arXiv:2304.05016v1 [math.RT] 11 Apr 2023

有限群主块的相对稳定莫里塔型等价与相对 Brauer 不可分解性

Naoko Kunugi 和 Kyoichi Suzuki*

摘要。我们讨论具有公共中心 p-子群 Z的有限群表示，其中 p 是一个素数。对于主 p块，我们给出一种构造相对Z稳定 Morita 型等价的方法。相对稳定 Morita 型等价是稳定 Morita 型等价的推广，由 Wang 和 Zhang 在更一般的情形下引入。随后，我们将 Linckelmann 关于稳定 Morita 型等价的结果推广到相对 Z稳定 Morita 型等价。我们还引入相对 Brauer 不可分解性的概念，它是 Brauer 不可分解性概念的推广。我们给出 Scott 模相对 Brauer 不可分解的一个等价条件，类似于 Ishioka 和第一作者给出的条件。

1 引言

利用 Brou´e [4] 和 Linckelmann [13], 的结果，已构造出有限群主 p块之间的 Morita 等价，其中 p 是一个素数。Brou´e [4] 提出了稳定 Morita 型等价的概念，并发展出一种为主块构造此类等价的方法。Linckelmann [13] 给出了不可分解自内射代数之间的稳定 Morita 型等价实际上是 Morita 等价的一个等价条件。因此，我们可以利用 Brou´e 的方法构造稳定 Morita 型等价，再利用 Licnkelmann 的结果将其提升为 Morita 等价。通过这种方式，在一些情形下已经构造出了 Morita 等价（例如参见 [18] 和 [10]）。

然而，在 G 和 G' 具有一个共同的非平凡中心 p-子群的情况下，我们无法使用 Brou´e 的方法。如果 G和 G' 是具有共同的Sylow p-子群 P 且在 P 上具有相同融合系统的有限群，那么Brou´e 的方法通过粘合 P 的非平凡子群的中心化子的主块之间的 Morita 等价关系，在 G 和 G' 的主块之间构造一个稳定 Morita型等价。因此，如果 G 和 G' 具有一个共同的非平凡中心 p-子群，我们就无法使用该方法，因为其中心化子就是 G 和 G' 本身。

在 [11], 中，声称已经证明：对于 G 和 G'的公共中心 p子群 Z， G/Z 和 G'/Z 的主块 Morita 等价，当且仅当 G 和 G' 的主块也 Morita 等价（见 [11, 引理 3.3 (b)]）。因此，我们可以构造 G 和 G' 的主块之间的 Morita 等价，因为利用 Brou´é 和 Linckelmann 的结果，我们可以构造 G/Z 和 G'/Z 的主块之间的 Morita 等价。然而，对于证明 [11, 引理 3.3 (b)], 所需的 [11, 引理 3.1 (b)], 的证明似乎并不充分。

因此，我们通过将 Brou´和 Linckelmann 的结果推广到莫里塔型的相对稳定等价，给出一种为具有共同非平凡中心 p-子群的有限群的主块构造 Morita 等价的方法。Wang 和 Zhang [23], 引入了莫里塔型的相对稳定等价这一概念，它是莫里塔型稳定等价的一种推广。我们使用这一概念的子群版本（见

第3节）。如果 G 和 G' 有一个非平凡的公共中心 p-子群 Z，我们给出了一种方法，用于在 G 和 G' 的主块之间构造相对 Z- 稳定 Morita 型等价：

定理 1.1. 设 k 是特征为 $p > 0$的代数闭域。设 G和 G'是具有共同 Sylow p-子群 P 的有限群，使得 G 和 G' 在 P上的融合系统相同，并令 $M = S(G \times G', \Delta P)$ 为顶点为 ΔP的 Scott $k[G \times G']$-模。假设 Z 是 P 的子群，且在 G 和 G'中均为中心子群。则以下条件等价：

(i) M关于 ΔQ的 Brauer 构造及其对偶所给出的对 $(M(\Delta Q)\ M(\Delta Q)^*)$，对任意真包含 Z 的 P 子群 Q，在 $kC_G(Q)$ 和 $kC_{G'}(Q)$ 的主块之间诱导 Morita 等价。

(ii) 对 (M, M^*) 在 kG 和 kG'的主块之间诱导相对 Z-稳定 Morita 型等价。

然后我们将 Linckelmann 的结果 [13, 定理 2.1] 推广到相对 Z-稳定 Morita 型等价：

定理1.2。设 k 为特征为 $p > 0$的代数闭域。设 G 和 G' 为有限群，且 B 和 B' 分别为 kG 和 kG'的块，它们具有一个共同的非平凡缺陷群 P，使得 G 和 G' 在 P上的融合系统相同。设 M 为一个 B-B'-双模，且为一个 ΔP-投射 p-置换 $k[G \times G']$-模。假设对于 P的一个子群 Q，对(M, M^*)在 B和 B'之间诱导出相对稳定 Morita 型等价 Q。则有以下结论：

(i) 在同构意义下，将 M 视为 $k[G \times G']$-模时，它有唯一一个非 $Q \times Q$-投射的不可分解直和项。

此外，假设 Z 是 P 的真子群，且 Z 在 G和 G'中均为中心子群。若$Q = Z$，则有以下结论：

(ii) 若 M 是顶点为 ΔP的平凡源模，则对于任意简单 B-模 S，B'-模 $S \otimes_B M$ 是不可分解的，且作为 kG'-模时不是 Z-投射的。

(iii) 对 (M, M^*) 的作用在 B与 B'之间诱导 Morita 等价，当且仅当对于任意简单 B-模 S，B'-模 $S \otimes_B M$ 是简单模。

我们还引入相对 Brauer 不可分解性的概念（见定义 5.1），并给出 Scott 模为相对 Brauer 不可分解的一个等价条件。Brauer 不可分解性的概念由 [9]提出。Scott 模的 Brauer 不可分解性在 Brou´的方法中发挥着重要作用。Ishioka 和第一作者给出了 Scott 模为 Brauer 不可分解的一个等价条件（见 [8, 定理 1.3]）。尽管 Scott 模的 Brauer 不可分解性对定理 1.1 也很有用，但采用稍微更一般的条件更为恰当。因此，我们引入相对 Brauer 不可分解性的概念，并将结果 [8, 定理 1.3] 推广到这一概念：

定理 1.3. 设 G是一个有限群，P是 G 的一个 p-子群，且 $M = S(G, P)$。假设融合系统 $\mathcal{F}_P(G)$ 是饱和的，并且 R是 P 的一个子群。那么以下条件等价：

(i) 模 M 是相对于 R 的 Brauer 不可分解模。

(ii) 对于每个包含 R 的 G-共轭类的完全正规化子群 Q，模 $S(N_G(Q)\ N_P(Q))\downarrow^{N_G(Q)}_{QC_G(Q)}$ 都是不可分解的。

此外，如果这些条件成立，那么对于任何包含 R 的 G-共轭的 P 的完全正规化子群 Q ， $M(Q)$ $\cong$ $S(N_G(Q)\ N_P(Q))$。

本文安排如下：第2节中，我们介绍全文所用的一些记号和事实，并回顾融合系统的定义及相关事实。第3节中，我们回顾 Morita 型相对稳定等价的定义，并在适当假设下研究其性质。第4节中，我们证明定理 1.1 和定理1.2。第5节中，我们定义相对 Brauer 不可分解性，并证明定理 1.3。第6节中，我们举例说明如何在特征 2 下，在 $SL_2(3)$ 和 $SL_2(11)$ 的主块之间构造 Morita 等价。

2 记号与预备知识

除非另有说明，本文始终假设 k 是特征为 $p>0$ 的代数闭域，G 是有限群，且所有模均为有限生成右模。

若 H 是 G 的子群，则记作 $H \leq G$；若 H 是 G 的正规子群，则记作 $H \trianglelefteq G$。对于 G 的子群 H 和 K，若 H 在 G 中与 K 的某个子群共轭，则记作 $H \leq_G K$。特别地，若 H 是 G 的真子群，则记 $H < G$ 表示 $H \leq G$，记 $H \lhd G$ 表示$H \trianglelefteq G$。若 H 在 G 中与 K 的某个真子群共轭，也记作 $H <_G K$。令$H^g = g^{-1}Hg$，并用 $[H\backslash G]$ 表示 H 在 G 中的右陪集代表元集。我们还用 $[H\backslash G/K]$ 表示 H 和 K 在 G 中的双陪集代表元集。用$Z(G)$ 表示 G 的中心。记 $\Delta G = \{(g,g) \mid g \in G\} \leq G \times G$。

设 H 是 G的子群。对于一个 kG-模 M，我们将 $M{\downarrow}_H^G$ 记作 M 到H的限制。对于一个 kH-模 N，我们将 $N{\uparrow}_H^G$ 记作 N 的诱导 kG-模。我们将 k_G 记作平凡的 kG-模，并将 $B_0(G)$ 记作 kG 的主块。我们将 $J(kG)$ 记作 kG 的Jacobson根。对于模 U和 V，我们将 $U \otimes V$ 记作 $U \otimes_k V$，并将 $V^* = \mathrm{Hom}_k(V,k)$ 记作 V 的 k-对偶。若 U 是左模，而 V是右模，则我们将 $U \otimes V$ 视为双模，并将 V^* 视为左模，除非另有说明。

对于子群 H of G， $k_H{\uparrow}^G$ 有一个唯一的不可分解直和项，其顶包含 k_G 作为直和项。这个不可分解直和项称为相对于 H 的 Scott 模，记作 $S(G,H)$。我们使用以下事实：若 H and H' 是 G 的子群，且 Q and Q' 分别是 H and H' 的 Sylow p-子群，则 $S(G,H)$ 与 $\cong S(G,H')$ 同构，当且仅当 Q and Q' 在 G中共轭。（参见 [16, 第4章，推论8.5]）。特别地，由此可得 $S(G,H)$ 与 $\cong S(G,Q)$ 同构，且 $S(G,Q)$ 以 Q 为顶点。因此，我们将 $S(G,Q)$ 称为以 Q为顶点的 Scott 模。若某个 kG-模是某些子群 H_i of G所对应的 $\bigoplus_{i=1}^r k_{H_i}{\uparrow}^G$ 的直和项，则称其为a p-置换模。不可分解的 p-置换模称为平凡源模。Scott 模 $S(G,H)$ 是一个平凡源模。

我们回顾 Brauer 构造的定义及其基本性质。对于一个 kG-模M 以及 G的一个 p-子群 Q ， M 关于 Q 的 Brauer 构造 $M(Q)$ 是如下定义的$kN_G(Q)$-模:

$$M(Q) = M^Q / \sum_{R<Q} \mathrm{tr}_R^Q(M^R),$$

其中， M^Q是 M中 Q的不动点集合，而 tr_R^Q: $M^R \to M^Q$是由 $\mathrm{tr}_R^Q(m) = \sum_{t\in[R\backslash Q]} mt$给出的线性映射。

引理 2.1。（参见 [3, (1.3)], [22, 推论 27.7], ，另见 [15, 命题 5.10.3]）设 M 是一个不可分解的 kG-模，且 Q G的一个 p-子群。那么以下结论成立:

(i) 若 $M(Q) \neq 0$，则 $Q$is contained in a vertex of M。

(ii) 特别地，如果 M 是一个平凡源模，那么 $M(Q) \neq 0$ 当且仅当 Q 包含在 M 的某个顶点中。

引理2.2.设 Z 是 $Z(G)$的一个 p-子群。若 M 是一个平凡源 kG-模，且其顶点包含 Z，则 $M(Z) = M$。

证明。如果 $Z = 1$，则根据 Brauer 构造的定义，该断言显然成立，因此我们假设 $Z \neq 1$。由于 M 是一个顶点包含 Z 的平凡源模，它是 $k_H\uparrow^G$ 的一个直和项，其中 H 是包含 Z 的 G 的某个子群。由于 $Z \leq Z$（G），可知 Z 在 $k_H\uparrow^G$ 上平凡作用，特别地，在 M 上也平凡作用。因此，对于 Z 的任意子群 R，我们有 $M^R = M$。对于 Z 的任意真子群 R 以及 $m \in M = M^R$，我们有 $\mathrm{tr}_R^Z(m) = \sum_{t\in[R\backslash Z]} mt = |Z : R|m = 0$，结论得证。 □

我们回顾一些融合系统的定义。不过，了解下面注2.3 中的事实可能就足够了。对于 G的子群 H 和 K，我们记

$$\mathrm{Hom}_G(H,K) = \{\varphi \in \mathrm{Hom}(H,K) \mid \varphi = c_g \text{ for some } g \in G \text{ such that } H^g \leq K\},$$

其中 c_g 是一个共轭映射。令 P 为 G的一个 p-子群。G 在P 上的融合系统是范畴 $\mathcal{F}_P(G)$，其对象为 P 的子群，态射由 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_P(G)}(Q,R) = \mathrm{Hom}_G(Q,R)$给出。对于 P的子群 Q和 R，如果 Q和 R在 $\mathcal{F}_P(G)$中同构，则称 Q和 R是 $\mathcal{F}_P(G)$-共轭的。令 Q为 P的一个子群。如果 $\mathrm{Aut}_P(Q)$ 是 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}_P(G)}(Q)$ 的一个 Sylow p-子群，则称 Q在 $\mathcal{F}_P(G)$中完全自同构化。如果对于 P的任意子群 R以及任意 $\varphi \in \mathrm{Iso}_{\mathcal{F}_P(G)}(R,Q)$，都存在一个元素$\bar{\varphi} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_P(G)}(N_\varphi, P)$使得 $\bar{\varphi}|_Q = \varphi$，其中 $N_\varphi = \{g \in N_P(R) \mid {c_g}^{\varphi^{-1}} \in \mathrm{Aut}_P(Q)\}$，则称 Q在 $\mathcal{F}_P(G)$中是可接收的。如果对于 P的任意子群 R，只要其与 Q是 $\mathcal{F}_P(G)$-共轭的，就有 $|N_P(Q)| \geq |N_P(R)|$，则称 Q 在 $\mathcal{F}_P(G)$中完全正规化。若 P的任意子群都与某个完全自同构化且可接收的子群$\mathcal{F}_P(G)$-共轭，则融合系统 $\mathcal{F}_P(G)$ 是饱和的。本文将使用以下事实：

注2.3.（i）根据定义，我们可以取完全正规化子群作为 P 的子群的 $\mathcal{F}_P(G)$-共轭类的代表元。

(ii) 如果 $\mathcal{F}_P(G)$ 是饱和的，那么任何完全正规化子群在 $\mathcal{F}_P(G)$ 中都是完全自同构化且可接收的（参见 [20, 定理 5.2]）。

(iii) 若 P 是 G的Sylow p-子群，则 $\mathcal{F}_P(G)$是饱和的（见 [2, 命题 1.3]）。

3 莫里塔型相对稳定等价

关于 kG-模 W 的相对射影性这一概念最早由 Okuyama [17] 引入（另见 [5, 第 8]节）。在 [6], 中定义了一个 W-稳定范畴 $\mathrm{mod}^W(kG)$，它是稳定范畴 $\mathrm{mod}(kG)$ 的类比，并证明了 $\mathrm{mod}^W(kG)$ 是一个三角范畴。在 [23], 中证明，对于有限群 kG的一个块 B，$\mathrm{mod}^W(kG)$ 中由所有有限生成 B-模构成的满子范畴 $\mathrm{mod}^W(B)$ 是一个三角子范畴。Wang 和 Zhang [23] 还引入了有限群 G 和 G'的块 B 和 B' 之间相对 (W,W')-稳定 Morita 型等价的概念，其中 W 是一个 kG-模，W' 是一个 kG'-模。本文使用这些概念的子群版本（见下文定义 3.1）。本节的主要目的是证明命题 3.4，该命题表明，在适当假设下，具有公共缺陷群 P 的块 B 和B' 之间的相对 Q-稳定 Morita 型等价，会诱导出 $\mathrm{mod}^Q(B)$ 与 $\mathrm{mod}^Q(B')$ 作为三角范畴之间的等价，其中 Q 是 P的一个子群。

设 W 是一个 kG-模。若一个 kG-模 U 是相对 W-投射的，则称之为相对 W-投射，如果对于某个 kG-模 V， U 是 $W\otimes V$的直和项，其中 $W\otimes V$通过对角作用视为一个 kG-模。我们定义 $\mathrm{mod}(kG)$ 的 W-稳定范畴 $\mathrm{mod}^W(kG)$，其对象与 $\mathrm{mod}(kG)$ 的对象相同，而其态射由下式给出

$$\underline{\mathrm{Hom}}^W_{kG}(U,V)=\mathrm{Hom}_{kG}(U,V)/\mathrm{Hom}^W_{kG}(U,V),$$

其中，$\mathrm{Hom}^W_{kG}(U,V)$ 是 $\mathrm{Hom}_{kG}(U,V)$的子空间，由所有同态组成，其中每个同态都经由一个 W-投射 kG-模进行分解。对于一个块 B的 kG，我们将 $\mathrm{mod}^W(B)$ 记作 $\mathrm{mod}^W(kG)$ 的满子范畴，其对象是所有有限生成的 B-模。我们将f 记作同态 $f\colon U\to V$在$\mathrm{Hom}^W_{kG}(U,V)$ 和 $\mathrm{Hom}^W_B(U,V)$ 中的像。

我们从 [6] 回顾， W-稳定范畴是三角范畴。我们称 kG-模的短正合列

$$E:\ 0\longrightarrow U_1\xrightarrow{f}U_2\xrightarrow{g}U_3\longrightarrow 0$$

若 $E\otimes W$分裂，则称其为 W-分裂。于是，称 f为 W-分裂单态射，称 g为 W-分裂满态射。我们记 $\alpha_W\colon W^*\otimes W\to k$为评价映射，即由 $\alpha_W(f\otimes w)=f(w)$定义的同态，其中将 W^*视为右 kG-模，并通过对角作用将 $W^*\otimes W$视为 kG-模。于是 α_W 是一个 W-分裂满态射（见 [6,引理 2.2]），因此其对偶 $\alpha_W^*\colon k\to W^*\otimes W$是一个 W-分裂单态射。对于一个 kG-模 U，我们记 $I_W(U)=U\otimes W^*\otimes W$，并将 $\Omega_W^{-1}(U)$记为 $\mathrm{id}_U\otimes\alpha_W^*\colon U\to I_W(U)$的余核。对于一个 kG-同态 $f_1\colon U_1\to U_2$，我们有一个由 W-分裂短正合列构成的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & U_1 & \xrightarrow{\mathrm{id}_{U_1}\otimes\alpha_W^*} & I_W(U_1) & \longrightarrow & \Omega_W^{-1}(U_1) & \longrightarrow & 0\\
 & & {\scriptstyle f_1}\downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & U_2 & \xrightarrow{f_2} & U_3 & \xrightarrow{f_3} & \Omega_W^{-1}(U_1) & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

那么我们得到一个三角 $U_1\xrightarrow{f_1}U_2\xrightarrow{f_2}U_3\xrightarrow{f_3}\Omega_W^{-1}(U_1)$ in $\mathrm{mod}^W(kG)$，称其为标准三角。我们称 $\mathrm{mod}^W(kG)$ 中与标准三角同构的三角为可区别三角。令 $\mathscr{T}$为 $\mathrm{mod}^W(kG)$ 中可区别三角的集合。于是可得，$\mathrm{mod}^W(kG)$ 连同 Ω_W^{-1} 和 $\mathscr{T}$构成一个三角范畴（见 [6,定理 6.2]）。对于 kG的一个块 B，$\mathrm{mod}^W(B)$ 是 $\mathrm{mod}^W(kG)$ 的三角子范畴（见[23,命题 3.1]）。

Wang 和 Zhang [23] 引入了 Morita 类型的相对稳定等价这一概念:

定义 3.1。（参见 [23, 定义 5.1]）令 G 和 G' 为有限群，令 B 和 B' 分别为 G 和 G'的块。令 W 为一个 kG-模，令 W' 为一个 kG'-模。对于一个 B-B'-双模M，以及一个 B'-B-双模 N，如果 M 和 N 作为左模和右模都是有限生成投射的，并且满足存在双模同构，我们称有序对（M,N）在 B 和 B' 之间诱导了一个相对（W,W'）-稳定 Morita 型等价

$$M\otimes_{B'}N\cong B\oplus X\quad and\quad N\otimes_B M\cong B'\oplus Y,$$

其中 X作为 $k[G\times G]$-模是 $W^*\otimes W$-射影的，而 Y作为 $k[G'\times G']$-模是 $W'^*\otimes W'$-射影的。

本文主要考虑上述概念的子群版本。设 H 是 G的一个子群。由 Frobenius 互反律可知，kG-模 U 是 H-射影的，当且仅当 U 是 $k_H\uparrow^G$-射影的。因此，相对于模的射影性是相对于子群的射影性的一种推广。我们记 $\mathrm{mod}^H(kG) = \mathrm{mod}^{k_H\uparrow^G}(kG)$；对于 kG的一个块 B，记 $\mathrm{mod}^H(B) = \mathrm{mod}^{k_H\uparrow^G}(B)$。若一个 kG-模的短正合列在 H 上的限制分裂，则称其为 H-分裂。我们看到，一个 kG-模的短正合列是$k_H\uparrow^G$-分裂的，当且仅当它是 H-分裂的。在定义 3.1 中，进一步假设 B 和 B' 具有公共缺陷群 P。那么，对于 P的一个子群 Q，若 (M,N) 与 $W = k_Q\uparrow^G$和 $W' = k_Q\uparrow^{G'}$构成相对于 (W,W') 的稳定 Morita 型等价，则称 (M,N) 在 B和 B' 之间诱导相对于 Q 的稳定 Morita 型等价。根据此定义， X 和 Y 是 $Q\times Q$- 射影的，因为可得

$$(k_Q\uparrow^G)^*\otimes k_Q\uparrow^G \cong kG\otimes_{kQ} k_Q\otimes k_Q\otimes_{kQ} kG \cong k_{Q\times Q}\uparrow^{G\times G}.$$

注意，如果（M， N）在B 与 B'之间诱导出相对（W， W'）-稳定 Morita 型等价，那么一般而言， $-\otimes_B M$ 和 $-\otimes_{B'} N$ 并不会在 $\mathrm{mod}^W(B)$ 与 $\mathrm{mod}^{W'}(B')$ 之间诱导出等价。事实上，假设 （M， N）在 B 与 B'之间诱导出稳定 Morita 型等价。那么， X 和 Y是 1-射影的，因此对于某个非平凡的 p-子群 $Q\leqslant G$， X 是 $Q\times Q$-射影的。这意味着（M， N）诱导出相对（$k_Q\uparrow^G$， $k_1\uparrow^{G'}$）-稳定 Morita 型等价。然而， $-\otimes_B M$将具有顶点 Q的不可分解 B-模（它们是 $\mathrm{mod}^{k_Q\uparrow^G}(B)$中的零对象）映射为非投射的 B'-模。因此， $-\otimes_B M$并不会在 $\mathrm{mod}^{k_Q\uparrow^G}(B)$ 与 $\mathrm{mod}^{k_1\uparrow^{G'}}(B')$ 之间诱导出等价。

然而，我们可以证明，在适当假设下， B 和 B' 之间具有公共缺陷群 P 的相对 Q-稳定 Morita 型等价诱导出 $\mathrm{mod}^Q(B)$与$\mathrm{mod}^Q(B')$之间的三角范畴等价，其中 Q 是 P的子群。为证明这一点，需要以下引理。

引理 3.2。（参见 [17,引理 9.4]）设 W 是一个 kG-模，并且

$$E:\ 0\longrightarrow U_1\xrightarrow{f_1} U_2\xrightarrow{f_2} U_3\longrightarrow 0$$

一个 kG-模的短正合列。则以下条件等价：

(i) E 是 W-分裂的。(ii)对于任意 W-投射 kG-模 X，函子$\mathrm{Hom}_{kG}(X,-)$ 是正合的。(iii) 对于任意 W-投射 kG-模 Y，函子 $\mathrm{Hom}_{kG}(-,Y)$ 是正合的。

引理3.3.设 G 和 G' 是具有公共 p-子群 P 的有限群，满足 $\mathcal{F}_P(G) = \mathcal{F}_P(G')$。设 M 是一个 ΔP- 投射 p- 置换 $k[G\times G']$- 模，且 Q 是 P 的一个子群。则以下结论成立：

(i) 若 U 是 Q-投射 kG-模，则 $U\otimes_{kG} M$ 是 Q-投射。

(ii) 若一个 kG-模的短正合列

$$E: 0\longrightarrow U_1\xrightarrow{f_1} U_2\xrightarrow{f_2} U_3\longrightarrow 0$$

是 Q-分裂的，则 $E\otimes_{kG} M$ 是 Q-分裂的。

此外，如果 B 和 B' 分别是 G 和 G' 的块，且具有一个公共缺陷群 P，并且 M 是一个 B-B'-双模，同时还是一个 ΔP-投射的 p-置换 $k[G\times G']$-模，那么以下结论成立。

(iii) 函子 $-\otimes_B M$ 诱导出三角范畴 $\mathrm{mod}^Q(B) \to \mathrm{mod}^Q(B')$之间的函子。

证明。(i)：设 U 是一个 Q-投射 kG-模。那么，对于某个 kG-模 V， U 是 $V{\uparrow}_Q^G$ 的一个直和项。由于 M 是一个 ΔP-投射 p-置换模， M 是 $(\bigoplus_i k_{Q_i}{\uparrow}^P){\uparrow}_{\Delta P}^{G\times G'}$ 的一个直和项，其中通过同构 $P \cong \Delta P$， $\bigoplus_i k_{Q_i}{\uparrow}^P$ 被视为一个 $k\Delta P$-模。我们看到

$$M \mid (\bigoplus_i k_{Q_i}{\uparrow}^P){\uparrow}_{\Delta P}^{G\times G'} \cong (kG \otimes (\bigoplus_i k_{Q_i}{\uparrow}^P)) \otimes_{kP} kG' \cong \bigoplus_i kG \otimes_{kQ_i} kG'$$

因此我们有 马会 意大利 。

$$\begin{aligned} U \otimes_{kG} M \mid V{\uparrow}_Q^G \otimes_{kG} M \mid V{\uparrow}_Q^G \otimes_{kG} (\bigoplus_i kG \otimes_{kQ_i} kG') &\cong \bigoplus_i V{\uparrow}_Q^G{\downarrow}_{Q_i}{\uparrow}^{G'} \\ &\cong \bigoplus_i \bigoplus_{t\in[Q\backslash G/Q_i]} V^t{\uparrow}_{Q^t\cap Q_i}^{G'}. \end{aligned}$$

因此， $U \otimes_{kG} M$ 的任意不可分解直和项对于某个元素 $t \in G$ 都是 $Q^t \cap Q_i$-投射的。然后， t 在 $\mathcal{F}_P(G)$ 中诱导出一个共轭映射 $Q \cap Q_i^{t^{-1}} \to Q^t \cap Q_i$ 。根据假设，即 $\mathcal{F}_P(G) = \mathcal{F}_P(G')$，存在一个元素 $s \in G'$ 使得 $Q^s \cap Q_i^{t^{-1}s} = Q^t \cap Q_i$。这意味着 $U \otimes_{kG} M$ 是 Q-投射的。

(ii)：令 Y 为任意 Q-投射 kG'-模。由于 M 作为左 kG-模是投射的，函子 $-\otimes_{kG} M$ 是 $-\otimes_{kG'} M^*$的右伴随。因此，我们有如下交换图

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \mathrm{Hom}_{kG}(U_3, Y\otimes_{kG'} M^*) & \mathrm{Hom}^{f_2^*} & {}_{kG}U_2 & Y\otimes_{kG'} M^* & {}^{f_1^*} & {}_{kG}U_1 \quad Y\otimes_{kG'} M^* \quad 0(,) \\ \mathrm{Hom}(,) & \wr & & \wr & & & \wr\ 0\,\mathrm{Hom}_{kG}(U_3\otimes_{kG} M, Y)\,\mathrm{Hom}_{kG}(\\ U_2\otimes_{kG} M, Y) & \mathrm{Hom}_{kG}(U_1\otimes_{kG} M, Y) & 0. & (f_2\otimes \mathrm{id}_M)^* & (f_1\otimes \mathrm{id}_M)^* & & \end{array}$$

由 (i) 可知， $Y \otimes_{kG'} M^*$ 是 Q-投射的，因此根据引理 3.2，上述图中的第一行是正合的。这又由引理 3.2 推出 $E \otimes M$ 是 Q-分裂的。

(iii)：由 (i) 可知， $-\otimes_B M$ 诱导函子 $\mathrm{mod}^Q(B) \to \mathrm{mod}^Q(B')$。根据命题 6.3], ，$\mathrm{mod}^W(B)$ 中的每个可区别三角都同构于由某个 W-分裂短正合列导出的可区别三角。因此，我们可以像处理稳定范畴那样，证明由 $-\otimes_B M$ 诱导的函子 $\mathrm{mod}^Q(B) \to \mathrm{mod}^Q(B')$ 是三角范畴之间的函子。

□

现在我们证明本节的主要结果。

命题 3.4. 设 B 和 B' 分别是有限群 G 和 G' 的块，它们具有公共缺陷群 P，且 $\mathcal{F}_P(G) = \mathcal{F}_P(G')$。设 M 是一个 B-B'-双模，作为 $k[G\times G']$-模时是 ΔP-投射的 p-置换模；设 N 是一个 B'-B-双模，作为 $k[G'\times G]$-模时是 ΔP-投射的 p-置换模。设 Q 是 P 的一个子群。若 (M, N) 诱导相对 Q-稳定 Morita 型等价，则 $-\otimes_B M$ 和 $-\otimes_{B'} N$ 是 $\mathrm{mod}^Q(B)$ 与 $\mathrm{mod}^Q(B')$ 之间的三角范畴等价。

证明. 根据引理 3.3 (iii)， $-\otimes_B M$和 $-\otimes_{B'} N$在 $\mathrm{mod}^Q(B)$ 与 $\mathrm{mod}^Q(B')$ 之间诱导三角范畴的函子。因此，只需证明这些函子是等价。对于一个 B-B'-双模 X，它作为 $k[G\times G']$-模是 $Q\times Q$-投射的，并且对于一个 kG-模 U，我们可知 $U \otimes_B X$ 是 Q-投射的。因此，结论可由与稳定范畴相同的论证得出。

□

我们以一则关于相对稳定范畴$\mathrm{mod}^W(B)$定义的评论结束本节。对于$\mathrm{mod}^W(B)$, kG-模W不一定属于B，因为属于B的kG-模可能相对于属于B以外的块的模是投射的。事实上，设B是G的一个非主块，且S是一个简单的B-模。那么$P(S)$是$P(k_G)\otimes S$的一个直和项，其中$P(S)$和$P(k_G)$分别是S和k_G的投射覆盖。这意味着属于B的$P(S)$相对于属于$B_0(G)$的$P(k_G)$是投射的。事实上，这一观察对任意kG-模都成立，而不仅仅对投射模成立：

注 3.5. 对于子群H，kG-模U是$k_H{\uparrow}^G$-投射的（或等价地，H-投射的），当且仅当U相对于$S(G,H)$是投射的，而后者属于$B_0(G)$。事实上，如果U是$S(G,H)$-投射的，那么由Frobenius互反律可知，U是H-投射的。反过来，假设U是H-投射的。存在一个H-分裂满射$S(G,H)\to k_G$，因为$S(G,H)$是k_G的相对H-投射覆盖（见[21, 命题 3.1]）。于是，$S(G,H)\otimes U\to U$仍是一个H-分裂满射。由于U是H-投射的，该满射分裂，因此U是$S(G,H)$- 投射的。

4 定理 1.1 和定理1.2 的证明

在本节中，我们证明定理 1.1和定理1.2。

我们需要以下两个引理来证明定理 1.1。

引理 4.1.（参见 [10, 引理 3.3]）设G和G'是具有公共 Sylow p-子群P的有限群，满足$\mathcal{F}_P(G)=\mathcal{F}_P(G')$，$M$是一个$\Delta P$-投射$p$-置换$k[G\times G']$-模，且$Q$是$P$的子群。那么下列条件等价：

(i) Scott模$S(G',Q)$是$k_G\otimes_{kG}M$的一个直和项。

(ii) Scott模$S(G\times G',\Delta Q)$是M的一个直和项。

尽管我们可以从[14, 命题 4.6]，中得到以下引理，但为了方便读者，我们仍给出证明。

引理 4.2. 设G和G'是有限群，它们有一个共同的 Sylow p-子群P，使得$\mathcal{F}_P(G)=\mathcal{F}_P(G')$，并设$M=S(G\times G',\Delta P)$。那么存在一个$B_0(G)$-$B_0(G)$-双模的同构

$$M\otimes_{B_0(G')}M^*\cong B_0(G)\oplus X,$$

其中X是一个作为$k[G\times G]$-模的ΔP-投射p-置换模。

证明. 设$B=B_0(G)$且$B'=B_0(G')$。

设X'是$M\otimes_{B'}M^*$的一个不可分解直和项。由[15,定理 5.1.16]，X'有一个顶点R，它是$\Delta_t(P\cap P^{t^{-1}})$的子群：$=\{(x,x^t)\mid x\in P\cap P^{t^{-1}}\}$，其中某个$t\in G'$，且有一个与$(k_P\otimes k_{P^{t^{-1}}})\downarrow^{\Delta_t(P\cap P^{t^{-1}})}_R$ $\cong k_R$同构的源，其中$k_P\otimes k_{P^{t^{-1}}}$通过同构$P\cap P^{t^{-1}}\cong\Delta_t(P\cap P^{t^{-1}})$被视为$k\Delta_t(P\cap P^{t^{-1}})$-模。因此$M\otimes_{B'}M^*$是一个$p$-置换模。我们看到$t$在$\mathcal{F}_P(G')$中诱导出一个共轭映射$P\cap P^{t^{-1}}\to P^t\cap P$。根据假设$\mathcal{F}_P(G)=\mathcal{F}_P(G')$，存在一个元素$s\in G$，使得对任意$x\in P\cap P^{t^{-1}}$都有$x^s=x^t$。因此我们有

$$R^{(s,1)}\le\{(x^s,x^t)\mid x\in P\cap P^{t^{-1}}\}=\Delta(P^t\cap P),$$

其中 im 因此$R\le_{G\times G}\Delta P$。由此，$M\otimes_{B'}M^*$是一个ΔP-投射的p-置换模。

由于P是G'的 Sylow p-子群，因此$S(G',P)\cong S(G',G')=k_{G'}$。由此，利用两次引理 4.1，我们得到$(k_G\otimes_B M)\otimes_{B'}M^*\cong k_G\oplus Y$，其中$Y$是一个$B$-模。再次根据引理 4.1，我们可知$S(G\times G,\Delta P)\cong B$是$M\otimes_{B'}M^*$的一个直和项。 □

现在我们证明定理 1.1。

定理 1.1 的证明。请注意，在证明中，我们使用该同构

$$(M \otimes_{B'} M^*)(\Delta Q) \cong M(\Delta Q) \otimes_{B_0(C_{G'}(Q))} M(\Delta Q)^*$$

对于任意子群 Q 的 P（参见 [19, 定理 4.1]的证明）。

令 $B = B_0(G)$ 和 $B' = B_0(G')$。

(ii) $\Rightarrow$ (i)：我们可以写作 $M \otimes_{B'} M^* \cong B \oplus X$，其中 X 是一个 B-B-双模，作为 $k[G \times G]$-模是 $Z \times Z$-投射的。因此，对于 P 的任意子群 Q，都有，

$$M(\Delta Q) \otimes_{B_0(C_{G'}(Q))} M(\Delta Q)^* \cong (M \otimes_{B'} M^*)(\Delta Q) \cong (B \oplus X)(\Delta Q) \cong B_0(C_G(Q)) \oplus X(\Delta Q).$$

由于 X 是 $Z \times Z$-投射，根据引理 2.1，如果 Q 真包含 Z，则$X(\Delta Q) = 0$。类似地，我们看到 $M(\Delta Q)^* \otimes_{B_0(C_G(Q))} M(\Delta Q) \cong B_0(C_{G'}(Q))$，对于任意子群$Q$ （其为 P 的真包含 Z）。

(i) $\Rightarrow$(ii)：根据引理 4.2，我们可以写成 $M \otimes_{B'} M^* \cong B \oplus X$，其中 X 是一个 ΔP-投射p-置换 $k[G \times G']$-模。为证明 X 是 $Z \times Z$-投射的，我们证明 X 是 ΔZ-投射的。设 X' 是 X 的任意不可分解直和项。由于 ΔZ 是中心 $Z(G \times G')$ 中包含于 ΔP 的一个 p-子群，由引理 2.2 可得

$$(M \otimes_{B'} M^*)(\Delta Z) \cong M(\Delta Z) \otimes_{B_0(C_{G'}(Z))} M(\Delta Z)^* \cong M \otimes_{B'} M^*.$$

另一方面，我们有

$$(M \otimes_{B'} M^*)(\Delta Z) = (B \oplus X)(\Delta Z) \cong B(\Delta Z) \oplus X(\Delta Z) \cong B \oplus X(\Delta Z),$$

其中，最后一个同构根据引理 2.2 对 $B(\Delta Z) \cong B$ 成立。因此可得 $X(\Delta Z) \cong X$。这意味着 $X'(\Delta Z) \neq 0$，从而根据引理 2.1 (i)，X' 的一个顶点 R 包含 ΔZ。现在，我们有 $\Delta Z \leq R \leq_{G \times G} \Delta P$。这意味着，如果我们能够证明对于 P 中任意一个严格包含 Z 的子群 Q，都有 $X'(\Delta Q) = 0$，那么由引理 2.1 (ii) 可得 $R = \Delta Z$。因此，设 Q 是 P 中任意一个严格包含 Z 的子群。由于 ($M(\Delta Q)$ $M(\Delta Q)^*$) 在 $B_0(C_G(Q))$ 与 $B_0(C_{G'}(Q))$ 之间诱导出一个 Morita 等价，我们有

$$(M \otimes_{B'} M^*)(\Delta Q) \cong M(\Delta Q) \otimes_{B_0(C_{G'}(Q))} M(\Delta Q)^* \cong B_0(C_G(Q)).$$

另一方面，我们有

$$(M \otimes_{B'} M^*)(\Delta Q) \cong B_0(C_G(Q)) \oplus X(\Delta Q).$$

因此我们看到 $X(\Delta Q) = 0$，特别是 $X'(\Delta Q) = 0$。最后，我们有 X 是ΔZ-投射的。同样，若我们写作 $M^* \otimes_B M \cong B' \oplus Y$，则 Y是 ΔZ-投射的。 □

设 B 是 G 的一个块，其缺陷群为 P，且 S 是一个属于 B的简单 kG-模。那么$P \cap Z(G)$包含在 S的一个顶点中，因为 $P \cap Z(G)$在 S上平凡作用。下面的引理给出了顶点等于 $P \cap Z(G)$的一个条件。

引理 4.3.设 B 是 kG 的一个块，其缺陷群为 P。则以下各项等价：

(i) 块 B 有一个顶点为 $P \cap Z(G)$ 的简单模。

[{"id":0,"output":"
(ii) $P \leq Z(G)$。"}]

此外，如果这些条件成立，那么 B 有一个唯一的简单模。

证明。(ii) ⇒ (i)：由于 P 是 G的正规 p子群，因此 P 在任意简单 B-模 S上平凡作用。因此，由 [16, 第4章定理7.8 (i)], 可知， S 有一个包含P的顶点。这蕴含(i)。

(i) ⇒ (ii)：设 $Z = P \cap Z(G)$，且 S 是一个具有顶点 Z的单 B-模。因此 S 是投射的 $k[G/Z]$作为一个 $k[G/Z]$-模。设 B 是 $k[G/Z]$ 的缺陷为零的块，其中 S 属于该块。于是 B 具有唯一的不可约特征，并且当将其视为 G的特征时，它属于 B 。因此，根据 [16, 第5章、引理8.6(ii)] ，我们看到 B 支配 B_0。此外，根据 [16, 第5章、定理8.11], B 是被 B支配的 $k[G/Z]$ 的唯一块。由 [16, 第5章、定理 8.10] 可得 $P/Z = 1$。因此(ii)得证。

假设这些条件成立。在上述论证中，由于 B 有唯一的简单模，根据 [16, 第5章定理8.11]， B 也有唯一的简单模。 □

以下命题是证明定理1.2的关键结果。这是对 [13, 命题2.3] 关于在某些条件下相对于中心 p-子群的射影性的推广。

命题 4.4. 设 G 和 G' 是具有共同 p-子群 P的有限群，且 M 是一个以 ΔP为顶点的平凡源 $k[G \times G']$-模。假设 Z是 P的真子群，且包含于$Z(G)$中。那么 $\mathrm{soc}(kG) \otimes_{kG} M$是一个非零 kG'-模，不含非零的 Z-投射直和项。特别地，对于任意简单 kG-模 S， kG'-模 $S \otimes_{kG} M$不含非零的 Z-投射直和项。

证明。由于 Z 是 p 的正规子群，故 Z 在任意单 kG-模上都平凡作用。又由于 M 是 $kG \otimes_{kP} kG'$ 的直和项，对任意元素 $m \in M$ 和 $z \in Z$ ，都有 $mz = zm$ 。因此， Z 在 $\mathrm{soc}(kG) \otimes_{kG} M$ 上平凡作用。这意味着 $\mathrm{soc}(kG) \otimes_{kG} M$ 的任意不可分解直和项的顶点都包含 Z（参见 [16, 第 4 章，定理 7.8 (i)]）。因此，若能证明 $\mathrm{soc}(kG) \otimes_{kG} M$ 作为 $k[G'/Z]$-模没有非零投射直和项，则结论成立。令 $\pi_Z \colon kG' \to k[G'/Z]$ 为典范代数同态。于是，这等价于说 $(\mathrm{soc}(kG) \otimes_{kG} M)\mathrm{soc}(k[G'/Z]) = 0$，根据 [15, 命题 4.11。7], 并且我们有如下同构

$$\begin{aligned}(\mathrm{soc}(kG) \otimes_{kG} M)\mathrm{soc}(k[G'/Z]) &\cong (\mathrm{soc}(kG)M)\pi_Z^{-1}(\mathrm{soc}(k[G'/Z])) \\ &\cong M\mathrm{soc}(kG^{\mathrm{op}}) \otimes \pi_Z^{-1}(\mathrm{soc}(k[G'/Z])),\end{aligned}$$

其中 kG^{op} 是 kG的逆代数。因此我们证明，

$$M\mathrm{soc}(kG^{\mathrm{op}}) \otimes \pi_Z^{-1}(\mathrm{soc}(k[G'/Z])) = 0.$$

由于 ΔZ 在 M上平凡作用，因此 M 可视为一个以 $\Delta P/\Delta Z$为顶点的 $k[G \times G'/\Delta Z]$-模。由于 kG^{op} 和 kG' 是交换环 kZ上的代数，我们可以将 $kG^{\mathrm{op}} \otimes_{kZ} kG'$ 视为一个 k-代数。令 θ : $kG^{\mathrm{op}} \otimes_{kZ} kG' \to k[G \times G'/\Delta Z]$ 为由 $\theta(g^{\mathrm{op}} \otimes g') = (g^{-1}, g')\Delta Z$给出的 k-代数同态。则 θ 是一个同构。这里需要注意，在 θ 的定义中取 kG 的反代数是必要的，这样才能使 θ 成为代数同态。我们可以考虑如下代数交换图。

$$\begin{array}{ccccc} kG^{\mathrm{op}} \otimes kG' & \xrightarrow{\sim} & k[G \times G'] & \longrightarrow & \mathrm{End}_k(M) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{\Delta Z}} & \nearrow & \\ kG^{\mathrm{op}} \otimes_{kZ} kG' & \xrightarrow[\theta]{\sim} & k[G \times G'/\Delta Z] & & \end{array},$$

其中 π是由 $\pi(g^{\mathrm{op}} \otimes g') = g^{\mathrm{op}} \otimes g'$给出的满射代数同态，方框上方的水平映射是一个同构，它将 $g^{\mathrm{op}} \otimes g'$ 映射到 $g^{-1} \otimes g'$，而 $\pi_{\Delta Z}$ 是规范的

代数同态。由于 P 是 M的顶点，且 $\Delta P/\Delta Z$ 非平凡，因此$M\mathrm{soc}(k[G\times G'/\Delta Z]) = 0$。所以，为了证明 $M\mathrm{soc}(kG^{\mathrm{op}}) \otimes \pi_Z^{-1}(\mathrm{soc}(k[G'/Z])) = 0$，只需证明

$$\pi(\mathrm{soc}(kG^{\mathrm{op}}) \otimes \pi_Z^{-1}(\mathrm{soc}(k[G'/Z]))) = \mathrm{soc}(kG^{\mathrm{op}}) \otimes_{kZ} \pi_Z^{-1}(\mathrm{soc}(k[G'/Z]))$$

包含于 $\theta^{-1}(\mathrm{soc}(k[G\times G'/\Delta Z])) = \mathrm{soc}(kG^{\mathrm{op}} \otimes_{kZ} kG')$。

由于 ΔZ 是 $G\times G'$ 的正规 p-子群，因此 $\pi_{\Delta Z}(J(k[G\times G'])) = J(k[G\times G'/\Delta Z])$，从而由上图可得，$\pi(J(kG^{\mathrm{op}} \otimes kG')) = J(kG^{\mathrm{op}} \otimes_{kZ} kG')$。我们看到

$$\begin{aligned} J(kG^{\mathrm{op}} \otimes_{kZ} kG') &= \pi(J(kG^{\mathrm{op}} \otimes kG')) \\ &= \pi(J(kG^{\mathrm{op}}) \otimes kG' + kG^{\mathrm{op}} \otimes J(kG')) \\ &= J(kG^{\mathrm{op}}) \otimes_{kZ} kG' + kG^{\mathrm{op}} \otimes_{kZ} J(kG'). \end{aligned}$$

令 $x^{\mathrm{op}} \otimes y \in \mathrm{soc}(kG^{\mathrm{op}}) \otimes_{kZ} \pi_Z^{-1}(\mathrm{soc}(k[G'/Z]))$。对于 $\alpha^{\mathrm{op}} \otimes \beta' \in J(kG^{\mathrm{op}}) \otimes_{kZ} kG'$，可得 $(x^{\mathrm{op}}\otimes y)(\alpha^{\mathrm{op}}\otimes\beta' = 0$，因为 $x^{\mathrm{op}} \in \mathrm{soc}(kG^{\mathrm{op}})$ 且 $\alpha^{\mathrm{op}} \in J(kG^{\mathrm{op}})$。令 $\beta^{\mathrm{op}}\otimes\alpha' \in kG^{\mathrm{op}}\otimes_{kZ} J(kG')$，并记 $y\alpha' = \sum_{t\in[G'/Z]}(\sum_{z\in Z}\lambda_{tz}z)t$。类似地，可得 $\pi_Z(y\alpha') = \pi_Z(y)\cdot\pi_Z(\alpha') = 0$，从而对任意 $t\in[G'/Z]$，均有 $\sum_{z\in Z}\lambda_{tz} = 0$。因此可得

$$\begin{aligned} (x^{\mathrm{op}} \otimes y)\cdot\beta^{\mathrm{op}} \otimes \alpha' &= (\beta x)^{\mathrm{op}} \otimes y\alpha' \\ &= (\beta x)^{\mathrm{op}} \otimes \sum_{t\in[G'/Z]}(\sum_{z\in Z}\lambda_{tz}z)t \\ &= \sum_{t\in[G'/Z]}(\beta x)^{\mathrm{op}}(\sum_{z\in Z}\lambda_{tz}z)\otimes t \\ &= \sum_{t\in[G'/Z]}(\beta x)^{\mathrm{op}}(\sum_{z\in Z}\lambda_{tz})\otimes t \\ &= 0, \end{aligned}$$

其中，倒数第二个等式成立，是因为 Z 在 $\mathrm{soc}(kG^{\mathrm{op}})$ 上平凡作用。因此，$\mathrm{soc}(kG^{\mathrm{op}}) \otimes_{kZ} \pi_Z^{-1}(\mathrm{soc}(k[G'/Z]))$ 被 $J(kG^{\mathrm{op}} \otimes_{kZ} kG')$ 消灭，结论得证。□

现在我们证明定理1.2。借助命题 4.4，可以用与 [13, Remark 2.7] 中类似的论证来证明。

定理1.2的证明。我们记

$$M \otimes_{B'} M^* \cong B \oplus X \text{ and } M^* \otimes_B M \cong B' \oplus Y,$$

其中，X 是一个作为 $k[G\times G]$-模的 $Q\times Q$-投射模，而 Y是一个作为 $k[G'\times G']$-模的 $Q\times Q$-投射模。

(i) 设 $M = M_1 \oplus M_2$，其中 M_1 和 M_2 是 B-B'-双模。则有

$$B \oplus X = (M_1 \oplus M_2) \otimes_{B'} M^* \cong (M_1 \otimes_{B'} M^*) \oplus (M_2 \otimes_{B'} M^*).$$

我们可以认为 B 是 $M_1 \otimes_{B'} M^*$的一个直和项。于是，$M_2 \otimes_{B'} M^*$ 是 $Q\times Q$-投射的。由于 $M_2 \otimes_{B'} M^*$ 作为右 kG-模是 Q-投射的，根据引理 3.3(i)，$M_2 \otimes_{B'} M^* \otimes_B M$作为右 kG-模是 Q-投射的。因此，$M_2 \otimes_{B'} M^* \otimes_B M$是 $Q\times Q$-投射的。我们看到

$$M_2 \otimes_{B'} M^* \otimes_B M = M_2 \otimes_{B'} (B' \oplus Y) \cong M_2 \oplus (M_2 \otimes_{B'} Y).$$

因此， M_2 是 $Q \times Q$-投射的。

(ii) 令 S 为任意简单 B-模。首先注意到， B 没有 Z-投射简单模。事实上， S 具有一个包含 $Z(G) \cap P$ 的顶点。因此，如果 $Z < Z(G) \cap P$，那么显然 S 不是 Z- 投射的。如果 $Z = Z(G) \cap P$，那么根据关于 Z的假设， $Z(G) \cap P \neq P$，从而根据引理 4.3， S 不是 Z-投射的。

根据上述备注，以及 (M, M^*) 诱导出一个 Z-稳定 Morita型等价，我们可以写成 $S \otimes_B M = V \oplus Y$，其中 V是一个不可分解的非 Z-投射 B'-模，而 Y是一个 Z-投射模。然而，根据命题 4.4， $S \otimes_B M$ 没有非零 Z-投射直和项，因此 $Y = 0$。

(iii) 假设对任意简单的 B-模 S， $S \otimes_B M$ 都是简单的。只需证明 $X = 0$ （参见 $[19,$ 定理 2.1$]$，以及 $[15,$ 定理 4.14.10$]$ 的证明）。由于 $S \otimes_B M$ 是简单的，由 (ii) 可知 $S \otimes_B M \otimes_{B'} M^*$ 不可分解且非 Z-投射。另一方面，我们看到，

$$S \otimes_B M \otimes_{B'} M^* \cong S \otimes_B (B \oplus X) \cong S \oplus (S \otimes_B X).$$

因此 $S \otimes_B X = 0$。由于 X 是一个 B-模上的投射模，可知 $0 = S \otimes_B X \cong \mathrm{Hom}_B(X^*, S)$。这就迫使 $X = 0$。 □

5 定理 1.3 的证明

在本节中，我们定义相对 Brauer 不可分解性，并证明定理 1 .3.

在 $[9]$, 中引入了布劳尔不可分解性的概念。若有限群 G 和 G' 具有一个公共的 Sylow p-子群 P，并且 $M = S(G \times G', \Delta P)$，那么为了应用 Brou´e 的方法$[4,$ 定理6.3$]$， $M(\Delta Q)$ 必须对于任意非平凡子群 Q （其为 P 的子群）作为一个 $B_0(C_G(Q))$-$B_0(C_{G'}(Q))$-双模而不可分解。这意味着 M 必须是 Brauer 不可分解的。另一方面，如果 P 有一个在 G 和 G'中心的子群 Z ，那么为了应用定理 1.1， $M(\Delta Q)$ 只需对于任意适当包含 Z的非平凡子群 Q （其为 P 的子群）作为一个 $B_0(C_G(Q))$-$B_0(C_{G'}(Q))$-双模而不可分解。因此我们无需知道 M 是Brauer 不可分解的。因此我们定义相对 Brauer 不可分解性:

定义 5.1. 设 M 是一个 kG-模，且 R 是 G 的一个 p-子群。若对于任意包含 R 的 G 的 p-子群 Q ，Brauer 构造 $M(Q)$ 作为一个 $kQC_G(Q)$-模都是不可分解的（或为零），则称 M 是相对 R-Brauer 不可分解的。

注 5.2. 设 M 是一个 kG-模。对于任意 $g \in G$，有

$$(M(Q)\downarrow_{QC_G(Q)}^{N_G(Q)})^g \cong M(Q)^g\downarrow_{(QC_G(Q))^g}^{N_G(Q)^g} \cong M(Q^g)\downarrow_{Q^gC_G(Q^g)}^{N_G(Q^g)}.$$

Hence $M(Q)\downarrow^{N_G(Q)QC_G(Q)}$ 不可分解，当且仅当 $M(Q^g)\downarrow^{N_G(Q^g)Q^gC_G(Q^g)}$ 不可分解 $e.$

设 M 是一个 kG-模，且 R 是 G 的一个 p-子群。根据定义，如果 M 是 Brauer 不可分解的，那么对于任意 G 的 p-子群 R ， M 都是相对 R-Brauer 不可分解的。特别地，相对 1-Brauer 不可分解性就是 Brauer 不可分解性。此外，如果 R' 是与 R 共轭的 G 的一个 p-子群，那么根据注 5.2， M 是相对 R-Brauer 不可分解的，当且仅当 M 是相对 R'-Brauer 不可分解的。

我们重新陈述不可分解 kG-模的相对 Brauer 不可分解性的定义:

引理 5.3.设 M 是一个具有顶点 P 的不可分解 kG-模，且 R 是 G 的一个 p-子群。则以下各项等价:

(i) 模 M 是相对 R-Brauer 不可分解的。

(ii) 对于任何满足 $R \leq_G Q$ 的 P 子群 Q，Brauer 构造 $M(Q)$ 是不可分解的 $kQC_G(Q)$-模或零。

证明. (i) $\Rightarrow$(ii)：由注 5.2 可立即得出。

(ii) $\Rightarrow$ (i)：设 Q 是包含 R 的任意 p-子群。由引理 2.1，若 $Q \not\leq_G P$, ，则 $M(Q) = 0$。因此，我们可以假设 $Q \leq_G P$。于是，对于某个 $g \in G$，有 $R^g \leq Q^g \leq P$，从而 $R \leq_G Q^g \leq P$。由于 $M(Q^g)\downarrow_{Q^gC_G(Q^g)}$ 不可分解或为零，根据注 5.2，$M(Q)\downarrow_{QC_G(Q)}$ 也不可分解或为零。

□

在定理 1.3 的证明中，我们将用到以下引理。

引理 5.4. 设 M 是顶点为 P 的平凡源 kG-模。若 Q 是 G 的一个 p-子群，且满足 $Q <_G P$，则 $M(Q)$ 的任一不可分解直和项的顶点为 R，其中 $Q \lhd R \leq_{N_G(Q)} N_{P^t}(Q)$，对某个 $t \in G$ 成立。特别地，若 Q 是 P 的一个完全 $\mathcal{F}_P(G)$-规范化子群，则可得 $Q \lhd R \leq_{N_G(Q)} N_P(Q)$。

证明。设 Q 是 G 的一个 p-子群，使得 $Q <_G P$，且 N 是 $M(Q)$ 的一个不可分解直和项。由 [22, 习题 27.4 (b)] 可得

$$N \mid M(Q) \mid M\downarrow^G_{N_G(Q)} \mid k_P\uparrow^G\downarrow_{N_G(Q)} = \bigoplus_{t\in P\backslash G/N_G(Q)} k_{P^t\cap N_G(Q)}\uparrow^{N_G(Q)}.$$

因此，由 [22, 习题 27.4 (a)]，可知，N 的一个顶点为 R，使得对于某个 $t \in G$，有 $Q \leq R \leq_{N_G(Q)} P^t \cap N_G(Q)$。这意味着 Q 是 R 的一个正规子群。假设 $R = Q$。那么 Burry-Carlson-Puig 定理（[16, 定理 4.4.6 (ii)]）表明 M 的顶点为 Q，这与 $Q <_G P$ 这一假设矛盾。因此可知 $Q \lhd R$。

设 Q 是 P 的一个完全 $\mathcal{F}_P(G)$-正规化子群。那么由注 2.3 (ii) 可知，Q 是完全自同构化且可接收的。此外，对于某个 $u \in N_G(Q)$，有 $Q < R \leq P^{tu}$。因此，利用 [8, 引理 3.2]，可得

$$Q \lhd R \leq P^{tu} \cap N_G(Q) = N_{P^{tu}}(Q) \leq_{N_G(Q)} N_P(Q).$$

□

引理 5.5。（参见 [8, 定理 1.3] 的证明）设 G 的 p-子群 P 满足 $\mathcal{F}_P(G)$ 是饱和的。若 Q 是 P 的完全正规化子群，则 $S(N_G(Q)\ N_P(Q))$ 是 $S(G,P)(Q)$ 的直和项。

我们现在证明定理 1.3。尽管证明与 [8, 定理 1.3]，的证明基本相同，为方便读者，我们仍将其写出。

定理 1.3 的证明。(i) $\Rightarrow$(ii)：由引理 5.5 可立即得出

(ii) $\Rightarrow$ (i)：根据引理 5.3，只需证明对于任意子群 Q ，其属于 P 且满足 $R \leq_G Q$， $M(Q)\downarrow_{QC_G(Q)}$ 是不可分解的；我们对此关于指数 $|P :\ Q|$ 作归纳。首先，假设 $Q = P$。由 [9, 引理 4.3] 可知， $M(Q)\downarrow^{N_G}_{Q}{}_{QC_G(Q)}$是不可分解的。接下来，我们考虑情形 $|P :\ Q| > 1$，并假设对于任意子群 Q' ，其属于 P 且满足$R \leq_G Q'$，若 $|P :\ Q'| < |P :\ Q|$，则 $M(Q')\downarrow^{N_G}_{Q'}{}_{Q'C_G(Q')}$是不可分解的。根据注 5.2，我们不妨设 Q 是完全正规化的。因此由引理5.5 可得$S(N_G(Q)\ N_P(Q)) \mid M(Q)$。我们记

$$M(Q) = \bigoplus_{i=1}^{r} N_i$$

其中 $N_1 = S(N_G(Q)\ N_P(Q))$，且每个 N_i 都是对于 $2 \le i \le r$的不可分解 $kN_G(Q)$-模。现在假设 $r \ge 2$ 和 i 是一个整数，使得 $2 \le i \le r$。由于 Q 是 P的完全正规化子群，根据引理 5.4， N_i 具有一个顶点 Q'，使得

$$R \le_G Q \lhd Q' \le_{N_G(Q)} N_P(Q).$$

对 Q' 应用 Brauer 构造，我们有

$$N_1(Q') \oplus N_i(Q') \mid (M{\downarrow}^G_{N_G(Q)})(Q') \cong M(Q'){\downarrow}^{N_G(Q)}_{N_{N_G(Q)}(Q')},$$

其中，该同构由 Brauer 构造的定义可知。由于 Q 是 Q' 的正规子群，因此 $Q'C_G(Q') \le N_G(Q)$。于是，我们还可以将 $N_{N_G(Q)}(Q') = N_G(Q') \cap N_G(Q)$ 限制到 $Q'C_G(Q')$:

$$N_1(Q'){\downarrow}^{N_G(Q')\cap N_G(Q)}_{Q'C_G(Q')} \oplus N_i(Q'){\downarrow}^{N_G(Q')\cap N_G(Q)}_{Q'C_G(Q')} \mid M(Q'){\downarrow}^{N_G(Q')}_{Q'C_G(Q')}.$$

由于对于某个 $u \in N_G(Q)$，我们有 $R \le_G Q \lhd Q'^u \le P$，由归纳假设可知 $M(Q'^u){\downarrow}^{N_G}_{(Q'^u)Q'^uC_G(Q'^u)}$是不可分解的。因此， $M(Q'){\downarrow}^{N_G}_{(Q')Q'C_G(Q')}$是不可分解的。然而，我们看到 $N_1(Q') \ne 0$ 且 $N_i(Q') \ne 0$，因为 N_1 和 N_i 的顶点都包含 $N_G(Q)$ 中 Q' 的一个共轭。这就产生了矛盾。因此，我们得到 $r = 1$。最后，由假设 (ii)，我们有

$$M(Q){\downarrow}^{N_G(Q)}_{QC_G(Q)} \cong S(N_G(Q), N_P(Q)){\downarrow}^{N_G(Q)}_{QC_G(Q)}$$

是不可分解的。这意味着 (i)。

定理中的最后一项断言已在上述论证中得到证明。 □

6 示例

设 k 是特征 2 的代数闭域。设 $G = SL_2(11)$ 和 $G' = SL_2(3)$，以及 $B = B_0(G)$ 和 $B' = B_0(G')$。本节中，我们将运用主要定理证明 B 和 B' Morita 等价。

首先，我们考察 G 和 G' 的一些子群。我们看到， G 和 G' 有一个共同的西洛 2-子群 $P \cong Q_8$，即 8 阶四元群，满足 $\mathcal{F}_P(G) = \mathcal{F}_P(G')$。我们看到 $Z(G) \cap P = Z(G') \cap P =: Z \cong C_2$。设 Q_1 是 P 的一个 4 阶循环子群。那么， P、 Q_1 和 Z 是 P 的非平凡子群在 $\mathcal{F}_P(G)$- 共轭作用下的代表元。这些子群在 G 和 G' 中的中心化子如下:

$$C_G(P) = Z,\ C_G(Q_1) \cong C_{12},\ C_G(Z) = G, \tag{1}$$

$$C_{G'}(P) = Z,\ C_{G'}(Q_1) \cong C_4,\ C_{G'}(Z) = G'. \tag{2}$$

注意， P 中任何与 Q_1 在 $\mathcal{F}_P(G)$-共轭下的子群都是完全正规化的，因为它是 P的正规子群。

令 $M = S(G \times G', \Delta P)$。我们证明如下:

引理 6.1。Scott 模 M 是相对 Brauer 不可分解的。

注意，在这个例子中，引理 6.1 立即表明 M 是 Brauer 不可分解的，因为 P 的所有子群都包含 Z，除了平凡子群。

引理 6.1 的证明。我们利用定理 1.3 来证明。对于 P 的任意子群 Q，令

$$S_Q = S(N_{G\times G'}(\Delta Q), N_{\Delta P}(\Delta Q))\downarrow_{(\Delta Q)C_{G\times G'}(\Delta Q)}.$$

我们立即看出，对于 $Q \in \{Z, P\}$，S_Q 是不可分解的。事实上，若 $Q = Z$，则 $N_{G\times G'}(\Delta Z) = (\Delta Z)C_{G\times G'}(\Delta Z) = G \times G'$，且 $N_{\Delta P}(\Delta Z) = \Delta P$，因此 $S_Q = S(G \times G', \Delta P)$ 是不可分解的。考虑 $Q = P$ 的情形。根据引理 5.5，S_P 是 $M(\Delta P)\downarrow_{(\Delta P)C_{G\times G'}(\Delta P)}$ 的直和项；又由于 $\mathcal{F}_{\Delta P}(G \times G') \cong \mathcal{F}_P(G) = \mathcal{F}_P(G')$ 是饱和的，根据 [9,引理 4.3 (ii)]，$M(\Delta P)\downarrow_{(\Delta P)C_{G\times G'}(\Delta P)}$ 是不可分解的。因此 S_P 是不可分解的。

接下来，我们考虑 $Q = Q_1$ 的情形。从 (1) 和 (2) 可知，$C_{G\times G'}(\Delta Q) = C_G(Q) \times C_{G'}(Q)$ 是 2-幂零的。这意味着 $N_{G\times G'}(\Delta Q)$ 是 2-幂零的，因为 $N_{G\times G'}(\Delta Q)/C_{G\times G'}(\Delta Q) \cong N_G(Q)/C_G(Q) \cong C_2$。因此，由 [8, 定理 1.4] 可得，$S_Q$ 是不可分解的。 □

若 $g \in G$ 满足 $Q_1^g \leq P$，则由 (1)、(2) 以及假设 $\mathcal{F}_P(G) = \mathcal{F}_P(G')$ 可知，Q_1^g 是 $C_G(Q_1^g)$ 和 $C_{G'}(Q_1^g)$ 的一个公共西洛 2-子群。因此，对于任何真包含 Z 的 P 的子群 Q，$C_G(Q)$ 和 $C_{G'}(Q)$ 都有一个公共西洛 2-子群。我们证明如下结论：

引理 6.2. 设 Q 是 P 的任意一个真包含 Z 的子群，且 P_Q 是 $C_G(Q)$ 和 $C_{G'}(Q)$ 的一个公共西洛 2-子群。那么，$S(C_{G\times G'}(\Delta Q)\ \Delta P_Q)$ 与其对偶这一对，在 $B_0(C_G(Q))$ 和 $B_0(C_{G'}(Q))$ 之间诱导出 Morita 等价。

证明. 对于任何真包含 Z 的 P 的子群 Q，$C_G(Q)$ 和 $C_{G'}(Q)$ 都是 2-幂零的，因此结论成立（见引理 3.1]）。 □

接下来，我们证明如下结论：

引理 6.3. 对 (M, M^*) 的作用，在 B 与 B' 之间诱导出相对 Z-稳定 Morita 型等价。

证明. 利用定理 1.1 证明。根据引理 6.2，只需证明

$$S(C_{G\times G'}(\Delta Q), \Delta P_Q) \cong M(\Delta Q)\downarrow_{C_{G\times G'}(\Delta Q)}$$

对于任意真包含 Z 的子群 Q of P，其中 P_Q 是 $C_G(Q)$ 和 $C_{G'}(Q)$ 的公共西洛 2-子群。注意，若 Q 完全正规化，则由定理 1.3 和引理 6.1 可得

$$S(N_{G\times G'}(\Delta Q), N_{\Delta P}(\Delta Q))\downarrow_{C_{G\times G'}(\Delta Q)} \cong M(\Delta Q)\downarrow_{C_{G\times G'}(\Delta Q)}$$

是不可分解的。

首先，考虑情形 $Q = P$。则有 $C_G(P) = Z$ 和 $C_{G'}(P) = Z$，并且

$$S(N_{G\times G'}(\Delta P), \Delta P)\downarrow_{Z\times Z} \mid k_{\Delta P}\uparrow^{N_{G\times G'}(\Delta P)}\downarrow_{Z\times Z} \cong \bigoplus_{t\in[\Delta P\backslash N_{G\times G'}(\Delta P)/Z\times Z]} k_{\Delta Z}\uparrow^{Z\times Z}.$$

这意味着 $S(N_{G\times G'}(\Delta P)\ \Delta P)\downarrow_{Z\times Z} \cong S(Z \times Z, \Delta Z)$，因为 $k_{\Delta Z}\uparrow^{Z\times Z} = S(Z \times Z, \Delta Z)$。因此，我们有 $S(Z \times Z, \Delta Z) \cong M(\Delta P)\downarrow_{Z\times Z}$。

接下来，设 Q 是 P 的任意一个子群，且它与 Q_1 在 $\mathcal{F}_P(G)$ 下共轭。由于 $|\Delta P\backslash N_{G\times G'}(\Delta Q)/C_{G\times G'}(\Delta Q)| = 1$，我们看到

$$S(N_{G\times G'}(\Delta Q), N_{\Delta P}(\Delta Q))\downarrow_{C_{G\times G'}(\Delta Q)} \mid k_{\Delta P}\uparrow^{N_{G\times G'}(\Delta Q)}\downarrow_{C_{G\times G'}(\Delta Q)} \cong k_{\Delta Q}\uparrow^{C_{G\times G'}(\Delta Q)}.$$

因此，如同 $Q = P$ 的情形，我们看到 $S(C_{G\times G'}(\Delta Q)\ \Delta Q) \cong M(\Delta Q)\downarrow_{C_{G\times G'}(\Delta Q)}$。 □

我们描述非平凡简单 B-模限制到 P 的结构。主块 B 有三个简单模 k_G、 S_1、 S_2，其中 $\dim S_i = 5$、 $i = 1$、2（见 [1, 第 9.4 节4]）。我们证明如下:

引理 6.4. 对于 $i = 1$，2，

$$S_i{\downarrow_P} = k_P \oplus V_i,$$

其中 V_i 是一个顶点为 Z 的不可分解 kP-模。

证明. 根据 [7, 定理 3], , 每个 S_i 作为 $k[G/Z]$-模，都是顶点为P/Z 且属于 $B_0(G/Z)$ 的平凡源模，因此也是顶点为 P 且属于 B 的平凡源模。根据 [1,表 9.1]， S_1 和 S_2 分别给出不可约特征标 $R'_+(\theta_0)$ 和 $R'_-(\theta_0)$。设χ_i、 $i = 1$、.....、4 为 Q_8 的线性特征标，其中 χ_1 是平凡特征标。从 Q_8 的特征标表可知， $R'_+(\theta_0){\downarrow_P} = R'_-(\theta_0){\downarrow_P} = 2\chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \chi_4$。因此，若我们将 $S_i{\downarrow_P} = k_P \oplus V_i$ 写作某个 kP-模 V_i， $i = 1$，2，则每个 V_i 都给出相同的特征标 $\varphi = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \chi_4$。

我们证明每个 V_i 都是不可分解的。假设 V_i 不可分解。则存在一个非平凡划分 $\{\chi_j \mid j = 1, \ldots, 4\} = I_1 \sqcup \cdots \sqcup I_\ell$、 $2 \leq \ell \leq 4$，使得特征标 $\sum_{\chi \in I_m} \chi$、 $m = 1$、...、 ℓ 恰好是 V_i 的不可分解直和项所赋予的特征标。此外，根据 [12, Chapter II, Lemma 12.6 (ii)], , 每个 $\sum_{\chi \in I_m} \chi$ 都必须取非负整数值。然而，从 Q_8 的特征标表可见，对于任意非平凡划分 $\{\chi_j \mid j = 1, \ldots, 4\} = I'_1 \sqcup \cdots \sqcup I'_{\ell'}$，都存在 m 使得 $\sum_{\chi \in I'_m} \chi$ 取负值，矛盾。

我们看到， φ 除了对 Z 中的元素外均取零。因此，由 [12, 第二章，引理 12.6 (iii)] 可知， Z 是每个 V_i 的顶点。 □

最后，我们证明 (M, M^*) 在 B 与 B' 之间诱导出 Morita 等价。根据引理 6.3 和定理1.2 (iii)，只需证明函子 $- \otimes_B M$ 将简单的 B-模映射为简单的 B'-模。由定理1.2 (ii) 和引理 4.1 可得 $k_G \otimes_B M \cong k_{G'}$。由于 M 是 $k_{\Delta P}{\uparrow^{G \times G'}}$ 的一个直和项，利用引理 6.4，我们得到对于 $i = 1$，2，

$$S_i \otimes_B M \mid S_i{\downarrow_P}{\uparrow^{G'}} \cong k_P{\uparrow^{G'}} \oplus V_i{\uparrow^{G'}}.$$

由于 $V_i{\uparrow^{G'}}$ 是 Z-投射的，根据定理1.2 (ii)，可知 $S_i \otimes_B M$ 是 $k_P{\uparrow^{G'}}$ 的一个不可分解直和项。我们看到， $k_P{\uparrow^{G'}} \cong k_{G'} \oplus T_1 \oplus T_2$，其中 T_1 和 T_2 是 1 维的非平凡简单 B'-模，因而 $S_i \otimes_B M$ 是简单的。因此，根据定理1.2 (iii)，(M, M^*) 在 B 与 B' 之间诱导出 Morita 等价。

致谢

本研究得到日本学术振兴会（JSPS）科学研究费助成事业（KAKENHI）项目（编号：JP18K03255）的资助。

参考文献

[1] C. Bonnaf´e. $SL_2(\mathbb{F}_q)$ 的表示论，《代数与应用》第 13 卷。Springer-Verlag London，伦敦，2011年。[2] C. Broto、R. Levi 和 B. Oliver。融合系统的同伦论。《美国数学会会刊》，16(4):779–856，2003年。[3] M. Brou´e。关于 Scott 模和 p-置换模：通过 Brauer 态射的一种方法。《美国数学会会刊》，93(3):401–408，1985年。

[4] M. Brou´e.群代数块的等价。在《有限维代数及相关主题》（加拿大安大略省渥太华，1992年）中，NATO高等科学研究所系列 C：数学与物理科学，第424卷，第1–26页。克吕维尔学术出版社，多德雷赫特，1994年。[5]J.F. Carlson. 模与群代数。苏黎世联邦理工学院数学讲义。Birkh¨auser出版社，巴塞尔，1996年。[6] J. F.Carlson、C. Peng和 W. W. Wheeler。传递映射与虚拟射影性。《代数杂志》，204(1)：286–311，1998年。[7] K. Erdmann。具有二面体西罗2-子群的群的主块。《通信代数》，5(7)：665–694，1977年。[8] H. Ishioka和N. Kunugi。Scott 模的布劳尔不可分解性。《代数杂志》，470：441–449，2017年。[9] R. Kessar、N.Kunugi 和N.Mitsuhashi。关于饱和融合系统与 Scott 模的布劳尔不可分解性。《代数杂志》，340：90–103，2011年。[10] S.Koshitani 和 C. Lassueur。具有二面体缺陷群的主2-块的辉煌 Morita等价。《数学杂志》，294(1-2)：639–666，2020年。[11] S.Koshitani 和 C. Lassueur。具有广义四元数缺陷群的主块的辉煌 Morita 等价。《代数杂志》，558：523–533，2020年。[12] P.Landrock。有限群代数及其模，伦敦数学会讲义系列第84卷。剑桥大学出版社，剑桥，1983年。[13] M. Linckelmann。自内射代数和 p-群的莫里塔型稳定等价。《数学杂志》，223(1)：87–100，1996年。[14] M. Linckelmann。关于具有内置换源的稳定等价。《代数杂志》，434：27–45，2015年。[15] M. Linckelmann。有限群代数的块理论。第一卷，伦敦数学会学生文本第91卷。剑桥大学出版社，剑桥，2018年。[16] H.Nagao 和Y.Tsushima。有限群表示。学术出版社，波士顿，1989年。[17] T. Okuyama。群代数上模的射影覆盖的推广。[18] T.Okuyama。有限群的若干导出等价块。1997年。[19] J. Rickard。辉煌等价：导出范畴与置换模。《伦敦数学会会刊》（第3辑），72(2)：331–358，1996年。[20] K. Roberts和 S. Shpectorov。关于饱和融合系统的定义。《群论杂志》，12(5)：679–687，2009年。[21]J.Th´evenaz。相对射影覆盖与几乎分裂序列。《通信代数》，13(7)：1535–1554，1985年。[22] J. Th´evenaz。 G-代数与模表示论。《牛津数学专著》。克拉伦登出版社，牛津大学出版社，纽约，1995年。

[23] L. Wang 和 J. Zhang. 块的 Morita 型相对稳定等价. 纯粹与应用代数杂志, 222(9):2703–2717, 2018年。

Naoko Kunugi，东京理科大学数学系，1-3 Kagurazaka，新宿区，东京，162-8601，日本 电子邮箱：kunugi@rs.tus.ac.jp

通讯作者：Kyoichi Suzuki，东京理科大学理学研究科数学系，1-3 Kagurazaka，新宿区，东京，162-8601，日本 电子邮箱：1119703@ed.tus.ac.jp