arXiv:2304.05025v1 [math.ST] 11 Apr 2023

BHV 系统发育树空间中的黏性类型及其程度*

LarsLammers[1], Do Tran Van[1], Tom M. W.Nye[2], 和 Stephan F. Huckemann[1]

[1]哥廷根大学费利克斯-伯恩斯坦生物科学数学统计研究所，Goldschmidtstrasse 7, 37077 哥廷根，德国[2]纽卡斯尔大学数学、统计与物理学院，英国泰恩河畔纽卡斯尔
lars.lammers@uni-goettingen.de, do.tranvan@uni-goettingen.de, tom.nye@ncl.ac.uk stephan.huckemann@mathematik.uni-goettingen.de

摘要。 人们已经观察到，在Billera-Holmes-Vogtmann（BHV）系统发育树空间中，某些概率分布的样本均值在样本量足够大时会被限制在一个低维子空间内。这种非标准行为被称为黏性；当比较黏性分布的样本时，它会给统计应用带来困难。我们将先前关于黏性的结果加以拓展，证明在BHV空间这一特殊情形下，这种抽样行为等价于某些拓扑条件。此外，我们提出通过纳入弗雷歇函数的方向导数来缓解黏性分布的统计比较：即粘性程度。

关键词： 弗雷歇均值 · 哈达玛空间 · Wasserstein距离 · 统计判别。

1 引言

Billera、Holmes 和 Vogtmann（BHV）空间最早在 [4], 中提出，是一类度量空间，其元素为描述物种间潜在进化关系的树。由于能够对完整系统发育树样本进行统计分析，这类空间近年来受到广泛关注。从数学角度来看，它们尤其引人注目，因为已有结果表明它们是 Hadamard 空间 [4,引理 4.1], ，即具有全局非正曲率的完备度量空间。因此，度量具有许多凸性性质，例如，任意两点之间存在唯一的（除重新参数化外）测地线，并且对于具有有限一阶矩的分布，弗雷歇均值存在且唯一（见下文（1））[12]。弗雷歇均值是将期望自然推广到任意度量空间的一种方式（M, d），它是概率分布 $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^1(M)$的期望平方距离的极小化点。这里，$\mathcal{P}(M)$表示定义在 M 上的所有博雷尔概率分布构成的族，并且

$$\mathcal{P}^1(M) = \left\{ \mathbb{P} \in \mathcal{P}(M) \;\middle|\; \forall x \in M : \int_M d(x,y)\, \mathrm{d}\mathbb{P}(x) < \infty \right\}.$$

* 由 DFG GK 2088 和 DFG HU 1575/7 资助。

对于分布 $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^1(M)$，弗雷歇均值 $b(\mathbb{P})$ 是 弗雷歇函数的极小化点集合

$$F_{\mathbb{P}}(x) = \frac{1}{2}\int_M \left(d^2(x,y) - d^2(z,y)\right) \mathrm{d}\mathbb{P}(y) \quad x \in M, \tag{1}$$

对于任意的 $z \in M$。在哈达玛空间中，尽管弗雷歇函数严格凸，但在某些空间里，从某些分布中抽样会导致样本弗雷歇均值出现退化行为：当随机样本量达到有限值后，它会被限制在空间的低维子集中。这种现象称为黏性，已在包括BHV空间在内的各种空间中得到研究，参见 [2,3,8,9]。渐近残差方差的缺失或降低会使标准统计方法失效或加剧其局限性。

在 [9], 一个拓扑黏性概念被提出：给定概率空间集合上的某个拓扑，如果足够小的邻域中的所有分布的弗雷歇均值都位于 $S \subset M$，则分布具有黏性于 $S \subset M$。此外，对于所谓的$kale$，还证明了样本黏性等价于拓扑黏性；这种拓扑黏性是通过赋予$\mathcal{P}^1(M)$ Wasserstein距离而诱导的。

$$W_1(\mathbb{P},\mathbb{Q}) = \underset{\pi \in \Pi(\mathbb{P},\mathbb{Q})}{\operatorname{argmin}} \int_{M\times M} d(x,y)\mathrm{d}\pi(x,y),$$

其中，$\Pi(\mathbb{P},\mathbb{Q})$ 表示 $\mathbb{P},\mathbb{Q} \in \mathcal{P}^1(M)$ 的所有耦合集合。

本文通过使用弗雷歇函数的方向导数，证明了 BHV 空间正余维分层中两种黏性概念的等价性。此外，我们提出将这些方向导数用作工具，以区分均值无法区分的黏性分布。

2 比莱拉–霍姆斯–沃格特曼系统发育树空间

对于 $N \in \mathbb{N}$ 和 $N \geq 3$，BHV 树空间 $\mathbb{T}_N$ 通过内部边的正长度来表示具有 N 个带标签叶节点的有根树。这里，内部边是叶节点集合与根的一个分裂，且两部分都至少包含两个元素。一棵树的分裂集合决定了其拓扑。每当出现新的内部节点或现有节点合并时，拓扑就会发生变化。

定义 1. 具有相同拓扑的树构成一个层 $\mathbb{S} \subset \mathbb{T}_N$。如果该层的拓扑包含 $N-2-l$ 个分裂，我们就称其余维为 $l \geq 0$。
最高可能的层维数为 $N-2$，这出现在二叉拓扑中，也就是完全解析的树。

在闭分层中采用欧几里得几何，并在其边界处将它们粘合起来，[4] 便得到可分哈达玛空间（$\mathbb{T}_N$，d）。因此，BHV 树空间中两棵树之间的测地线对应于改变两棵树中共有的分裂的长度，并添加和移除其他分裂。两棵树之间的测地线可以在多项式时间内计算 [11]。

对于 $x \in \mathbb{T}_N$，令 $B_\epsilon(x)$ 表示 $\mathbb{T}_N$ 中半径为 $\epsilon > 0$ 的开球。于是，作为该构造的直接推论，我们得到如下结论。

引理 1. 设 $\mathbb{S} \subset \mathbb{T}_N$ 是任意一个层 $l \geq 1$。那么，对于任意 $x \in \mathbb{S}$，存在 $\epsilon > 0$，使得 $B_\epsilon(x) \cap \mathbb{S}$ 在 $\mathbb{S}$中是闭集。此外，任意 $y \in B_\epsilon(x)$的拓扑都包含 x中存在的所有分裂。

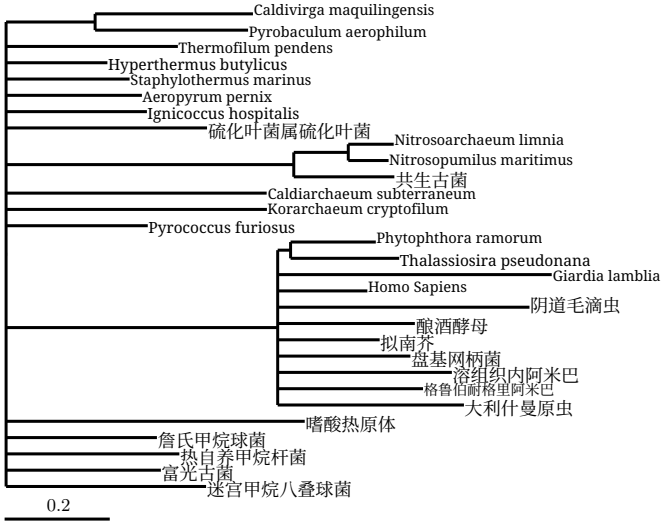


图 1： 将真核生物（智人）置于古菌之中：来自 *[14]* 的数据集的弗雷歇均值是一棵高度未解析的系统发育树。水平线的长度对应于进化距离，垂直线对应于共同节点，最左侧的垂直线代表共同根。

3 哈达玛空间的性质

有关全面概述，请参阅 [5,6,12]。在Hadamard 空间 (M, d) 中，如果函数 $f: M \to \mathbb{R}$ 与测地线的所有复合函数都是（严格）凸的，则称其为（严格）凸函数。凸集是包含集合中两点之间所有测地线段的集合。严格凸函数的一个例子是弗雷歇函数。除这种凸性之外，我们还将需要以下结果。

定理 1（ [1]中的定理 2.1.12）。设 (M, d) 是一个 *Hadamard* 空间，且 $S \subset M$ 是一个闭凸集。那么，以下关于度量投影 $\mathrm{P}_S: \ M \to S, x \mapsto \operatorname{argmin}_{y \in S} d(x, y)$的结论成立。

*1.*映射 $x \mapsto \mathrm{P}_S(x)$ 对所有 $x \in M$都是单值的。 *2.* 对任意 x, $y \in M$，有 $d\left(\mathrm{P}_S(y), \mathrm{P}_S(x)\right) \leq d(x, y)$。

备注 *1*。由于BHV空间的分层在局部上是欧几里得的，将一棵树度量投影到一个相邻的正余维层上，等价于简单地移除冗余的分裂，并保留该层拓扑中体现的分裂及其各自的长度。

定理 2（ [12]）。令 (M, d) 为可分哈达玛空间。则 d（b（$\mathbb{P}$） b（$\mathbb{Q}$） $\leq W_1$（$\mathbb{P}, \mathbb{Q}$）对任意两个 $\mathbb{P}, \mathbb{Q} \in P^1$（$M$）成立。

4 方向空间

在 Hadamard空间（M, d）中，可以计算从同一点 $x \in M$ 出发的两条（非恒定）测地线 γ, γ' 之间的角度。这个角度称为 亚历山德罗夫角 $\angle_x$，其计算如下 [6, 第 3]

$$\angle_x(\gamma, \gamma') = \lim_{t,t' \searrow 0} \arccos\left(\frac{t^2 + t'^2 - d(\gamma(t), \gamma'(t'))}{2t \cdot t'}\right).$$

若两条测地线之间的 Alexandrov 角为 0，则称它们在 x 处具有等价的方向。这些等价类的集合称为 处的方向空间，记作 $\Sigma_x M$。赋予 Alexandrov 角后，方向空间本身成为一个球面度量空间。概述可参见例如 [6] 第 9 章。对于点 x、y、$z \in M$，我们用 $\mathrm{dir}_x(y)$ 表示从 x 到 y 的（单位速度）测地线的方向，并用 $\angle_x(y, z) = \angle_x(\mathrm{dir}_x(y), \mathrm{dir}_x(z))$ 表示。

设 $\mathbb{S} \subset \mathbb{T}_N$ 为一个具有正余维 $l \geq 1$ 的层，并令

$$(\Sigma_x \mathbb{T}_N)^{\perp} = \{\mathrm{dir}_x(z) | z \neq x,\ z \in \mathrm{P}_{\mathbb{S}}^{-1}(\{x\})\},$$
$$(\Sigma_x \mathbb{T}_N)^{\parallel} = \{\mathrm{dir}_x(z) | z \neq x,\ z \in \mathbb{S}\}.$$

以下引理讨论 BHV 树空间中方向空间的结构。其灵感来自 [3] 中关于正交空间切锥的研究。对于两个度量空间 (M_1, d_1),(M_2, d_2)，回顾它们的球面连接

$$M_1 * M_2 = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times M_1 \times M_2 / \sim \cong \left\{(\cos\theta\, p_1, \sin\theta\, p_2) : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, p_i \in M_i, i = 1, 2\right\}$$

配备度量

$$d\big((\theta, p_1, p_2), (\theta, p_1, p_2)\big) = \arccos\left(\cos\theta\cos\theta' d_1(p_1, p_1') + \sin\theta\sin\theta' d_2(p_2, p_2')\right).$$

特别是，当 M_i是一个维数为 n_i的球面时，这使得 $M_1 * M_2$ 成为一个维数为 $n_1 + n_2 + 1$ 的球面，$i = 1, 2$。

引理 2. 设 $\mathbb{S} \subset \mathbb{T}_N$ 是一个正余维为 $l \geq 1$ 且 $x \in \mathbb{S}$的层。那么，它的方向空间可以赋予球面连接的结构

$$\Sigma_x \mathbb{T}_N \cong (\Sigma_x \mathbb{S})^{\parallel} * (\Sigma_{\mathbb{S}} \mathbb{T}_N)^{\perp}, \quad (\Sigma_{\mathbb{S}} \mathbb{T}_N)^{\perp} \cong (\Sigma_x \mathbb{T}_N)^{\perp}$$

证明。对于充分小的 $\epsilon > 0$，对于任何从 x 出发的测地线，由引理 1 得到的 $B_\epsilon(x)$ 使其方向 $\sigma \in \Sigma_x \mathbb{T}_N$ 与点 $y_\sigma \in \partial B_\epsilon(x)$ 之间存在一一对应，其中 $d(x, y_\sigma) = \epsilon$。这便产生了连接的角度部分

$$\theta : \Sigma_x \mathbb{T}_N \to [0, \pi/2], \sigma \mapsto \arcsin\left(\frac{d(y_\sigma, \mathbb{S})}{\epsilon}\right).$$

此外，正如引理1之前所述， y 的拓扑包含 x 的所有分裂以及至多 l 个额外分裂。通过映射 $y \mapsto x_y : \partial B_\epsilon(x) \to B_\epsilon(x)$，将 x 中不存在于 x的 y的所有分裂连同其取自 y的长度添加到，设

$$y^\perp := x_y, \quad y^\parallel := P_{\mathbb{S}}(x_y)\,,$$

其中，如果 x_y 和 x'_y 在 $x \in \mathbb{S}$ 和 $x' \in \mathbb{S}$ 处移除分别属于 x 和 x' 的分裂长度后所得的分裂长度相同，我们就将它们的方向视为相同。结合

$$\phi^\perp(\sigma) := \mathrm{dir}_x(y^\perp_\sigma), \quad \phi^\parallel(\sigma) := \mathrm{dir}_x(y^\parallel_\sigma),$$

从而得到（第二个因子与基点无关）：

$$\Phi : \Sigma_x \mathbb{T}_N \to (\Sigma_x \mathbb{S})^\parallel * (\Sigma_x \mathbb{T}_N)^\perp, \quad \sigma \mapsto \Big(\theta(\sigma), \phi^\parallel(\sigma), \phi^\perp(\sigma)\Big)\,.$$

直接计算可验证， Φ 是一个双射。

剩下要证明的是 Φ 是等距的。为简化记号，设 $\epsilon = 1$。令 σ_1, $\sigma_2 \in \Sigma_x \mathbb{T}_N$ 满足 $y_i := y_{\sigma_i}$, $i = 1, 2$, 且 $r_i^\perp := d(y_i, \mathbb{S})$, $r_i^\parallel := \sqrt{1 - (r_i^\perp)^2}$。利用测地距离的定义以及 $\mathbb{T}_N$ 在每不层中都是欧几里得空间这一事实，由 $d^2(y_1, y_2) = d^2(y_1^\parallel, y_2^\parallel) + d^2(y_1^\perp, y_2^\perp)$，确实可得：

$$\begin{aligned}
&\cos(\angle_x(y_1, y_2)) = \frac{1 + 1 - d^2(y_1, y_2)}{2} \\
&= \frac{(r_1^\perp)^2 + (r_2^\perp)^2 - d^2(y_1^\perp, y_2^\perp)}{2} + \frac{(r_1^\parallel)^2 + (r_2^\parallel)^2 - d^2(y_1^\parallel, y_2^\parallel)}{2} \\
&= r_1^\parallel \cdot r_2^\parallel \cdot (\cos(\angle_x(y_1^\parallel, y_2^\parallel)) + r_1^\perp \cdot r_2^\perp \cdot (\cos(\angle_x(y_1^\perp, y_2^\perp)) \\
&= \cos(\theta(\sigma_1)) \cos(\theta(\sigma_2)) \cos\Big(\angle_x(\phi^\parallel(\sigma_1), \phi^\parallel(\sigma_2))\Big) \\
&\quad + \sin(\theta(\sigma_1)) \sin(\theta(\sigma_2)) \cos\Big(\angle_x(\phi^\perp(\sigma_1), \phi^\perp(\sigma_2))\Big).
\end{aligned}$$

鉴于这一事实，今后我们将滥用记号，把 $(\Sigma_x \mathbb{T}_N)^\perp \cong (\Sigma_{\mathbb{S}} \mathbb{T}_N)^\perp$ 和任意具有自然嵌入到 $\Sigma_x M$ 的 $\sigma \in (\Sigma_{\mathbb{S}} \mathbb{T}_N)^\perp$ 对所有 $x \in \mathbb{S}$ 视为相同。

5 BHV空间中黏性的等价概念

对于一列 $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ 服从分布 $\mathbb{P}$ 的独立同分布随机变量，令 $\mathbb{P}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 表示经验测度。

定义 2（黏性的三种概念）。令 $\mathbb{P} \in P^1$ （$\mathbb{T}_N$）为 *BHV* 空间中的概率分布，$\mathbb{S} \subset \mathbb{T}_N$ 为余维为 $l \geq 1$ 的层。则在 $\mathbb{S}$ 上， $\mathbb{P}$ 被称为

Wasserstein 粘性 当存在 $\epsilon > 0$ 使得 $b(\mathbb{Q}) \in \mathbb{S}$ 对所有 $\mathbb{Q} \in P^1(\mathbb{T}_N)$ 满足 $W_1(\mathbb{P}, \mathbb{Q}) < \epsilon$ 时，**扰动粘性** 当对于任意 $\mathbb{Q} \in P^1(\mathbb{T}_N)$，都存在 $t_{\mathbb{Q}} > 0$ 使得 $b((1-t)\mathbb{P} + t\mathbb{Q}) \in \mathbb{S}$ 对所有 $0 < t < t_{\mathbb{Q}}$ 成立。

样本粘性 如果对于任意随机变量序列 $(X_i)_{i\in\mathbb{N}} \overset{i.i.d.}{\sim} \mathbb{P}$ 存在一个随机的 $N \in \mathbb{N}$，使得 $b(\mathbb{P}_n) \in \mathbb{S}$ 对所有 $n \geq N$ 几乎处处。

定理 3（[10]）。设 (M, d) 为一个 *Hadamard* 空间，$x \in M$，且 $\gamma\colon [0, L] \to M$ 为一条在 $\gamma(0) = x$ 处方向为 σ 的单位速测地线。那么对于任意 $\mathbb{P} \in P^1(M)$，弗雷歇函数 $\nabla_\sigma F_{\mathbb{P}}(x) = $ 沿 $\gamma(t)|_{t=0}$ 的方向导数存在、定义良好，并且

$$\nabla_\sigma F_{\mathbb{P}}(x) = -\int_M \cos(\angle_x(\sigma, \mathrm{dir}_x(z))) \cdot d(x, z)\ \mathrm{d}\mathbb{P}(z).$$

特别地，它是

1. 作为映射 $\Sigma_x \mathbb{T}_N \to \mathbb{R}, \sigma \mapsto \nabla_\sigma F_{\mathbb{P}}(x)$ 时是 *Lipschitz* 连续的；
2. 作为映射 $P^1(M) \to \mathbb{R}, \mathbb{P} \mapsto \nabla_\sigma F_{\mathbb{P}}(x)$ 时是 *1-Lipschitz* 连续的。

以下结果直接由引理 2 和定理 3 得出。

推论 1。设 $\mathbb{S} \subset \mathbb{T}_N$ 为一个正余维为 $l \geq 1$ 的层，令 $\mathbb{P} \in P^1(\mathbb{T}_N)$，并对 $\mathbb{S}$ 中所有方向空间里的所有 $x \in \mathbb{S}$，将 $\sigma \in (\Sigma_{\mathbb{S}}\mathbb{T}_N)^\perp$ 视为相同。则 $x \mapsto \nabla_\sigma F_{\mathbb{P}}(x)\ \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ 为常数。

假设 1： 对于 $X \sim \mathbb{P} \in \mathcal{P}^1(\mathbb{T}_N)$，具有 $b(\mathbb{P}) = \mu \in \mathbb{S}$ 对于一个层 $\mathbb{S} \subset \mathbb{T}_N$ 假设

$$\mathbb{P}\{\phi_\sigma(X) = 0\} < 1 \text{ for all } \sigma \in (\Sigma_{\mathbb{S}}\mathbb{T}_N)^\perp,$$

其中，对于 $z \in \mathbb{T}_N$, $\phi_\sigma(z) = -d(z, \mu)\cos(\angle_\mu(\sigma, \mathrm{dir}_\mu(z)))$.

定理4。设 $N \geq 4$ 并考虑一个具有正余维数 $l \geq 1$ 的层 $\mathbb{S} \subset \mathbb{T}_N$。则以下陈述对于概率分布 $\mathbb{P} \in P^1(\mathbb{T}_N)$ 满足 $\mu = b(\mathbb{P}) \in \mathbb{S}$ 时是等价的。

1. $\mathbb{P}$ 在 $\mathbb{S}$ 上具有 *Wasserstein* 粘性。2. $\mathbb{P}$ 在 $\mathbb{S}$ 上具有扰动粘性。
3. $\mathbb{P}$ 在 $\mathbb{S}$ 上具有样本粘性，并满足假设 *1*。4. 对于任意方向 $\sigma \in (\Sigma_{\mathbb{S}}\mathbb{T}_N)^\perp$，有 $\nabla_\sigma F_{\mathbb{P}}(\mu) > 0$。

证明。"1 $\implies$ 2" 可立即由 $W_1(\mathbb{P}, (1-t)\mathbb{P} + t\mathbb{Q}) = tW_1(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$ 得出，正如直接计算所验证的。

"2 $\implies$ 4"：令 $\sigma \in (\Sigma_{\mathbb{S}}\mathbb{T}_N)^\perp, y \in \mathbb{T}_N$，使得 $\mathrm{P}_{\mathbb{S}}(y) = \mu$ 且 $\sigma = \mathrm{dir}_\mu(y)$，并令 $\mathbb{Q}_t = (1-t)\mathbb{P} + t\delta_y$，其中 $0 \leq t \leq 1$。根据假设，我们可找到 $0 < t_y < 1$，使得对所有 $t \leq t_y$，$b(\mathbb{Q}_t) \in \mathbb{S}$。由于 μ 是 $\mathbb{P}$ 的弗雷歇均值，且 $\mathrm{P}_{\mathbb{S}}(y) = \mu$，因此对于任意 $x \in \mathbb{S} \setminus \{\mu\}$，都有 $F_{\mathbb{Q}_t}(x) > F_{\mathbb{Q}_t}(\mu)$。因此，对于所有 $t \leq t_y$，μ 都是 $\mathbb{Q}_t$ 的弗雷歇均值，从而对于所有 $t \leq t_y$，

$$0 \leq \nabla_\sigma F_{\mathbb{Q}_t}(\mu) = (1-t) \cdot \nabla_\sigma F_{\mathbb{P}}(\mu) - t \cdot d(\mu, y),$$

由此 $\nabla_\sigma F_{\mathbb{P}}(\mu) \geq \frac{t_y}{1-t_y} d(\mu, y) > 0.$

"4 $\implies$ 1":任取 $\eta > 0$ 使得 $B_\eta(\mu) \cap \mathbb{S}$ 在 $\mathbb{S}$中是闭的。由于$(\Sigma_{\mathbb{S}}\mathbb{T}_N)^\perp$ 是紧的，且方向导数在方向上连续（定理 3），存在一个下界

$$0 < \zeta = \min_{\sigma \in (\Sigma_{\mathbb{S}}\mathbb{T}_N)^\perp} \nabla_\sigma F_{\mathbb{P}}(\mu).$$

于是，对于任意 $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}^1(\mathbb{T}_N)$，若满足 $W_1(\mathbb{P},\mathbb{Q}) < \epsilon := \min\{\zeta,\eta\}$，由定理 2 可知， $d(\mu, b(\mathbb{Q})) < \epsilon \leq \eta$. 根据引理 1， $\nu = b(\mathbb{Q})$ 的拓扑必须包含 μ 的拓扑中的所有分裂。

尚需证明 $b(\mathbb{Q}) \notin \mathbb{S}$ 不可能成立。否则，取 $y = \mathrm{P}_{\mathbb{S}}(\nu)$，由定理 1 可得 $d(\mu, y) \leq d(\mu,\nu) < \eta$，因此 $y \in \mathbb{S}$。此外，$\sigma = \mathrm{dir}_y(\nu) \in (\Sigma_{\mathbb{S}}\mathbb{T}_N)^\perp$，故由定理 1 和推论 1，

$$|\nabla_\sigma F_{\mathbb{P}}(\mu) - \nabla_\sigma F_{\mathbb{Q}}(y)| \leq W_1(\mathbb{P},\mathbb{Q}) < \epsilon \leq \zeta.$$

因此， $\nabla_\sigma F_{\mathbb{Q}}(y) > 0$。根据 σ，由弗雷歇函数的严格凸性可知 $F_{\mathbb{Q}}(y) < F_{\mathbb{Q}}(\nu)$，因此 ν 不是 $\mathbb{Q}$ 的弗雷歇均值。

"3 $\implies$ 4": 由于 $b(\mathbb{P}) = \mu$，我们有 $\nabla_\sigma F_{\mathbb{P}}(\mu) \geq 0$ 对所有 $\sigma \in (\Sigma_{\mathbb{S}}\mathbb{T}_N)^\perp$成立。现在我们证明，对于某个 $\sigma' \in (\Sigma_{\mathbb{S}}\mathbb{T}_N)^\perp$， $\nabla_{\sigma'} F_{\mathbb{P}}(\mu) = 0$ 会导致矛盾。事实上，那么对于 $(X_i)_{i\in\mathbb{N}} \overset{i.i.d.}{\sim} \mathbb{P}$，存在一个 $\mathbb{P}$-几乎处处成立的随机数 $N \in \mathbb{N}$，使得$b(\mathbb{P}_n) \in \mathbb{S}$ 对所有 $n \geq N$成立。根据定理 3，我们还有 $\mathbb{P}$-几乎处处成立，

$$\nabla_{\sigma'} F_{\mathbb{P}_n}(\mu) \geq 0 \quad \forall n \geq N. \tag{2}$$

使用假设 1 的记号，考虑 $S_n = \sum_{i=1}^n \phi_{\sigma'}(X_i)$，从而$\nabla_{\sigma'} F_{\mathbb{P}_n}(\mu) = S_n/n$。回顾我们曾假设 $\nabla_{\sigma'} F_{\mathbb{P}}(\mu) = \mathbb{E}(\phi(X_i)) = 0$，这意味着随机游走 S_n 是递归的（ [7]中的定理 5.4.8），因此（练习5.4.1中 [7]）要么

$$\mathbb{P}\{S_n = 0 : \text{ for all } n \in \mathbb{N}\} = 1 \text{ or } \mathbb{P}\left\{-\infty = \liminf_{n\in\mathbb{N}} S_n < \limsup_{n\in\mathbb{N}} S_n = \infty\right\} = 1.$$

然而，前者违反了假设 1，后者则与（2）相矛盾。

“1 和 4 $\implies$ 3”：根据 [13, 定理 6.9]， $\mathbb{P}_n$ 在 W_1中收敛于 $\mathbb{P}$，因此$\mathbb{P}$ 具有样本粘性。根据假设，对于任意 $\sigma \in (\Sigma_{\mathbb{S}}\mathbb{T}_N)^\perp$，弗雷歇函数的方向导数均非零，因此假设 1 成立。

6 应用：粘性程度

定义 3。 设 $\mathbb{P} \in P^1(\mathbb{T}_N)$ 是一个在具有正余维的层 $\mathbb{S}$ 上具有 *Wasserstein* 粘性的分布，其中 $\mu = b(\mathbb{P})$。那么，我们称 $D_\sigma F_{\mathbb{P}}(\mu)$ 为 在 σ方向上的粘性程度。

我们提出使用粘性程度来区分在同一层上具有黏性的样本。以下示例展示了这种方法的应用：两个系统发育数据集 X， Y来自 [14]，其经验

分布 $\mathbb{P}^X$ 和 $\mathbb{P}^Y$各包含 63 棵系统发育树，这些树是使用两种不同方法根据相同的遗传数据推断得出的。由此得到的两个弗雷歇均值树 μ_X，μ_Y（剪除非常小的分裂后）拓扑结构一致，如图 1 所示。我们检验以下假设

$$\mathcal{H}_0 : D_\sigma F_{\mathbb{P}^X}(\mu_X) = D_\sigma F_{\mathbb{P}^Y}(\mu_Y) \quad \forall \sigma \in \Sigma_{X,Y},$$

其中，我们选择 $\Sigma_{X,Y} \subset (\Sigma_{\mathbb{S}}\mathbb{T}_N)^\perp$ 仅包含对应于单个分裂的方向，该分裂存在于 X 或 Y 中，且与 μ_X 和 μ_Y的拓扑相容。由于存在自然配对，我们对每个方向分别进行了成对 t 检验，并应用 Holm 校正，得到 p 值 0.0227。这证实了 [14]，中的观察结果：在此数据集上，两种推断系统发育树的方法存在显著差异。

参考文献

1. Bacák, M.: 《Hadamard 空间中的凸分析与优化》: De Gruyter（2014 9783110361629 2 10 1515）。https://doi.org/doi: . / . Barden, D., Le, H., Owen, M.: 《系统发育树空间中弗雷歇均值的极限行为》（2014 7602 3 10 48550 1409）。https://doi.org/ . /ARXIV. . . Barden, D.M., Le, H.: 《对数映射、其极限以及正交象限空间中的弗雷歇均值》。伦敦数学会会刊 **117** （2018）4. Billera, L.J., Holmes, S.P., Vogtmann, K.: 《系统发育树空间的几何》。应用数学进展 **27**(4), 733–767（2001）5. Bridson, M., Häfliger, A.: 《非正曲率度量空间》。数学科学基础丛书，Springer Berlin Heidelberg（2011）6. Burago, D., Burago, I., Burago, I., Burago, I., Burago, J., Burago, Û., Burago, D., Burago, I., Burago, Y., Ivanov, S., 等: 《度量几何教程》。CRM 会议录与讲座笔记，美国数学学会（2001）7. Durrett, R.: 《概率论：理论与例题》。剑桥统计与概率数学丛书，剑桥大学出版社（2019），https://books.google.de/books?id=b22MDwAAQBAJ

. Hotz, T., Skwerer, S., Huckemann, S., Le, H., Marron, J.S., Mattingly, J.C., Miller, E., Nolen, J., Owen, M., Patrangenaru, V.: 《开书空间上的黏性中心极限定理》。应用概率年刊 **23**(6)（2013）。https://doi.org/10 899 9 1214 12. / -aap . Huckemann, S., Mattingly, J.C., Miller, E., Nolen, J.: 《孤立双曲平面奇点处的黏性中心极限定理》（2015）10. Lammers, L., Van, D.T., Huckemann, S.F.: 《黏性类型、黏性程度及其应用》（2023），手稿 11. Owen, M., Provan, J.S.: 《一种快速计算树空间中测地距离的算法》（2009 3942 12 10 48550 0907）。https://doi.org/ . /ARXIV. . . Sturm, K.T.: 《非正曲率度量空间上的概率测度》。当代数学 **338** 06080 13 01 2003 10 1090 338（）。https://doi.org/ . / conm/ / . Villani, C.: 《最优传输：旧与新》。数学科学基础丛书，Springer Berlin Heidelberg（2008）14. Williams, T.A., Foster, P.G., Nye, T.M.W., Cox, C.J., Embley, T.M.: 《一致的系统发育基因组学信号表明真核生物位于古菌之内》。英国皇家学会学报 B：生物科学 **279**, 4870 – 4879（2012）