arXiv:2304.05101v1 [math.CT] 11 Apr 2023

´微分模

米歇尔·瓦基´埃

Résumé. 对于范畴 C 中的任意对象 x，都可以定义其上方 x 的 *modules deBeck* 范畴，即范畴 C/$_x$ 中阿贝尔群对象的范畴 Ab(C/$_x$)。由此我们至少可以对所有局部可表示范畴，导出模的概念*cotangent*，或 Ab(C/$_x$) 中 x 的 Ω_x 模。

对于环 k 上的交换 k-代数范畴 Alg$_k$， k-代数 A 上的 Beck 模范畴 Ab(Alg^k/$_A$) 等价于 k-模范畴 Mod$_A$，而微分模等于 *différentielles de Kähler* 的模。

本文旨在说明，对于任意局部可范´畴（即局部可呈´现的范畴），都可以得到一些结´果，这些结果推´广´了 K¨ähler 微´分模的经典性´质´。

Abstract.对于范畴C 中的任意对象 x，都可以定义 *Beck modules* 在x 上的范畴，即范畴 Ab(C/$_x$) 中的阿贝尔群对象范畴。由此构造，至少对于任意局部可表示范畴，我们可以在 Ab(C/$_x$)中得到 *cotangent* 模或 *differentials* Ω_x 的 x 的概念。

对于环 k 上的交换 k-代数范畴 Alg$_k$， k-代数 A 上的 Beck 模 Ab(Alg^k/$_A$) 范畴等价于 A-模的范畴 Mod$_A$，而余切模等于 A 的 *Kähler differentials* 模。

本文旨在证明，对于任意局部可表示范畴，都有一些结果推广了凯¨勒微分模的经典性质。

Table des matières

引言2 1.关于伴随函子的回顾 42.Beck 模52.1.阿贝尔群对象与Beck模52.2.群范´畴 82.3.微分模的正合序列9 3.例子163.1.集合范´畴16 3.2.交换幺¨半群范畴 17 3.3. 交换环范畴 19 参´考´文献 20

Date：2023年4月。2020 *Mathematics Subject Classification.* 13 A18（12J10 14E15）。*Key words and phrases.* 贝克模，余切模。

∗ 部分受法国国家科研署“CatAG”项目资助，项目编号：ANR-17-CE40-0014。

Introduction

设 X 一个可微、解析或代数的簇，对于 x 的每一点 X，我们都可以定义一个切空间 T_xX；对于任意态射 $g : X \longrightarrow Y$，我们都可以定义一个微分映射 ´: $T_xX \longrightarrow T_{g(x)}Y$，它是一个线性映射，用于在$x \in X$的邻域内近似 g。因此，我们可以将切空间和微分的概念视为将一个范畴线性化的一种方式。为了推广这一构造，我们首先回顾代数情形下切空间和微分映射的构造。

设 k 是一个交换环， A 是一个 k-代数，那么存在一个 A-模 $\Omega^{A/k}$，即 K ¨ahler 微分模或余切模，它表示函子

$$\begin{array}{rccc} Der_k(A,-): & \mathbf{Mod}_A & \longrightarrow & \mathbf{Ens} \\ & M & \mapsto & Der_k(A,M), \end{array}$$

或者，对于任意 A-模 M，我们将 $Der_k(A,M)$ 记为从 A ` 到 M 的 k-导子的集合。

那么，如果 X 是定义在 k 上的代数簇，我们可以将 X 的 K¨ahler 微分层 $\Omega^{X/k}$ 定义为 X 上的准凝聚层：它由每个 X 的仿射开集 $Spec(A)$ 上的 A-模 $\Omega^{A/k}$ 定义；按定义，切丛 $TX \longrightarrow X$ 等于丛 $\mathbb{V}(\Omega^{X/k}) := \mathrm{Spec}\big(\mathrm{Sym}(\Omega^{X/k})\big)$。

对于任意态射 $f : A \longrightarrow B$ 在范 ´畴 Alg_k 的 k-代数 ` 交换代数中，存在一个 B-模映射

$$\delta_f : \Omega_A \otimes_A B \longrightarrow \Omega_B \quad ,$$

我们在 d ´e 因此，对于任意态射 $g : X \longrightarrow Y$，我们有一个交换图表 if

$$\begin{array}{ccc} TX & \xrightarrow{dg} & TY \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

其中，态射 $TX \longrightarrow TY \times_Y X$ 对应于由自然映射 $\delta_g : g^*(\Omega_Y) \to \Omega_X$ 诱导的映射 $g^*\big(Sym(\Omega_Y)\big) \longrightarrow Sym(\Omega_X)$。

余切模，或更一般地说，在奇异簇的情形下作为余切模的导出版本的余切复形，可用于研究簇的变形，更准确地说，用于研究无穷小变形。为此，考虑一个环的平方零扩张是有用的。我们回顾，对于任意 A-模 M，我们可以通过令 $(a,m)\cdot(a',m') = (aa', am' + a'm)$，赋予 A-模$A \oplus M$一个 k-代数的交换结构。

我们将 ´ k-代 ` 数 $B = A \oplus M$ 视为 $\mathrm{Alg}^{k/A}$ 范畴中的一个对象，也就是说，视为一个带有态射 $u_B : B \longrightarrow A$ 的 $k$-代 ` 数，其态射是交换三角形

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & C \\ & {\scriptstyle u_B}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle u_C} & \\ & A & \end{array}$$

于是我们注意到， $B = A \oplus M$ 并不是范畴 $\mathrm{Alg}^{k/A}$ 中任意的对象，而是带有阿贝尔群对象结构；并且将 M 映射到 $A \oplus M$ d ´ 的函子定义了一个

´在 A-模范畴与 $\mathrm{Alg}_{k/A}$ 中的阿贝尔群对象范畴 ´($\mathrm{Alg}_{k/A}$) 之间的范畴等价 Ab。

从交换群对象结构的遗忘函子 $U_A : Ab(\mathrm{Alg}_{k/A}) \succ \mathrm{Alg}_{k/A}$ admet，一个左伴~~随函~~子 `a gauche $L_A : \mathrm{Alg}_{k/A} \longrightarrow Ab(\mathrm{Alg}_{k/A})$，并且我们有等式 $\Omega_{A/k} = L_A(^{\star}\mathbf{Alg}_{k/A})$，其中 $^{\star}\mathbf{Alg}_{k/A}$ 是范畴 $\mathrm{Alg}_{k/A}$ 的终对象 $id_A : A \longrightarrow A$。

可以将这一构造推广，我们可以在任意范畴 C 中定义阿贝尔群对象，即 C 中的对象 a，使得由 Yoneda 态射 $h_a : \mathrm{C}^{op} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ 关联的可表预层是一个阿贝尔群预层。于是，对于 C 中的任意对象 x，我们将其上的 Beck 模范畴定义为范畴 ´ $Ab(\mathrm{C}_{/x})$，即范畴 $\mathrm{C}_{/x}$ 中的阿贝尔群对象。 moreover，范畴 $Ab(\mathrm{C}_{/x})$ 是一个加性范畴；如果范畴 C 是正合范畴，那么它还是阿贝尔范畴。

那么，如果遗忘函子 $U_x : Ab(\mathrm{C}_{/x}) \succ \mathrm{C}_{/x}$ ~~有~~一个左伴随 ` $L_x : \mathrm{C}_{/x} \longrightarrow Ab(\mathrm{C}_{/x})$，我们将 L_x 对 x 的终对象 $\star_{\mathbf{C}_{/x}} = id_x : x \longrightarrow x$ 的像称为余切模或微分模 ´，并记作 $\Omega_x = L_x(^{\star}\mathbf{C}_{/x})$。

我们参阅 J.M. Beck [Be] 和 D.G. Quillen [Qu] 的文章，以了解阿贝尔群中对象的类´别与模´块类´别之间的联系，并参阅 M. Barr [Ba 1] 的文章，了解 Beck 模类´别的特´性´。

如同交换 k-代数`的情形一样，我们希望为 C 中的任意态射 $f : x \longrightarrow y$ 定义´一个从微分´ Ω_x 模到 Ω_y模的映射。对于 f C 中，存在一个加性函子 $f^*_{[Ab]} : Ab(\mathrm{C}_{/y}) \succ Ab(\mathrm{C}_{/x})$，它连接分别位于 y 和 x 之上的 Beck 模范畴´；我们构造了一个自然~~映射~~ $[\delta_f] : \Omega_x \longrightarrow f^*_{[Ab]}(\Omega_y)$ 到 $Ab(\mathrm{C}_{/x})$。于是，如果函子 $f^*_{[Ab]}$ 具有一个左伴随 ` $f_{!\,[Ab]} : Ab(\mathrm{C}_{/x}) \succ Ab(\mathrm{C}_{/y})$，我们便由此得到一个映射~ $[\delta_f] : f_{!\,[Ab]}(\Omega_x) \succ \Omega_y$ 到 $Ab(\mathrm{C}_{/y})$，它对应于交换 $k$- 代数 ` 范畴 Alg_k 中的映射 $\delta_f : \Omega_A \otimes_A B \longrightarrow \Omega_B$。

在 k-代数范畴中，映射 δ_f 提供了关于态射 $f : A \longrightarrow B$ 的信息。特别地，我们有关于微分模的两个基本正合序列，本文的目标之一是将这些正合序列推广到任意局部可表示范畴 C 的情形。

为陈述这些结果，我们首先需要为范畴 C 中的任意态射 $f : x \longrightarrow y$ 定义相对微分 B-模 $\Omega_{B/A}$ 的类比；对于 k-代数中的任意态射 $f : A \longrightarrow B$，该模已有定义。为此，我们将 Ω_f 构造为对象 f 的上方 Beck 模范畴中的一个对象，其中 f 被视为范畴 C 中的对象（参见定义 2.12）。

因此，定理 2.18 将微分模之间在 Alg_k 框架下定义的第一正合基本序列推广了；定理 2.19 的灵感来自第二正合基本序列以及微分模与局部化的相容性；最后，定理 2.20 推广了微分模与标量扩张可交换这一事实。

在最后一部分，我们将研究这些结果在集合范畴、交换幺半群范畴中的表述，并回顾 k-交换代数范畴的例子。

1. Rappels sur les foncteurs adjoints

设 C 和 D 是两个范畴，如果我们有一对伴随函子

$$F : \mathbf{C} \underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\perp}} \mathbf{D} : G$$

我们分别记 $\eta_x : x \longrightarrow GFx$ 和$\epsilon_y : FGy \longrightarrow y$ 为伴随的单位´和余单位´。我们回顾，复合´态射 $\epsilon_{Fx} \circ F\eta_x \colon Fx \longrightarrow Fx$和 $G\epsilon_y \circ \eta_{Gy} \colon Gy \longrightarrow Gy$是恒等态射´。

双射 集合 $Hom_{\mathbf{C}}(x, Gy)$ 与 $Hom_{\mathbf{D}}(Fx, y)$ 之间的自然变换定义为:

$$\begin{array}{ccc} Hom_{\mathbf{C}}(x, Gy) & \rightleftarrows & Hom_{\mathbf{D}}(Fx, y) \\ \alpha & \longmapsto & \epsilon_y \circ F\alpha \\ G\beta \circ \eta_x & \longmapsfrom & \beta \end{array}$$

设 C 是一个类´别，对于C中的每个对 x 象，我们分别记$\mathsf{C}_{/x}$ 和$\mathsf{C}^{x/}$ 为位于 x之上的对象的类´别，也就`是由箭`头 $u : z \longrightarrow x$ 组成的类´别，以及位于 x之下的对象的类´别，也就`是由箭`头 $v : x \longrightarrow z$ 组成的类´别。

设 $f : x \longrightarrow y$ 是 C 中的一个态射，那么若范畴 C 存在有限极限，我们就有一对伴随函子

$$f_! : \mathbf{C}_{/x} \rightleftarrows \mathbf{C}_{/y} : f^*$$

定´义为

$$\begin{aligned} f_! &: (z \xrightarrow{u} x) \longmapsto (z \xrightarrow{f \circ u} y) \\ f^* &: (t \xrightarrow{v} y) \longmapsto (x \times_y t \xrightarrow{p_1} x) \end{aligned}$$

同样地 样，若范畴 C 存在有限余极限，我们就有一对伴随函子 ts

$$f_* : \mathbf{C}_{x/} \rightleftarrows \mathbf{C}_{y/} : f^!$$

定义为

$$\begin{aligned} f_* &: (x \xrightarrow{v} t) \longmapsto (y \xrightarrow{q_1} y \coprod_x t) \\ f^! &: (y \xrightarrow{u} z) \longmapsto (x \xrightarrow{u \circ f} z) \end{aligned}$$

特别地，在 ` 是终对象的情形，或者在 ` 是初始对象的情形，我们得到以下伴随函子对:

$$[x]_! : \mathbf{C}_{/x} \rightleftarrows \mathbf{C} : [x]^* \qquad \text{et} \qquad [y]_* : \mathbf{C} \rightleftarrows \mathbf{C}_{y/} : [y]^!$$

设 F: C $\rightleftarrows$ GD 是一对伴随函子，那么对于 D 中任意 y，我们都有一对新的伴随函子 $F_{G(y)}$: C$_{/G(y)} \rightleftarrows$ D$_{<}$ $_{/y}$ G_y : d´efinie par

$$\begin{aligned} F_{G(y)} &: (x \xrightarrow{v} G(y)) \longmapsto (F(x) \xrightarrow{\epsilon_y \circ F(v)} y) \\ G_y &: (z \xrightarrow{u} y) \longmapsto (G(z) \xrightarrow{G(u)} G(y)) \ . \end{aligned}$$

同样，对于 C 中任意 x，我们都有一对伴随函子 F_x : C$_{x/}$ ⟹ D≺ $_{F(x)/}$ $G_{F(x)}$: d´efinie par

$$F_x : (x \xrightarrow{v} z) \longmapsto (F(x) \xrightarrow{F(v)} F(z))$$
$$G_{F(x)} : (F(x) \xrightarrow{u} y) \longmapsto (x \xrightarrow{G(u)\circ\eta_x} G(y)) \ .$$

注记 1.1.考虑´一个态射 $g : z \longrightarrow y$，它位于一个具有有限余极限的范畴C中，以及伴随函子对 $F = [z]_* :$ C⇐⇒ $= {}_{z/}$ $[z]^! = G$ EC:。函子 G 将($z \xrightarrow{g} y$) 的像映射为 y，由此´得到新的伴随函子对 F_y :C $_{/y}$ ⟹ E≺ $_{/g}$ G_g :，定义´为以下方式`:

$$F_y : \ (b \xrightarrow{l} y) \ \longmapsto \ \begin{array}{ccc} z & = & z \\ \downarrow{\scriptstyle q_1} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ z \coprod b & \xrightarrow[(g,l)]{} & y \end{array} \qquad et \qquad G_g : \ \begin{array}{ccc} z & = & z \\ \downarrow{\scriptstyle u} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ a & \xrightarrow[a]{} & y \end{array} \ \longmapsto \ (a \xrightarrow{h} y)$$

范畴´E$_{/g}$ 由´定义于 E$_{/g}$ = $\left(\text{C}_{z/}\right)_{/g}$ 是 ´等同 `于范畴´C (，这是范畴$_{/y}$)$_{g/}$图表´带有 $z \xrightarrow{v_a} a \xrightarrow{u_a} y$ $u_a \circ v_a = g$。

前面定义的伴随函子对 F_y : C$_{/y}$ ⟹ E≺ $_{/g}$ G_g : d´efinie pr´ec´edemment 也可以定义为伴随函子对 $F_y = [g]_* :$ C$_{/y}$ ⟹ E≺ $_{/g}$ $= [g]^! = G_g$:。

2. Beck 模

2.1. 阿贝尔群对象与 Beck 模。对于任意范畴 Y，Y 中阿贝尔群对象构成的范畴 Ab(Y) 是 Y 的对象组成的子范畴，其中由 y 表示的预层 h_y : Y^{op} ⟶ Ens 是阿贝尔群预层。这意味着，对于 Y 中任意 z，集合 $h_y(z) = Hom_{\mathbf{Y}}(z, y)$ 是阿贝尔群；并且对于 Y 中任意态射 $u : z \longrightarrow z'$，相应的映射 $u^* : h_y(z') \succ h_y(z)$ 是群同态。Ab(Y) 中的态射是预层群之间的态射。

如果范´畴 Y 具有有限极限，只需假设 Y 具有有限积并有一个终对象 $\star_{\mathbf{Y}}$，一个阿贝尔群对象是对象 y Y 中的对象，并且给定态射m_y : $y \times y \longrightarrow y$、 i_y : $y \longrightarrow y$ 和 e_y : $\star_{\mathbf{Y}} \longrightarrow y$，使得 m_y 定´义了阿贝尔群运算，其中 i_y 为逆元， e_y 为单´位´元。在 Ab(Y) 中，从 y 到 y' 的态射是一个态射 f: $y \longrightarrow y'$ 在 Y 中，使得我们有 $f \circ m_y = m_{y'} \circ (f \times f)$、 $f \circ i_y = i_{y'} \circ f$ 和 $f \circ e_y = e_{y'}$。

我们回顾如下结果（参见 [Ba 1], 第 2 章定理 1.5 和 2.4）。

定理 2.1. 对于任何具有有限极限的范畴 Y，群对象构成的子范畴 Ab(Y) 是一个加性范畴；若 Y 局部可呈示，则 Ab(Y) 也局部可呈示。

此外，若范畴 Y 是正合的，则范畴 Ab(Y) 是一个阿贝尔范畴。

设 Y 是一个具有有限极限的范畴，那么加性范畴 Ab(Y) 中的零元素 $0_{\mathbf{Y}}$ 是带有平凡群结构的终对象 $\star_{\mathbf{Y}}$。

对于任意 x 属于 Ab(Y)，态射 $x \longrightarrow 0_{\mathbf{Y}}$ 属于 Ab(Y) 是由态射 $x \longrightarrow \star_{\mathbf{Y}}$ 属于 Y 诱导的态射；对于任意 y 属于 Ab(Y)，态射 $0_{\mathbf{Y}} \longrightarrow y$ 属于 Ab(Y) 是由 ´el´元 $e_y : \star_{\mathbf{Y}} \longrightarrow y$ 诱导的态射，该元是 y 的群结构中的单位元。

特别地，阿贝尔群 $Hom_{Ab(\mathbf{Y})}(x, y)$ 的单位元 0 是由 Y 中的一个态射 g_g 诱导的，该态射通过终对象 $\star_{\mathbf{Y}}$： $x \longrightarrow \star_{\mathbf{Y}} \longrightarrow y$ 分解。

存在一个遗忘函子 $U : Ab$(Y)$\succ$ Y；如果范畴Y 是局部可表´示的，则函子 U 有一个左伴随 ` L :Y $\succ Ab$(Y)，即将对象映射为自由阿贝尔´群的函子（参见[Ba 1], 第 6 章练习 1.5-3）。

一个左正合 `函子 G: Y $\succ$ X 保´留有限极限，并且一个阿贝´尔群对象的像是一个阿贝´尔群对象；于是它诱导出一个加性函子 $G_{[Ab]} : Ab$(Y) $\succ Ab$(X)，使下列图表交换

$$\begin{array}{ccc} Ab(\mathbf{Y}) & \xrightarrow{G_{[Ab]}} & Ab(\mathbf{X}) \\ \downarrow U & & \downarrow U \\ \mathbf{Y} & \xrightarrow{G} & \mathbf{X} \end{array}$$

设 C 是一个具有有限极限的范畴。

定义 2.2. 对象 x 之上的 Beck 模范畴，是 C/x 中 x 之上的对象范畴里的阿贝尔群对象范畴： $B_{\mathbf{C}}(x) = Ab$(C/x)。

我们可以定义遗忘函子 U_x，将 x 之上的 Beck 模范畴 Ab(C/x) 映入范畴 C/x。若范畴 C 是局部可呈示的，则范畴 C/x 也如此，并且函子 U_x 有一个左伴随 `，称为阿贝尔化函子´，记作´Ab_x 于 Fr] 中:

$$L_x : \mathbf{C}_{/x} \underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\perp}} Ab(\mathbf{C}_{/x}) : U_x$$

设 G: D $\succ$ C 是一个左正合函子，对于 D 中的每个 y，函子 G_y: D/$_y \longrightarrow$ C/$^{G(y)}$ 保持终对象和有限积，群对象的像仍是阿贝尔群对象。因此，我们得到一个函子 $G_{y_{[Ab]}}$，它从 y 上的 Beck 模范畴 $B_{\mathbf{D}}(y)$ =Ab(D/$_y$) 映到 $G(y)$ 上的 Beck 模范畴 $B_{\mathbf{C}}(G(y)) = Ab$(C/$^{G(y)}$)，该函子是加性的，并且使下图交换:

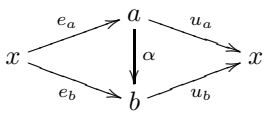
$$\begin{array}{ccc} Ab(\mathbf{D}_{/y}) & \xrightarrow{G_{y[Ab]}} & Ab(\mathbf{C}_{/G(y)}) \\ \downarrow U_y & & \downarrow U_{G(y)} \\ \mathbf{D}_{/y} & \xrightarrow{G_y} & \mathbf{C}_{/G(y)} \end{array}$$

我们将 $[a]$ un ´el´ement de la cat´egorie Ab(C/x) 记作一个对象，它对应于 C 中的一个对象 a，以及一个态射 $u_a : a \longrightarrow x$，还有态射 m_a： $a \times_x a \longrightarrow a$、 i_a： $a \longrightarrow a$ 的数据,

e_a：$x \longrightarrow a$ 由群结构给出。我们有等式 $u_a \circ e_a = id_x$，范畴 $Ab(\mathbf{C}/x)$ id_x 是由可交换图表 $x \rightrightarrows a \longrightarrow x$、$e_a$ 构成的范畴 $\mathbf{C}^{x/}_{/x}$ 的子范畴，我们记作 $[a] = (a \overset{u_a}{\dashrightarrow} x)$。

加性范畴 $Ab(\mathbf{C}/x)$ 的零对象 $0_{\mathbf{C}/x}$ 对应于 ` $[x] = (x \overset{id_x}{\longrightarrow} x \qquad x \overset{id_x}{\dashleftarrow})$.

同样，我们将 $[\alpha]$ 记作从 $Hom_{Ab(\mathbf{C}/x)}([a],[b])$ 的一个态射，这是在 $Hom_{\mathbf{C}}(a,b)$ 中的一个态射 α，使得我们有交换图

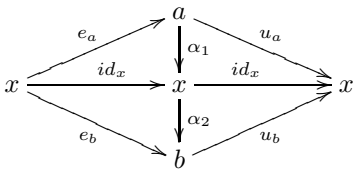


并且与态射 m_a 和 m_b、i_a 和 i_b兼容。

引理2.3。设 α 一个态射在 $Hom_{Ab(\mathbf{C}/x)}([a],[b])$ 中，那么按照前´述´的记号，我们有

$$[\alpha] = [0] \iff \alpha = e_b \circ u_a \ .$$

证明。 . 态射 $[\alpha]$ 是阿贝尔群´$Hom_{Ab(\mathbf{C}/x)}([a],[b])$ 中的零态射，当且仅当它可以经由 $0_{\mathbf{C}/x}$ 分解，也就是说，如果我们可以找到一个交换图



□

定义 2.4。（1）微分模，或抽象余切模，Ω_x de x 是位于 x 之上的 Beck 模，它是 $\mathbf{C}/x$中的终对象 $\star_{\mathbf{C}/x} = (x \overset{id_x}{\longrightarrow} x)$ 通过 L_x 所得的像，$\Omega_x = L_x(\star_{\mathbf{C}/x})$。

(2) 对于任意 $[b]$ 属于 `于 $Ab(\mathbf{C}/x)$ 的元素，我们将其称为取值于 $[b]$ 集合中的 $x$ `的 C-导数集合´。

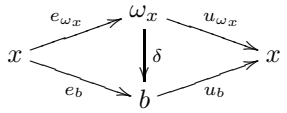
$$Der_{\mathbf{C}}(x,[b]) := Hom_{Ab(\mathbf{C}/x)}(\Omega_x,[b]) \simeq Hom_{\mathbf{C}/x}(\star_{\mathbf{C}/x},b)$$

其中 $b = U_x([b])$。

e_{ω_x}微分模´Ω_x 对应于一个´元素 $[\omega_x] = (\omega_x \overset{u_{\omega_x}}{\dashrightarrow} x)$，其中 ω_x 属于 $\mathbf{C}$，并且根据定义，我们有 $U_x(\Omega_x) = (\omega_x \xrightarrow{u_{\omega_x}} x)$。特别地，伴随$\eta_{\star_{\mathbf{C}/x}}$ 的单位 $L_x \dashv U_x$对应于一个态射 η_x：$x \longrightarrow \omega_x$ v´满足 $u_{\omega_x} \circ \eta_x = id_x$。

在 $Der_{\mathbf{C}}(x,[b])$中的一个´导数 θ 对应于 $[\delta]$ 中的一个态射$Hom_{Ab(\mathbf{C}_{/x})}([\omega_x],[b])$，也就是说，对应于一个态射 δ： $\omega_x \longrightarrow b$ ，使得下图交换

$$\begin{tikzcd} & \omega_x \arrow[dd, "\delta"] \arrow[dr, "u_{\omega_x}"] & \\ x \arrow[ur, "e_{\omega_x}"] \arrow[dr, "e_b"'] & & x \\ & b \arrow[ur, "u_b"'] & \end{tikzcd}$$

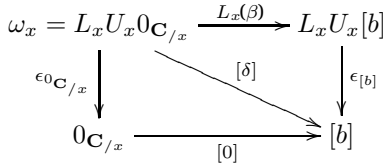


根据伴随，对应于态射 $[\delta]$ 的是一个态射 β ，属于 $Hom_{\mathbf{C}_{/x}}(\star_{\mathbf{C}_{/x}},b)$，它由 $\beta = U([\delta])^{\circ\,\eta_{\star_{\mathbf{C}_{/x}}}}$ 定义；也就是说，是一个态射 $\beta\colon x \longrightarrow b$ v´，满足 $u_b \circ \beta = id_x$，使得我们有等式 $\beta = \delta \circ \eta_x$。反过来，根据伴随，我们将态射 β （属于$Hom_{\mathbf{C}_{/x}}(\star_{\mathbf{C}_{/x}},b)$）对应到态射 $[\delta]$，属于 $Hom_{Ab(\mathbf{C}_{/x})}([\omega_x],[b])$，它由 $[\delta] = \epsilon_{[b]} \circ L_x(\beta)$ 定义。

命题 2.5。阿贝尔群 $Der_{\mathbf{C}}(x,[b])$ 的一个元素 θ 为零元素，当且仅当与之对应的态射 β （从 $Hom_{\mathbf{C}_{/x}}(\star_{\mathbf{C}_{/x}},b)$ 出发）等于 $[b]$ 的阿贝尔群结构中的单位元态射 e_b ´。

证明。根据定义，元素 θ 是零元素，当且仅当我们有 $[\delta]=[0]$。根据引理 2.3，若 $[\delta]=[0]$ ，我们有 $\delta = e_b \circ u_{\omega_x}$ ，由此可推出 $\beta = e_b \circ u_{\omega_x} \circ \eta_x = e_b$。反过来，若 $\beta = e_b$ ，则 β 是零态射 $[0]$: $0_{\mathbf{C}_{/x}} \longrightarrow [b]$ 经 U_x 的像，因此我们有如下交换图

$$\begin{tikzcd} \omega_x = L_xU_x0_{\mathbf{C}_{/x}} \arrow[r, "L_x(\beta)"] \arrow[d, "\epsilon_{0_{\mathbf{C}_{/x}}}"'] \arrow[dr, "{[\delta]}"] & L_xU_x[b] \arrow[d, "\epsilon_{[b]}"] \\ 0_{\mathbf{C}_{/x}} \arrow[r, "{[0]}"'] & {[b]} \end{tikzcd}$$



由此我们可以推出 $[\delta]=[0]$。

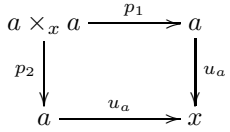
□

注 2.6。若 x 是范畴 C 的初始对象，那么对于 C 中的每个对象 $u_b : b \longrightarrow x$ ，都存在唯一的态射 β: $x \longrightarrow b$ ，使得 $u_b \circ \beta = id_x$。因此，阿贝尔群 $Der_{\mathbf{C}}(x,[b])$ 仅由零元素构成。特别地，我们有 $\Omega_x = (0)$。

2.2. 群范畴。现在我们考虑一个范畴 C，其中每个对象都具有群结构，该结构不一定是交换的，并且态射保持这一结构。更确切地说，我们假设对于 C 中的每个对象，都存在态射：$a \times a \longrightarrow a$ 、 ι_a : $a \longrightarrow a$ 和 ε_a : $\star_{\mathbf{C}} \longrightarrow a$ ，它们定义了群对象结构；并且对于 C 中的每个态射 f: $b \longrightarrow a$，我们有 $f \circ \mu_b = \mu_a \circ (f \times f)$、 $f \circ \iota_b = \iota_a \circ f$和 $f \circ \varepsilon_b = \varepsilon_a$。我们记 c_a : $a \times a \longrightarrow a \times a$ 为交换因子的态射；特别地，若有 $\mu_a \circ c_a = \mu_a$，则群运算是交换的。

设 x 为 C 中的一个对象，并且如´前´所述 m_a， i_a 和 e_a 是定´义对象的阿贝´尔群对象结构的态射，该对象 $[a]$ 在 $Ab(\mathrm{C}/x)$ 中，其中 $u_a : a \longrightarrow x$ 。

我们有交换图

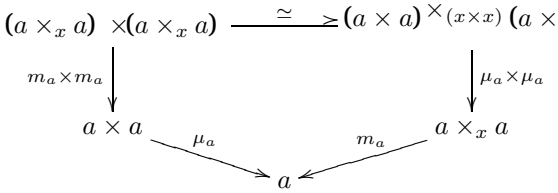


并记 $\mu_a^{(3)}$: $a \times a \times a \longrightarrow a$ 态射 $\mu_a(\mu_a, id_a) = \mu_a(id_a, \mu_a)$, $g_a : a \longrightarrow a$ 态-射 $g_a = e_a \circ u_a$, 以及 q_a : $a \longrightarrow a$ 态射 $g_a \circ p_1 = g_a \circ p_2$

命题 2.7.我们有 ´等式´ $m_a = \mu_a^{(3)} \circ \phi$ 其中 ˋ态射 ϕ : $a \times_x a \longrightarrow a \times a \times a$ 定义为´ $\phi = (p_2, \iota_a \circ q_a, p_1)$。

证明。这是一个经典结果，由以下备注推得。

由于 C 中的态射遵守复合律 μ_a ，我们得到下图的交换´性



由此我们得出，复合态射 $a \times a \xrightarrow{\psi} a \times a^{\times_{(x \times x)}} a \times a \xrightarrow{m_a \circ (\mu_a \times \mu_a)} a$ ，其中 $\psi = \underline{((g_a \circ p_2, p_1), (p_2,} g_a \circ p_1))$，等于 $\mu_a \circ c_a$。

□

如果我们假设类别C的对象是赋有群运算、并采用乘法记号的集合，那么前´述´关系可以写成： $m_a(r_1.s_1, r_2.s_2) = m_a(r_1, s_1).m_a(r_2, s_2)$，其中 r_1、 r_2、 s_1、 s_2 属于集合 a，且 $u_a(r_1) = u_a(s_1)$ 以及 $u_a(r_2) = u_a(s_2)$，并且对于 r 和 s 中的任意元素，在 a中有 $m_a(g_a(s).r, s.g_a(r)) = s.r$，而命题的等´式´可以写成

$$m_a(r, s) = s.e_a(t)^{-1}.r \ ,$$

对于 r 和 s 属于集合 a ，其中 $t = u_a(r) = u_a(s)$。

推论 2.8。范畴 $Ab(\mathbf{C}/x)$ 是由交换图表 $x \xrightarrow{e_a} a \xrightarrow{u_a} x$ 构成的范畴 $\mathbf{C}^{x/./x}$ 的一个满子范畴，其中 $u_a \circ e_a = id_x$。

证明。事实上，我们由前一个命题推得， $[a]$ 的阿贝尔群对象结构完全由态射 $e_a : x \longrightarrow a$ 和 u_a : $a \longrightarrow x$ 决定。

□

2.3. 微分模的正合序列。设 C 是一个局部可呈范畴，且设 $f : x \longrightarrow y$ 属于 C，我们希望比较微分模 Ω_x 和 Ω_y ，并定义相对微分模 $\Omega_{x/y} = \Omega_f$。

函子 $f^*: \mathbf{C}_{/y} \longrightarrow \mathbf{C}_{/x}$ 是一个右伴随，因此它是左正合的，并诱导出一个加性函子 $f^*_{[Ab]}: Ab(\mathbf{C}_{/y}) \to Ab(\mathbf{C}_{/x})$，使得下图交换

$$\begin{array}{ccc} Ab(\mathbf{C}_{/y}) & \xrightarrow{f^*_{[Ab]}} & Ab(\mathbf{C}_{/x}) \\ \downarrow{\scriptstyle U_y} & & \downarrow{\scriptstyle U_x} \\ \mathbf{C}_{/y} & \xrightarrow{f^*} & \mathbf{C}_{/x} \end{array}$$

我们有一个典范态射 $\vartheta_f : f_!(\star_{\mathbf{C}_{/x}}) \to \star_{\mathbf{C}_{/y}}$ 到 $\mathbf{C}_{/y}$ 中，由此与伴随 $L_y \dashv U_y$ 的单位 $\eta_{\star_{\mathbf{C}_{/y}}}$ 复合，得到一个态射 $f_!(\star_{\mathbf{C}_{/x}}) \to U_y(\Omega_y)$。由伴随 $f_! \dashv f^*$ 和 $L_x \dashv U_x$，以及前一个交换图的交换性，我们推出同构

$$\begin{array}{rcl} Hom_{\mathbf{C}_{/y}}(f_!(\star_{\mathbf{C}_{/x}}), U_y(\Omega_y)) & \simeq & Hom_{\mathbf{C}_{/x}}(\star_{\mathbf{C}_{/x}}, f^*U_y(\Omega_y)) \\ & = & Hom_{\mathbf{C}_{/x}}(\star_{\mathbf{C}_{/x}}, U_x f^*_{[Ab]}(\Omega_y)) \simeq Hom_{Ab(\mathbf{C}_{/x})}(\Omega_x, f^*_{[Ab]}(\Omega_y)) \end{array}$$

从而得到一个自然态射 $[\delta_f]: \Omega_x \longrightarrow f^*_{[Ab]}(\Omega_y)$ 到 $Ab(\mathbf{C}_{/x})$ 中。

如果函子 $f^*_{[Ab]}$ 有一个左伴随 $f_{![Ab]}: Ab(\mathbf{C}_{/x}) \to Ab(\mathbf{C}_{/y})$，我们便可推出一个态射 $[\delta_f]: f_{![Ab]}(\Omega_x) \to \Omega_y$ 到 $Ab(\mathbf{C}_{/y})$ 中；它可以直接由交换图构造得到

$$\begin{array}{ccc} Ab(\mathbf{C}_{/x}) & \xrightarrow{f_{![Ab]}} & Ab(\mathbf{C}_{/y}) \\ \uparrow{\scriptstyle L_x} & & \uparrow{\scriptstyle L_y} \\ \mathbf{C}_{/x} & \xrightarrow{f_!} & \mathbf{C}_{/y} \end{array}$$

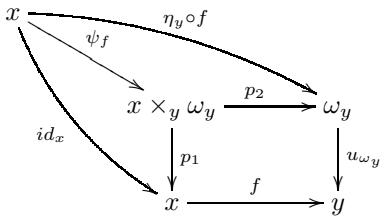
注记 2.9. 如果范畴 C 是一个局部可呈且足够正则的范畴，那么对于 C 中的任意对象 x，伴随 $L_x : \mathbf{C}_{/x} \to Ab(\mathbf{C}_{/x})$: 是单子的，并且范畴 $Ab(\mathbf{C}_{/x})$ 仍然是局部可呈的。

因此，我们由 [Bo] que 的定理 4.5.6. 推得，函子 $f^*_{[Ab]}$ 始终具有一个左伴随 $f_{![Ab]}$ $(\mathbf{C}_{/x}) \to Ab(\mathbf{C}_{/y})$。

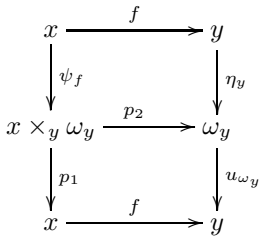
注记 2.10。态射 $[\delta_f]$ 等于态射 $L_y(\vartheta_f)$ o u ϑ_f 是典范态射 $\vartheta_f : f_!(\star_{\mathbf{C}_{/x}}) \to \star_{\mathbf{C}_{/y}}$ 在 $\mathbf{C}_{/y}$ 中。

态射 $[\delta_f]$ 诱导出一个态射 $U_x(\Omega_x) \to U_x f^*_{[Ab]}(\Omega_y) = f^*U_y(\Omega_y)$，属于 $\mathbf{C}_{/x}$，也就是说，一个态射 $\delta_f : \omega_x \longrightarrow x \times_y \omega_y$，它在 x 上方，并且与 ω_x 和 $x \times_y \omega_y$ 的阿贝尔群对象结构相容。那么，通过伴随 $L_x \dashv U_x$，与态射 $[\delta_f]$ 对应的态射 $\psi_f : x \longrightarrow x \times_y \omega_y$ 到 $Hom_{\mathbf{C}_{/x}}(\star_{\mathbf{C}_{/x}}, U_x f^*_{[Ab]}(\Omega_y))$ 定义为 $\psi_f = \delta_f \circ \eta_x$。

根据构造，此态射 ψ_f 由下列交换图定义。



并且由于我们有了´等式´ $id_y = u_{\omega_y} \circ \eta_y$ ，我们由此´推导出以下由笛卡尔方块组成的图表´´´:



因此我们可以´写出 $\delta_f \circ \eta_x = \psi_f = f^*(\eta_y)$。

对于所有 $[b]$ 属于 $Ab(\mathbf{C}/y)$ 的元素，态射 $[\delta_f] : \Omega_x \longrightarrow f^*_{[Ab]}(\Omega y)$ d´定义了一个阿贝尔群态射

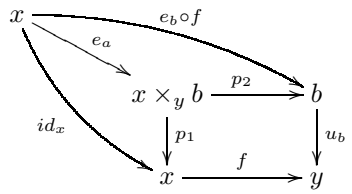
$$[\Delta_f] : Der_{\mathbf{C}}(y,[b]) = Hom_{Ab(\mathbf{C}_{/y})}(\Omega_y,[b]) \longrightarrow Der_{\mathbf{C}}(x, f^*_{[Ab]}([b])) = Hom_{Ab(\mathbf{C}_{/x})}(\Omega_x, f^*_{[Ab]}([b]))$$
$$[\delta] \longmapsto f^*_{[Ab]}([\delta]) \circ [\delta_f]$$

在伴随 $L_y \dashv U_y$下，与 `到 $[\delta]$相关联的 $Hom_{\mathbf{C}_{/y}}(\star_{\mathbf{C}_{/y}}, b)$ 中的态射´等于 ´ `到 $\beta = \delta \circ \eta_y$，其中 `或$\delta = U_y([\delta])$；同样，在伴随$L_x \dashv U_x$ 下，与 $f^*_{[Ab]}([\delta]) \circ [\delta_f]$到 `相关联的 $Hom_{\mathbf{C}_{/x}}(\star_{\mathbf{C}_{/x}}, f^*(b))$ 中的态射´等于 ´ `到 $f^*(\delta) \circ \delta_f \circ \eta_x$。由此我们根据前述内容推得，与伴随 $L_y \dashv U_y$ 和 $L_x \dashv U_x$ 相关联的映射是由函子 f^* 诱导的映射:

$$\Delta_f : Hom_{\mathbf{C}_{/y}}(\star_{\mathbf{C}_{/y}}, b) \longrightarrow Hom_{\mathbf{C}_{/x}}(\star_{\mathbf{C}_{/x}}, f^*(b))$$
$$\beta \longmapsto f^*(\beta)$$

命题2.11。 $[\delta]$ $(y,[b])$的´元´素属于 $[\Delta_f]$ 的核，当且仅当我们有等´式 $e_b \circ f = \beta \circ f$，其`中 $\beta$ 是与 `相关联的 $Hom_{\mathbf{C}_{/y}}(\star_{\mathbf{C}_{/y}}, b)$ 的态射，而 e_b 是 $[b]$ 的阿贝´尔群结构的单位元。

证明。设 $[b]$ 为 $Ab(\mathbf{C}/y)$ 中与 $\mathbf{C}/y$ 中的对象 $u_b = b \longrightarrow y$ 相对应的对象，并带有态射 m_b: $b \times_y b \longrightarrow b$、 i_b: $b \longrightarrow b$ 和 e_b: $y \longrightarrow b$。于是，像$[a] = f^*_{[Ab]}([b])$ 对应于对象 p_1: $a = f^*(b) = x \times_y b \longrightarrow x$ 以及态射 m_a: $a \times_x a \longrightarrow a$、 i_a: $a \longrightarrow a$ 和 $e_a : x \longrightarrow a$，这些态射是将左正合函子 `应用于 f^*后得到的。特别地，我们可以借助下列交换图描述态射 e_a



根据命题 2.5 和前面的注记， $[\delta]$ 的像为零，当且仅当我们有 $f^*(\beta) = e_a$，也就是说，当且仅当我们有 $e_b \circ f = \beta \circ f$。

□

微分´模Ω_y 是相对于C的初始对象的微分´模，并且我们定´义相对微分´模 Ω_f，将其定义为 f 在 f 的Beck模范畴中的微分´模，并将其视为 D ´C = 范畴的一个对象。更确切地说，对于C 中的一个态射 $f : x \longrightarrow y$，我们将 f 视为$\mathbf{D} = \mathbf{C}_{x/}$ 范畴的一个对象；如前所述，我们有一对伴随函子

$$L_f : \mathbf{D}_{/f} \underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\perp}} Ab(\mathbf{D}_{/f}) : U_f$$

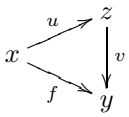
于是我们有如下定义。

定义 2.12。相对微分模 Ω_f 是 Ab(D/f) 中位于 f 上方的 Beck 模，由 D/f 的终对象 $^{\star_{\mathbf{D}_{/f}}} =$($f \xrightarrow{id_f} f$) 经 L_f 取像得到，$\Omega_f = L_f(^{\star_{\mathbf{D}_{/F}}})$。

于是我们考虑伴随函子对 $F = [x]_* : \mathbf{C} \rightleftarrows {}_{x/} =$ $[x]^! = G$ C D：即 ($f : x \longrightarrow y$) 在函子 G 下的像为 y，由此我们推出伴随函子对

$$F_y : \mathbf{C}_{/y} \rightleftarrows \mathbf{D}_{/f} : G_f \quad .$$

D/f =(C$_{x/}$)/f 范畴中的对象是 C 中的交换图表:



我们记作（u, z, v）。从（u_1, z_1, v_1）到（u_2, z_2, v_2）的态射是一个态射 g: $z_1 \longrightarrow z_2$v´erifiant $u_2 = g \circ u_1$ et $v_1 = v_2 \circ g$，而 D/f 的终对象 $^{\star_{\mathbf{D}_{/f}}}$ 是图表（f, y, id_y）。从 $^{\star_{\mathbf{D}_{/f}}}$ 到对象（u, z, v）的态射，等同于一个态射 e: $y \longrightarrow z$ dans C v´erifiant$v \circ e = id_y$ et $e \circ f = u$。

同样，范畴 C/$_y$ 的对象是 C 中的态射 $w : t \longrightarrow y$，记作 (w, t)。从 (w_1, t_1) 到 (w_2, t_2) 的态射是满足 $w_1 = w_2 \circ h$ 的态射 $h : t_1 \longrightarrow t_2$ v´，而 C/$_y$ 的终对象 $^{\star_{\mathbf{C}_{/y}}}$ 是态射 (id_y, y)。给定从 $^{\star_{\mathbf{C}_{/y}}}$ 到对象 (w, t) 的态射，等价于给定 C 中满足 $w \circ e = id_y$ 的态射 e: $y \longrightarrow t$ v´。

函子 $G_f : \mathsf{D}/f \longrightarrow \mathsf{C}/y$ 在阿贝尔群对象的子范畴之间诱导出函子 $G_{f_{[Ab]}}$，也就是说，我们有如下交换图:

$$\begin{array}{ccc} Ab(\mathbf{D}_{/f}) & \xrightarrow{G_{f_{[Ab]}}} & Ab(\mathbf{C}_{/y}) \\ \downarrow{\scriptstyle U_f} & & \downarrow{\scriptstyle U_y} \\ \mathbf{D}_{/f} & \xrightarrow{G_f} & \mathbf{C}_{/y} \end{array}$$

命题 2.13. (1) 函子 $G_f : \mathsf{D}/f \longrightarrow \mathsf{C}/y$ 是忠实的`。

(2) 函子 $G_{f_{[Ab]}}$: $Ab(\mathsf{D}/f) \succ Ab(\mathsf{C}/y)$ 是范畴的 ´等价 ´。

证明. (1) 只需注意到函子 $G_f : \mathsf{D}/f \longrightarrow \mathsf{C}/y$ 将 (u, z, v) 映到 (v, z)，并将一个态射 $g : z_1 \longrightarrow z_2$ 映到其自身。

(2) 我们将构造函子 $F_{y_{[Ab]}}$，它是函子 $G_{f_{[Ab]}}$ 的逆元。

设 (w, t) 是 $Ab(\mathsf{C}/y)$ 中的一个 ´元素´，存在一个态射 $e : {}^{\star}\mathbf{C}_{/y} \longrightarrow (w, t)$，因此存在一个态射 $e : y \longrightarrow t$，它在 C 中满足 v´ $w \circ e = id_y$。于是我们定义 $F_{y_{[Ab]}}(w, t) = (u, t, w)$，其中 $u = e \circ f$。只需验证 (u, t, w) 是 D/f 中的一个阿贝尔群对象，并且我们有 $G_{f_{[Ab]}} \circ F_{y_{[Ab]}} = id_{Ab(\mathbf{C}_{/y})}$ 以及 $F_{y_{[Ab]}} \circ G_{f_{[Ab]}} = id_{Ab(\mathbf{D}_{/f})}$。

□

备注 2.14。我们可以通过图表 x描述 D/f 中的每个群对象 $\xrightarrow{v_z} z \underset{e_z}{\overset{u_z}{\rightleftarrows}} y$，其中 $u_z \circ e_z = id_y$、$u_z \circ v_z = f$ 和 $e_z \circ f = v_z$，且态射 e_z 由单位元定义。特别地，微分模 Ωf 对应于图表 $x \xrightarrow{v_{\omega_f}} \omega_f \underset{e_{\omega_f}}{\overset{u_{\omega_f}}{\rightleftarrows}} y$。

引理 2.15。存在一个自然变换 $[\Gamma] : L_y G_f \Rightarrow G_{f_{[Ab]}} L_f$，使得对于 D/f中的任意 a，态射 $[\Gamma(a)] \in Hom_{Ab(\mathbf{C}_{/x})}(L_y G_f(a)\ G_{f_{[Ab]}} L_f(a))$ 是一个满态射。

证明。自然变换 $[\Gamma]$由 $[\Gamma] = \epsilon_y G_{f_{[Ab]}} L_f \circ L_y G_f \eta_f$定义，其中 η_f是伴随 $L_f \dashv U_f$的单位，´是伴随 $L_y \dashv U_y$的余单位，并利用等式 $G_f U_f = U_y G_{f_{[Ab]}}$。

对于 a 在D/f 中以及 $[b]$，我们推´出伴随 $L_f \dashv U_f$ 和函子 $G_{f_{[Ab]}}$ 的完全忠´实´性所给出的同构

$$Hom_{\mathbf{D}_{/f}}(a, U_f([b])) \simeq Hom_{Ab(\mathbf{D}_{/f})}(L_f(a), [b]) \simeq Hom_{Ab(\mathbf{C}_{/y})}(G_{f_{[Ab]}} L_f(a), G_{f_{[Ab]}}([b])),$$

以及图表的交换性´以及前´述´和伴随 $L_y \dashv U_y$ 同构

$$Hom_{\mathbf{C}_{/y}}(G_f(a), G_f U_f([b])) \simeq Hom_{\mathbf{C}_{/y}}(G_f(a), U_y G_{f_{[Ab]}}([b])) \simeq Hom_{Ab(\mathbf{C}_{/y})}(L_y G_f(a), G_{f_{[Ab]}}([b])).$$

函子 G_f诱导出一个从 $Hom_{\mathbf{D}_{/f}}(a, U_f([b]))$到 $Hom_{\mathbf{C}_{/y}}(G_f(a)\ G_f U_f([b]))$ 的映射，从而得到一个映射

$$\gamma(a) : Hom_{Ab(\mathbf{C}_{/y})}(G_{f_{[Ab]}} L_f(a), G_{f_{[Ab]}}([b])) \longrightarrow Hom_{Ab(\mathbf{C}_{/y})}(L_y G_f(a), G_{f_{[Ab]}}([b])).$$

于是，映射 $\gamma(a)$对应于与态射 $[\Gamma(a)]$的复合。由函子G_f 的忠实性以及函子 $G_{f\,[Ab]}$ 的本质满射性，我们推出，对于 $[c]$ 在 $Ab(\mathbf{C}/y)$ 中，映射

$$Hom_{Ab(\mathbf{C}_{/y})}(G_{f\,[Ab]}L_f(a),[c]) \longrightarrow Hom_{Ab(\mathbf{C}_{/y})}(L_yG_f(a),[c])$$

由态射 $[\Gamma(a)]$ 诱导的映射是单射，因此 $[\Gamma(a)]$ 是一个 ´满态射。

□

对于 a ´等于终对象 $\star_{\mathbf{D}/f}$ 的 `，我们得到一个自然满态射:

$$[\gamma_f]:\ \Omega_y \longrightarrow G_{f\,[Ab]}(\Omega_f)\ ,$$

并且我们推导出，对于 $Ab(\mathbf{D}/f)$ 中任意的 $[b]$，在导集合 $[\Gamma_f]$ 之间存在一个单射: $Der_{\mathbf{D}}(f,[b]) \hookrightarrow Der_{\mathbf{C}}(y,G_{f\,[Ab]}([b]))$。

注 2.16。态射 $[\gamma_f]$ 分解为 $\Omega_y \longrightarrow L_yU_yG_{f\,[Ab]}(\Omega f) \succ G_{f\,[Ab]}(\Omega f)$。

定义 2.17。设 $f:\ X \longrightarrow Y$ 和 $g:\ Y \longrightarrow Z$ 是加性范畴 A 中的两个态射，则称序列

$$X \xrightarrow{R} Y \xrightarrow{S} Z \longrightarrow 0$$

est 在A中，对于所有 U，我们都有一条由阿´贝尔群组成的正合序列 s

$$0 \longrightarrow Hom_{\mathbf{A}}(Z,U) \xrightarrow{S^*} Hom_{\mathbf{A}}(Y,U) \xrightarrow{R^*} Hom_{\mathbf{A}}(X,U)\ .$$

定理 2.18. 设 C 是一个局部可呈范畴，并设 $f:x \longrightarrow y$ 在 C 中，使得函子 $f^*_{[Ab]}$ 存在左伴随 `a gauche $f_{!\,[Ab]}:\ Ab(\mathbf{C}/x) \succ Ab(\mathbf{C}/y)$，那么我们在 $Ab(\mathbf{C}/y)$ 中有一个正合序列:

$$f_{!\,[Ab]}(\Omega_x) \xrightarrow{[\tilde{\delta_f}]} \Omega_y \xrightarrow{[\gamma_f]} G_{f\,[Ab]}(\Omega_f) \longrightarrow 0$$

证明。根据定´义，必须证明对于 $[c]$ 中 $Ab(\mathbf{C}/y)$的每个元素，所诱导的态射序列

$$0 \longrightarrow Hom_{Ab(\mathbf{C}_{/y})}(G_{f\,[Ab]}(\Omega_f),[c]) \xrightarrow{[\gamma_f]^*} Hom_{Ab(\mathbf{C}_{/y})}(\Omega_y,[c]) \xrightarrow{[\tilde{\delta}_f]^*} Hom_{Ab(\mathbf{C}_{/y})}(f_{!\,[Ab]}(\Omega_x),[c])$$

是一列阿贝尔´群的正合序列。根据前述内容，我们´得出，这 ´等价于 `证明: 对于任意 $[b]$ 属于 $Ab(\mathbf{D}/f)$，态射序列

$$0 \longrightarrow Hom_{Ab(\mathbf{D}_{/f})}(\Omega_f,[b]) \xrightarrow{[\Gamma_f]} Hom_{Ab(\mathbf{C}_{/y})}(\Omega_y,G_{f\,[Ab]}([b])) \xrightarrow{[\Delta_f]} Hom_{Ab(\mathbf{C}_{/x})}(\Omega_x,f^*_{[Ab]}G_{f\,[Ab]}([b]))$$

是正合的。

由于我们已经看到态射 $[\Gamma_f]$ 是单射，只需证明等式 ´成立:

$$Ker([\Delta_f]) = Im([\Gamma_f])\ .$$

我们可以写出如下交换图

$$\begin{array}{ccccc}
Der_{\mathbf{D}}(f,[b]) & \xrightarrow{[\Gamma_f]} & Der_{\mathbf{C}}(y,G_{f_{[Ab]}}([b])) & \xrightarrow{[\Delta_f]} & Der_{\mathbf{C}}(x,f^*_{[Ab]}G_{f_{[Ab]}}([b])) \\
\| & & \| & & \| \\
Hom_{Ab(\mathbf{D}_{/f})}(\Omega_f,[b]) & \xrightarrow{[\Gamma_f]} & Hom_{Ab(\mathbf{C}_{/y})}(\Omega_y,G_{f_{[Ab]}}([b])) & \xrightarrow{[\Delta_f]} & Hom_{Ab(\mathbf{C}_{/x})}(\Omega_x,f^*_{[Ab]}G_{f_{[Ab]}}([b])) \\
\downarrow\simeq & & \downarrow\simeq & & \downarrow\simeq \\
Hom_{\mathbf{D}_{/f}}(\star_{\mathbf{D}_{/f}},U_f([b])) & \xrightarrow{\Gamma_f} & Hom_{\mathbf{C}_{/y}}(\star_{\mathbf{C}_{/y}},U_yG_{f_{[Ab]}}([b])) & \xrightarrow{\Delta_f} & Hom_{\mathbf{C}_{/x}}(\star_{\mathbf{C}_{/x}},U_xf^*_{[Ab]}G_{f_{[Ab]}}([b]))
\end{array}$$

根据备注 2.14, $[b]$ $Ab(\mathbf{D}/f)$ 的一个对象对应于一个图表 $x \xrightarrow{v_b} b \xrightarrow{u_b} y$，其中$e_b$: $y \longrightarrow b$ v´ 满足 $e_b \circ f = v_b$。一个态射 $[\alpha] \in Hom_{\mathbf{D}_{/f}}(\star_{\mathbf{D}/f}, U_f([b]))$ 对应于一个态射 $\alpha: y \longrightarrow b$，使得 $\alpha \circ f = v_b$ 和 $u_b \circ \alpha = id_y$；一个态射 $[\beta] \in Hom_{\mathbf{C}_{/y}}(\star_{\mathbf{C}/y}, U_yG_{f_{[Ab]}}([b]))$ 对应于一个态射 $\beta: y \longrightarrow b$，使得 $u_b \circ \beta = id_y$；而映射 Γ_f 将态射$[\alpha]$ 映为 $[\beta]$，其中 $\alpha = \beta$。

特别地，态射 $[\beta]$ de $Hom_{\mathbf{C}_{/y}}(\star_{\mathbf{C}/y}, U_yG_{f_{[Ab]}}([b]))$ 属于映射Γ_f 的像，当且仅当我们有 $\beta \circ f = v_b$，也就是说，当且仅当我们有 $\beta \circ f = e_b \circ f$。该结果因此是命题 2.11 的推论。

□

在某些条件下，相对微分模 Ωf 为零；更确切地说，我们有如下结果。

定理 2.19. 设 C 是一个局部可呈范畴，且设 $f: x \longrightarrow y$ 属于 C，使得函子 $f^*_{[Ab]}$ 有一个左伴随 $f_{![Ab]}$: $Ab(\mathbf{C}/x) \succ Ab(\mathbf{C}/y)$。那么，若 f 是 C 中的一个满态射，则映射 $[\delta_f]$: $f_{![Ab]}(\Omega x) \succ \Omega y$ 是 $Ab(\mathbf{C}/y)$ 中的一个满态射。

证明. 若 $f: x \longrightarrow y$ 是 C 中的一个满态射，则诱导态射 ϑ_f: $f_!(\star_{\mathbf{C}/x}) \succ \star_{\mathbf{C}/y}$，对应于 ϑ_f: $(x \xrightarrow{f} y) \succ (y \xrightarrow{id_y} y)$，是 C/y 中的一个满态射。由于函子$L_y$ 是一个左伴随，态射 $L_y(\vartheta_f)$ 也如此；根据注记 2.10，它等于态射 $[\delta_f]$。

□

我们考虑 C 中的两个对象 x 和 z， $y = z \coprod x$，以及态射 $f = q_2$: $x \longrightarrow y$ 和$g = q_1$: $z \longrightarrow y$。与之前一样，我们有伴随函子对

$$F^{(1)} = [z]_* : \mathbf{C} \rightleftarrows \mathbf{C}_{z/} = \mathbf{E} : [z]^! = G^{(1)} \quad ,$$

$(g: z \longrightarrow y)$ 在函子 $G^{(1)}$ 下的像是 y，由此我们推得伴随函子对

$$F^{(1)}_y : \mathbf{C}_{/y} \rightleftarrows \mathbf{E}_{/g} : G^{(1)}_g \quad .$$

与前面一样，我们假设函子 $f^*_{[Ab]}$：$Ab(\mathbf{C}/y) \succ Ab(\mathbf{C}/x)$ 存在一个左伴随函子 `。

定理 2.20。在 $Ab(\mathbf{C}/y)$ 中存在一个自然同构

$$f_{!\,[Ab]}(\Omega_x) \simeq G^{(1)}_{g\,[Ab]}(\Omega_g)\ .$$

证明。函子 $G^{(1)}_{g\,[Ab]}$：$Ab(\mathbf{E}/g) \succ Ab(\mathbf{C}/y)$ 是一个范畴等价，逆函子$F^{(1)}_{y\,[Ab]}$ 是左伴随，并且我们有以下交换图

$$\begin{array}{ccccc} Ab(\mathbf{C}_{/x}) & \xrightarrow{f_{!\,[Ab]}} & Ab(\mathbf{C}_{/y}) & \xrightarrow{F^{(1)}_{y\,[Ab]}} & Ab(\mathbf{E}_{/g}) \\ \uparrow{\scriptstyle L_x} & & \uparrow{\scriptstyle L_y} & & \uparrow{\scriptstyle L_g} \\ \mathbf{C}_{/x} & \xrightarrow{f_!} & \mathbf{C}_{/y} & \xrightarrow{F^{(1)}_y} & \mathbf{E}_{/g} \end{array}$$

根据函子 $f_!$ 的定义，我们有 $f_!(\star^{\mathbf{C}_{/x}}) = (f : x \longrightarrow y)$，而根据注记 1.1，我们有 $F_{(1)y}(f : x \longrightarrow y) = \star^{\mathbf{E}_{/g}}$，于是由前述图表的交换性，我们推出等式

$$F^{(1)}_{y\,[Ab]} f_{!\,[Ab]}(\Omega_x) = \Omega_g\ ,$$

由此得到所求的同构。

□

3. Exemples

3.1. 集合范畴。我们取集合范畴 Ens 作为范畴 C。Ens 中群对象的范畴是阿贝尔群范畴 Ab。

对于 Ens 中任意 X，范畴 $Ab(\mathrm{Ens}/X)$ 是映射 $u : F \longrightarrow X$ 的范畴，其中每个纤维 $F_x = u^{-1}(x)$ 对于 $x \in X$ 都是一个阿贝尔群，而态射定义为

$$Hom_{Ab(\mathbf{Ens}_{/X})}((\ F^{(1)} \xrightarrow{u^{(1)}} X\ ), (\ F^{(2)} \xrightarrow{u^{(2)}} X\ )) = \prod_{x \in X} Hom_{\mathbf{Ab}}(F^{(1)}_x, F^{(2)}_x)\ .$$

函子 L_X: $\mathrm{Ens}_{/X} \longrightarrow Ab(\mathrm{Ens}/X)$ 是函子 U_X：$Ab(\mathrm{Ens}/X) \succ \mathrm{Ens}/X$ 的左伴随，其定义为 $L_X(E \xrightarrow{l} X) = (\ F = \mathbb{Z}_X[E] \xrightarrow{u} X)$，其中 $F_x = \mathbb{Z}[E_x]$ 是由纤维 E_x 对每个 $x \in X$ 生成的自由阿贝尔群。由此我们得出，集合 X 的微分模定义为 $\Omega_X = (X \times \mathbb{Z} \xrightarrow{p_1} X)$。

设 f：$X \longrightarrow Y$ 是 Ens 中的一个映射，那么函子 $f^*_{[Ab]}$：$Ab(\mathrm{Ens}/Y) \succ Ab(\mathrm{Ens}/X)$ 将对象映射为阿贝´尔群 $(G \xrightarrow{v} Y)$，对应于 $(F = X \times_Y G \xrightarrow{p_1} X)$，或`对于任意 $x \in X$，我们都有 $F_x = G_{f(x)}$。

该函子有一个 `左伴随 $f_{!\,[Ab]}$：$Ab(\mathrm{Ens}/X) \succ Ab(\mathrm{Ens}/Y)$，它将对象映射到阿贝´尔群（$F \xrightarrow{u} X$）上（$G \xrightarrow{v} Y$），或对于任意 $y \in Y$ 我们有$G_y = \coprod_{f(x)=y} F_x$。

事实上，对于 $Ab(\mathrm{Ens}_{/X})$ 中的 $(F_{(1)} \xrightarrow{u^{(1)}} X)$，以及 $Ab(\mathrm{Ens}_{/Y})$ 中的 $(G^{(2)} \xrightarrow{v^{(2)}} Y)$，我们有

$$Hom_{Ab(\mathbf{Ens}_{/X})}((\ F^{(1)} \xrightarrow{u^{(1)}} X\ ), f^*_{[Ab]}(\ G^{(2)} \xrightarrow{v^{(2)}} Y\ )) = \prod_{x\in X} Hom_{\mathbf{Ab}}(F^{(1)}_x, G^{(2)}_{f(x)})$$

et

$$Hom_{Ab(\mathbf{Ens}_{/Y})}(f_{![Ab]}(\ F^{(1)} \xrightarrow{u^{(1)}} X\ ), (\ G^{(2)} \xrightarrow{v^{(2)}} Y\ )) = \prod_{y\in Y} Hom_{\mathbf{Ab}}(\coprod_{f(x)=y} F^{(1)}_x, G^{(2)}_y)\ .$$

对于映射 $f\colon X \longrightarrow Y$，于是我们有 $f_{![Ab]}(\Omega_X) = (G \xrightarrow{v} Y)$，其中对任意 $y \in Y\tilde{}$，纤维 $G_y = \coprod_{f(x)=y} \mathbb{Z}$ 以及态射 $[\delta_f]\colon f_{![Ab]}(\Omega_X) \succ \Omega_Y$是这样的态射：在 y 上由 d´efini 定义

$$\delta_y : \coprod_{f(x)=y} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}\ .$$

如果集合 $f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$非空，我们有 $\delta_y\colon \coprod_{f(x)=y} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$，它在每个因子上由 $id_{\mathbb{Z}}$ 定义，并且 δ_y 是满射；如果集合 $f^{-1}(y)$ 为空，我们有 $\delta_y : (0) \succ \mathbb{Z}$。由此我们推得，相对微分模由 $\Omega f = (H \longrightarrow Y)$ 定义，其中若 y 属于映射 f 的像，则为 $H_y = (0)$，否则为 $H_y = \mathbb{Z}$。

我们´由此得出ˆ以下结´果。

˜命题 3.1。态射 $[\delta_f]\colon f_{![Ab]}(\Omega_X) \succ \Omega_Y$是满态射（分别地，是单态射），当且仅当映射 $f\colon X \longrightarrow Y$ 是满射（分别地，是单射）。

˜特别地，$[\delta_f]\colon f_{![Ab]}(\Omega_X) \succ \Omega_Y$是 $Ab(\mathrm{Ens}_{/Y})$ 中的同构，当且仅当$f : X \longrightarrow Y$ 是 Ens 中的双射。

3.2. 交换幺半群范畴。现在我们考虑范畴 Com，其对象是结合、交换且含幺的幺半群。Com 的一个对象 X 是一个集合，配备了内复合律 $\star\colon X \times X \longrightarrow X$，该复合律满足结合律和交换律，并且存在一个关于该复合律 $\star$的单位元 1_X。按照 Michael Barr 的说法，我们有如下描述。

设 X 属于 Com，范畴 $Ab(\mathrm{Com}_{/X})$ 中的一个对象由一个幺半群态射 $A \longrightarrow X$ 以及位于 X m_A 之上的幺半群态射 $A \times_X A \longrightarrow A$、$i_A$ 和 e_A 给出，它们定义了一个阿贝尔群对象结构。

由此我们推´出，对于任意 $x \in X$，这些态射在纤维 $A_x = u_A^{-1}(x)$ 上诱导出一个阿贝´尔群结构，记´为 $+_x$，其单位元是 $0_{A_x} = e_A(x)$。与一个 ´元´x 的复合定义了从 X ´到 A_y 的映射，并且根据命题 2.7 的证明，该映射是阿贝´尔群的群同态。这完全确定了 Com 中的阿贝尔群对象，更确切地说，我们得到如下结果。

命题 3.2. [Ba 2] 设 X 为一个交换幺半群，则 $Ab(\mathrm{Com}_{/X})$ 中的一个对象 A 由以下数据给出：对 X 中的每个 x，有一个阿贝尔群 A_x；对 X 中的每个 x 和 y，有一个群同态 $h^{(A)}_x$: $A_y \longrightarrow A_{x\star y}$ v´，满足 $h^{(A)}_x \circ h^{(A)}_y = h^{(A)}_{x\star y}$。

我们将 A 的一个元素记作一对 (x,a)，其中 $x=u_A(x,a)$ 属于 X， a 属于 A_x，而 A 上的幺半群结构定义为 $(x,a)\star(y,b)=\big(x\star y,\ h_x^{(A)}(b)+_{x\star y}h_y^{(A)}(a)\big)$。

对于任意 A 属于 $Ab(\mathbf{Com}/X)$，导´出空间 $Der_{\mathbf{Com}}(X,A)$按定´义等 ´于集- 合 $Hom_{\mathbf{Com}_{/X}}(X,A)$。根据前`述内容，一个态射 $s$ 属于 $Hom_{\mathbf{Com}_{/X}}(X,A)$对应 `于如下数据：对于每个 x 属于 X，给出一个 ´元´素 s_x 属于 A_x，满足以下性´质´

$$s_{x\star y}=\big(h_x^{(A)}(s_y)+_{x\star y}h_y^{(A)}(s_x)\big)\ .$$

特别地，对于 $x=y$ ´等于 `的´中性´元素 $1_X$ 幺半¨群 $X$，我们有 $h_x^{(A)}=id$，并由此得出 ´， $s_{1_X}$ 等于 ´ `的´中性´元素 $0_{A_{1_X}}$ 阿贝尔群´ A_{1_X}。

一个态射 $f\colon A\longrightarrow B$ 在 $Ab(\mathbf{Com}/X)$ 中，对于每个 x 在 X 中都诱导出一个阿贝尔´群同态 $f_x\colon A_x\longrightarrow B_x$。由于 f 保持幺半¨群的结构，我们还有对于任意 a在 A_x 中以及 b 在 A_y 中的等´式´ $f_{x\star y}\big(h_x^{(A)}(b)+_{x\star y}h_y^{(A)}(a)\big)=h_x^{(B)}\big(f_y(b)\big)+_{x\star y}h_y^{(B)}\big(f_x(a)\big)$，这对 $b=0_{A_y}$ 诱导出等´式´ $f_{x\star y}(h_x^{(A)}(a))=h_x^{(B)}\big(f_y(a)\big)$。于是我们得到以下结´果。

命题 3.3. [Ba 2] 一个态射 $f\colon A\longrightarrow B$ 在 $Ab(\mathbf{Com}/X)$ 中由一族阿贝尔群态射 $f_x\colon A_x\longrightarrow B_x$ 给出， ´并满足关系 $f_{x\star y}\circ h_x^{(A)}=h_x^{(B)}\circ f_y$。

设 $f\colon X\longrightarrow Y$ 是 Com 中的一个态射，则我们有伴随函子对

$$f_!:\mathbf{Com}_{/X}\rightleftarrows\mathbf{Com}_{/Y}:f^*$$

以及交换图

$$\begin{array}{ccc} Ab(\mathbf{Com}_{/Y}) & \xrightarrow{f^*_{[Ab]}} & Ab(\mathbf{Com}_{/X}) \\ \downarrow{\scriptstyle U_Y} & & \downarrow{\scriptstyle U_X} \\ \mathbf{Com}_{/Y} & \xrightarrow{f^*} & \mathbf{Com}_{/X} \end{array}$$

其中`，函子 $f^*_{[Ab]}$ 将对象 B 从 $Ab(\mathbf{Com}/Y)$ 中由阿贝´尔群 $\big(B_y\big)_{y\in Y}$和态射 $h_y^{(B)}$定´义的对象映射到 $A=f^*_{[Ab]}(B)$在 $Ab(\mathbf{Com}/X)$ 中由阿贝尔群´$\big(A_x\big)_{x\in X}$、带有 $A_x=B_{f(x)}$ 和态射 $h_x^{(A)}=h^{(B)}_{f\ x}$ 定´义的对象()。

设Ω_X 为微分模´的 X，且 $\eta_X\colon X\longrightarrow\Omega_X$ 为伴随´的单位，则 Ω_X对应 `于一族 $\big((\Omega_X)_x\big)_{x\in X}$阿贝尔群 ´和 `态射 $h^{(\Omega_X)_x}\colon(\Omega_X)_y\longrightarrow(\Omega_X)_{x\star y}$，而态射 η_X 对应 `于给定´的´元´素 η_x 在 $(\Omega_X)_x$ v´中满足

$$\eta_{x\star y}=\big(h_x^{(\Omega_X)}(\eta_y)+_{x\star y}h_y^{(\Omega_X)}(\eta_x)\big)\ .$$

我们考虑幺半群 $X=(\mathbb{N},+)$， $Ab(\mathbf{Com}/\mathbb{N})$ 中的对象 A 由阿贝尔群 A_n 以及群态射 $h^{(A)}\colon A_n\longrightarrow A_{n+1}$ 的给定所定义，对任意属于 $\mathbb{N}$ 的 n，使用前面的记号，我们有 $h_n^{(A)}=\big(h^{(A)}\big)^n$。同样， $Ab(\mathbf{Com}/\mathbb{N})$ 中的态射 $f\colon A\longrightarrow B$ 由一族阿贝尔群态射 ´$\colon A_n\longrightarrow B_n$ v´定义，满足 $f_{n+1}\circ h^{(A)}=h^{(B)}\circ f_n$。

Pr命题 3.4。微分模 $\Omega_{\mathbb{N}}$ 是 Ab(Com/$\mathbb{N}$) 中由下式定义的对象：

(1) $(\Omega_{\mathbb{N}})_0$ =(0)

(2) $(\Omega_{\mathbb{N}})_n = \mathbb{Z}$ *et* $h^{(\Omega_{\mathbb{N}})} : (\Omega_{\mathbb{N}})_n \xrightarrow{id_{\mathbb{Z}}} (\Omega_{\mathbb{N}})_{n+1}$ *pour* $n \geq 1$.

证明。对于 A 属于 Ab(Com/$\mathbb{N}$) 的任意元素，集合 $Hom_{\mathbf{Com}_{/\mathbb{N}}}(\mathbb{N}, A)$ 与阿贝尔群 A_1 同构。事实上，一个 ´元素 s_1 属于 A_1 的元素 ´确定了一个态射 $s : \mathbb{N} \longrightarrow A$，其中 $s_0 = 0_{A_0}$，且对于任意 $n \geq 1$ $s_n = n\big(h^{(A)}\big)^{n-1}(s_1)$。

一个态射 $f : \Omega_{\mathbb{N}} \longrightarrow A$ 属于 Ab(Com/$\mathbb{N}$) 完全由 $f_1 : (\Omega_{\mathbb{N}})_1 \longrightarrow A_1$ 确定；事实上，我们有 $f_0 = 0$，且对于任意 $n \geq 1$。由等式 $(\Omega_{\mathbb{N}})_1 = \mathbb{Z}$，我们推得态射 f_1 由 f_1(1) 定义，因此得到集合 $Hom_{Ab(\mathbf{Com}_{/\mathbb{N}})}(\Omega_{\mathbb{N}}, A)$ 也与阿贝尔群 A_1同构。

□

3.3. 交换环范畴。设 k 是一个交换环，Alg$_k$ 是 k-交换代数的范畴，我们回顾以下定义和结果。

设 k-代数 A 和 A-模 M，则从 A `到 M 的 k-导子是一个 $d : A \longrightarrow M$ 的 k-模态射，满足莱布尼茨法则 $d(aa') = ad(a') + a'd(a)$。我们用 $Der_k(A, M)$ 表示 k-导子的集合。该集合具有自然的 A-模结构，并且函子

$$\begin{array}{rccc} Der_k(A,-): & \mathbf{Mod}_A & \longrightarrow & \mathbf{Ens} \\ & M & \mapsto & Der_k(A,M), \end{array}$$

由一个 A-模 $\Omega^{A/k}$ 表示，称为 K¨ahler 微分模，也就是说，我们有一个关于 M 的自然同构，介于集合 $Hom_A(\Omega^{A/k}, M)$ 和 $Der_k(A, M)$ 之间。此外，微分模 $\Omega^{A/k}$ 定义为 A-模 I/I^2，其中我们用 I 表示乘法 $m : A \otimes_k A \longrightarrow A$ 的核。

对于任意 A-模 M，我们赋予 A-模 $B = A \oplus M$ 一个称为零平方扩张的 k-代`数结构，并带有一个自然态射 $u_B : B \longrightarrow A$；在 $Der_k(A, M)$ 集合中的 $k$-导´数（从 $A$ `取值于 M）与 $Hom_{\mathbf{Alg}_{k/A}}(A, B)$ 集合中的、从 A 到 B 且在 A 之上的 k-代`数态射之间，存在一个自然双射。

我们由此推导出以下结果´^`。

命题 3.5. 对于任意 k-代数 A，Alg$^{k/A}$ 中的阿贝尔群对象范畴 Ab(Alg$^{k/A}$) ´等价于 `Mod$_A$ 范畴中的 A-模。

证明。由于 `命题 2.7 应用´于 `交换群运算在一个环上，我们发现，对于任意 B在 Ab(Alg$^{k/A}$) 中，阿贝尔´群运算 m_B被定´义为 $m_B(b_1, b_2) = b_1 + b_2 - e_B(a)$，其中 $a = u_B(b_1) = u_B(b_2)$。

应用命题 2.7 的证明中关于在 B 中的乘法的等式“$\mu_B \circ c_B = \mu_B \circ (\mu_B \times \mu_B) \circ \psi$”的 ´egalit´e，我们由此推得 B 同构于带有平方零扩张 k-代数结构的 k-代数 $A \oplus M$，且 $M = Ker(u_B : B \longrightarrow A)$。

L'´equivalence de cat´egories est alors une cons´equence du 推论 2.8。

□

我们重新得到环 A 上的余切模，亦即 K¨ahler 微分模 Ω_A 的经典定义，而定理 2.18、2.19 和 2.20 则是 K¨ahler 微分模理论中经典结果的推广。

定理 2.18 是第一个基本正合序列的推广。该结果指出，对于 Alg_k 中的任意态射 $f : A \longrightarrow B$，我们都有一个 B-模正合序列

$$\Omega_{A/k} \otimes_A B \xrightarrow{\delta_f} \Omega_{B/k} \longrightarrow \Omega_{B/A} \longrightarrow 0 .$$

定´理`是以下关于满 ´态射 $f$ 的结´果的概´括´：$A \longrightarrow B$ 在 $\mathsf{Alg}_k$ 中。满 ´态射类由满射 $f$ 类生´成：$A \longrightarrow B$ 其中 $B = A/I$ 或`，理想 I 的 A 是 f 的核，且局部化 f 类：$A \longrightarrow B$ 其中 $B = S^{-1}A$ 或` S 是 A 的乘法子集。

那么第二个基本正合序列 ´指出，对于任意满射 $f : A \longrightarrow B = A/I$ 我们有一个 B-模的正合序列

$$I/I^2 \longrightarrow \Omega_{A/k} \otimes_A B \xrightarrow{\delta_f} \Omega_{B/k} \longrightarrow 0 ,$$

并且微分模与局部化 ´的相容性´表明，对于任意局部化 $f : A \longrightarrow B = S^{-1}A$ 我们有一个 B-模的同构

$$\delta_f : \Omega_{A/k} \otimes_A B \xrightarrow{\simeq} \Omega_{B/k} .$$

由此我们得出，对于任意满态射 $f : A \longrightarrow B$ 映射 $\delta_f : \Omega_{A/k} \otimes_A B \longrightarrow \Omega^{B/k}$ 在 Mod_B 中都是满态射。

最后，定理 2.20 是微分模与标量扩张可交换这一事实的推广。设 A 是一个 k-代数，$f : k \longrightarrow k'$ 是一个环同态，且 $A' = A \otimes_k k'$，那么我们有 A'-模的同构。

$$\Omega_{A/k} \otimes_A A' \xrightarrow{\simeq} \Omega_{A'/k'} .$$

最后，我们可以作如下说明。

注记3.6。由于范畴 ´（$\mathsf{Alg}^{k/A}$）是 ´等价 `于范畴 Mod_A 的，它独立于基环 k。这是命题 2.13 中（2）的翻译。

Références

[Ba 1] M. Barr： *Acyclic Models*，CRM 专著丛书第 17 卷。美国数学会，2002 年。[Ba 2] M. Barr：幺半群的 Beck 模。麦吉尔逻辑、范畴论与计算研讨会报告讲稿，2017 年 10 月 24 日，www.math.mcgill.ca/˜rags/seminar/Barr-241017-beckmod.pdf[B-B] M. Barr 和 J.M. Beck：无环模型与三元组。载于《范畴代数会议论文集》，施普林格出版社，柏林、海德堡、纽约，第 336–343 页，1966 年。[Be] J.M. Beck：三元组、代数与上同调。哥伦比亚大学学位论文；TAC 重印本第 2 卷，共 59 页。[Bo] F. Borceux：《范畴代数手册 2：范畴与结构》，剑桥大学出版社，2013 年。[Fr] M. Frankland：Beck 模的纤维化范畴（2010），http://www.home.uni-osnabrueck.de/mfrankland/ Frankland BeckModules 20100411.pdf[Qu] D.G. Quillen：关于交换环的（上）同调。载于《范畴代数的应用》（《纯数学专题讨论会论文集》第 XVII 卷，1968 年于纽约举行），第 65–87 页。美国数学会，1970 年。

Institut de Mathématiques de Toulouse UMR 5219, CNRS, Université de Toulouse, UPS, 118 route de Narbonne, F-31062 Toulouse Cedex 9, France*Email address*: vaquie@math.univ-toulouse.fr