbol{x},i})$ 可以像前面的例子一样再次进行近似。

尽管定理 3.4 给出了一个一般公式，但相关常数难以用闭式计算，而闭式计算可给出精确的尾部速率；当维数 d增加时，这一点尤其明显。当然，如果我们知道对所有 $S \subseteq \mathbb{I}$ 二次规划问题的数值解 $\mathcal{P}_{\Sigma_S^{-1}}$，就可以计算这些速率；然而，这可能需要求解多达 2^d 个二次规划问题。

3.2.比较高斯 *copula*的重尾与轻尾。高斯copula已广泛应用于捕捉各种应用中的依赖关系，在这些应用中，边缘分布基于专家知识或实证证据进行建模，其尾部可能较轻，例如正态分布或指数分布，也可能较重，例如帕累托分布或对数正态分布。有趣的是，尽管联合尾部行为可能会根据边缘分布是重尾还是轻尾而显著变化。在以下结果中，我们研究具有相同高斯 copula 的两个二元分布，并详细说明两种情况下联合概率有何不同。

命题 3.9. 令 $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2) \in RVGC(\alpha, \Sigma_\rho)$ 具有相同的帕累托(α)边际分布F_α，$\alpha > 0$，并令 $\boldsymbol{Z} = (Z_1, Z_2) \sim \Phi_{\Sigma_\rho}$满足 $\rho \in (-1, 1)$。则对于$x_1, x_2 > 0$ 以及 $x_{max} = \max(x_1, x_2)$，以下结论成立。

(a) 如果 $\rho < \min(x_1/x_2, x_2/x_1)$，那么 $\mathbb{P}(Z_1 > tx_1, Z_2 > tx_2) \sim o(\mathbb{P}(Z_1 > tx_{max}))$ 当 $t \to \infty$，并且如果 $\rho > 0$，我们还有

$$\mathbb{P}(Z_1 > tx_1, Z_2 > tx_2) \sim \frac{(1-\rho^2)^{3/2}}{(x_1 - \rho x_1)(x_2 - \rho x_1)} \frac{\varphi(tx_\rho)}{\sqrt{2\pi}t^2}, \qquad t \to \infty, \tag{3.9}$$

其中 $x_\rho^2 := (x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2)/(1-\rho^2)$。
如果 $\rho \geq \min(x_1/x_2, x_2/x_1)$, 那么 $\mathbb{P}(Z_1 > tx_1, Z_2 > tx_2) \sim O(\mathbb{P}(Z_1 > tx_{max}))$ 作为 $t \to \infty$和

$$\mathbb{P}(Z_1 > tx_1, Z_2 > tx_2) \sim C_\rho \frac{\varphi(tx_{max})}{tx_{max}}, \qquad t \to \infty, \tag{3.10}$$

其中 $C_\rho = \begin{cases} 1 \text{若 } \rho > \min(x_1/x_2, x_2/x_1) \\ \frac{1}{2} \quad \rho = \quad x_1/x_2 \ x_2/x_1 \text{若 } \min(,) \end{cases}$

(b) 对于任意 $\rho \in (-1,1)$ 有 $\mathbb{P}(X_1 > tx_1, X_2 > tx_2) \sim o(\mathbb{P}(X_1 > tx_{max}))$ 作为 $t \to \infty$ 和

$$\mathbb{P}(X_1 > tx_1, X_2 > tx_2) \sim t^{-\frac{2\alpha}{1+\rho}} (2\alpha \log(t))^{-\frac{\rho}{1+\rho}} (2\pi)^{-\frac{\rho}{1+\rho}} \frac{(1+\rho)^{3/2}}{(1-\rho)^{1/2}} (x_1 x_2)^{-\frac{\alpha}{1+\rho}}, t \to \infty. \tag{3.11}$$

证明。

(a) 这些结果可由 Elnaggar 和 Mukherjea 推导得到 [14, 引理 2。1]通过简单的变量替换；另见 Hashorva 和 Hüsler [20,例 3]。
(b) 这是定理3.4 在 $d = 2$时的推论，另见例3.8 其中 $d = 2$ 也成立。

□

注 3.10.
(i) 高斯框架中的渐近独立性等价于 $\mathbb{P}(Z_1 > t, Z_2 > t) = o(\mathbb{P}(Z_2 > t))$ 当 $t \to \infty$ 时。然而，根据命题 3.9(a)，我们有，对于任意 $x_1 \in (0, \rho]$,

$$\mathbb{P}(Z_1 > x_1 t, Z_2 > t) = O(\mathbb{P}(Z_2 > t)), \quad t \to \infty.$$

因此，在这种情况下解释渐近独立性时需要谨慎，因为联合尾部穿越仍可能以与边际尾部穿越相同的速率发生。
（ii）有趣的是，在高斯情形下，尾概率的下降速率取决于所选择的 $\boldsymbol{x}$，从而得到，例如，

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{P}(Z_1 > t, Z_2 > t)}{\mathbb{P}(Z_1 > x_1 t, Z_2 > t)} = 0, \quad \forall\, 0 < x_1 \leq \rho.$$

相反，在重尾情形（具有高斯 copula）下，不同的尾概率是等价的，并且

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{P}(X_1 > t, X_2 > t)}{\mathbb{P}(X_1 > x_1 t, X_2 > x_2 t)} = (x_1 x_2)^{\frac{\alpha}{1+\rho}} > 0, \qquad \forall\, x_1, x_2 > 0.$$

以下是对这两种现象差异的解释：
(a) 高斯模型：假设 $\rho < \min(x_1/x_2, x_2/x_1)$ 等价于

$$\Sigma^{-1}\boldsymbol{x} = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{pmatrix} x_1 - \rho x_2 \\ x_2 - \rho x_1 \end{pmatrix} > \mathbf{0} \tag{3.12}$$

具有 $\boldsymbol{x} = (x_1, \ x_2) \in \mathbb{R}^2_+$。若满足（3.12），则可以应用多元版米尔斯比率（参见 Savage [41]）。若不满足（3.12），则无法直接应用多元版米尔斯比率。

(b) 重尾模型：我们不再需要区分 $\rho < \min(x_1/x_2, x_2/x_1)$和 $\rho \geq \min(x_1/x_2, x_2/x_1)$ 这两种情况。事实上，

$$\mathbb{P}(X_1 > tx_1, X_2 > tx_2) = \mathbb{P}(Z_1 > z_{x_1}(t), Z_2 > z_{x_2}(t))$$

其中 $z_x(t) = \overline{\Phi}^{-1}(F_\alpha(tx))$ 并且根据引理 3.3,

$$\frac{1}{\sqrt{2\alpha\log(t)}}\Sigma^{-1}\begin{pmatrix} z_{x_1}(t) \\ z_{x_2}(t)\end{pmatrix} \xrightarrow{t\to\infty} \Sigma^{-1}\mathbf{1}, \tag{3.13}$$

从而可以直接应用多元米尔斯比率，只要 $\Sigma^{-1}\mathbf{1} > \mathbf{0}$；这与高斯情形中的（3.12）相反。当然，在维数 $d = 2$ 条件 $\Sigma^{-1}\mathbf{1} > \mathbf{0}$ 等价于 $\rho < 1$ 并且显然与 $\boldsymbol{x}$无关。

注 3.11。命题 3.9 阐述了高斯联结函数在维度 $d = 2$ 下不同分布尾部情形下行为的二分性，其中渐近（尾部）独立性已被经典地定义。将渐近（尾部）独立性自然地推广到更高维随机向量 $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^d$，即当 $t \to \infty$ 时，以下结论成立：

$$\mathbb{P}(Y_j > t, \forall j \in \mathbb{I}) = o\left(\min_{\substack{S\subseteq\mathbb{I},\\ 0<|S|<d}} \mathbb{P}(Y_j > t, \forall j \in S)\right).$$

对于渐近独立性的这一种定义，通过将定理 3.9 与 Hashorva 和 Hüsler $d \geq 2$ 的结论进行比较，也可将其推广至任意维数 $d \geq 2$，方法是将定理 3.4 与 Hashorva 和 Hüsler [20,定理 4。1]；目前我们暂不作此推广，以便简洁明了地阐述二维情形下的思路。

4. 模拟研究。 本节中，我们通过模拟数据示例来了解多元重尾分布中尾部参数的表现。

4.1.比较不同维度下的尾指数。考虑随机向量$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3)$，其边缘分布均为相同的帕累托($\alpha$)分布 F_α，其中 $\alpha = 2$，且其依赖结构由高斯 copula C_Σ 给出，相关矩阵

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \sqrt{2}\rho \\ \rho & 1 & \sqrt{2}\rho \\ \sqrt{2}\rho & \sqrt{2}\rho & 1 \end{pmatrix}; \tag{4.1}$$

参见例 3.7(b)，即 $\boldsymbol{X} \in \mathrm{RVGC}(\alpha,\ b,\ \Sigma)$ 其中 $b(t) = t^{\frac{1}{\alpha}}$。考虑在 t 较大时，针对不同的 $A \subset \mathbb{E}_3^{(i)} \subset \mathbb{R}_+^3$，$i = 1,\ 2,\ 3$，计算事件 tA 的概率。对于$1 \leq j \neq k \leq 3$，考虑以下集合。

- 在 $\mathbb{E}_{(1)3}$：

$$\begin{aligned} A_j &= \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}_+^3 : y_j > 1\} && \text{with} \quad \mathbb{P}(\boldsymbol{X} \in tA_j) = \mathbb{P}(X_j > t), \\ A_{\max} &= \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}_+^3 : \max_j y_j > 1\} && \text{with} \quad \mathbb{P}(\boldsymbol{X} \in tA_{\max}) = \mathbb{P}(\max_j X_j > t). \end{aligned}$$

- 在 $\mathbb{E}_{(2)3}$：

$$\begin{aligned} A_{jk} &= \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}_+^3 : y_j > 1, y_k > 1\} && \text{with} \quad \mathbb{P}(\boldsymbol{X} \in tA_{jk}) = \mathbb{P}(X_j > t, X_k > t), \\ A_{(2)} &= \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}_+^3 : y_{(2)} > 1\} && \text{with} \quad \mathbb{P}(\boldsymbol{X} \in tA_{(2)}) = \mathbb{P}(X_{(2)} > t). \end{aligned}$$

- 在 $\mathbb{E}_{(1)3}$：

$$A_{\min} = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}_+^3 : y_j > 1 \text{ for all } j\} \quad \text{with} \quad \mathbb{P}(\boldsymbol{X} \in tA_{\min}) = \mathbb{P}(\min_j X_j > t).$$

注意，$y_{(2)}$ 表示 y_1、y_2、y_3中的第二大值。根据例 3.7，我们知道，对于某些 $\alpha_A > 0$，有 $\mathbb{P}(\boldsymbol{X} \in tA) = t^{-\alpha_A}\ell_A(t)$（这里 ℓ_A 同时包括集合 A 相对于极限测度 μ_* 的测度 $\mu_*(A)$，以及定理 3.4 中的缓慢变化函数）。在此，我们可以利用 Hill 估计量 [21, 38]，根据与相关量有关的数据来估计尾参数 α_A （见 [9, 33]）；例如，$\mathbb{P}(\boldsymbol{X} \in tA_{\min}) = \mathbb{P}(\min_{j\in\mathbb{I}} X_j > t) = t^{-\alpha_{A_{\min}}}\ell_{A_{\min}}(t)$的尾指数 $\alpha_{A_{\min}}$，可以通过来自服从 $\min_{j\in\mathbb{I}} X_j$分布的独立同分布随机变量的数据的 Hill 估计量来估计。我们分别从 $\boldsymbol{X}$的分布中生成 $n = 20{,}000$ 个样本，采用ρ的两种取值：$\rho = 0.2$和 $\rho = 0.6$；然后估计上述尾概率的尾参数 α_A （衰减率）。

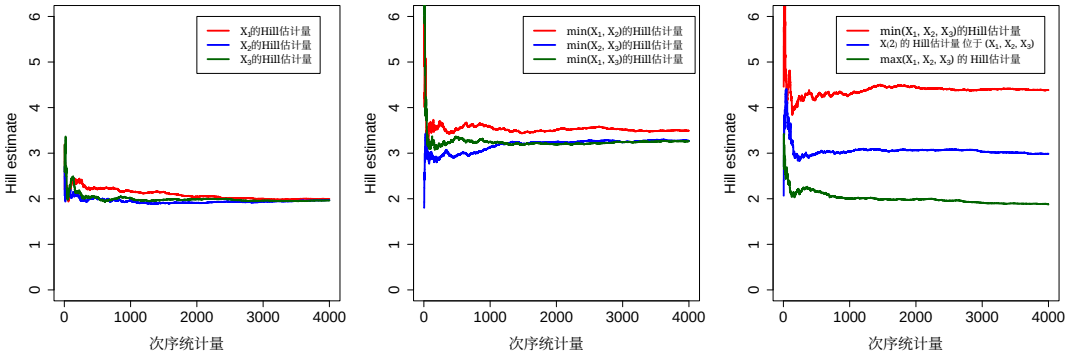

图 1. 当 $X_1, X_2, X_3 \sim$服从帕累托*(2)*且具有高斯 *copula* 依赖结构 C_Σ （其中 Σ如(4.1)所示）时的 *Hill* 估计，以及 $\rho = 0.2$。*(1)* 左图：X_1、X_2和 X_3的尾指数 *Hill* 估计。*(2)* 中图：$\min(X_1, X_2)$、$\min(X_2, X_3)$和 $\min(X_1, X_3)$的尾指数 *Hill* 估计。*(3)* 右图：$\min(X_1, X_2, X_3)$、$X_{(2)}$和 $\max(X_1, X_2, X_3)$的尾指数 *Hill* 估计。

当 $\rho = 0.2$ 时，不同尾指数的 Hill 估计如图 1 所示。按照惯例，图中绘出了随着次序统计量数量增加而变化的 Hill 估计。图中的稳定性表明概率尾部具有正则变差（重尾）性质，而稳定区域可近似表示尾指数值。对于 $\mathbb{E}_3^{(1)}$ 中的集合，左图和右图中的绿色线分别绘出了 X_j对应的尾指数 Hill 估计 $\alpha_{A_j}(j = 1, 2, 3)$ 和 $\alpha_{A_{\max}}$对应的 $\max_j X_j$。所有 Hill 图均显示相关尾指数接近 2，这支持边缘分布为帕累托分布且尾参数为 $\alpha = 2$ 的假设；该参数同时也是 $\mathbb{E}_3^{(1)}$ 中 $\alpha_1 = \alpha = 2$的正则变差指数。当 $\rho = 0.6$ 时，结论也相同，见图 2。中图和右图中的蓝线分别绘出了 $\mathbb{E}_3^{(2)}$ 中尾部集合对应的参数 $\alpha_{A_{12}}$、$\alpha_{A_{13}}$、$\alpha_{A_{23}}$ 和 $\alpha_{A_{(2)}}$ 的 Hill 估计。图中显示尾指数均接近 3，其中指数 $\alpha_{A_{12}}$的估计值高于 $\alpha_{A_{13}}$、$\alpha_{A_{23}}$ 以及 $\alpha_{A_{(2)}}$的估计值。根据例 3.7 (b)(i)，当 $\rho < 0.55$时，前者的尾指数为 $\alpha_{A_{12}} = \frac{2\alpha}{1+\rho} = 3.33$，后三者的尾指数为 $\alpha_2 = \alpha_{A_{13}} = \alpha_{A_{23}} = \alpha_{A_{(2)}} = \frac{2\alpha}{1+\sqrt{2}\rho} = 3.12$，这与模拟结果相符。尾部集合 $A_{\min}$ 为一个 $\mathbb{E}_3^{(3)}$ 集合时，尾指数 $\alpha_{A_{\min}}$的 Hill 估计由右图中的红线表示；其值高于其他所有估计值，且更接近 4。根据例 3.7 (b)(i)，其真实值为 $\alpha_{A_{\min}} = \alpha_3 = \frac{\alpha(3-(4\sqrt{2}-1)\rho)}{1+\rho-4\rho^2} = 3.98$，这也与模拟结果相符。

相比之下，我们在图2中绘制了相同模型下相关的 Hill 估计，但此时 $\rho = 0.6$。该模型遵循例3.7(b)(ii)，其中 $\rho \geq 0.55$。其模式

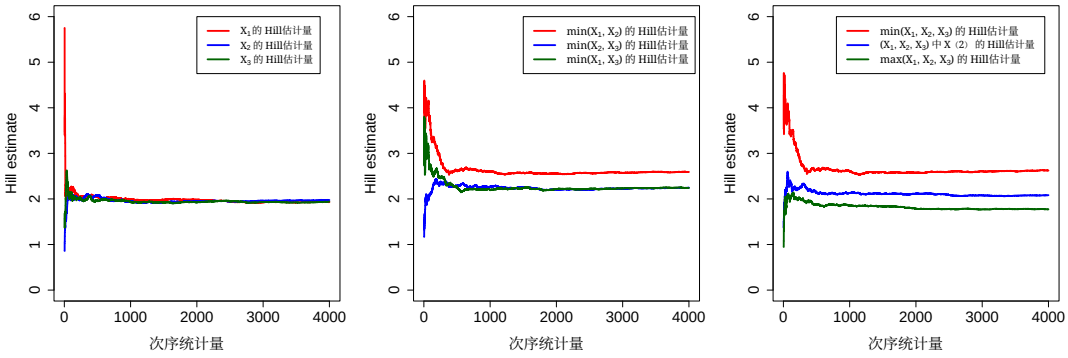

图 2. 当 $X_1, X_2, X_3 \sim$ 服从帕累托*(2)* 分布且具有高斯 *copula* 依赖结构 C_Σ（其中 Σ 如 *(4.1)* 所示，且 $\rho = 0.6$）时的 *Hill* 估计。*(1)* 左图：分别为 X_1, X_2 和 X_3 的尾指数 *Hill* 估计。*(2)* 中图：分别为 *min*(X_1, X_2)、*min*(X_2, X_3) 和 *min*(X_1, X_3) 的尾指数 *Hill* 估计。*(3)* 右图：*min*(X_1, X_2, X_3)、 *X(2)* 和 *max*(X_1, X_2, X_3) 的尾指数 *Hill* 估计。

$\mathbb{E}_3^{(1)}$ 和 $\mathbb{E}_3^{(2)}$ 尾部集合的行为保持不变，除了 $\alpha_{A_{12}} = \frac{2\alpha}{1+\rho} = 2.5$ 以及 $\alpha_2 = \alpha_{A_{(2)}} = \frac{2\alpha}{1+\sqrt{2\rho}} = 2.16$，其中 $\alpha_{A_{12}} > \alpha_2$，模拟结果也支持这一点。有趣的是，右图中红线所示的 $\mathbb{E}_3^{(3)}$ 尾部集合$A_{\min}$ 的尾指数 $\alpha_{A_{\min}}$ 估计图低于 3，实际上更接近 $\min(X_1, X_2)$ 在 $\alpha_{A_{12}}$下的 Hill 图。这是合理的，因为这里我们有 $\alpha_3 = \frac{2\alpha}{1+\rho} = 2.5 = \alpha_{A_{12}}$。值得注意的是，$\mathbb{E}_3^{(3)}$ 上的正则变差尾指数与 $\mathbb{E}_3^{(2)}$ 中的特定集合 A_{12} 的尾指数相同。然而，$\alpha_{A_{12}} = 2.5$ 大于 $\mathbb{E}_3^{(2)}$ 上的正则变差指数 $\alpha_2 = 2.16$。

总之，模拟结果表明，在边缘分布相同且服从帕累托分布的情况下，对于参数值不同的高斯 copula，尾集概率的尾指数呈现出不同的行为，这证实了第 3 节的理论结果。

4.2. 比较正态尾部与帕累托尾部。 设 $\boldsymbol{Z} = (Z_1, Z_2)$ 具有相同的标准正态边缘分布，且 $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$ 具有相同的帕累托(α)边缘分布，其中 $\alpha = 2$；此外，设 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Z}$ 都具有相同的 copula 依赖结构，由相关系数为 $\rho = 2/3$. 的高斯 copula C_ρ 给出。

我们从每个分布 $\boldsymbol{Z}$ 和 $\boldsymbol{X}$ 中分别生成 $n = 1{,}000{,}000$ 样本，然后对 $\mathbb{P}(X_1 > t | X_2 > \kappa t)$ 用经验方法进行近似，取值为 $\kappa = 1, \ldots, 5$，并对 $\mathbb{P}(Z_1 > t | Z_2 > \kappa t)$进行近似，取值为 $\kappa = 1{,}2{,}2.5$，其中 t取一系列值。我们重复此过程 $m = 1{,}000$ 次，并在图 3中绘制尾概率的平均值。对于重尾向量 $\boldsymbol{X}$，我们观察到$\mathbb{P}(X_1 > t | X_2 > \kappa t)$ 随着 κ 趋于 $t \to \infty$而对所有取值趋于0。因此，在这里我们可以预期

$$\mathbb{P}(X_1 > t, X_2 > \kappa t) = o\left(\mathbb{P}(X_2 > \kappa t)\right), \quad t \to \infty,$$

对于任意 $\kappa \geq 1$，这表明渐近独立性现象（1.1）具有更广泛的适用性。命题 3.9(b) 也证实了这一点。

另一方面，对于高斯向量，概率 $\mathbb{P}(Z_1 > t | Z_2 > t)$ 如渐近独立性所预期的那样趋于0（当 $t \to \infty$ 时），然而 $\mathbb{P}(Z_1 > t | Z_2 > 2t)$ 和$\mathbb{P}(Z_1 > t | Z_2 > 2.5t)$ 似乎稳定在某个非零常数值。因此，与重尾情形相反，对于高斯向量，在某些情况下，我们可以预期

$$\mathbb{P}(Z_1 > t, Z_2 > \kappa t) \sim C\mathbb{P}(Z_2 > \kappa t), \quad t \to \infty,$$

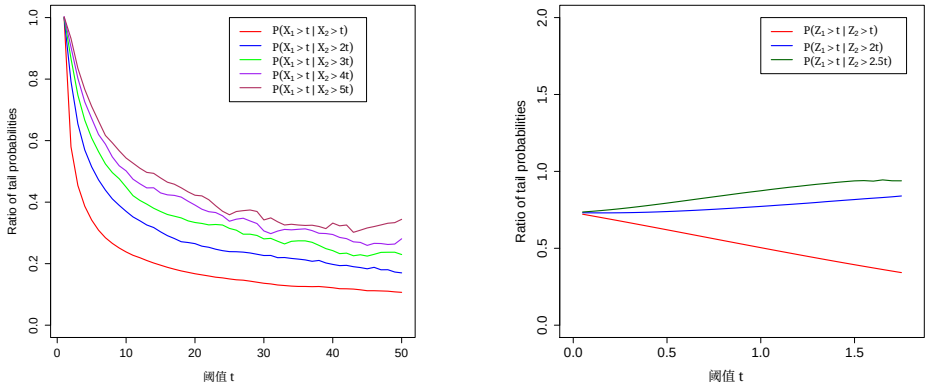

图 3. 二元高斯*copula* 下的尾概率比较 C_ρ 与 $\rho = 2/3$。*(1)* 左图：
$\mathbb{P}\ X_1 > t|X_2 > \kappa t$ $\kappa = 1$ 5 $t \in\ 0, 50$ $X_1\ X_2 \sim$ 2 2 $\mathbb{P}\ Z_1 > ()$ 的图，其中，…，，() 当，帕累托
$t|Z_2 > \kappa t$ $\kappa = 1\ 2\ 2.5$ $t \in\ 0, 2$ $Z_1\ Z_2 \sim \mathcal{N}\ 0, 1$
()。*0*右图：() 的图，其中，„() 当，()。

趋于某个常数 $C > 0$。其原因在命题 3.9(a)和注 3.10中有所解释：对于$\rho = 2/3$，当 (x_1, x_2) =(1,1) 时，我们有 $\rho < \min(x_1/x_2, x_2/x_1)$，因此，(3.9)成立，这解释了红线为何递减至零；而当 (x_1, x_2) =(1, 2) 和 (1, 3) 时，我们分别有 $\rho > \min(x_1/x_2, x_2/x_1)$，因此(3.10)成立，这解释了图 3右图中蓝线和绿线的稳定走势。

5. 结论。本文为具有高斯 copula 的正则变差分布的不同尾部集合提供了精确的渐近概率。主要发现总结如下。

(i) 边缘分布尾部等价于正则变差分布（满足一些较弱的正则性条件），且具有高斯 copula 依赖结构的多元分布，在锥 $\mathbb{E}_d^{(i)} \subseteq \mathbb{R}_+^d$ 上对所有 $i \in \mathbb{I}$ 均具有多元正则变差（参见定理 3.4）。

(ii) 在计算矩形尾部集合的概率时——这在实际应用中相当重要——即使了解相关空间 $\mathbb{E}_d^{(i)}$ 上的正则变差特性，仍可能只能得到可忽略的尾概率估计；参见例3.7(b)。因此，定理3.1提供此类集合尾部衰减率的结果非常有用；此外，推论 3.6 给出了另一类相关尾部集合的尾部渐近。对于计算 $\mathbb{E}_d^{(i)}$ 中一般非矩形集合的尾概率，我们仍需使用定理 3.4。

(iii) 在高斯 copula 下，轻尾与重尾分布的联合尾部行为在结构上存在显著差异。由$\mathbb{P}(X_1 > t|X_2 > t) \to 0$ (当 $t \to \infty$) 给出的经典渐近独立性完全刻画了当$(X_1,\ X_2)$ 边际上为重尾分布时的联合尾部行为。相比之下，如果 $(Z_1,\ Z_2)$ 具有高斯边际分布，那么 $\mathbb{P}(Z_1 > t|Z_2 > t) \to 0$ (当 $t \to \infty$) 只能说明部分情况，正如我们在第 3.2节中所发现的那样。

这些结果不仅对有兴趣使用一种广受欢迎的模型计算各种极端尾部事件尾概率的风险管理者有用，还能用于计算某些值得关注的多元风险度量，见 [4, 5, 36]。在这一背景下，仍有一些值得探讨的问题。在所有满足 $\boldsymbol{X} \in \mathrm{RVGC}(\alpha,\ \Sigma)$ 具有正定性，且（因此）对所有 $i \in \mathbb{I}$ 均有 $\boldsymbol{X} \in \mathcal{MRV}(\alpha_i,\ \mathbb{E}_d^{(i)})$ 的例子中，我们观察到

处处成立。 $\alpha_1 < \ldots < \alpha_d$但对于任何有效的 Σ取值，这一结论是否普遍成立？此外，定理3.1 中得到的尾部渐近结果还提示了一种检验高斯 copula 假设的统计方法：比较不同尾部集合的尾指数参数估计值。最后，在一定条件下，我们的结果还可用于推导边缘分布的尾部具有不同尾指数参数且呈正则变化的情形。这些问题留待感兴趣的研究者进一步探讨。

参考文献

[1] ASMUSSEN, S. 和 ROJAS-NANDAYAPA, L.（2008）。具有高斯 copula 的对数正态随机变量和的渐近性。《统计与概率快报》78 2709-2714。 [2] BINGHAM, N. H.、GOLDIE, C. M. 和 TEUGELS, J. L.（1989）。正则变差。《数学及其应用百科全书》27。剑桥大学出版社，剑桥。 [3] COLES, S. G.、HEFFERNAN, J. E. 和 TAWN, J. A.（1999）。极值分析的依赖度量。《极值》2 339–365。 [4] COUSIN, A. 和 DI BERNARDINO, E.（2013）。风险价值的多元扩展。《多元分析杂志》119 32-46。 [5] COUSIN, A. 和 DI BERNARDINO, E.（2014）。条件尾期望的多元扩展。保险数学与经济学 55 272-282。[6] DAI, M. 和 MUKHERJEA, A.（2001）。通过最大值的分布识别多元正态向量的参数。《理论概率杂志》14 767–800。 [7] DAS, B.、EMBRECHTS, P. 和 FASEN, V.（2013）。《四个定理与一场金融危机》。《国际近似推理杂志》54 701–716。 [8] DAS, B. 和 FASEN-HART MANN, V.（2023）。重尾随机向量的聚合：从有限和到莱维过程。已提交。https://doi.org/ 10 48550 2301 10423 。/arXiv。 。DAS, B.、[9] 2013 MITRA, A. 和 RESNICK, S. I.（）。《生活在多维边缘：利用正则变差寻找隐藏风险》。《应用概率进展》45 139–163。 [10] DE HAAN, L. 和 FERREIRA, A.（2006）。《极值理论：导论》。Springer-Verlag，纽约。[11] DEO, A. 和 MURTHY, K.（2021）。利用自适应结构化重要性抽样器，高效开展分布尾部的黑箱模拟。已提交。https://doi.org/ 10 48550 2102 07060 。/[12] 2010 arXiv。 。DONNELLY, C. 和 EMBRECHTS, P.（）。《问题出在尾部：精算数学与次贷危机》。《ASTIN 通报》40 1–33。 [13] DUNNETT, C. W. 和 SOBEL, M.（1962）。概率积分以及学生 t 分布多元类比的若干百分位点的近似。《生物统计学》42 258–260。 [14] ELNAGGAR, M. 和 MUKHERJEA, A.（1999）。通过最小值的分布识别三元正态向量的参数。《统计规划与推断杂志》78 23–37。 [15] EMBRECHTS, P.、KLÜPPELBERG, C. 和 MIKOSCH, T.（1997）。《保险与金融中的极端事件建模》。Springer-Verlag，柏林。 [16] EMBRECHTS, P.、LAMBRIGGER, D. D. 和 WÜTHRICH, M. V.（2009）。多元极值与相关风险的聚合：示例与反例。《极值》12 107–127。 [17] FURMAN, E.、KUZNETSOV, A.、SU, J. 和 ZITIKIS, R.（2016）。重新审视高斯 copula 的尾部依赖。保险数学与经济学 69 97–103。 [18] HASHORVA, E.（2005）。多元高斯尾部的渐近性与界。《理论概率杂志》18 79–97。 [19] HASHORVA, E. 和 HÜSLER, J.（2002）。多元积分的渐近性及其在记录值中的应用。《随机模型》18 41–69。[20] HASHORVA, E. 和 HÜSLER, J.（2003）。关于多元高斯尾部。《数学统计研究所年刊》55 507–522。[21] HILL, B. M.（1975 3 1163 1174）。一种推断分布尾部的简单通用方法。《统计年刊》。- 。[22] HUA, L. 和 JOE, H.（2011）。多元 copula 的尾阶与中间尾部依赖。《多元分析杂志》102 1454–1471。[23] HUA, L.、JOE, H. 和 LI, H.（2014）。隐正则变差与 copula 尾阶之间的关系。《应用概率杂志》51 37–57。 [24] HULT, H. 和 LINDSKOG, F.（2006）。度量空间上测度的正则变差。《数学研究所出版物》，新系列 80 121–140。 [25] IBRAGIMOV, R. 和 PROKHOROV, A.（2017）。《重尾与 copula：经济学与金融学中的依赖建模专题》。世界科学出版社有限公司。

[26] JOE, H.、LI, H. 和 NIKOLOULOPOULOS, A. K.（2010）。尾部依赖函数与 vine copula。《多元分析杂志》101 252–270。 [27] JOE, H. 和 LI, H.（2011）。多元正则变差的尾部风险。《应用概率方法与计算》13 671-693。 [28] KLÜPPELBERG, C. 和 RESNICK, S. I.（2008）。帕累托 copula、风险聚合与皇帝的新袜子。《应用概率杂志》45(1) 67-84。 [29] LEDFORD, A. W. 和 TAWN, J. A.（1996）。多元极值中近似独立性的统计分析。《生物统计学》83 169–187。[30] LI, D.（2000）。关于违约相关性：一种 copula 函数方法。《固定收益杂志》9 43–54。 [31] LINDSKOG, F.、RESNICK, S. I. 和 ROY, J.（2014）。度量空间上的正则变差测度：隐正则变差与隐藏跳跃。《概率调查》11 270–314。 [32] MCNEIL, A. J.、FREY, R. 和 EMBRECHTS, P.（2005）。《定量风险管理：概念、技术与工具》。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州。 [33] MITRA, A. 和 RESNICK, S. I.（2011）。隐正则变差与隐藏风险的识别。《随机模型》27 591–614。[34] MORAN, P. A. P.（1956 52 230 233）。一类积分的数值计算。《剑桥哲学学会会刊》。– 。[35] NAIR, J. U.、WIERMAN, A. 和 ZWART, B.（2016）。《重尾基础：性质、形成与识别》。即将出版。 [36] PRÉKOPA, A.（2012 193 49 69）。多元风险价值及相关主题。《运筹学年刊》。– 。[37] RESNICK, S. I.（2002）。隐正则变差、二阶正则变差与渐近独立性。《极值》5 303–336。[38] RESNICK, S. I.（2007）。《重尾现象：概率与统计建模》。运筹学与金融工程系列。Springer，纽约。 [39] RESNICK, S. I.（2008）。《极值、正则变差与点过程》。运筹学与金融工程系列。Springer，纽约。1987 年版重印。 [40] SALMON, F.（2009）。灾难配方：导致华尔街覆灭的公式。2月23日，《连线》杂志。 [41] SAVAGE, I. R.（1962）。多元正态分布的米尔斯比率。《美国国家标准局研究杂志 B 辑》66 93–96。[42] SIBUYA, M.（1960）。二元极值统计。《统计数学研究所年刊》11 195–210。 [43] TONG, Y. L.（1989）。《多元正态分布》。Springer，柏林。