arXiv:2304.05079v1 [math.RA] 11 Apr 2023

代数的幂等前自同态

FATMA AZMY EBRAHIM 和 ALBERTO FACCHINI

Abstract. 在前李代数的研究中，前态射这一概念自然地作为标准态射概念的推广出现。前态射可以为任意交换环 k 上的任意（不一定是结合的）代数定义，并且可以通过各种方式对偶化为广义态射（与前约旦代数相关）和反前态射（与反前李代数相关）。我们研究幂等前自同态（广义自同态、反前自同态）。幂等前自同态与子伴随反交换代数的半直积分解有关。

1. Introduction

代数结构的幂等自同态与该结构的半直积分解、作用和双模有关。例如，对于向量空间 V， V的幂等自同态与有序对（U， W）一一对应，其中 U和 W是 V的子空间，且 V是 $U \oplus W$的内部直和。阿贝尔群或模的情形类似。对于群 G， G 的幂等自同态与有序对（K， H）一一对应，其中 K 是G的正规子群， H 是 G 的子群，且 G 是 $K \rtimes H$的内部半直积。在这种情况下，一个（外部）半直积 $K \rtimes H$ 由作用（一个态射） $H \to \mathrm{Aut}(K)$完全确定到同构意义下，其中即为 K [3]上的 H-群结构。对于环 R， R 的幂等自同态与有序对（K， S）一一对应，其中 K 是 R的理想， S 是 R 的子环，且 $R = K \oplus S$ 作为阿贝尔群成立。任意这样的 K 由 S 的环扩张完全由两个环态射 $\lambda\colon S \to \mathrm{End}(K)$和 $\rho\colon S \to \mathrm{End}(K)^{\mathrm{op}}$确定，即由 K上的 S-S-双模结构确定。

在 [8] 中研究了左斜括号的幂等自同态，而在 [9] 中研究了前李代数的幂等自同态。在 [10] 中，幂等自同态与带有双线性乘积的代数的研究联系起来进行了考察。

在 [9], Michela Cerqua 和第二作者对前李代数及其模的研究中，针对交换环 k 上任意的 k-代数 M, M'，提出了前自同态 $M \to M'$ 的概念。这种 k-代数前态射是标准的 k-代数态射概念的推广（等价地，在结合 k-代数的情形下，是李态射概念的推广）。前态射又可以通过两种不同的方式对偶化，分别得到广义态射（自然出现于前约旦代数的研究中）和反前态射（出现于反前李代数 [12] 的研究中）。

本文致力于研究幂等前自同态、幂等广义自同态和幂等反前自同态。

我们在论文开篇定义前态射及其相关概念，并阐述研究它们的动机（第 2节和第3节）。我们考察它们的基本性质，例如给出第一个和第二个“预态射同构定理”（定理 3.2和3.3）。如果 2 在基交换环 k 中可逆，则每个双线性运算

第二作者部分受到意大利大学与研究部（国家重大科研兴趣项目“范畴、代数：环论与同调方法（CARTHA）”）、Fondazione Cariverona（研究项目“降低代数、逻辑与组合学的复杂性——REDCOM”，隶属于“2018 年卓越科学研究计划”）以及帕多瓦大学“Tullio Levi-Civita”数学系（研究计划 DOR1828909“模的环与范畴”）的资助。

在 k-模 M 上分解为交换部分和反交换部分（定理 4.1）。这引导我们研究前态射及其对偶广义态射。在第 5 节中，我们研究这些概念与超代数之间的联系。接着，我们确定 k-代数 M 的所有幂等前自同态（定理 6.1）、 M 的所有幂等广义自同态（定理 6.2），以及 M 的所有幂等反前自同态（定理 6.3）。

最后，在定理 7.2 和 7.3 中，我们证明，所有具有子伴随固定李 k代数 A 的前李代数（分别地，所有李可容许代数）也都可以通过适当的幂等自同态来描述，这些自同态作用于 k-模 A的张量代数的非结合版本 $T_{na}(A)$。

2. 基本事实

本文中， k 表示一个带单位元的交换环。A k-代数是一个 k-模$_kM$，并带有一个额外的 k-双线性运算 $M \times M \to M$，$(x, y) \mapsto xy$（或者等价地，带有一个k-模态同态 $M \otimes_k M \to M$）。M 的子代数（分别为理想）是 M 的一个 k-子模N，满足：对于每个 $x, y \in N$，都有 $xy \in N$（并且对于每个 $x \in M$ 和$n \in N$，都有$xn \in N$ 和 $nx \in N$，分别）。

在 [9], Michela Cerqua 和第二位作者从理想的乘法格这一角度考察了前李代数，并研究了它们的幂等自同态。设 k 为含单位元的交换环。前李 k-代数是满足以下恒等式的（不一定结合的） k-代数 $(M, \cdot)$:

$$(x \cdot y) \cdot z - x \cdot (y \cdot z) = (y \cdot x) \cdot z - y \cdot (x \cdot z)$$

对任意 x、 y、 $z \in M$ 均成立。例如，每个结合 k-代数都是前李代数。

容易证明，对于任意前李代数 $(L, \cdot)$，定义交换子 $[x, y] = xy - yx$，其中 x、 $y \in L$ 任意，便可得到 $(L, [-, -])$ 是一个李代数，称为前李代数 $(L, \cdot)$ 的下邻李代数。

在研究前李代数时，自然会出现前态射这一概念（见 [9]）。若 M、 M' 是任意的（不一定结合的）k-代数，则 k-模态同态 $\varphi\colon M \to M'$ 是前态射，当且仅当

$$\varphi(xy) - \varphi(x)\varphi(y) = \varphi(yx) - \varphi(y)\varphi(x) \tag{2.1}$$

对于任意 $x, y \in M$。例如，给定任意 k-代数 M，我们可以对每个元素 $x \in M$ 考虑映射 $\lambda_x\colon M \to M$，其定义为 $\lambda_x(a) = xa$，对任意 $a \in M$。设映射 $\lambda\colon M \to \mathrm{End}(_kM)$ 定义为 $\lambda\colon x \mapsto \lambda_x$，对任意 $x \in M$。那么，如果 M 是任意代数， λ 是一个 k-模态同态；当且仅当 M 是结合的时，它是一个 k-代数同态；当且仅当 M 是前李代数时，它是一个前态射 [9, 节 2]。

容易看出（[9, 引理 2]）：（1）每个 k-代数同态都是前态射；（2）两个前态射的复合映射是前态射；（3）双射前态射的逆映射是前态射。

3. Extensions of endofunctors

存在一个从范畴 Alg_k 到自身的自函子 U，该范畴由（不一定满足结合律的） k-代数组成。它将任意 k-代数（$A, \cdot$）对应到 k-代数（$A, [-, -]$），其中对每个 $x, y \in A$，都有 $[x, y] = xy - yx$。对于 Alg_k 中的任意态射 $f\colon (A, \cdot) \to (B, \cdot)$，它将其对应到相同的映射$U(f) = f\colon (A, [-, -]) \to (B, [-, -])$。但请注意，对于任意前态射 $f\colon (A, \cdot) \to (B, \cdot)$，也可以定义 $U(f) := f$，而且 $U(f)\colon (A, [-, -]) \to (B, [-, -])$ 实际上是 Alg_k 中的一个态射。因此， U 可以扩展为一个函子 $U\colon \mathrm{Alg}_{k,p} \to \mathrm{Alg}_k$，从由 k-代数及其前态射组成的范畴 $\mathrm{Alg}_{k,p}$ 映到由 k-代数及其 k-代数同态组成的范畴 Alg_k。更进一步，映射 $f\colon A \to B$ 是前态射$f\colon (A, \cdot) \to (B, \cdot)$ 当且仅当 $f\colon (A, [-, -]) \to (B, [-, -])$ 是 Alg_k 中的态射。根据定义，若代数 A 满足 $U(A)$ 是一个李代数，则称其为李可容许的。对于每个 k-代数 A， k-代数 $U(A)$ 总是反交换的（即， $[x, y] = -[y, x]$ 且 $[x, x] = 0$）。

上一段中的讨论启发我们给出一些自然的定义。设（$M,\cdot$）是一个 k-代数。（$M,\cdot$）上的前同余关系是集合 M 上的一个等价关系$\sim$，满足：对于任意 $x,x',y,y'\in M$ 以及任意 $\lambda\in k$, $x\sim x'$，若 $y\sim y'$，则有 $x+y\sim x'+y'$, $\lambda x\sim\lambda x'$ 和 $[x,y]\sim[x',y']$。相应地，（$M,\cdot$）上的前理想是 ${}_kM$ 的一个 k-子模 I，满足对任意 $x\in M$ 和任意 $i\in I$，都有 $[x,i]\in I$。（显然，这等价于要求对任意 $x\in M$ 和任意 $i\in I$，都有 $[i,x]\in I$，因为运算 $[-,-]$ 具有反交换性。）

例 3.1. (1) 对于年轻（聪明）的学生来说，难以理解的事情之一是：群的中心是一个正规子群，而环的中心是一个子环，而不是一个理想。如果聪明的学生知道相伴李代数的定义，那么向他们解释这一正确观点的方法是向他们展示：如果 R 是任意一个结合 k-代数，那么其中心 $Z(R)$ 是李代数 $(R,[-,-])$ 中的一个理想。用我们的术语来说，同样的证明表明，如果 $(M,\cdot)$ 是任意一个李可容许的 k-代数，那么集合 $\{\,z\in M\mid xz=zx$ 对每一个 $x\in M\,\}$ 都是 $(M,\cdot)$ 的一个前理想。

现在假设 A 是一个任意的 k-代数。 A 的核 $N(A)$ 定义为 $N(A):=\{\,x\in A\mid(x,A,A)=(A,x,A)=(A,A,x)=\{0\}\,\}$，其中$(-,-,-)$ 表示结合子。该核是 A 的结合子环。代数 A 的中心 $Z(A)$定义为 $Z(A)=\{\,x\in N(A)\mid[x,A]=\{0\}\,\}$。因此， A 的中心是 $N(A)$ 的前理想。

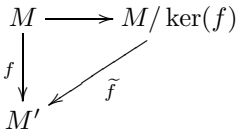
(2) 任意前态射的核（=0 的原像）始终是一个前理想。

显然，对于任意 k-代数 $(M,\cdot)$，$(M,\cdot)$ 上所有前同余的集合与 $(M,\cdot)$ 的所有前理想的集合之间存在双射。该双射将任意前同余 $\sim$与 M 模 $\sim$所得的零元素等价类 $[0]_\sim$ 相对应。

与前理想类似，也可以定义前子代数。k-代数 $(M,\cdot)$ 的前子代数是 ${}_kM$ 的一个 k-子模 B，满足对于每个 $x,y\in B$， $[x,y]\in B$。例如，任意前态射的像都是前子代数。核 $N(A)$ 是一个前子代数。事实上，对于任意 $x,y\in N(A)$，我们很容易证明，当 $c,d\in A$ 时，$([x,y],c,d)=(c,[x,y],d)=(c,d,[x,y])=0$。

很容易证明：

定理3.2。 [预态射第一同构定理。] 设 $f\colon(M,\cdot)\to(M',\cdot)$ 是一个预态射。则： f 的核是 $(M,\cdot)$ 的前理想， f 的像是$(M',\cdot)$的~前子代数，并且存在唯一的映射 $\tilde{f}\colon M/\ker(f)\to M'$，使得图表



~交换。此外， f给出了一个 k-模同构 $M/$核$(f)\cong f(M)$，它是一个 k-代数同构，介于$(M/$核 $f,[-,-])$和$(f(M)\ [-,-])$之间。

定理 3.3. [前态射第二同构定理。] 设 $(M,\cdot)$是一个 k-代数，设 N是 M 的前子代数，且设 K是 M的前理想。则：和 $N+K=\{\,x+y\mid x\in N,\ y\in K\,\}$ 是 M 的前子代数，交 $N\cap K$是 N 的前理想，并且典范 k-模同构 $N/N\cap K\cong(N+K)/K$ 是一个 k-代数同构 $(N/N\cap K,[-,-])\cong((N+K)/K,[-,-])$。

显然，对于一个 k-代数（M，$\cdot$），所有（M，$\cdot$）的理想所构成的格 $\mathcal{L}$（M，$\cdot$）嵌入到（M，$\cdot$）的所有前理想所构成的格 $\mathcal{L}_p$（M，$\cdot$）中，并且 $\mathcal{L}_p$（M，$\cdot$）$\cong\mathcal{L}$（M，$[-,-]$）。三个格 $\mathcal{L}$（M，$\cdot$）、 $\mathcal{L}_p$（M，$\cdot$）和 $\mathcal{L}$（M，$[-,-]$）都是完备的。

现在回顾一下，对于一个普适代数的半阿贝尔簇 $\mathcal{V}$、 $\mathcal{V}$ 中的对象 X 以及 X的正规子代数 A 和 B，Huq 交换子 $[A,B]_H$ 是 X 的最小正规子代数 C，满足存在一个同态 $\varphi\colon A\times B\to X/C$，使得两个复合态射 $\varphi\circ(1_A,0)\colon A\to X/C$和 $\varphi\circ(0,1_B)\colon B\to X/C$均为

典范投影。所有非结合代数簇都是半阿贝尔范畴[19, 定理 9.5]。在所有 k-代数构成的簇中，k-代数 X 的两个理想A、B 的 Huq 交换子 $[A,B]_H$ 是由集合 $AB \cup BA = \{\, ab, ba \mid a \in A,\ b \in B \,\}$生成的 X 的理想。例如，对于我们的反交换 k-代数 $(X, [-,-])$，$(X, [-,-])$的两个理想 A、B 的 Huq 交换子是 $[A,B]$，即由所有乘积$[a,b]$生成的 X 的 k-子模，其中 $a \in A$ 且 $b \in B$。

因此，在同构 $\mathcal{L}_p(M,\cdot) \cong \mathcal{L}(M,[-,-])$ 中，给定 $(M,\cdot)$ 的两个前理想 I, J，格 $\mathcal{L}(M, [-,-])$ 中 $(M,[-,-])$ 的理想 I, J 的 Huq 交换子所对应的前理想，是由所有元素 $ij - ji$ 生成的 $(M,\cdot)$ 的前理想 $[I,J]$，其中 $i \in I$ 且 $j \in J$。它具有以下泛性质：

命题 3.4。给定 $(M,\cdot)$ 的两个前理想 I, J，前理想 $[I,J]$ 是 $(M,\cdot)$ 中最小的前理想 K，使得存在一个良定义态射

$$\varphi\colon (I \times J, [-,-]) \to (M/K, [-,-])$$

使得对于每个 $i \in I$ 和 $j \in J$，都有 $\varphi(i,0) = i + K$ 且 $\varphi(0,j) = j + K$。

乘法格$(\mathcal{L}_p(M,\cdot)\ \vee, [-,-])$和$(\mathcal{L}(M,[-,-])\ \vee, [-,-]_H)$ 显然同构 [11]。

给定一个具有 Mal'tsev 项 $p(x,y,z)$ 的 Mal'tsev 代数簇、该代数簇中的一个代数 X 以及两个同余 α 和 β，Smith 交换子 $[\alpha,\beta]_S$ [17] 是 X 上满足该映射的同余 γ 中最小的一个

$$p\colon \{\, (x,y,z) \mid (x,y) \in \alpha \text{ and } (y,z) \in \beta \,\} \to X/\gamma,$$
$$(x,y,z) \mapsto [p(x,y,z)]_\gamma,$$

是一个同态。

现在，所有 k-代数构成的簇及其所有子代数簇都是具有 Mal'tsev 项 $p(x,y,z) = x - y + z$ 的 Mal'tsev 簇。对于一个 k- 代数 $(M,\cdot)$，其理想为 I, J，集合 $\{\, (y+i, y, y+j) \mid y \in M, i \in I, j \in J \,\}$是 M^3的子代数。因此，我们正在寻找 M 的最小理想 K，使得映射

$$p\colon \{\, (y+i, y, y+j) \mid y \in M, i \in I, j \in J \,\} \to M/K,$$
$$p(y+i, y, y+j) = y + i + j + K,$$

是一个同态。容易验证，这样的最小理想 K 是由 $I \cdot J \cup J \cdot I$生成的 $(M,\cdot)$ 的理想。这里，$I \cdot J$ 表示所有乘积 $i \cdot j$构成的集合，$J \cdot I$也类似。

注意，对于任意 k-代数 $(M,\cdot)$，Huq=Smith。给定 $(M,\cdot)$ 的任意两个理想 I, J，它们的 Huq=Smith 交换子是由 $I \cdot J \cup J \cdot I$生成的 $(M,\cdot)$ 的理想。我们在上文命题 3.4 的陈述中所说的是，Huq 交换子的定义也可以有一种适用于前理想的变体；如命题 3.4 所述，两个前理想的交换子是一个前理想，并且它对应于底层反交换 k-代数 $(M, [-,-])$ 的 Huq= Smith 交换子。

4. Dualizing

4.1. 第一种方式。Jordan 代数。现在我们想对前态射的概念以及上文所见的函子 $U\colon \mathrm{Alg}_{k,p} \to \mathrm{Alg}_k$ 进行对偶化。对前态射的概念进行对偶化，有两种不同的自然方式，二者不可混淆。第一种是将条件 (2.1) 替换为条件

$$\varphi(xy) - \varphi(x)\varphi(y) = -(\varphi(yx) - \varphi(y)\varphi(x)), \tag{4.1}$$

第二种是将条件 (2.1) 替换为条件

$$\varphi(xy) + \varphi(x)\varphi(y) = \varphi(yx) + \varphi(y)\varphi(x). \tag{4.2}$$

类似于 Alg_k的自函子 U，存在范畴Alg_k上的自函子 C，它将任意 k-代数（$A,\cdot$）对应为 k-代数（$A,\circ$），其中 $x \circ y = xy + yx$ 对于

每个 $x, y \in A$。它将 Alg$_k$中的任意态射 $f\colon (A,\cdot) \to (B,\cdot)$ 与同一个映射 $C(f) = f\colon (A,\circ) \to (B,\circ)$ 关联起来。对于每个 k-代数$(A,\cdot)$, k-代数$(A,\circ)$ 总是交换代数。如果 k-代数 $(A,\cdot)$ 是结合的，那么 k- 代数 $(A,\circ)$ 是 Jordan 代数。

我们先从这两种可能中的第一种开始。

我们称一个 k-模态同态 $\varphi\colon M \to M'$（其中 M, M' 是任意的（不一定满足结合律的） k-代数）为广义态射，如果

$$\varphi(xy) - \varphi(x)\varphi(y) = -(\varphi(yx) - \varphi(y)\varphi(x))$$

对每个 $x, y \in M$ 都成立。例如， k-代数同态是广义态射。容易证明，映射 $\varphi\colon M \to M'$ 是广义态射（$M,\cdot$） $\to$ （$M',\cdot$）当且仅当它是 k-代数同态（$M,\circ$） $\to$ （$M',\circ$）。特别地，两个广义态射的复合映射仍是广义态射，并且存在一个范畴 Alg$_{k,\ g}$，其对象是 k-代数，态射则是它们之间的广义态射。自函子 $C\colon \mathrm{Alg}_k \to \mathrm{Alg}_k$ 可扩展为函子 $C\colon \mathrm{Alg}_{k,\ g} \to \mathrm{Alg}_k$。

我们在此简要考虑将 k-模 M 上的任意 k-双线性运算唯一规范地分解为一个交换运算和一个反交换的运算的可能性。

若 M 是任意一个 k-模，则所有 k-双线性运算 $M \times M \to M$ 的集合是一个与 k-模 Hom$_k(M \otimes_k M, M)$同构的 k-模。若 C是由集合 $\{\, x \otimes y - y \otimes x \mid x, y \in M \,\}$生成的 $M \otimes_k M$ 的 k-子模，则所有交换的 k-双线性运算 $M \times M \to M$的集合是Hom$_k(M \otimes_k M, M)$的一个k-子模，并且与 k-模Hom$_k(M \otimes_k M/C, M)$同构。若 A是由集合 $\{\, x \otimes y + y \otimes x \mid x, y \in M \,\}$生成的 $M \otimes_k M$的 k-子模，则所有反交换的 k-双线性运算$M \times M \to M$的集合是Hom$_k(M \otimes_k M$, $M)$的一个k-子模，并且与 Hom$_k(M \otimes_k M/A, M)$同构。

下文中，ann$_M$(2) 表示所有元素 x 的集合，其中这些元素属于 k-模 ${}_kM$ 且满足$x + x = 0$。如果ann$_M$(2) $= 0$，则称模 ${}_kM$ 是无 2-挠的。

定理 4.1. 设 ${}_kM$ 是一个 k-模，Comm 和 AntiComm分别是 Hom$_k(M \otimes_k M, M)$的 k-子模，由 ${}_kM$ 上所有 k-双线性交换和反交换的运算组成。则：

(a) 交换 $\cap$反交换 $=$同态$_k(M \otimes_k M,$ ann$_M$(2))。(b) 若 2 在 k 中可逆，则 Hom$_k(M \otimes_k M, M)$ $=$交换 $\oplus$反交换。(c) 若 k 的特征为 2，则交换 $=$反交换。

证明。(a) 一个 k-双线性运算属于Comm$\cap$AntiComm，当且仅当 $xy = yx = -yx$ 对任意 x、y属于 M，也就是说，当且仅当映射 $M \otimes_k M \to M$的像包含于 ann$_M$(2) 中。

(b) 若 2 在 k 中可逆，则 M 无 2-挠，因此由 (a) 可得 Comm $\cap$AntiComm $= 0$。因此，为了完成 (b) 的证明，只需证明 Hom$_k(M \otimes_k M, M)$ $\subseteq$Comm $+$ AntiComm。现在设 $\cdot$ 是 k 上的一个双线性运算。设 $(M,\circ)$ 和 $(M,[-,-])$ 分别为相对于 k- 代数 $(M,\cdot)$ 的交换代数和反交换代数，它们按第 3 节和第 4.1 小节中的构造得到。于是$\cdot = \frac{1}{2}\circ + \frac{1}{2}[-,-]$。至此，(b) 得证。(c) 显然。□

注意，若 M 是一个 k-模， $*$ 是 M 上的交换运算， $\diamond$ 是 M 上的反交换运算，并将 $\cdot$ 定义为它们的和 $*+\diamond$（即 $x\cdot y = x*y+x\diamond y$），则 $\circ = 2*$ 和$[-,-] = 2\diamond$，因为 $x*y+x\diamond y+y*x+y\diamond x = 2(x*y)$ 且 $x*y+x\diamond y-y*x-y\diamond x = 2(x\diamond y)$。

如果 2 在 k 中可逆，那么 -代数 $(M,$ $\cdot)$ 和 $(M,2$ $\cdot)$ 总是同构的：

命题 4.2. 假设 2 在 k 中可逆。设 $(M,\cdot)$ 是一个 k-代数。那么 k-代数 $(M,\cdot)$ 和 $(M,2\cdot)$ 同构。

证明。该同构是映射 $\varphi\colon (M,\cdot) \to (M,2\cdot)$， $\varphi\colon$ $x \mapsto \frac{x}{2}$。对于此映射， $\varphi(x,y)$（是否应为 $\varphi(xy)$）和 $\varphi(x)\varphi(y)$ 都等于 $\frac{xy}{2}$。□

以下引理将在后文中发挥作用：

引理 4.3. 设 M, M' 是 k-代数，且无 M' 2-扭结。那么， k-模态同态 φ: $M \to M'$ 是 k-代数同态，当且仅当它是前态射和广义态射。

证明. 我们必须证明，对于每个 $x, y \in M$， $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$，当且仅当

$$\varphi(xy) - \varphi(x)\varphi(y) = \varphi(yx) - \varphi(y)\varphi(x) \tag{4.3}$$

对于每个 $x, y \in M$，以及

$$\varphi(xy) - \varphi(x)\varphi(y) = -(\varphi(yx) - \varphi(y)\varphi(x)) \tag{4.4}$$

对于每个 $x, y \in M$。“仅当”方向的证明显然。“若”方向 ，
若两个条件 (4.3) 和 (4.4) 成立，则

$$\varphi(yx) - \varphi(y)\varphi(x) = -(\varphi(yx) - \varphi(y)\varphi(x))$$

对于所有 $x, y \in M$，都有 $\varphi(yx) - \varphi(y)\varphi(x) = 0$，因为 M' 是 2-挠无的。因此， φ 是一个 k-代数同态。□

4.2. 第二种方式。反前李代数。现在转向对前态射概念以及函子 U:Alg$_{k,\ p} \to$ Alg$_k$进行对偶化的第二种可能方式。我们称一个 k-模态同态 φ: $M \to M'$（其中 M、M' 是任意的 k-代数）为反前态射，如果

$$\varphi(xy) + \varphi(x)\varphi(y) = \varphi(yx) + \varphi(y)\varphi(x) \tag{4.5}$$

对于每个 x、$y \in M$。容易看出， φ: $M \to M'$ 是反前态射，当且仅当其对偶 $-\varphi$: $M \to M'$ 是前态射。特别地，如果 φ 是一个 k-代数前态射，那么 $-\varphi$ 是反前态射，两个反前态射的复合映射是前态射，且双射反前态射的逆是反前态射。

反前态射自然出现在对近期提出的反前李代数概念 [9, 12]的研究中。设 k 为带单位元的交换环，且 $(A, \cdot)$ 是一个 k-代数。通常，对任意 $x, y \in A$，定义 $[x, y] := x \cdot y - y \cdot x$。若 k-代数 A 是一个反前李 k-代数，则

$$(x \cdot y) \cdot z + x \cdot (y \cdot z) = (y \cdot x) \cdot z + y \cdot (x \cdot z) \tag{4.6}$$

and

$$[x, y] \cdot z + [y, z] \cdot x + [z, x] \cdot y = 0 \tag{4.7}$$

对于每个 x、y、$z \in A$（见 [12]）。

关于前李代数的最初概念可以通过若干非平凡的调整 [12]适用于反前李代数。因此，对于反前 k-代数（$A, \cdot$）， A 的下邻李代数是李代数（$A, [-,-]$）。也就是说，反前李代数和前李代数一样，也是李可容许的。更准确地说，一个 k-代数是反前李代数，当且仅当（1）它是李可容许的，并且（2）映射 λ: （$A, \cdot$) $\to$ (End(A_k) $\circ$)诱导出一个李反同态 λ: （A, $[-,-]$) $\to \mathfrak{gl}(A)$，即一个李代数态射 λ: （$A, [-,-]$)$^{\mathrm{op}} \to \mathfrak{gl}(A)$，或者在李代数（$A, [-,-]$) 上具有一个右模结构，该李代数是反前-李代数（$A, \cdot$）的下邻李代数。这是因为单位元（4.6）可以改写为 $\lambda_{x \cdot y} + \lambda_x \circ \lambda_y = \lambda_{y \cdot x} + \lambda_y \circ \lambda_x$，或等价地改写为 $\lambda_{[x,y]} = [\lambda_y, \lambda_x]$。条件（2）等价于“映射$\lambda$: （$A, \cdot$) $\to$ (End(A_k) $\circ$)是一个反前态射”。

映射 φ: $M \to M'$ 是反前态射，当且仅当它是 k-代数同态 $(M, [-,-]) \to (M', [-,-]^{\mathrm{op}})$。令 Alg$_{k,a}$ 为一个范畴，其对象是 k-代数，态射是反前态射，且复合 $*$ 对每个反前态射 φ: $M \to M'$ 和 ψ: $M' \to M''$ 定义为 $\psi * \varphi := -(\psi \circ \varphi)$。于是，带有反前态射及此修改后的复合 $*$ 的 k-代数构成一个范畴 Alg$_{k,a}$。恒等

态射 $M \to M$ 是范畴 $\mathbf{Alg}_{k,a}$ 中每个对象 M 的映射 $x \mapsto -x$。存在一个协变函子 $D\colon \mathbf{Alg}_{k,a} \to \mathbf{Alg}_k$，定义为 $(M,\cdot) \mapsto (M,[-,-])$ 和 $f \mapsto -f$。

如果 M 是一个（不一定满足结合律的）k 代数，那么 M 是一个反前李代数，当且仅当 (1) M 是李可容许的，且 (2) 映射 $\lambda\colon M \to \mathbf{End}(_kM)$，其中 $\lambda\colon x \mapsto \lambda_x$ 且 $\lambda_x(a) = xa$，是一个反前态射。

一个映射

$$f\colon (A,\cdot) \to (B,\cdot)$$

当且仅当它是一个反前态射

$$-f\colon (A,[-,-]) \to (B,[-,-])$$

是 $\mathbf{Alg}_k$ 中的一个态射。每个 k-代数反同态（即满足 $f(xy) = f(y)f(x)$ 的 k-线性映射 f）都是一个反前态射。特别地，若 M, M' 是交换的，则每个 k-代数态射 $M \to M'$ 都是一个反前态射。对于每个 k-代数态射 $f\colon M \to M'$（M, M' 是任意的 k-代数），映射 $-f\colon M \to M'$ 是一个反前态射。因此，可以将范畴 $\mathbf{Alg}_k$ 扩展为一个范畴，其对象是 k-代数，态射是反态射；并将函子 D 扩展为从该范畴到范畴 $\mathbf{Alg}_k$ 的函子。

命题 4.4。存在一个范畴同构 $\mathbf{Alg}_{k,\ p} \cong \mathbf{Alg}_{k,\ a}$。

证明。函子 $F\colon \mathbf{Alg}_{k,\ p} \to \mathbf{Alg}_{k,\ a}$，$F\colon (M,\cdot) \mapsto (M,\cdot)$，$F\colon f \mapsto -f$，是一个范畴同构。注意到 $D \circ F = U$。□

注意，两个反前态射的复合映射是一个前态射，而一般而言并非反前态射。

备注 4.5。本文迄今引入的概念与结合代数中的李导子和约旦导子概念之间存在明显的联系。过去几十年来，Ancochea [2], Jacobson [16], Herstein [14, 15], Brešar [5, 6], 以及其他几位数学家引入并研究了结合代数上的李导子和约旦导子。结合代数 $(M,\cdot)$ 上的李导子是一个映射 $(M,\cdot) \to (M,\cdot)$，它是李代数 $(M,[-,-])$ 的一个导子 $(M,[-,-]) \to (M,[-,-])$。结合代数 $(M,\cdot)$ 上的约旦导子也类似，只需在定义中用约旦代数 $(M,\circ)$ 替代李代数 $(M,[-,-])$。因此，对于结合代数，我们的前导子恰好就是李导子 [9, 引理 5]。

类似地，考虑 [4] 中引入的广义导子概念。在那篇论文中，结合代数 k-代数 $(M,\cdot)$ 的广义导子 $f\colon (M,\cdot) \to (M,\cdot)$ 是一个 k-模态同态，并且存在一个导子 $d\colon M \to M$，使得对于任意 $x, y \in M$，都有 $f(xy) = f(x)y + xd(y)$。这等价于存在一个 k-模态同态 $d\colon M \to M$，使得

$$\begin{cases} f(xy) = f(x)y + xd(y) \\ d(xy) = d(x)y + xd(y) \end{cases}$$

对于任意 $x, y \in M$。等价地，当且仅当存在一个导子 $d\colon M \to M$，使得对于任意 x, $y \in M$，都有 $f(x)y - f(xy) = d(x)y - d(xy)$。这个方程与本文中的其他方程非常相似，因为表达式 $f(x)y - f(xy)$ 也可以看作某种结合子 (f,x,y)。

如果想要更加大胆一些，我们可以说，对于任意 k-代数 M，k-模 $_kM$ 的所有自同态所组成的 k-代数 $\mathbf{End}(_kM)$ 是一个结合 k-代数；如果对每个 $x \in M$ 和 $f \in \mathbf{End}(_kM)$ 令 $f \cdot x = f(x)$ 和 $x \cdot f = 0$，那么 M 是该结合 k-代数上的 $\mathbf{End}(_kM)$-$\mathbf{End}(_kM)$-双模。于是，一个 k-模态同态 $f \in \mathbf{End}(_kM)$ 是：(1) 右M-模态同态，当且仅当对于每个 x、$y \in M$（定义与结合代数中的相同），有 $(f,x,y) = 0$；(2) 导子，当且仅当对于每个 x、$y \in M$（定义与前李代数中的相同），有 $(f,x,y) = (x,f,y)$；(3) 广义导子，当且仅当存在一个 M 的导子 d，使得对于每个 x、$y \in M$，有 $(f,x,y) = (d,x,y)$。

我们倾向于不采用 [7, p. 7] 和 [15] 中使用的术语“李同态”、“约当同态”、“李导子”、“李理想”和“李子代数”，原因很简单：如果

$(M,\cdot)$ 是一个非结合代数，那么 $(M,[-,-])$ 和 $(M,\circ)$ 分别不是李代数和约当代数，而只是反交换代数和交换代数。相应地，我们倾向于使用“前李态射”、“广义态射”、“前导子”、“前理想”和“前子代数”等术语，尽管我们也明白这种术语可能存在问题。

5. Pre, generalized, anti-pre, and superalgebras

至少有两种自然的方法，可以将任意 k-代数 M 与超代数（即 $\mathbb{Z}_2$-分次代数）联系起来。给定任意 k-代数 M，我们可以构造 k-模 $M\oplus M$（即 M 的两个副本的 k-模直和），并在其上定义以下乘法之一

$$(a,b)(a',b') := (aa'+bb', ab'+a'b),$$

或定义以下乘法

$$(a,b)(a',b') := (aa'-bb', ab'+a'b),$$

对所有 a、b、a'、$b'\in M$ 均成立。

注5.1. 为此，我们受到 [10, 第 2]节的启发。给定任意结合的k-代数 R，我们可以考虑阿贝尔 k-代数 R_a，即带零乘法的 k-模 R。于是 R_a 是一个 R-R-双模，因此可以构造由 R扩张 R_a。由于 $R_a\otimes_R R_a\cong R_a$ 是一个 R-R-双模，“相容双线性形式”$R_a\times R_a\to R$都具有如下形式：$(b,b')\mapsto \mu bb'$，其中 $\mu\in k$。本节第一段讨论了 $\mu=1$ 和 $\mu=-1$最重要的情形。

为了避免表述重复，我们将考虑一种函子$F_{\mu,\lambda}$它将任意 k-代数 M 映射为超代数 $F_{\mu,\lambda}(M):=M\oplus M$，其乘法为

$$(a,b)(a',b') := (aa'+\mu bb', ab'+a'b)$$

对于所有 a、b、a'、$b'\in M$，以及任意映射 $\varphi\colon M\to M'$映射 $(\varphi\oplus\lambda\varphi)\colon F_{\mu,\lambda}(M)=M\oplus M\to F_{\mu,\lambda}(M')=M'\oplus M'$。这里 μ、$\lambda\in k$。对于超代数 $F_{\mu,\lambda}:=M\oplus M$，偶子代数为 $M\oplus 0$，奇部分为 $0\oplus M$。映射 $(\varphi\oplus\lambda\varphi)$ 是一个 k-模态同态，次数为零次。

以下命题的证明是初等的：

命题5.2. 假设 μ、$\lambda\in k$ 和 $\mu(\lambda^2-1)=0$。对于任意 k-模态同态$\varphi\colon M\to M'$，我们有：

(a) $(\varphi\oplus\lambda\varphi)$ 是前态射，当且仅当 φ 是前态射；(b) $(\varphi\oplus\lambda\varphi)$ 是广义态射，当且仅当 φ 是广义态射；(c) $(\varphi\oplus\lambda\varphi)$ 是反前态射，当且仅当 φ 是反前态射。

因此，对于每个 μ、$\lambda\in k$ 和 $\mu(\lambda^2-1)=0$，我们分别得到范畴 $\mathsf{Alg}_{k,p}$、$\mathsf{Alg}_{k,g}$ 和 $\mathsf{Alg}_{k,a}$ 上的三个自函子 $F_{\mu,\lambda}$，它们将任意一个 k-代数 M 分别对应到$\mathbb{Z}_2$-分次代数 $F_{\mu,\lambda}(M)=M\oplus M$。

注 5.3。最有趣的情形是 μ 和 λ 分别等于 1 或 -1 的情形。若 k 的特征不等于 2，则这四种情形——“μ 和 λ 分别等于 1 或 -1”——给出四个不同的自函子 $F_{\mu,\lambda}$。若 k 的特征为 2，则这四个自函子 $F_{\mu,\lambda}$ 彼此重合。

另一个非常有趣的情形是 $\mu\in k$ 任意，以及 $\lambda=-1$。在这种情况下，命题5.2变为：

推论 5.4。设 μ 是 k 的任意元素。那么存在三个自函子 $F_{\mu,-1}$，分别对应三个范畴 $\mathsf{Alg}_{k,p}$、$\mathsf{Alg}_{k,g}$ 和 $\mathsf{Alg}_{k,a}$。它们将任意 k-代数 M 对应到超代数 $F_{\mu,-1}(M):=M\oplus M$，其乘法为

$$(a,b)(a',b') := (aa'+\mu bb', ab'+a'b)$$

对于所有 a、b、a'、$b'\in M$，以及任意态射 $\varphi\colon M\to M'$该态射

$$(\varphi\oplus-\varphi)\colon F_{\mu,-1}(M)=M\oplus M\to F_{\mu,-1}(M')=M'\oplus M'.$$

此外:

(a) 若 φ 是前态射，则 $-\varphi$ 是反前态射，而 $(\varphi \oplus -\varphi)$ 是前态射;

(b) 若 φ 是反前态射，则 $-\varphi$ 是前态射，而 $(\varphi \oplus -\varphi)$ 是反前态射。

我们回到两个满足 $\mu(\lambda^2-1)=0$ 的 k 元素 μ、λ 的一般情形，以及自函子 $F_{\mu,-1}$: $\mathsf{Alg}_{k,p} \to \mathsf{Alg}_{k,p}$ 的情形。若 $\varphi\colon M \to M'$ 是前态射，则 $(\varphi \oplus \lambda\varphi)\colon M \oplus M \to M' \oplus M'$ 是前态射，因此它诱导一个 k-代数同态 $(\varphi \oplus \lambda\varphi)\colon (M \oplus M, [-,-]) \to (M' \oplus M', [-,-])$，其中交换子 $[-,-]$ 的定义与前文相同。但要注意，对于超代数，通常还会考虑另一种交换子，称为超交换子，它在齐次元素上的定义为 $[x,y]_s = xy - (-1)^{|x|\cdot|y|}yx$。因此，对于任意两个元素 $(a,b)(a',b') \in M \oplus M$，我们有

(5.1)
$$\begin{aligned}[(a,b),(a',b')]_s &= [(a,0),(a',0)]_s + [(a,0),(0,b')]_s + [(0,b),(a',0)]_s + [(0,b),(0,b')]_s = \\ &= (aa'-a'a,0) + (0,ab'-b'a) + (0,ba'-a'b) + (\mu bb'+\mu b'b,0) = \\ &= ([a,a'] + \mu(b\circ b'), [a,b'] + [b,a']).\end{aligned}$$

这个公式提示我们考虑情形 $\mu=1$，并考察映射 $\varepsilon\colon M \to M\oplus M$，它由对每个 $x \in M$ 定义的 $\varepsilon(x) = (x,x)$ 给出:

命题 5.5. 设 $\mu = 1$，并令 $\varepsilon\colon M \to M \oplus M$ 为由对每个 $x \in M$ 定义的映射 $\varepsilon(x) = (x,x)$。那么

$$[\varphi(x),\varphi(y)]_s = (2xy, 2[x,y])$$

对每个 $x, y \in M$。

证明。根据等式 (5.1)，$[\varphi(x)\ \varphi(y)]_s = [(x,x),\ (y,y)]_s = ([x,y] + \mu(x\circ y)\ [x,y] + [x,y])$。因此 $[\varphi(x)\ \varphi(y)]_s = ([x,y] + x\circ y, 2[x,y]) = (2xy, 2[x,y])$. □

我们以如下命题结束本节。注意，若 M, M' 是 k-代数，且 $\varphi\colon M \to M'$ 是一个 k-代数同态，那么 $\varphi\colon (M,\cdot) \to (M',\cdot)$ 是一个预态射，当且仅当 $(\varphi \oplus \lambda\varphi)\colon (M \oplus M, [-,-]) \to (M'\colon M', [-,-])$ 是一个 k-代数同态。在下一个命题中，我们将说明，将乘法 $[-,-]$ 替换为乘法 $[-,-]_s$ 会得到截然不同的结果。

命题5.6。假设 μ、$\lambda \in k$ 和 $\lambda^2 = 1$。令 M、M' 为具有 M' 2-无挠性的 k-代数。那么，一个 k-模态同态 $\varphi\colon M \to M'$ 是一个 k-代数同态 $\varphi\colon (M,\cdot) \to (M',\cdot)$，当且仅当 $(\varphi \oplus \lambda\varphi)\colon (M \oplus M, [-,-]_s) \to (M'\colon M', [-,-]_s)$ 是一个 k- 代数同态。

证明。映射 $(\varphi \oplus \lambda\varphi)\colon (M \oplus M, [-,-]_s) \to (M'\colon M', [-,-]_s)$ 是一个 k-代数同态，当且仅当对每个 (a,b)、$(a',b') \in M \oplus M$，都有 $(\varphi \oplus \lambda\varphi)([(a,b),(a',b')]_s) = [(\varphi(a)\ \lambda\varphi(b)), (\varphi(a')\ \lambda\varphi(b'))]_s$。应用单位元 (5.1)，可将其重写为 $(\varphi([a,a'])\ +\mu\varphi(b\circ b')\ \lambda\varphi([a,b'])\ +\ \lambda\varphi([b,a'])) = ([\varphi(a)\ \varphi(a')] + \mu((\lambda\varphi(b))\ \circ\ \lambda\varphi(b'))\ [\varphi(a)\ \lambda\varphi(b')] + [\lambda\varphi(b)\ \varphi(a')])$。

由于 $\lambda^2 = 1$，这等价于以下两个恒等式 $\varphi([a,a']) = [\varphi(a)\ \varphi(a')]$ 以及 $\varphi(b\circ b') = \varphi(b)) \circ \varphi(b')$，这意味着 φ 既是前态射又是广义态射。根据引理4.3，这等价于“φ 是一个 k-代数同态”。□

6. 幂等预自同态

利用第 3 节第一段中描述的函子 U，可以描述 k-代数 $(M,\cdot)$ 的幂等预自同态。

这里，k代数 M 的幂等前自同态 e 指满足 $e^2 = e$ 的 k-线性映射，且

$$e(xy) - e(x)e(y) = e(yx) - e(y)e(x) \tag{6.1}$$

对任意 x、$y \in M$。回顾一下，对于任意 k-代数（M，$\cdot$），都可以关联一个交换的 k-代数（M，$\circ$）和一个反交换的 k-代数（M，$[-,-]$）。

定理 6.1。设 M 是一个 k-代数。在集合 $E := \{e \in \mathrm{End}_k(M) \mid e$是一个前态射与 e: $M \to M$是幂等的 $\}$之间，即 M的所有幂等前自同态的集合与所有有序对（K, B）的集合 P之间，存在一个双射；其中， K是 M的前理想， B是 M的前-k-子代数，并且 ${}_kM = K \oplus B$ 作为一个 k-模。与前自同态 $e \in E$对应的有序对是（$\ker(f)$ $f(M)$）。反之，与有序对（K, B）对应的幂等前自同态 $\in P$是第二典范投影 $\pi_2 : {}_kM = K \oplus B \to B$ 与包含映射 $\varepsilon_2 : B \hookrightarrow {}_kM$的复合映射。

证明。我们来证明该命题的最后一部分，即证明 $\varepsilon_2\pi_2 : (M, \cdot) \to (M, \cdot)$ 是一个前态射。等价地，我们必须证明 $\varepsilon_2\pi_2 : (M, [-]) \to (M, [-])$ 是一个态射。这是成立的，因为 $\pi_2 : (M, [-]) \to (B, [-])$ 和 $\varepsilon_2 : (B, [-]) \to (M, [-])$ 都是态射。例如， π_2 是一个态射，因为 $\pi_2([m, m']) = \pi_2([k + b, k' + b']) = \pi_2([k, k']) + \pi_2([k, b']) + \pi_2([b, k']) + \pi_2([b, b']) = [b, b'] = [\pi_2(m)\ \pi_2(m')]$。□

与李代数的情形类似，我们有如下层次结构

$$\text{associative algebras} \Rightarrow \text{pre-Lie algebras} \Rightarrow \text{Lie-admissible algebras} \Rightarrow \text{algebras},$$

对于 Jordan 代数，我们也有如下层次结构

结合代数 $\Rightarrow$ 前约旦代数 $\Rightarrow$ Jordan-容许代数 $\Rightarrow$ 代数。

这里，前 Jordan k-代数 [13] 是一个 k-代数 $(A, \cdot)$，其中

$$(x \circ y) \cdot (z \cdot u) + (y \circ z) \cdot (x \cdot u) + (z \circ x) \cdot (y \cdot u) = z \cdot [(x \circ y) \cdot u] + x \cdot [(y \circ z) \cdot u] + y \cdot [(z \circ x) \cdot u]$$

and

$$x \cdot [y \cdot (z \cdot u)] + z \cdot [y \cdot (x \cdot u)] + [(x \circ z) \circ y] \cdot u = z \cdot [(x \circ y) \cdot u] + x \cdot [(y \circ z) \cdot u] + y \cdot [(z \circ x) \cdot u]$$

对于每个 $x, y, z, u \in A$，其中 $x \circ y = x \cdot y + y \cdot x$。Jordan-容许代数 [1] 是一个$k$-代数 $(A, \cdot)$，在乘法 $x \circ y = x \cdot y + y \cdot x$下成为 Jordan 代数。

现在很容易将之前的结果对偶化。设 $(M, \cdot)$ 是任意一个 k-代数。在 $(M, \cdot)$ 上定义一个广义同余，即集合 M 上的一个等价关系 $\sim$，满足：对于每个 $x, x', y, y' \in M$以及每个 $\lambda \in k$, $x \sim x'$和 $y \sim y'$，均可推出 $x + y \sim x' + y'$, $\lambda x \sim \lambda x'$，以及 $x \circ y \sim x' \circ y'$。相应地，$(M, \cdot)$ 上的一个广义理想是 ${}_kM$ 的一个 k- 子模 I，满足对于每个 $x \in M$ 以及每个 $i \in I$ 均有 $x \circ i \in I$。例如，任意广义态射的核（即 0 的原像）总是一个广义理想。将 k-代数 $(M, \cdot)$ 的广义子代数定义为 ${}_kM$ 的一个 k-子模 B，满足对于每个 $x, y \in B$均有 $x \circ y \in B$。

我们已经看到，与 Alg_k 的自函子 U 类似，范畴 Alg_k 上也有一个自函子C，它将任意 k-代数 $(A, \cdot)$ 对应到 k-代数 $(A, \circ)$，其中$x \circ y = xy + yx$ 对每个 x， $y \in A$。这个自函子 $C : \mathrm{Alg}_k \to \mathrm{Alg}_k$ 可扩展为函子$C : \mathrm{Alg}_{k,g} \to \mathrm{Alg}_k$。

回顾广义态射的定义：映射 $\varphi : M \to M'$ 是广义态射 $(M, \cdot) \to (M', \cdot)$，当且仅当它是代数同态 $(M, \circ) \to (M', \circ)$。于是容易证明：

定理 6.2. 设 M 是一个 k-代数。集合 $E := \{e \in \mathrm{End}_k(M) \mid e$ 是广义态射且 e: $M \to M$ 是幂等的，与 M 的所有幂等广义自同态构成的集合 $\}$ 之间存在一个双射；该双射对应于集合 P 中的所有有序对 (K, B)，其中 K 是 M 的广义理想， B 是 M 的广义 k-子代数，并且 ${}_kM = K \oplus B$ 是一个 k-模。与广义自同态 $e \in E$ 对应的有序对是 $(\ker(f)\ f(M))$。反过来，与有序对 $(K, B) \in P$ 对应的幂等广义自同态，是第二典范投影 $\pi_2 : {}_kM = K \oplus B \to B$ 与包含映射 $\varepsilon_2 : B \hookrightarrow {}_kM$ 的复合映射。

在这种对偶化中，我们使用了对偶化的“第一种方式”（第 4.1 小节）。让我们看看对偶化“第二种方式”（第 4.2 小节）会出现什么情况：

定理 6.3. 设 M 是一个 k-代数。假设 M 2-无挠。那么，在满足 $|\ e$ 是反前态射的集合 $E:=\{e \in \mathrm{End}_k(M)$ 与满足 $M \to M$ 幂等的集合 e 之间，存在一个双射；后者是 M 的所有幂等反前自同态的集合，而前者是所有有序对 (K,B) 的集合，其中 K,B 是 ${}_kM$ 的 k-子模，视作一个 k-模，且对每个 $x,y \in M$ 均有 $xy-yx \in K$，对所有 $b,b' \in B$ 均有 $bb'=b'b$。与反前自同态 $e \in E$ 对应的有序对是 $(\ker(f)\ f(M))$。

证明。设 $\varphi\colon M \to M$ 是一个幂等反前自同态。那么 $\varphi=\varphi^2$，其中φ 是一个反前态射，φ^2 是一个前态射。因此，φ 同时是一个前态射和一个反前态射。条件 (2.1) 和 (4.5) 合起来等价于

$$\varphi(xy)-\varphi(yx)=\varphi(x)\varphi(y)-\varphi(y)\varphi(x)=-(\varphi(x)\varphi(y)-\varphi(y)\varphi(x)).$$

由于 M 是无 2-扭的，这等价于

$$\varphi(xy)-\varphi(yx)=\varphi(x)\varphi(y)-\varphi(y)\varphi(x)=0.$$

也就是说，

$$\varphi(xy)=\varphi(yx) \quad \text{and} \quad \varphi(x)\varphi(y)=\varphi(y)\varphi(x).$$

我们已经证明，幂等反前自同态 $\varphi\colon M \to M$ 恰好是一个幂等的 k-模自同态 $\varphi\colon M \to M$，并且对每个 x、$y \in M$，都有 $xy-yx \in \ker(\varphi)$，且对所有 b、$b' \in \varphi(M)$，都有 $bb'=b'b$。现在很容易得出结论。□

注 6.4. 对于结合 k-代数 R，构造非导子前导子的最标准例子的方法是，取一个导子 $d\colon R \to R$ 和一个 k-线性映射$\tau\colon R \to Z(R)$，使得 $\tau([R,R])=0$。那么 $d+\tau$便是一个前导子，但不一定是导子。这些前导子通常称为结合 k-代数 R的真前导子。Martindale 的经典结果 [18] 指出，对于具有非平凡幂等元且特征为 $\neq 2$的本原环，所有前导子本质上都具有这种形式。

现在由定理 6.3 可知，对于任意无 2-挠的 k-代数 M，M 的幂等反前自同态恰好是幂等的 k-模自同态 $\tau\colon {}_kM \to {}_kM$满足以下条件的 ${}_kM\colon\ \tau([M,M])=0$以及对于所有 b, $b' \in \tau(M)$，均有 $bb'=b'b$。这一结果与上一段中陈述的结果之间的关系是显而易见的。

7. Another description of pre-Lie algebras

现在我们想说明，对于一个固定的李代数 A，如何描述所有次伴随李代数为 A 的前李代数，以及所有次伴随李代数为 A 的李可容许代数；为此，我们再次利用适当的幂等自同态。为达到这一目的，我们需要对 k-模 R的非结合含单位张量代数作一处修改，其中 k 是一个带单位元的交换环；该代数曾在 [10, 第 3] 节中研究过。固定一个不定元（符号）x，并考虑所有非结合单项式（由等于x 的元素构成、保留括号的形式乘积），且其中至少出现一次 x。单项式 u、v的乘积就是 $(u)(v)$。这样，我们得到一个么半群，即自由循环么半群 S。S中的每个元素 s 都有一个次数 $d(s)$，它是一个正整数：即在s中等于 x 的出现次数。因此，S 就是不定元 x中次数为 ≥ 1 的所有非结合单项式的集合。

注释 7.1。描述 S 中元素的另一种方式是利用有根树。唯一的次数为 1 的单项式 x 可以用只有一个顶点的有根图来描述。次数为 >1 的其他单项式可以用三元组 $(T,r,\leq)$ 来描述，其中 (T,r) 是一棵有根树，T 的所有顶点的次数均为 ≤ 3，根 r 是唯一一个次数为 2 的顶点，并且在所有次数为 1 的顶点（叶子）组成的集合上有一个线性序 $\leq$。这些有根树也必须视为同构意义下相同 $\varphi\colon (T,r,\leq) \to (T',r',\leq)$，其中 $\varphi\colon\ T \to T'$ 是图同构，而 φ 在 T 的所有叶子构成的线性有序集合与 T' 的所有叶子构成的线性有序集合之间诱导出一个有序集合态射。乘积 $(T,r,\leq)\cdot(T',r',\leq)$ 是有根树 $(T'',r'',\leq)$，其中 T'' 的顶点集合是 T 的顶点集合与 T' 的顶点集合的不交并，再加上另一个

顶点 r''。T'' 的边集是 T 的边集、T' 的边集以及另外两条边的不相交并，其中一条边连接 r'' 和 r，另一条边连接 r'' 和 r'。最后，T'' 的叶子集是 T 的所有叶子与 T' 的所有叶子的不相交并，并且 T 的叶子的线性有序集写在 T' 的叶子的线性有序集“左侧”，使得不相交并的次序满足 T 的每个叶子都小于 T' 的每个叶子。单项式的次数等于相应有根树中的叶子数。

k 为交换含幺环时，k-模 R 的非结合张量代数是

$$T_{na}(R) := \bigoplus_{s\in S} R^{\otimes d(s)}.$$

在 $T_{na}(R)$ 中，对于每个次数为 n 的元素 $s \in S$，也就是说，对于每一种将次数为 n 的 x 中的单项式加上括号的方式，都有一份 $R^{\otimes n}$（n 份 k-模 R 在 k 上的张量积）。代数 $T_{na}(R)$ 按 S 分次，因为 $(R^{\otimes d(s)})\cdot(R^{\otimes d(t)}) \subseteq$ ({v19)。

非结合 k代数 $T_{na}(R)$（k 为交换含幺环，R 为一个 k-模）具有非结合 k代数的泛性质：任意从R 到 A 这一 k代数的 k-模态同态 $R \to A$，都可以唯一延拓为 k代数同态 $T_{na}(R) \to A$。

现在设 $(A, \cdot)$ 是一个前李 k-代数。将 $T_{na}(A)$ 的泛性质应用于恒等态射 $A \to A$，得到一个 k-代数满射态射 φ: $T_{na}(A) \to A$。令 I 为 φ 的核。于是 $T_{na}(A) = A \oplus I$ 作为 k-模。moreover I 包含 $T_{na}(A)$ 中所有形如 $x\otimes y - y\otimes x - [x, y]$ 的元素，以及所有形如 $(x\otimes y)\otimes z - (y\otimes x)\otimes z - x\otimes (y\otimes z) + y\otimes (x\otimes z)$ 且满足 $x, y, z \in A$ 的元素。注意，在此 $x\otimes y - y\otimes x$ 是一个次数为 2 的齐次元素，$[x, y]$ 是一个次数为 1 的齐次元素，$(x\otimes y)\otimes z - (y\otimes x)\otimes z$ 是齐次分量 $A^{\otimes d(s)} = A^{\otimes 3}$ 中次数为 3 的齐次元素，其中 $s = (xx)x$；而 $-x\otimes (y\otimes z) + y\otimes (x\otimes z)$ 是齐次分量 $A^{\otimes d(s)} = A^{\otimes 3}$ 中次数为 3 的齐次元素，其中 $s = x(xx)$。现在容易看出：

定理 7.2. 设 A 是一个李 k代数。那么，次伴随李代数为 A 的前李代数，恰好是与 $T_{na}(A)/I$同构的 k代数，其中 $T_{na}(A)$是 k模 A的非结合张量代数，I 是 $T_{na}(A)$的一个理想，使得 $T_{na}(A) = A\oplus I$作为 k模成立，并且 I 包含 $T_{na}(A)$中所有形如 $x\otimes y - y\otimes x - [x, y]$ 的元素，以及形如 $(x\otimes y)\otimes z - (y\otimes x)\otimes z - x\otimes (y\otimes z) + y\otimes (x\otimes z)$的元素，其中 x、y、$z \in A$。

李可容许代数也类似：

定理7.3。设 A 是一个李 k-代数。那么，具有子邻接李代数 A 的李可容许的 k-代数，恰好是与 $T_{na}(A)/I$ 同构的 k-代数，其中 $T_{na}(A)$ 是 k-模 A 的非结合张量代数，I 是 $T_{na}(A)$ 的一个理想，使得$T_{na}(A) = A\oplus I$ 作为 k-模，并且 I包含 $T_{na}(A)$ 中所有形如 $x\otimes y - y\otimes x - [x, y]$ 的元素，以及所有形如 $(x, y, z)+(y, z, x)+(z, x, y) = (y, x, z)+(x, z, y)+(z, y, x)$ 的元素，其中 $x, y, z \in A$。这里 $(x, y, z) = (x\otimes y)\otimes z - x\otimes(y\otimes z)$，其中 $(x\otimes y)\otimes z$ 是齐次分量 $A^{\otimes d(s)} = A^3$ 中次数为3 的齐次元素，且 $s = (xx)x$，而 $x\otimes(y\otimes z)$是齐次分量 $R^{\otimes d(s)} = R^3$ 中次数为 3 的齐次元素，且 $s = x(xx)$。

因此，在这种情况下，我们也有从一组适当的幂等 k-代数自同态 $T_{na}(A)$ 到所有具有次伴随李代数 A 的前李 k-代数（李可容许的 k-代数）集合的一一双射。

References

[1] A. A. Albert, *Power-associative rings*, 美国数学会汇刊 64 (3)(1948), 552–593. [2] G. Ancohea, *On semi-automorphisms of division algebras*, 数学年刊48 (1947), 第 1 期, 147–153. [3] M. J. ArroyoPaniagua 和 A. Facchini, *Category of G-groups and its spectral category*,代数通讯45(2017), 第 4期, 1696–1710.[4] M. Breˇsar, *On the distance of the composition of two derivations to the generalized derivations*, 格拉斯哥数学杂志, 33 (1991), 89-93.

[5] M.Breˇsar, *Commuting traces of biadditive mappings commutativity-preserving mappings and Lie* , , 《美国数学 *mappings* 335 1993 525 546
会汇刊》（），-。[6] M. Breˇsar, *Matej Jordan derivations revisited* 139 2005 3, 。《剑桥哲学学 411 425
会数学论文集》（），第 – 期。[7] M. Breˇsar、M. A. Chebotar 和W.S. MartindaleIII, 《函数恒等式》，数学前沿丛书, Birkhäuser 出版社，巴塞尔，2007 年。[8] D.Bourn、A. Facchini 和M. Pompili, *Semidirect products of skew braces*, 《代数通讯》51(5)（2023），2129–2143。[9] M.Cerqua、A. Facchini、 *Pre-Lie Algebras*、 *their multiplicative lattice*、 *and idempotent endomorphisms*, 已提交发表, 2023, 2301 02627 可在 http://arxiv.org/abs/ 查阅。A.
[10] *Algebras with a bilinear form*
Facchini和 L. Heidari Zadeh, *and idempotent endomorphisms*, 已被《代数杂志》接受发表（ 2023 2210 08230 ），可在
[11] *Abstractly constructed prime spectra*
http://arxiv.org/abs/ 查阅。A. Facchini、C.A.Finocchiaro 和 G. Janelidze, 《代数通论》83(1)（2022），论文编号 8，共 38 页。[12] Guilai Liu 和 Chengming Bai, *Anti-pre-Lie algebras Novikov algebras and commutative 2-cocycles* , *on Lie algebras* 10 48550 2207 06200
[13] *Pre-Jordan algebras*Dongping Hou、Xiang Ni和 ChengmingBai, 《数学斯堪的纳维亚》1121，19 201348（），第 – 期。[14] I. N. Herstein, *Jordan derivations of prime rings*, 《美国数学会会刊》8（1957），1104–1110。[15] I.N. Herstein, *Lie and Jordan structures in simple*、 *associative rings*, 《美国数学会公报》67（1961），517–531。[16] N. Jacobson, *Abstract derivation and Lie algebras*, 《美国数学会汇刊》42（1937），第 2期，206–224。[17] G. Janelidze 和 G. M. Kelly, *Central extensions in Mal'tsev varieties*, 《理论与应用范畴》7（2000），219–226。[18] W.S. MartindaleIII, *Lie derivations of primitive rings*, 《密歇根数学杂志》11（1964），183–187。[19] T.VanderLinden, *Non-associative algebras*, 载于《代数、拓扑与范畴的新视角》，M. M. Clementino、A.Facchini 和 M. Gran 编，科英布拉数学丛书 1，施普林格，查姆，2021 年。

Department of Mathematics, Al-Azhar University, Egypt
Email address: fatema_azmy@azhar.edu.eg

Dipartimento di Matematica "Tullio Levi-Civita", Università di Padova, 35121 Padova, Italy
Email address: facchini@math.unipd.it