arXiv:2304.05145v1 [math.CO] 11 Apr 2023

克鲁斯卡尔–卡托纳定理的极值族

奥里奥尔·塞拉* 柳´伊斯·维纳 †

2023年4月12日

摘要

给定一个由 S 个 k–子集组成的 $[n]$的集合族，其下影 $\Delta(S)$ 是由包含于至少一个 S中的 $(k-1)$–子集组成的集合族。著名的克鲁斯卡尔–卡托纳定理给出了 $\Delta(S)$ 的最小基数，该基数取决于 S 的基数。F¨uredi 和 Griggs（以及M¨ors）证明，在布尔格中，对于这一影最小化问题，某些基数对应的极值族是唯一的，并提出了对这些极值族进行一般刻画的问题。

本文证明了一个新的组合不等式，由此可以导出克鲁斯卡尔–卡托纳定理的又一个简单证明。利用该不等式可以得到这个极小化问题的极值族刻画，从而回答F¨uredi和 Griggs 提出的问题。利用该不等式还可以轻松推导出极值族的一些已知性质和新的附加性质。

目录

1 引言 **2**

2 克鲁斯卡尔–卡托纳定理与 F¨uredi-Griggs 定理 5

3 极值族的刻画 7 3.1 条件必要性的示例.8

4 关键不等式 **11**

4.1 由引理 10 和推论 11 证明引理 2.12 4.2 关于引理 10 和推论 11 的一般评论.12 4.3 平移不变性.15 4.4 几何表示.16 4.5 墙、碎石和铺砌.17 4.6 引理 10 的证明概要.17 4.7 化简墙和一对 k-二项式分解.19 4.8 引理 10 的证明.22 4.9 推论 11 的证明，或引理 2 的 (5).27

5 余字典序的唯一性 **29**

*加泰罗尼亚理工大学数学系，巴塞罗那。 oriol.serra@upc.edu。由西班牙研究署项目 MTM2017-82166-P 资助。

†数学系，UniversitatPolit`ecnica de Catalunya，巴塞罗那。 lluis.vena@gmail.com。由AGAUR 的Beatriu de Pin´os 奖学金BP2018-0030 和 Horizon 2020 计划共同资助。

1 引言

众所周知的克鲁斯卡尔–卡托纳定理 [8, 11] 关于一个集合族的 k–子集的最小影$[n]=\{1,2,\dots,n\}$ 是极值组合学中的一个核心结果，具有多种应用，参见例如 [4]。集合族 $S\subset\binom{[n]}{k}$ 的影是集合族 $\Delta(S)\subset\binom{[n]}{k-1}$，由包含于 S 中某个集合内的 $(k-1)$–子集组成。影最小化问题要求，对于具有给定基数 $m=|S|$的 k-集合族 S，求 $\Delta(S)$ 的最小基数。克鲁斯卡尔–卡托纳定理给出的答案可以用 k–二项式分解来表述。 k–二项式分解（即正整数 m 的分解）是

$$m=\binom{a_0}{k}+\binom{a_1}{k-1}+\cdots+\binom{a_t}{k-t}, \tag{1}$$

其中系数满足 $a_0>a_1>\cdots>a_t\geq k-t\geq 1$, $t\in[0,k-1]$，并由m和 k唯一确定。我们也将上文的递减序列 $\mathbf{a}=(a_0>a_1>\cdots>a_t)$称为 m的 k–二项式分解。更一般地，对于整数序列 $\mathbf{a}=(a_0,a_1,\dots,a_t)$，我们记

$$\binom{\mathbf{a}}{k}=\binom{a_0}{k}+\binom{a_1}{k-1}+\cdots+\binom{a_t}{k-t},$$

并且，对于正整数 i,j，我们也记

$$\binom{\mathbf{a}-i}{k-j}=\binom{a_0-i}{k-j}+\binom{a_1-i}{k-j-1}+\cdots+\binom{a_t-i}{k-j-t}.$$

我们用 $\ell(\mathbf{a})=t+1$表示序列 $\mathbf{a}$ 的长度。如果 $\mathbf{a}$ 严格递减， $\ell(\mathbf{a})\leq k$ 且 $a_t\geq k-t$，那么$m=\binom{\mathbf{a}}{k}$ 就是严格正整数 m的 k–二项式分解；此时我们使用简写$m\stackrel{b}{=}\binom{\mathbf{a}}{k}$。如果 $\mathbf{a}$ 是空序列，按照约定令$\binom{\mathbf{a}}{k}=0$，并记作 $0\stackrel{b}{=}\binom{\mathbf{a}}{k}$。我们采用二项式系数的通常约定，即对于所有 $k<0$，$\binom{n}{k}=0$ 且 $\binom{0}{0}=1$。

对于 $i\leq k-1$， S 的 i–影 $\Delta^i(S)$ 递归定义为 $\Delta^i(S)=\Delta(\Delta^{i-1}(S))$ 和 $\Delta^0(S)=S$。采用这一记号，克鲁斯卡尔–卡托纳定理表述如下。

定理 1（克鲁斯卡尔–卡托纳 [7, 11]）。设 $n\geq k\geq 1$。设 $S\subset\binom{[n]}{k}$ 是$[n]$ 的非空 k–子集集合族，且设 $\binom{\mathbf{a}}{k}$ 是 $m=|S|$的 k–二项式分解。那么，对于每个 $1\leq i\leq k-1$,

$$|\Delta^i S|\geq\binom{\mathbf{a}}{k-i}. \tag{2}$$

定理 1 中的下界是紧的。若集合族 S 的下影 $\Delta(S)$ 的基数在 $i=1$ 时达到定理 1 中的下界，则称该集合族为极值族。事实证明，对于极值族，所有 $i\geq 1$ 也都满足式 (2) 中的等号（参见 [5, 定理 2.1]）。换言之，极值族的影也是极值族。

我们回顾一下， $[n]$ 的 k–子集上的colex序定义为：当且仅当 $X\leq_{\text{colex}}Y$ $\max((X\setminus Y)\cup(Y\setminus X))\in Y$。我们用$I_{n,k}(m)$表示$\binom{[n]}{k}$中colex序下长度为 m 的初始段。在下文中，我们将布尔格中由 $[n]$的任意置换所诱导的自同构下的colex序初始段称为初始段。容易检查，对于每个 m，colex序下长度为m 的初始段$I_{n,k}(m)$是一个极值族。

F¨uredi 和 Griggs [5] （另见 M¨ors [12]）证明，对于二项式分解长度为 $\ell(\mathbf{a})<k$ 的基数 m，这些初始段 $I_{n,\,k}(m)$ 实际上是唯一的极值族。

他们还给出了非平凡的例子，表明当 $\ell(\mathsf{a}) = k$ 时情况未必如此。我们注意到，对于固定的 k，二项式分解长度为 k 的整数集合的上渐近密度为一 [1]。因此，只有在一个稀疏的基数集合上，才能保证极值族的唯一性。这促使 [5] 的作者提出了关于极值族的一般刻画问题。本文旨在回答这一问题，答案见下文的定理 3。

定理 3 的证明包含三个要素。最主要的是以下关于二项式序列的新数值不等式。

引理 2. 设 m 和 k 为正整数。设 $\binom{\mathbf{a}}{k} \overset{b}{=} m$，且 b 和 c 是非负整数的严格递减序列（b 非空，c 可以为空）。假设

$$\binom{\mathbf{a}}{k} = \binom{\mathbf{b}}{k} + \binom{\mathbf{c}}{k-1}, \tag{3}$$

If

$$\mathbf{b} \geq_{lex} \mathbf{a} - 1, \tag{4}$$

那么，对每个 $i \geq 0$,

$$\binom{\mathbf{a}}{k-i} \leq \binom{\mathbf{b}}{k-i} + \binom{\mathbf{c}}{k-i-1}. \tag{5}$$

此外，如果对于所有存在相应项的 $i = 1$、$c_j \geq k-1-j-1$ 和 $b_j \geq k-j-1$，(5) 中都取等号，那么对所有 $i \geq 1$，等式 (5) 都成立。

注意，引理 2 中的条件 (4) 不可省略。例如，对于每个 n，都有 $\binom{2n-1}{n} = \binom{2n-1}{n-1}$（因此在 (3) 中，b 是空序列），而 $\binom{2n-1}{n-1} > \binom{2n-1}{n-2}$。确有一些序列 a 和整数$k$，若要使引理的结论成立，该条件实际上是必要的。b 和 c 的非负性条件也不可或缺（见 $k = 3$ 的情形：$\mathsf{a} = (4, 2)$，$\mathsf{b} = (3, 2, -10)$，$\mathsf{c} = (-10, -42)$）；b 非空的条件是必要的，这样 (4) 才构成非平凡条件（见 $k = 1$，$\mathsf{a} = (1)$，$\mathsf{b} = \emptyset$，$\mathsf{c} = (0)$）；第二部分中 c_j 和 b_j 的下界也不可或缺（见以下情形：$k = 3$，$\mathsf{a} = (3, 2, 1)$，$\mathsf{b} = (3, 0)$，$\mathsf{c} = (2, 1)$）。总的来说，a、b、c 三者都应当是二项式分解；不过，条件 (4) 扩大了陈述的适用范围，使 b 和 c 的序列不必局限于二项式分解。

基于数值不等式(5)，$i = 1$ 可以轻松推出克鲁斯卡尔–卡托纳定理。不同于一些现有的证明，由引理2得出的证明不涉及压缩或对 k–子集的集合族进行任何变换，因此适合分析极值族的结构。我们的证明在思想上更接近Kruskal给出的证明，其中对 (5) 存在某种隐含的使用（见 [11,引理7，第 6] 节），然而这本身不足以给出本文所述极值族的刻画。此外，不等式(5) 还为F¨uredi 和Griggs [6, 定理 2.1] 提供了一个简单证明，该定理表明，极值族的下影本身也是极值的。这两个结果的简单证明均见第 2 节。这些证明的一个共同特征是，它们所依赖的数值不等式独立成立，而不取决于其是否可能与某个基集的 k–子集的集合族相关。

引理 2 给出了极值族的以下递归刻画，这是本文的主要结果，并回答了 F¨uredi 和 Griggs 在 [6] 中提出的问题。我们使用以下记号。对于由 $[n]$ 的 k–子集组成的集合族 $S \subset \binom{[n]}{k}$ 和 $x \in [n]$，我们记为

$$S(x) = \{X \in S : x \in X\}$$

[1] 在区间 $[\binom{n}{k}, \binom{n+1}{k}]$ 中，有 $\binom{n-1}{k-1}$ 个数的 k–二项式分解长度为 k，每个数分别对应于在 $[n-1]$ 中选取一个长度为 $k-1$ 的递增数列，且 $\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k-1} / \binom{n-1}{k-1} = 1$。

在 S 中包含 x的集合族，并通过

$$d_S(x) = |S(x)|$$

x 在 S中的度数，且该度数总是假定非零，也就是说，我们假设（不失一般性） $\cup_{X\in S} X = [n]$。我们还记

$$S(x) \setminus x = \{X \setminus x : X \in S(x)\}.$$

定理 3. 设 $n \geq k \geq 2$ ，并设$S \subset \binom{[n]}{k}$ 是 $[n]$的非空 k子集集合族，其中 $[n]$ 是 S的支撑。设 $m = |S|$的 k阶二项式分解为 $\binom{\mathbf{a}}{k} \stackrel{b}{=} |S|$ 。对每个 $x \in [n]$，令

$$\binom{\mathbf{c}(x)}{k-1} \stackrel{b}{=} |S(x)| = |S(x) \setminus x| \qquad and \qquad \binom{\mathbf{b}(x)}{k} \stackrel{b}{=} |S| - |S(x)|.$$

（0 的二项式分解为空序列。）

集合族 S 是极值的，当且仅当对每个 $x \in [n]$，不等式

$$|S| - |S(x)| \geq \binom{\mathbf{a}-1}{k} \tag{6}$$

成立，并且满足以下条件之一:

（i）不等式 (6) 严格成立，并且

(i.1)（包含关系） $S(x) \setminus x \subseteq \Delta(S \setminus S(x))$，(i.2)（极值性） $S \setminus S(x)$ 和 $S(x) \setminus x$ 均为极值，且 (i.3)（数值等式） $\binom{\mathbf{a}}{k-1} = \binom{\mathbf{b}(x)}{k-1} + \binom{\mathbf{c}(x)}{k-2}$;

or

(ii) 在 (6) 中取等号，并且

(ii.1)(包含关系) $\Delta(S \setminus S(x)) \subseteq S(x) \setminus x$，以及(ii.2) (极值性) $S(x) \setminus x$ 是极值的。

此外，如果(i) 或 (ii) 对某个 $x \in [n]$ 成立，那么 S 是极值的。

利用定理 3 的刻画，可以证明对于长度为 $\ell(\mathbf{a}) < k$ 的 k–二项式序列 a 对应的基数 m，colex序的唯一性；这一结果已在 [5, 定理 2.6] 和 [12, 定理 7] 中得到证明。我们还刻画了这样一类基数：在这些基数下，colex序的初始段是唯一的极值族。

定理 4. 设 $n \geq k > 0$ 和 $0 < m \leq \binom{n}{k}$。设 $\binom{\mathbf{a}}{k} \stackrel{b}{=} m$ 为 m 的 k–二项式分解。

当且仅当以下任一条件成立时，colex序中长度为 m 的初始段 $\mathcal{I}_m^{(n)}$ 是唯一的极值集（在同构意义下）

(i) $\ell(\mathbf{a}) < k$，或

(ii) $m = \binom{n'}{k} - 1 = \binom{n'-1}{k} + \binom{n'-2}{k-1} + \cdots + \binom{n'-k}{1}$ 满足 $k < n' \leq n$ 的某个 n'。

本文结构如下。引理 2 的证明推迟到第 4 节；在该节中，我们将结果表述为更一般的形式，即引理 10 和推论 11，并讨论相关的一些技术细节。第 2 节从引理 2 推导出克鲁斯卡尔–卡托纳定理和 [6, 定理 2。1] 这些已知结果的简洁证明展示了引理 2 的用法，也用于证明定理 3。定理 3 刻画极值族，是第 3 节的内容。在第 3.1 小节中，我们列举了非极值集的例子，说明定理 3 中的条件彼此独立，因此在刻画中缺一不可。第 5 节包含定理 4 的证明，该定理说明 colex序的初始段作为极值集是唯一的。本文最后在第 6 节作最后说明。

2 克鲁斯卡尔–卡托纳定理和 F¨uredi-Griggs 定理

接下来我们将说明引理 2 如何推出克鲁斯卡尔–卡托纳定理 [7, 10] 以及 [6, 定理 2.1],，并将两者合并为下文的定理 5。

定理 5 ([8, 11, 5])。设 n、k 为满足 $n \geq k$ 的正整数，且 $S \subset \binom{[n]}{k}$ 是 $[n]$ 的 k 子集组成的集合族，其基数为 $|S| = m > 0$。若 $\binom{\mathbf{a}}{k} \overset{b}{=} m$，则

$$|\Delta(S)| \geq \binom{\mathbf{a}}{k-1}$$

此外，如果 $|\Delta(S)| = \binom{\mathbf{a}}{k-1}$，那么对于每个 $i \geq 0$，都有 $|\Delta^i(S)| = \binom{\mathbf{a}}{k-i}$。

我们将使用以下引理来确保引理 2 中的条件 (4) 成立。

引理 6. 设 n, k 为正整数，且 $n > k > 1$，并设 $S \subset \binom{[n]}{k}$ 是由 $[n]$ 的 k 元子集组成、基数为 $|S| = m > 1$ 且支撑为 $[n]$ 的集合族。设 $x \in [n]$ 是 S 中度数最小的元素。设 $\binom{\mathbf{a}}{k} \overset{b}{=} m$ 是 m 的 k 阶二项式分解，且 $\binom{\mathbf{b}}{k} \overset{b}{=} |S| - d_S(x)$。那么，$\mathbf{b}$ 不是空序列，并且

$$\mathbf{b} \geq_{lex} \mathbf{a} - 1. \tag{7}$$

证明。由于 $n > k > 1$, $|S| > 1$ 且 x 的最小度为，因此 S 中并非所有集合都包含 x，故 $|S| - d_S(x) > 0$。这意味着 $\mathbf{b}$ 不是空序列。

设 $\binom{\mathbf{a}}{k} = \sum_{i=0}^{t} \binom{a_i}{k-i}$。若 $|S| \leq k$，则 $\binom{\mathbf{a}-1}{k} = 0$，命题显然成立，因为 $\binom{\mathbf{b}}{k} > 0$。假设 $|S| > k$。若 $|S| = \binom{n}{k}$，命题也显然成立。假设 $|S| < \binom{n}{k}$。特别地，$a_0 \leq n - 1$，因此对每个 $i = 0, \ldots\ldots, t$，都有 $a_i \leq n - i - 1$。$[n]$ 中元素在 S 中的平均度数为 $\frac{k}{n}|S|$。因此，若 i 是满足 $a_i > k - i$ 的最大下标（其存在是因为 $|S| > k$），则有

$$|S| - d_S(x) \geq |S|\left(1 - \frac{k}{n}\right) = \sum_{i=0}^{t} \binom{a_i}{k-i}\left(1 - \frac{k}{n}\right) = \sum_{i=0}^{t'} \binom{a_i}{k-i}\left(1 - \frac{k}{n}\right) + (t - t')\left(1 - \frac{k}{n}\right), \tag{8}$$

让我们证明，对于每个 $j \leq t'$,

$$\sum_{i=0}^{j} \binom{a_i}{k-i}\left(1 - \frac{k}{n}\right) \geq \sum_{i=0}^{j} \binom{a_i - 1}{k-i} + \frac{j+1}{n}\binom{a_j - 1}{k-j-1}. \tag{9}$$

对于 $j = 0$，利用 $a_0 \leq n - 1$，有:

$$\binom{a_0}{k}(1 - \frac{k}{n}) = \binom{a_0}{k} - \frac{k}{n}\frac{a_0}{k}\binom{a_0 - 1}{k-1} \geq \binom{a_0}{k} - (1 - \frac{1}{n})\binom{a_0 - 1}{k-1} = \binom{a_0 - 1}{k} + \frac{1}{n}\binom{a_0 - 1}{k-1},$$

且（9）对 $j=0$ 成立。令 $j>0$。利用归纳法和 $a_j \le \min\{a_{j-1}-1, n-j-1\}$，同理可得

$$\sum_{i=0}^{j}\binom{a_i}{k-i}(1-\frac{k}{n}) \ge \sum_{i=0}^{j-1}\binom{a_i-1}{k-i}+\frac{j}{n}\binom{a_{j-1}-1}{k-j}+(1-\frac{k}{n})\binom{a_j}{k-j}$$
$$\overset{a_{j-1}-1\ge a_j}{\ge} \sum_{i=0}^{j-1}\binom{a_i-1}{k-i}+\binom{a_j}{k-j}(1-\frac{k-j}{n}) = \sum_{i=0}^{j}\binom{a_i-1}{k-i}+\binom{a_j-1}{k-j-1}(1-\frac{k-j}{n}-\frac{a_j-(k-j)}{n})$$
$$\overset{-a_j\ge -n+j+1}{\ge} \sum_{i=0}^{j}\binom{a_i-1}{k-i}+\frac{j+1}{n}\binom{a_j-1}{k-j-1}.$$

引理的陈述由 (8) 和(9)连同 $j=t'$得出，因为 $\binom{\mathbf{a}-1}{k}=\sum_{i=0}^{t'}\binom{a_i-1}{k-i}$（当 $a_i=k-i$ 对某个 i时所需的额外单位，来自最后一个加数的整数部分）。 □

证明.(定理5)我们通过对 m、 n 和 k进行三重归纳来证明该结果。当 $k=1$ 时，对于所有 n和 m，该结果取等号，且 $\Delta(S)=\{\emptyset\}$ 在此情况下。 moreover，当 $n=k$时，该结果也成立，因为$|S|=1=\binom{k}{k}$和 $|\Delta(S)|=k=\binom{k}{k-1}$。出于同样的原因，该结果对于 $m=1$ 以及所有 $n\ge k$ 也成立。

令 $n>k>1$。我们可以假设 n 是 S中度数最小的元素，并假设 $|S|>1$，因此 $d_S(n)<|S|$。令 $\binom{\mathbf{b}}{k}\overset{b}{=}|S|-d_S(n)$。将 $S=S_0\sqcup S_1$ 划分为 $S_0=S(n)=\{x\in S\mid n\in x\}$ 和 $S_1=S\setminus S_0$。记为

$$S_0'=S_0\setminus n=\{x\setminus n\mid x\in S_0, n\in x\}\subseteq\binom{[n-1]}{k-1}.$$

我们观察到

$$|\Delta(S)|\ge|\Delta(S_1)|+|\Delta(S_0')|. \tag{10}$$

因为 $\Delta(S_0')$ 中的所有集合都可以看作 $\Delta(S)$ 中含有 n 的集合。令 $\binom{\mathbf{c}}{k-1}\overset{b}{=}|S_0|=|S_0'|$，使得

$$\binom{\mathbf{a}}{k}=\binom{\mathbf{b}}{k}+\binom{\mathbf{c}}{k-1}. \tag{11}$$

通过归纳法，

$$|\Delta(S_0')|\ge\binom{\mathbf{c}}{k-2}. \tag{12}$$

另一方面，我们有 $S_1\subseteq\binom{n-1}{k}$ 和 $\binom{\mathbf{b}}{k}\overset{b}{=}|S_1|=|S|-d_S(n)$。根据归纳法，

$$|\Delta(S_1)|\ge\binom{\mathbf{b}}{k-1}. \tag{13}$$

根据引理引理 6 的条件已满足，因此由 (11)、(10)、(12) 和 (13) 可得。 e

$$|\Delta(S)|\ge\binom{\mathbf{b}}{k-1}+\binom{\mathbf{c}}{k-2}\ge\binom{\mathbf{a}}{k-1}, \tag{14}$$

从而完成归纳步骤以及定理第一部分的证明。

现在假设等式 (14) 成立。因此，我们有以下等式：

$$|\Delta(S_0')| = \binom{\mathbf{c}}{k-2}, \tag{15}$$

$$|\Delta(S_1)| = \binom{\mathbf{b}}{k-1}, \tag{16}$$

$$\binom{\mathbf{a}}{k-1} = \binom{\mathbf{b}}{k-1} + \binom{\mathbf{c}}{k-2}, \text{ and} \tag{17}$$

$$|\Delta(S)| = |\Delta(S_1)| + |\Delta(S_0')|. \tag{18}$$

根据（17）和引理 2 的第二部分，对于每个 $i \geq 0$，我们有

$$\binom{\mathbf{a}}{k-i} = \binom{\mathbf{b}}{k-i} + \binom{\mathbf{c}}{k-i-1}. \tag{19}$$

另一方面，通过归纳法，(15) 和 (16) 中的等式导致

$$|\Delta^i(S_0')| = \binom{\mathbf{c}}{k-i-1} \text{ and } |\Delta^i(S_1)| = \binom{\mathbf{b}}{k-i}, \tag{20}$$

此外，

$$|\Delta^i(S)| = |\Delta^i(S_0')| + |\Delta^i(S_1)|, \tag{21}$$

由于等式 (18) 表明，$\Delta(S)$ 中不存在其他集合，除了包含 n 的集合（已计入 $\Delta(S_1)$）以及不包含 n 的集合（已计入 $\Delta(S_0')$）。特别地，$\Delta^i(S)$ 中的所有集合，要么在不包含 n 时计入 $\Delta^i(S_0')$，要么在包含 n 时计入 $\Delta^i(S_1)$。

将（19）与（20）和（21）结合，我们得到

$$|\Delta^i(S)| = \binom{\mathbf{c}}{k-i-1} + \binom{\mathbf{b}}{k-i} = \binom{\mathbf{a}}{k-i},$$

完成该陈述第二部分的证明。 □

3 极值族的刻画

本节证明定理 3。

定理 3 的证明。首先假设 S 是极值的。我们采用 Frankl [3] 的论证。反证法，假设存在 $i \in [n]$ 使得 $|S(i)| > \binom{\mathbf{a}-1}{k-1}$。令 $\binom{\mathbf{c}}{k-1} \stackrel{b}{=} |S(i)| > \binom{\mathbf{a}-1}{k-1}$ 和 $S_i' = S(i) \setminus i$。我们有

$$|\Delta(S(i))| = |\Delta(S_i')| + |S_i'|. \tag{22}$$

因为 $\Delta(S(i))$ 中的集合要么包含 i，因此计入 $\Delta(S_i')$，要么不包含 i，因此这样的集合有 $|S_i'|$ 个。根据定理 5 以及我们关于 $|S(i)|$ 的假设，

$$|\Delta(S)| \geq |\Delta(S(i))| = |\Delta(S_i')| + |S_i'| > \binom{\mathbf{c}}{k-2} + \binom{\mathbf{a}-1}{k-1} \geq \binom{\mathbf{a}-1}{k-2} + \binom{\mathbf{a}-1}{k-1} = \binom{\mathbf{a}}{k-1}, \tag{23}$$

这与 S 的极值性矛盾。因此，我们得到矛盾，并得出结论：对于每个 $i \in [n]$，$|S(i)| \leq \binom{\mathbf{a}-1}{k-1}$。

同样的论证表明，若 $|S(i)| = \binom{\mathbf{a}-1}{k-1}$，则上述不等式必须处处取等号，且 $|\Delta(S(i))| = \binom{\mathbf{c}}{k-2}$，因此 $S(i)$ 是极值的，从而证明了 (ii.2)。此外，(23) 中取等号，故 $|\Delta(S)| = |\Delta(S(i))|$，从而证明了 (ii.1)。

假设 $|S(i)| < \binom{\mathbf{a}-1}{k-1}$。令 $\binom{\mathbf{b}}{k} \stackrel{b}{=} |S \setminus S(i)|$，它严格为正，且满足 $\binom{\mathbf{b}}{k} > \binom{\mathbf{a}-1}{k}$ by$|S(i)| < \binom{\mathbf{a}-1}{k-1}$。如同 (10) 中那样，我们有

$$|\Delta(S)| \geq |\Delta(S \setminus S(i)| + |\Delta(S_i')|, \tag{24}$$

因为将 i添加到 $\Delta(S_i')$ 中的子集后，我们得到 $\Delta(S) \setminus \Delta(S \setminus S(i))$ 中的子集。由于 $\binom{\mathbf{b}}{k} > \binom{\mathbf{a}-1}{k}$ then b $\geq_{\text{lex}}$ a -1（实际上，b $>_{\text{lex}}$ a -1，因为 b 是一个非零 k-二项式分解的序列），因此我们可以应用引理 2，得到

$$|\Delta(S)| \geq |\Delta(S \setminus S(i))| + |\Delta(S_i')| \geq \binom{\mathbf{b}}{k-1} + \binom{\mathbf{c}}{k-2} \geq \binom{\mathbf{a}}{k-1} = |\Delta(S)|,$$

因此，上述不等式处处取等号。特别地， $S(i)$ 和 $S \setminus S(i)$ 都是极值的，这就证明了 (i.2)；等式 (i.3) 成立，并且 (24) 中取等号，从而证明了 (i.1)。

反向推论只需考虑一个元素 $i \in [n]$，由此即可证明结果的第二部分。如果 i 满足 $S(i) < \binom{\mathbf{a}-1}{k-1}$，那么我们可以重复上述论证，得出处处取等号（这是由四个假设推出的），因此 S 是极值的。如果 i 满足 $S(i) = \binom{\mathbf{a}-1}{k-1}$，那么 S_i' 上的极值性意味着 $|S_i'|+|\Delta(S_i')| = \binom{\mathbf{a}}{k-1}$。接着，包含关系 $\Delta(S\setminus S(i)) \subseteq S_i'$ 意味着 $\Delta(S)$（其集合要么属于 $\Delta(S \setminus S(i))$，要么属于 $\Delta(S_i') \times \{i\}$，要么属于 S_i'）中的所有集合都已由 $|S_i'| + |\Delta(S_i')|$涵盖，因此 $|S_i'| + |\Delta(S_i')| \geq |\Delta(S)|$ 意味着 (23) 中取等号，从而可推出 S 具有极值性。

□

3.1 条件必要性的示例

在本节中，我们给出一些例子，说明定理3中对极值集进行刻画的条件彼此独立，因此没有任何一个条件可以省略。条件 (i.1)和 (i.2)具有结构性质，而条件 (i.3) 具有定量性质。一个自然的问题是，结构条件是否可以推出定量条件。下面我们给出一个集合 S，它对每个 $x \in [n]$ 都满足条件 (i.1)和 (i.2)，但由于条件 (i.3) 不成立而不是极值集，这表明最后一个定量条件独立于结构条件。

例7. 对于每个 $m \geq 3$、 $n \geq m+3 \geq 6$，我们用 $S_{n,\ k,\ m}$ 表示该集合族

$$S_{n,k,m} = \binom{[n]}{k} \setminus \left[\cup_{\{i,j\} \in \binom{[m]}{2}} \nabla^{k-2}(\{i,j\})\right],$$

其中， $\nabla^{k-2}(X)$表示集合族 X 的 $(k-2)$ 次迭代上影。集合族 $S_{n,k,m}$ 由所有不包含任何集合 $\{i,j\}$（满足 $i \neq j$ 和 $i,\ j \leq m$）的 k– 子集组成。其基数为

$$|S_{n,k,m}| = \binom{n}{k} - \sum_{i=2}^{k} \binom{m}{i}\binom{n-m}{k-i} = \binom{n-m}{k} + \binom{n-m}{k-1}\binom{m}{1},$$

且其下影是由 $[n]$ 中不包含 $[m]$ 中任意一对元素的所有 $(k-1)$–子集组成的集合族:

$$\Delta(S_{n,k,m}) = S_{n,k-1,m}.$$

对于每个 $x \in [n]$，我们有

$$|S_{n,k,m}(x)| = \begin{cases} |S_{n-1,k-1,m}|, & x \in [n] \setminus [m], \\ |S_{n-1,k-1,m-1}|, & x \in [m], \end{cases} \qquad |\Delta(S_{n,k,m}(x))| = \begin{cases} |S_{n-1,k-2,m}|, & x \in [n] \setminus [m], \\ |S_{n-1,k-2,m-1}|, & x \in [m], \end{cases},$$

$$|S_{n,k,m} \setminus S_{n,k,m}(x)| = \begin{cases} |S_{n-1,k,m}|, & x \in [n] \setminus [m], \\ |S_{n-1,k,m-1}|, & x \in [m], \end{cases}, \quad |\Delta(S_{n,k,m} \setminus S_{n,k,m}(x))| = \begin{cases} |S_{n-1,k-1,m}|, & x \in [n] \setminus [m], \\ |S_{n-1,k-1,m-1}|, & x \in [m], \end{cases}.$$

该例将通过从 $S_{n,\ k,\ m}$ 中删除一个集合族 $L \subset \binom{[n]\setminus[m]}{k}$来构造。对于每个这样的 L 选择，令

$$S = S_{n,k,m} \setminus L.$$

由于影 $\binom{[n]\setminus[m]}{k}$ 中的每个集合 y，对于每个 $i \in [m]$ 都包含在影 $y \cup \{i\} \in S$ 中，因此我们有

$$\Delta(S) = \Delta(S_{n,k,m}).$$

此外，基于同样的理由，对于每个 $x \in [n]$，我们也有

$$\Delta(S(x)) = \Delta(S_{n,k,m}(x)) \quad and \quad \Delta(S \setminus S(x)) = \Delta(S_{n,k,m} \setminus S_{n,k,m}(x)).$$

对于满足 $t \geq r$ 的正整数 t 和 r，令 $n = tk + m$，并令 L 为一个 r–正则的$[n] \setminus [m]$中的 k–子集集合族，其中 $[n] \setminus [m]$ 中的每个元素都属于 L 的 r 个子集（这样的集合族存在，因为 $n - m = tk$ 是 k的倍数，且 $|L| = tr$）。

适当选取参数 k、m 和 t，可以构造满足条件 (i.1) 和 (i.2) 的集合 S，对每个 $x \in [n]$ 都成立；但由于条件 (i.3) 不成立，这些集合并非极值集合。

例如，对于 $m = k = 4$、$t = 29$ 和 $r = 2$，我们有 $n = tk + 4 = 120$ 和 $|L| = tr = 58$，并且$S_{n,\ k,\ m}$满足

$$|S_{n,k,m}| = \binom{119}{4} + \binom{112}{3} + \binom{104}{2} + \binom{58}{1}$$
$$|\Delta(S_{n,k,m})| = |S_{n,k-1,m}| = \binom{119}{3} + \binom{112}{2} + \binom{105}{1},$$

因此 $S_{n、\ k、\ m}$ 是一个极值集。然而，对于集合 $S = S_{n、\ m、\ k} \setminus L$

$$|S| = |S_{n,k,m}| - |L| = \binom{119}{4} + \binom{112}{3} + \binom{104}{2},$$

以及 $\Delta(S) = \Delta(S_{n,\ k,\ m}) = S_{n,\ k-1,\ m}$，因此 S 不是极值的。尽管如此，对于所有 $x \in [n]$，族 $S(x)$ 和 $S \setminus S(x)$ 都是极值的。事实上，若 $x \in [n] \setminus [m]$，则 x 包含于 L 中的 $r = 2$ 个集合，并且

$$|S(x)| = |S_{n-1,k-1,m}(x)| - 2 = \binom{118}{3} + \binom{111}{2} + \binom{102}{1}$$
$$|\Delta(S(x))| = |S_{n-1,k-2,m}| = \binom{1182}{+}\binom{112}{1},$$
$$|S \setminus S(x)| = |S_{n-1,k,m}| - (tr - 2) = \binom{118}{4} + \binom{111}{3} + \binom{103}{2} + \binom{1}{1},$$
$$|\Delta(S \setminus S(x)| = |S_{n-1,k-1,m}| = \binom{118}{3} + \binom{111}{2} + \binom{104}{1}.$$

另一方面，i　　若 $x \in [m]$，则 $S(x) = S_{n,\ k,\ m}(x)$，这是极值的，因为 $S_{n,\ k,\ m}$ 本身就是极值的，并且

$$|S \setminus S(x)| = |S_{n-1,k,m-1}| - tr = \binom{118}{4} + \binom{114}{3} + \binom{112}{2} + \binom{52}{1},$$
$$|\Delta(S \setminus S(x)| = |S_{n-1,k-1,m}| = \binom{118}{3} + \binom{114}{2} + \binom{113}{1}.$$

此外，在所有情况下，我们都有 $S(x) \setminus \{x\} \subset \Delta(S \setminus S(x))$，因此集合 S 未能成为极值集合，因为仅(i.3)不成立。

□

这些结构条件也很容易看出彼此独立。下面给出一些例子。回顾一下，$I_{n,k}(m)$ 表示 colex序中的长度为 m 的初始段。我们使用记号$S \vee S' = \{x \cup y\colon\ x \in S, y \in S'\}$ 表示由 S 中的一个集合与S'中的一个集合取并所得到的所有集合组成的集合族。

例8. 一个严格满足 (6) 以及(i.1)和(i.3)，但不满足(i.2)的集合 S 。令 $k \geq 3$ 和 $n > k$。令 $m_1 = \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} \overset{b}{=} \binom{\mathbf{b}}{k}$ 和 $m_2 = \binom{n-2}{k-2} \overset{b}{=} \binom{\mathbf{c}}{k-1}$。令$m_1' = \binom{n-1}{k}$ 并令其为 $[n+1, 2n-2]$ 的 $(k-1)$–子集的集合族。定义

$$S = (I_{n,k}(m_1') \cup (B \vee \{2n\})) \cup (I_{n,k-1}(m_2) \vee \{n\}).$$

我们有，

$$|S| = \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} = \binom{n}{k} \overset{b}{=} \binom{\mathbf{a}}{k},$$

使得 $\mathbf{b} >_{lex} \mathbf{a} - 1$ 并且(6)成立。现在

$$\binom{\mathbf{a}}{k-1} = \binom{n}{k-1} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} + \binom{n-2}{k-3} = \binom{\mathbf{b}}{k-1} + \binom{\mathbf{c}}{k-2},$$

并且 (i.3) 成立。此外，取 $x = n$, $S(x) \setminus x$ 是长度为 $\binom{n-2}{k-2}$ 的初始段，它包含于包含在 $\Delta(S \setminus S(x))$ 中的长度为 $\binom{n-1}{k-1}$ 的初始段中，因此 (i.1) 成立。

然而， $S \setminus S(x)$ 不是极值的，因为

$$|\Delta(S \setminus S(x))| = \binom{n-1}{k-1} + |\Delta(B)| = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} + \binom{n-2}{k-3} > \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-2}.$$

且 (i.2) 不成立。

改为选择

$$S = I_{n,k}(m_1) \cup (C \vee \{n+1\}),$$

令 C 为任意一个由 $(k-1)$-集合组成的非极值集合族，其基数为 $|C| = \binom{n-2}{k-2}$ ，满足 $C \subset \Delta(I_{n,k}(m_1))$，则得到一个满足 (6) 的集合；并且在取 $x = n+1$ 时，它还满足 (i.1) 和 (i.2)，但此时 $S(x) \setminus x$不是极值的。

□

例 9. 一个严格满足 (6) 以及 (i.2) 和 (i.3)，但不满足 (i.1) 的集合。令 $k \geq 3$ 和 $n > k$。令 $m_1 = \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} \overset{b}{=} \binom{\mathbf{b}}{k}$ 和 $m_2 = \binom{n-2}{k-2} \overset{b}{=} \binom{\mathbf{c}}{k-1}$。定义

$$S = I_{n,k}(m_1) \cup (I_{[n+2,2n],k-1}(m_2) \vee \{2n+1\}),$$

其中 $I_{[n+2,2n],\ k-1}(m_2)$ 是区间 $[n+2, 2n]$ 的 $(k-1)$-子集所构成的长度为 m_2 的初始段。和之前一样，我们有，

$$|S| = \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} = \binom{n}{k} \overset{b}{=} \binom{\mathbf{a}}{k},$$

因此 $\mathbf{b} >_{lex} \mathbf{a} - 1$ ，且式 (6) 成立。我们还有

$$\binom{\mathbf{a}}{k-1} = \binom{n}{k-1} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} + \binom{n-2}{k-3} = \binom{\mathbf{b}}{k-1} + \binom{\mathbf{c}}{k-2},$$

且 (i.3) 成立。此外，选择 $x = 2n+1$ 时， $S(x)$ 和 $S \setminus S(x)$ 都是初始段，因此都是极值集，所以 (i.2) 成立；但 $S(x) \setminus x$ 不包含在 $\Delta(S \setminus S(x))$ 中，因此 (i.1) 不成立。 □

4 关键不等式

本节给出引理 2 的证明。正如引言中所述，引理 2 可由下文中稍微一般化的引理 10 和推论 11 推出。第一个陈述以更一般的形式给出了 (5) 中 $i=1$ 的情形（主要是出于技术原因，因为我们归纳论证中的基本情形更适合这一场景）。第二个陈述，即推论 11，给出了 (5) 中 $i>1$ 的不等式，处理了引理 2 中等号成立的情形，并进一步提供了一些信息，使我们能够证明定理 4 中关于哪些基数下 colex 是唯一极值族（在同构意义下）的刻画。

引理 10. 设 m 和 k、k'、k'' 为正整数。设 a、b、c 满足 $\binom{\mathbf{a}}{k} \overset{b}{=} m$，且 b 和 c 为

- 非负整数的严格递减序列

对于所有存在的 j，• $b_j \geq k'-j-1$ 和 $c_j \geq k''-j-1$（b 或 c 可以是空序列）。

假设

$$\binom{\mathbf{a}}{k} = \binom{\mathbf{b}}{k'} + \binom{\mathbf{c}}{k''}, \tag{25}$$

如果 k'、$k'' \geq k$，那么

$$\binom{\mathbf{a}}{k-1} \leq \binom{\mathbf{b}}{k'-1} + \binom{\mathbf{c}}{k''-1}. \tag{26}$$

and

$$\binom{\mathbf{a}-1}{k-1} \leq \binom{\mathbf{b}-1}{k'-1} + \binom{\mathbf{c}-1}{k''-1}. \tag{27}$$

此外，若 果 $k'=k\geq 2$ 且 $k''=k-1$，则只要 b 非空，(26) 和 (27) 成立，并且

$$\mathbf{b} \geq_{lex} \mathbf{a}-1. \tag{28}$$

推论 11。设 a 是正整数的一个 k-二项式分解，b 和 c 是可以为空的非负整数严格递减序列，且对于所有存在的 $b_j \geq k-j-1$ 和 $c_j \geq k-1-j-1$，满足

$$\binom{\mathbf{a}}{k} \leq \binom{\mathbf{b}}{k} + \binom{\mathbf{c}}{k-1} \tag{29}$$

如果 b 非空且 b $\geq_{lex}$ a -1，那么对于每个 $i \geq 1$,

$$\binom{\mathbf{a}}{k-i} \leq \binom{\mathbf{b}}{k-i} + \binom{\mathbf{c}}{k-i-1}, \tag{30}$$

and

$$\binom{\mathbf{a}-i}{k-i} \leq \binom{\mathbf{b}-i}{k-i} + \binom{\mathbf{c}-i}{k-i-1}, \tag{31}$$

此外，如果对于 $i=1$ 和 $i=0$，(30) 中取等号，那么，

- 对于每个 $0 \leq j \leq i$,

$$\binom{\mathbf{a}-j}{k-i} = \binom{\mathbf{b}-j}{k-i} + \binom{\mathbf{c}-j}{k-i}. \tag{32}$$

• 如果 $=(a_0,\ldots,a_t)$ 满足 $a_i > a_{i+1}$ 和 $t < k-1$，那么

$$\binom{\mathbf{a}}{k} \doteq \binom{\mathbf{b}}{k} + \binom{\mathbf{c}}{k-1} \tag{33}$$

特别地，c 和 b 只有以下几种取值：

$$\begin{cases} \mathbf{c} = (a_0-1,\ldots,a_{i-1}-1,a_{i+1},\ldots,a_t) & and\ \mathbf{b} = (a_0-1,\ldots,a_{i-1}-1,a_i) \\ \mathbf{c} = (a_0-1,\ldots,a_{i-1}-1) & and\ \mathbf{b} = (a_0-1,\ldots,a_{i-1}-1,a_i,a_{i+1},\ldots,a_t) \end{cases} \tag{34}$$

对于每个 $i \in [0,t+1]$，使得 $a_{i-1}-1 > a_i$（当 $i=t+1$ 或 $i=0$ 时不作条件限制）。

4.1 利用引理 10 和推论 11 证明引理 2

若 a 是一个正数的 k-二项式分解，那么要满足不等式 b $\geq_{\text{lex}}$ a -1，只需要求 b 是非负数的严格递减序列中满足 $b_i \geq k-i-1$ 的一个序列。

若 b 和 c 是非负整数的严格递减序列，则令 b′ 和 c′ 为满足 $b_i \geq k-i-1$ 和 $c_i \geq k-i-1-1$ 的那些元素，那么 b′ 和 c′ 也都是非负整数的严格递减序列，并且有

$$\binom{\mathbf{b}}{k} = \binom{\mathbf{b}'}{k}, \binom{\mathbf{c}}{k-1} = \binom{\mathbf{c}'}{k-1}, \binom{\mathbf{b}}{k-1} = \binom{\mathbf{b}'}{k-1}, \binom{\mathbf{c}}{k-1-1} = \binom{\mathbf{c}'}{k-1-1}$$

最后两个等式由非负性假设得出（此时 $c_{k-1-1} \geq 0 = k-(k-1-1)-1-1$ 和 $b_{k-1} \geq 0 = k-(k-1)-1$，若它们存在）。这说明，对于满足 $b_i \geq k-i-1$ 和 $c_i \geq k-i-1-1$ 的那些递减序列，只需在 $i=1$ 时证明 (5) 即可。一般而言，对于 $i \geq 1$，我们有

$$\binom{\mathbf{b}}{k-i} \leq \binom{\mathbf{b}'}{k-i}, \binom{\mathbf{c}}{k-i-1} \leq \binom{\mathbf{c}'}{k-i-1} \tag{35}$$

因此，(5) 由推论11 得出。还应注意，为了在等号成立的情况下证明(5)，我们还要求满足条件 $b_i \geq k-i-1$ and $c_i \geq k-i-1-1$，正如推论11中一样；原因在于，如果存在一个含有 $0 \leq b_i < k-i-1$ or $0 \leq c_i < k-i-1-1$ 的项，那么就存在一个 i，使得 (35) 以严格不等式成立；这与推论 11结合表明，为了要求(5) 中的等号成立，我们应在非负整数的递减序列上施加条件 $b_i \geq k-i-1$ and $c_i \geq k-i-1-1$。

4.2 关于引理 10 和推论 11 的一般评论

对于存在于 b 和c 上的所有 j，条件 $b_j \geq k'-j-1$ 和 $c_j \geq k''-j-1$ 可以删除以证明(26) 和 (30)，但证明 (27) 和 (32) 时需要该条件。

系数的非负性条件以及它们严格递减这一事实意味着，尽管对 ℓ(c) 或 ℓ(b) 没有限制，但如果存在一个具有 $b'_j = k'-j-1$ (或相应地 $c'_j = k''-j-1$) 的元素，那么 ℓ(b) $\leq k'$ (或相应地，ℓ(c) $\leq k''$)。

条件 $k-j-1 \leq b_j$、它们严格递减这一事实以及 $b_j \geq 0$ 也意味着，如果$\binom{\mathbf{b}}{k} > 0$，且 $\binom{\mathbf{b}'}{k} \overset{b}{=} \binom{\mathbf{b}}{k}$ 是其 k-二项式分解，那么对于每个 $i \geq 0$

$$\binom{\mathbf{b}'-i}{k-i} \leq \binom{\mathbf{b}-i}{k-i}$$

其中某些不等式仅在存在一个满足 $k-j-1 = b_j$ 的 b_j 时才是严格的，因为此时通过将 i 从 $(k-j-1)$ 增加到 $(k-j)$，项 $\binom{b_j-\ k-j\ +1\ ()()+1}{k-j-\ k-j}$ 会从 0 变为某个正值。

观察 12。如果 $\mathbf{b}$ 是一个 k 二项式分解，那么，对于每个 $i>0$，如果

- $\mathbf{b}_i$ *is defined as* $\binom{\mathbf{b}_i}{k-i} \stackrel{b}{=} \binom{\mathbf{b}}{k-i}$ *and*
- $\mathbf{b}'_i$ *is defined as* $\binom{\mathbf{b}'_i}{k-i} \stackrel{b}{=} \binom{\mathbf{b}-i}{k-i}$

then

$$\binom{\mathbf{b}_i}{k-i-1} = \binom{\mathbf{b}}{k-i-1}, \qquad \binom{\mathbf{b}'_i-1}{k-i-1} = \binom{\mathbf{b}-i-1}{k-i-1}$$

证明。若 $\mathbf{b}$ 中没有项 b_{k-i}，则结果显然成立，因为 $\mathbf{b}_i=\mathbf{b}$ 且 $\mathbf{b}'_i=\mathbf{b}-i$。若存在项 b_{k-i}，则

$$\binom{\mathbf{b}}{k-i} = \sum_{j=1}^{k-i-1}\binom{b_i}{k-i-j} + \binom{b_{k-i}}{0} = \sum_{j=1}^{k-i-1}\binom{b_i}{k-i-j} + 1$$

因此，令 s 为满足 $b_{k-s-1}-1=b_{k-s}$ 的最大整数，$s\geq i+1$。于是

$$(\mathbf{b}_i)_j = \begin{cases} b_j & \text{if } s \text{ exists and } j<k-s-1 \\ b_{k-s-1}+1 & \text{if } s \text{ exists} \\ \text{no element} & \text{if } s \text{ exists and } j>k-s-1 \\ b_j & \text{if } s \text{ does not exist and } j\neq k-i-1 \\ b_{k-i-1}+1 & \text{if } s \text{ does not exist and } j=k-i-1 \end{cases}$$

可以验证等式 $\binom{\mathbf{b}^{\,i}_{k-i-1}}{} = \binom{\mathbf{b}}{k-i-1}$ 成立（关键在于，如果指标 s 对某个值存在，那么对于 i 的下一个值，它也会存在，直到它耗尽；此时，当 s 不存在时，另一项+1 便会接替）。等式 $\binom{\mathbf{b}'_i-1}{k-i-1} = \binom{\mathbf{b}-i-1}{k-i-1}$ 的证明类似。 □

断言 1. 在引理 10 和推论 11 中，只需证明这些结论在.....时成立。

$$\mathbf{b} \text{ and } \mathbf{c} \text{ are } k' \text{ and } k''\text{-binomial decompositions, and } \mathbf{b} >_{lex} \mathbf{a}-1 \text{ in the case } (k',k'')=(k,k-1). \quad (36)$$

断言 1 的证明。若 $\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{c}$ 是非负整数的严格递减序列，那么我们令 $\mathbf{b}'$ 和 $\mathbf{c}'$ 为满足 $b_i\geq k'-i$ 和 $c_i\geq k'-i$ 的那些元素，则 $\mathbf{b}'$ 和 $\mathbf{c}'$ 也都是严格递减的非负整数序列，并且分别是 k' 和 k'' 二项式分解（可能是空序列）。于是我们有

$$\begin{aligned} &\binom{\mathbf{b}}{k'} = \binom{\mathbf{b}'}{k'}, \binom{\mathbf{c}}{k''} = \binom{\mathbf{c}'}{k''}, \text{ and thus} \\ &\binom{\mathbf{a}}{k} = \binom{\mathbf{b}'}{k'} + \binom{\mathbf{c}'}{k''}, \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} &\binom{\mathbf{b}}{k'-i} \geq \binom{\mathbf{b}'}{k'-i}, \binom{\mathbf{b}-i}{k'-i} \geq \binom{\mathbf{b}'-i}{k'-i} \\ &\binom{\mathbf{c}}{k''-i} \geq \binom{\mathbf{c}'}{k''-i}, \binom{\mathbf{c}-i}{k''-i} \geq \binom{\mathbf{c}'-i}{k''-i} \end{aligned}$$

因此，如果能够证明 $\mathbf{b}'$、$\mathbf{c}'$ 满足不等式 (26)、(27)、(30)、(31)，那么 $\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ 也满足这些不等式。此外，如果 $\mathbf{b}'\neq\mathbf{b}'$ 且 $\mathbf{c}'\neq\mathbf{c}$，那么对于 $i=1$ 的不等式是严格的，因此，如果我们证明了二项式分解等号成立的结果，那么该结果对于不对应于二项式分解的序列便不成立。

现在假设 $\mathbf{b} =_{\text{lex}} \mathbf{a} - 1$。由于 $\mathbf{a}$ 是一个 k-二项式分解，$\mathbf{a} - 1$的所有项都是 $a_i - 1 \geq k - i - 1$。此外，等式：$\binom{\mathbf{a}}{k} = \binom{\mathbf{a}-1}{k} + \binom{\mathbf{a}-1}{k-1}$, $\binom{\mathbf{a}}{k} = \binom{\mathbf{b}}{k} + \binom{\mathbf{c}}{k-1}$，以及 $\mathbf{b} =_{\text{lex}} \mathbf{a} - 1$，意味着 $\binom{\mathbf{a}-1}{k} = \binom{\mathbf{b}}{k}$，因此 $\binom{\mathbf{a}-1}{k-1} = \binom{\mathbf{c}}{k-1}$。由于 $\mathbf{a}$ 是一个 k 二项式分解，$\mathbf{a} - 1$ 是一个 $k-1$-二项式分解（或许除了 $\binom{\mathbf{a}-1}{k-1}$ 含有一个形如 $\binom{a_{k-1}-1}{0}$的项之外）；不过，不难看出，条件 $\binom{\mathbf{a}-1}{k-1} = \binom{\mathbf{c}}{k-1}$ 意味着 $\binom{\mathbf{a}-1}{k-1} = \binom{\mathbf{c}'}{k-1}$（与之前一样，$\mathbf{c}'$ 是从 $\mathbf{c}$ 中移除含有 $k - i - 1 - 1 = c_i$的项后得到的；那么 $\mathbf{c}$ 中所有这些项在二项式表达式 $\binom{\mathbf{c}}{k-1}$中都贡献为 0），而且实际上我们可以令 $\binom{\mathbf{a}-1}{k-1} \overset{b}{=} \binom{\mathbf{c}'}{k-1}$，这也意味着$\binom{\mathbf{a}^{-1}}{k-1-1} = \binom{\mathbf{c}'}{k-1-1}$（见观察 12）；现在，$\mathbf{b} =_{\text{lex}} \mathbf{a} - 1$ 这一事实意味着 $\binom{\mathbf{a}-1}{k-1} = \binom{\mathbf{b}}{k-1}$，结合 $\binom{\mathbf{a}}{k-1} \doteq \binom{\mathbf{a}-1}{k-1} + \binom{\mathbf{a}^{-1}}{k-1-1}$，即可证明 $\mathbf{b} =_{\text{lex}} \mathbf{a} - 1$这一情形下的 (26)。对于 (27)、(30) 和 (31) 的论证也类似。

最后，注意到如果 $\mathbf{b} >_{\text{lex}} \mathbf{a} - 1$ 是由于一个类型为 $\binom{i-1}{i}$ 的系数（因此$\mathbf{b}' =_{\text{lex}} \mathbf{a} - 1$，即从 $\mathbf{b}$中移除一些类型为$\binom{i-1}{i}$ 的二项式系数以形成$\mathbf{b}'$），并令 $\mathbf{c}'$ 为移除具有 $c_i < k - 1 - i$的那些元素后得到的对象，那么上述论证表明，$\binom{\mathbf{a}}{k} = \binom{\mathbf{b}'}{k} + \binom{\mathbf{c}'}{k-1}$，但 $\binom{\mathbf{a}}{k-1} < \binom{\mathbf{b}'}{k-1} + \binom{\mathbf{c}'}{k-1-1}$，因为$\binom{\mathbf{a}}{k-1} = \binom{\mathbf{b}}{k-1} + \binom{\mathbf{c}'}{k-1-1}$ 且 $\binom{\mathbf{b}}{k-1} < \binom{\mathbf{b}'}{k-1}$。此外，如果 $\mathbf{b}'$（通过从 $\mathbf{b}$中移除那些 $b_i = k - i - 1$ 得到）满足 $\mathbf{b}' <_{\text{lex}} \mathbf{a} - 1$，但 $\mathbf{b} \geq_{\text{lex}} \mathbf{a} - 1$，那么存在一个 $\mathbf{b}''$，它由从 $\mathbf{b}$中移除一些（但不是全部）具有 $b_i = k - i - 1$ 的元素得到，使得$\mathbf{b}'' =_{\text{lex}} \mathbf{a} - 1$。于是，上文讨论的论证表明，对于 $\mathbf{b}'' =_{\text{lex}} \mathbf{a} - 1$ 和 $\mathbf{c}'$，等式始终成立；对于 $\mathbf{b}$（如果移除了某个元素），则得到严格不等式；而对于 (26)和 (30) 中的 $\mathbf{b}'$，则得到相反方向的严格不等式。情形 (27) 和(31)也同样成立，严格不等式取决于从 $\mathbf{b}$ 中移除了哪些元素以形成 $\mathbf{b}''$。这就完成了该断言的证明。

□

情形 $\mathbf{b} =_{\mathbf{lex}} \mathbf{a} - 1$。那么，由于 $\mathbf{a}$ 是一个 k-二项式分解，$\mathbf{a} - 1$的所有项都是 $a_i - 1 \geq k - i - 1$。此外，等式：$\binom{\mathbf{a}}{k} \doteq \binom{\mathbf{a}-1}{k} + \binom{\mathbf{a}-1}{k-1}$, $\binom{\mathbf{a}}{k} \doteq \binom{\mathbf{b}}{k} + \binom{\mathbf{c}}{k-1}$，以及 $\mathbf{b} =_{\text{lex}} \mathbf{a} - 1$，意味着$\binom{\mathbf{a}-1}{k} = \binom{\mathbf{b}}{k}$，因此 $\binom{\mathbf{a}-1}{k-1} = \binom{\mathbf{c}}{k-1}$。由于 $\mathbf{a}$ 是一个 k 二项式分解，$\mathbf{a} - 1$ 是一个 $k-1$-二项式分解（或许例外是$\binom{\mathbf{a}-1}{k-1}$ 含有一个$\binom{a_{k-1}-1}{0}$类型的项）；不过，不难看出，条件 $\binom{\mathbf{a}-1}{k-1} = \binom{\mathbf{c}}{k-1}$ 意味着 $\binom{\mathbf{a}-1}{k-1} = \binom{\mathbf{c}'}{k-1}$（$\mathbf{c}$ 中不属于 $\mathbf{c}'$ 的所有项在二项式表达式中的贡献均为 0），并且实际上 $\binom{\mathbf{a}-1}{k-1} \overset{b}{=} \binom{\mathbf{c}'}{k-1}$，这也意味着$\binom{\mathbf{a}^{-1}}{k-1-1} = \binom{\mathbf{c}'}{k-1-1}$（见观察 12）；现在，事实 $\mathbf{b} =_{\text{lex}} \mathbf{a} - 1$ 意味着 $\binom{\mathbf{a}-1}{k-1} = \binom{\mathbf{b}}{k-1}$，结合 $\binom{\mathbf{a}}{k-1} \doteq \binom{\mathbf{a}-1}{k-1} + \binom{\mathbf{a}^{-1}}{k-1-1}$，便得出情形 $\mathbf{b} =_{\text{lex}} \mathbf{a} - 1$下的 (26)。

情形 $\mathbf{b} >_{\mathbf{lex}} \mathbf{a} - 1$。如果不等式 $\mathbf{b} >_{\text{lex}} \mathbf{a} - 1$ 可由不等式 $b'_i >_{\text{lex}} a_i - 1$推出，那么 $b'_j = b_j > k - j - 1$ 对于 $j \in [0, i]$（因为 $\mathbf{a}$ 是一个 k-二项式分解），这意味着 $\mathbf{b}' >_{\text{lex}} \mathbf{a} - 1$，因此我们可以改用数对 (b′, c′) 来论证，而不是 (b, c)；如果不等式 $\mathbf{b} >_{\text{lex}} \mathbf{a} - 1$ 仅因存在一个 b_i而成立，但不存在与之对应的 a_i（因为它不存在），并且 $\mathbf{b}' <_{\text{lex}} \mathbf{a} - 1$，那么对于那些存在 a_i 的 i，我们有 $b_i = a_i - 1$；令 $\mathbf{b}'' =_{\text{lex}} \mathbf{a} - 1$，则有 $\mathbf{b}'' <_{\text{lex}} \mathbf{b}$，这意味着（由系数的非负性条件）$\binom{\mathbf{b}''}{k-1} \leq \binom{\mathbf{b}}{k-1}$，并且 $\binom{\mathbf{a}}{k} = \binom{\mathbf{b}''}{k} + \binom{\mathbf{c}'}{k-1}$，因此如果我们能证明 (b″, c′) 的情形，结论对 (b, c) 也成立。我们可以应用前一段的论证来证明，当 $\mathbf{b}'' =_{\text{lex}} \mathbf{a} - 1$ 时，(26) 对数对 (b″, c′) 成立，因此 (26) 在此情形下也成立。

我们将在下文第 4.6 节概述引理 10 的证明。首先讨论二项式和的平移不变恒等式这一概念；证明中会用到它，而且它还能帮助我们在相关情形下确定 (26) 中等号成立的情形。引理 2 中 (5) 其余情形的证明（包括“此外”部分）将在第 4.9 节以推论 11 的形式给出。

4.3 平移不变性

如果两个二项式系数和之间的恒等式 $\sum_i \alpha_i \binom{x_i}{y_i} = \sum_j \alpha'_j \binom{x'_j}{y'_j}$ 对每一对整数 r、s 都成立，我们就称该恒等式具有平移不变性（或简称不变），即

$$\sum_i \alpha_i \binom{x_i + r}{y_i + s} = \sum_j \alpha'_j \binom{x'_j + r}{y'_j + s}.$$

我们使用 $\doteq$ 中的记号，如 $\sum_i \alpha_i \binom{x_i}{y_i} \doteq \sum_j \alpha'_j \binom{x'_j}{y'_j}$ 所示，来表示该恒等式具有平移不变性。

二项式递推

$$\binom{n}{k} \doteq \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \tag{37}$$

是一个不变恒等式的例子。逐项应用该递推，二项式递推自然地转化为二项式序列。

引理 13. 对于序列 a 和整数 k，我们有

$$\binom{\mathbf{a}}{k} \doteq \binom{\mathbf{a}-1}{k} + \binom{\mathbf{a}-1}{k-1}.$$

特别地，对二项式和 $\sum_i \alpha_i \binom{x_i}{y_i}$ 反复应用二项式递推，会得到一个不变恒等式。例如，对于 $i \geq 1$，下面这两个常用的二项式恒等式将在引理 10 的证明中用到，

$$\binom{n}{k} \doteq \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \cdots + \binom{n-i}{k-i+1} + \binom{n-i}{k-i}, \tag{38}$$

$$\binom{n}{k} \doteq \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \cdots + \binom{n-i}{k-1} + \binom{n-i}{k}, \tag{39}$$

是平移不变的。

我们指出，平移不变恒等式中可能包含“隐藏的”二项式系数。例如，恒等式

$$\binom{1}{0} = \binom{0}{0} + \binom{0}{-1},$$

是平移不变的，而恒等式

$$\binom{1}{0} = \binom{0}{0},$$

则不是。

下面的命题表明，事实上，所有平移不变恒等式都可以通过反复应用二项式递推(37)得到。

命题 14（平移不变性的刻画）。如果

$$A := \sum_i \alpha_i \binom{x_i}{y_i} \doteq \sum_j \alpha'_j \binom{x'_j}{y'_j} =: B$$

对于某些实数 α_i、α'_j，以及整数 x_i、x'_i、y'_i 和 y_i，且 A 和 B 都是有限和，则存在一个 $C = \sum_i \beta_i \binom{x_i}{y_i}$，使得 $A \doteq C$、$B \doteq C$，并且 C 可通过反复应用二项式递推并消去相同项，从 A 和 B 得到。

命题 14 的证明。将 B 移至等式左侧后，该陈述等价于： $A \doteq 0$ 当且仅当我们可以通过一系列应用二项式递推 $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ 并消去相同项的操作，将 A 变为 0；这两种操作都具有平移不变性。为方便起见，我们改变 A 中的求和指标，写成

$$A = \sum_{t \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_{j,t} \binom{j}{t} \doteq 0,$$

令 j_0 和 j_m 分别为 j 的最大值和最小值，使得$\alpha_{j,t} \neq 0$。通过反复使用(38) 或 (39)，我们可以约分二项式分子，并找到 $A' \doteq A$ ，使得

$$A' = \sum_{t} \alpha'_{j_m,t} \binom{j_m}{t}$$

现在我们断言，对于每个 t，$\alpha'_{j_m,t} = 0$ 。事实上，假设情况并非如此，并令 t_0 和 t_m 分别为满足 $\alpha'_{j_m,t}$ 非零的最大和最小指标 t 。那么，根据平移不变性，

$$0 = \sum_{t_m \le t \le t_0} \alpha_{j_m,t} \binom{j_m}{t - t_0} = \alpha_{j_m,t_0} \binom{j_m}{0}$$

由于 $\binom{j_m}{0} = 1$ ，因此 $\alpha_{j_m,\ t_0} = 0$。然后，通过适当平移二项式分母，同样的推理适用于 t_m 和 t_0 之间的所有指标。

□

4.4 几何表示

以下二项式系数的几何表示将对本节中的推导很有帮助。二项式系数 $\binom{y}{x}$ 被表示为二维整数格 $\mathbb{Z}^2$ 中的一个点（x, y）。在此格中，对角线是指对于某个 a 的直线 $y = x + a$ ，并且我们称 $\binom{y}{x}$ 位于对角线 $y - x$ 上。图 1 展示了两个不变等式（38）和（39）的几何表示。注意，每个 k-二项式分解在正四分之一平面上至多给出 k 个点，这些点严格位于竖线 $x = 0$ 与对角线 $y = x - 1$ 之间；后者可视为二项式分解锥的边界。

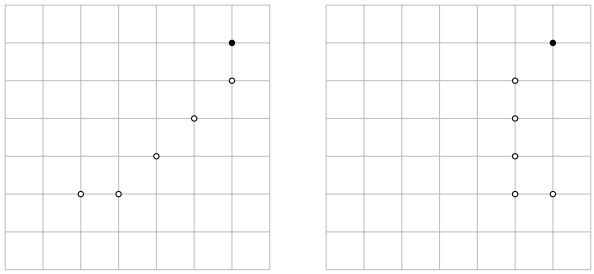


图1：黑点所表示的二项式系数与白点所表示的二项式系数之和之间的等式在平移下保持不变。

4.5 墙、碎石和铺砌

墙是一个二项式和，它在一组连续的非负对角线中每条对角线上恰好有一个二项式系数（其中二项式系数 $\binom{n}{k}$ 属于对角线 $n-k$，参见第 4 节第 4 小节）。例如，式 (39) 的右侧去掉最后一个二项式系数后就是一面墙。设 ℓ 为一个非负整数，且 $\mathbf{w}=(w_0,w_1,\dots,w_h)$ 是一个满足 $h\le\ell$ 的非增整数序列。墙 $(\mathbf{w}\ \ell)$ 是二项式和

$$(\mathbf{w},\ell)=\sum_{i=0}^{h}\binom{w_i+\ell-i}{w_i},$$

其中每条对角线 $\ell-h$、$\ell-h+1$、$\cdots$、ℓ各有一个二项式系数。墙之间采用字典序排列，但墙与其二项式系数之和之间的这种对应关系，使得墙与二项式表达式之间可以进行自然的比较。（ k-二项式表达式是二项式系数之和，并不一定是 k-二项式分解。）

我们称墙$(\mathbf{w}\ \ell)=\sum_{i=0}^{h}\binom{w_i+\ell-i}{w_i}$ 支配一个 k–二项式表达式 $\binom{\mathbf{b}}{k}=\sum_{i=0}^{t}\binom{b_i}{k-i}$，如果以下三个条件成立：

(D1) $b_0-k\le\ell$(D2) 如果 $w_i=k-j\ge k-t$
那么 $b_j<w_i+\ell-i$(D3) $w_0\le k$

我们用 $\binom{\mathbf{b}}{k}\preceq(\mathbf{w}\ \ell)$ 表示 $(\mathbf{w}\ \ell)$ 支配 $\binom{\mathbf{b}}{k}$。在这种情况下，根据 (D1)，二项式表达式中的任何项都不会位于高于 $(\mathbf{w}\ \ell)$ 中第一项的对角线上；根据 (D2)，如果 $(\mathbf{w}\ \ell)$ 中有一项与 $\binom{\mathbf{b}}{k}$ 中某项位于同一竖线上，那么前者所在的对角线严格高于后者。此外，根据 (D3)，墙的第一列比 k-二项式表达式的第一列更靠左（见第 4.4 节）。总之，如果一面墙支配一个二项式表达式，那么在第 4.4 节所述的几何表示中，这面墙位于该二项式表达式的左上方。

形如 $R=\sum_{i\in I}\alpha_i\binom{x_i}{0}$ 的二项式和（其中所有二项式系数的分母均为 0）称为碎石。

形如 $C=\sum_{i\in I}\alpha_i\binom{i-1}{i}$ 的二项式和，其中所有二项式系数的下标均比上标大一，称为铺砌。

给定两个长度为 $\le t$ 的序列 b 和 c，我们令

$$\max\{\mathbf{b},\mathbf{c}\}=(\max\{b_0,c_0\},\dots,\max\{b_t,c_t\})$$
$$\min\{\mathbf{b},\mathbf{c}\}=(\min\{b_0,c_0\},\dots,\min\{b_{t'},c_{t'}\})$$

其中，t' 是使两者以及 $b_{t'}$ 和 $c_{t'}$ 均存在的最小指标。

4.6 引理 10 的证明概要

引理 10、(26) 和 (27) 的证明采用关于 k 和 m 的归纳法。下面简要说明 (26) 的情形（(27) 的证明类似）。

步骤 1：归纳法的基本情形是针对 $k=1$ 和所有 m，以及针对 $m\le k$ 和所有 k。

步骤 2：归纳步骤假设 $m>k>1$。然后我们根据陈述的性质，可以假设 ℓ(b) $\le k'$ 和 ℓ(c) $\le k''$，并且它们是二项式分解（见断言 1）。

步骤 3（关键步骤）：接着我们找到一个非零二项式和 S、一堆碎石 R和一块铺砌 C，其中每一项的值都为零（每一项 $\binom{i-1}{i}$ 都满足 $0 < i$），使得以下平移不变恒等式成立:

$$\binom{\mathbf{a}}{k} \doteq \binom{\mathbf{a}'}{k} + S + R \tag{40}$$

$$\binom{\mathbf{b}}{k'} + \binom{\mathbf{c}}{k''} \doteq \binom{\mathbf{b}'}{k'} + \binom{\mathbf{c}'}{k''} + S + C, \tag{41}$$

对于某个 k-二项式分解 $\mathbf{a}' <_{lex} \mathbf{a}$，以及 $\mathbf{b}' \leq_{lex} \mathbf{b}$ 和 $\mathbf{c}' \leq_{lex} \mathbf{c}$，其中 $\mathbf{b}'$ 和 $\mathbf{c}'$ 是 k' 和k'' 二项式分解（可能为空）。

步骤 4（细微调整）：由于 C 是表示零的二项式和，因此可得等式（从两边去掉 S）

$$\binom{\mathbf{a}'}{k} + R = \binom{\mathbf{b}'}{k'} + \binom{\mathbf{c}'}{k''}, \tag{42}$$

并且，作为 $R \geq 0$，我们令

$$\binom{\mathbf{a}'}{k} = \binom{\mathbf{b}''}{k'} + \binom{\mathbf{c}''}{k''} \tag{43}$$

其中$\mathbf{b}'' \leq_{\text{lex}} \mathbf{b}'$和$\mathbf{c}'' \leq_{\text{lex}} \mathbf{c}'$（优先在$\mathbf{b}'$之前降低 $\mathbf{c}'$，以便在需要此类条件时 $\mathbf{b}'' \geq_{\text{lex}} \mathbf{a}' - 1$）。

步骤5（归纳法）：若 $S \neq \emptyset$，则 $\binom{\mathbf{b}''}{k'} + \binom{\mathbf{c}''}{k''} \leq \binom{\mathbf{b}'}{k'} + \binom{\mathbf{c}'}{k''} < \binom{\mathbf{b}}{k'} + \binom{\mathbf{c}}{k''}$。若 $S = \emptyset$则 $R \neq \emptyset$且 $\binom{\mathbf{b}''}{k'} + \binom{\mathbf{c}''}{k''} < \binom{\mathbf{b}'}{k'} + \binom{\mathbf{c}'}{k''} = \binom{\mathbf{b}}{k'} + \binom{\mathbf{c}}{k''}$。在这两种情况下，我们对 (43) 使用归纳假设以得出结论

$$\binom{\mathbf{a}'}{k-1} \leq \binom{\mathbf{b}''}{k'-1} + \binom{\mathbf{c}''}{k''-1}, \tag{44}$$

步骤 6（结论性论证）：利用 (40) 和 (41) 的平移不变性，我们得到

$$\binom{\mathbf{a}}{k-1} \doteq \binom{\mathbf{a}'}{k-1} + S' + R'$$

$$\binom{\mathbf{b}}{k'-1} + \binom{\mathbf{c}}{k''-1} \doteq \binom{\mathbf{b}'}{k'-1} + \binom{\mathbf{c}'}{k''-1} + S' + C',$$

（其中，S'、C'和 R' 分别由 S、C 和 R 中的每个二项式分母减去 1 得到）。现在将上述结果与（44）、$C' \geq 0$和 $R' = 0$结合起来，可得

$$\begin{aligned}
\binom{\mathbf{a}}{k-1} &\doteq \binom{\mathbf{a}'}{k-1} + S' + R' \\
&= \binom{\mathbf{a}'}{k-1} + S' \qquad \text{as } R' = 0, \text{ since } R \text{ is rubble} \\
&\leq \binom{\mathbf{b}''}{k'-1} + \binom{\mathbf{c}''}{k''-1} + S' \qquad \text{by (44)} \\
&\leq \binom{\mathbf{b}'}{k'-1} + \binom{\mathbf{c}'}{k''-1} + S' \qquad \text{as } \mathbf{b}'' \leq_{\text{lex}} \mathbf{b}' \text{ and } \mathbf{c}'' \leq_{\text{lex}} \mathbf{c}' \\
&\leq \binom{\mathbf{b}'}{k'-1} + \binom{\mathbf{c}'}{k''-1} + S' + C' \qquad C' \geq 0 \\
&\doteq \binom{\mathbf{b}}{k'-1} + \binom{\mathbf{c}}{k''-1} \qquad \text{by translation invariance}
\end{aligned} \tag{45}$$

由此得到所需的不等式（26）。

这一策略的具体实现细节将在以下小节中介绍。最具挑战性的条件是找到具有所需性质的 R, S, C。我们利用下面的引理 15 进行这样的约简，并辅以一些额外的分类讨论。

引理 15 的约化基于将 b、c 和部分 a（形成一堵墙）的元素彼此推开，将 b 推向底部边界（铺砌中按 $i > 0$ 分组的 $\binom{i-1}{i}$ 类型系数），并将 a 推向左侧竖线（碎石中分组的 $\binom{i}{0}$ 类型系数）；当 b 或 c 与墙相撞时，它们会被分组到 S 中。

分类讨论是在归纳法沿着序列进行时完成的：将一个单位从a 的某个元素中减去，该元素不一定是最后一个（从 $\binom{a_{k-1}}{1}$ 中减去一个单位的情况另行处理）。我们还应控制条件 $\mathsf{b}' \geq_{\text{lex}} \mathsf{a}'' - 1$，这一点在归约论证之外处理。

4.7 缩减墙和一对 k-二项式分解

引理 15（递归约化）。设 $k \geq 1$ 为整数，$(\mathsf{w}\ \ell)$ 为高度为 h 的墙，b 和 c 为 k-二项式分解。

假设 $\max\{\mathsf{b}, \mathsf{c}\} = \mathsf{b}, \min\{\mathsf{b}, \mathsf{c}\} = \mathsf{c}$, b 和 $(\mathsf{w}\ \ell)$ 均非空，$\binom{\mathbf{b}}{k} \preceq (\mathsf{w}\ \ell), \binom{\mathbf{c}}{k} \preceq (\mathsf{w}\ \ell)$，且 $w_h \geq 1$。那么，

(i) 存在：一面墙 (w', ℓ)、k-二项式分解 b′ 和 c′、一堆碎石 $R = \sum_{i \in I} \binom{i}{0}$、一种铺砌 $C = \sum_{i \in J} \binom{i-1}{i}$，满足对于整数多重集 J 中的所有 j，$j \geq 1$，以及一个二项式系数之和 S，使得

$$\binom{\mathbf{b}}{k} + \binom{\mathbf{c}}{k} \doteq \binom{\mathbf{b}'}{k} + \binom{\mathbf{c}'}{k} + C + S$$

and

$$(\mathbf{w}, \ell) \doteq (\mathbf{w}', \ell) + R + S$$

用 $\mathsf{w}' <_{lex} \mathsf{w}$ 和 $w'_i \leq w_i$ 代替每个 i（在有意义的情况下），$\binom{\mathbf{b}'}{k} \preceq (\mathsf{w}', \ell)$，$\binom{\mathbf{c}'}{k} \preceq (\mathsf{w}', \ell)$，$b'_0 \leq b_0$，$c'_0 \leq c_0$，$\binom{\mathbf{b}'}{k} + \binom{\mathbf{c}'}{k} < \binom{\mathbf{b}}{k} + \binom{\mathbf{c}}{k}$。

(ii)此外，$\max\{\mathsf{b}', \mathsf{c}'\} = \mathsf{b}', \min\{\mathsf{b}', \mathsf{c}'\} = \mathsf{c}'$.

(iii) 如果另外有 $b_0 - k \geq \ell$，那么 (i) 成立，并且 (w', ℓ) 是空墙。

(iv)此外，如果 $w_0 \geq k$，那么 (i) 成立，且 b′ 为空序列，$\mathsf{c}' = \mathsf{c}$。

在继续之前，让我们先说明引理 15 的一个直接推论，我们将在论证中使用它。

推论16（递归约化，最终形式）。在与引理 15 相同的假设下，存在一面墙 (w', ℓ)、k-二项式分解 b′ 和 c′、碎石 $R = \sum_{i \in I} \binom{i}{0}$、铺砌 $C = \sum_{i \in J} \binom{i-1}{i}$，其中 $j \geq 1$ 对整数多重集 J 中的所有 j 均成立，以及二项式系数之和 S，使得

$$\binom{\mathbf{b}}{k} + \binom{\mathbf{c}}{k} \doteq \binom{\mathbf{b}'}{k} + \binom{\mathbf{c}'}{k} + C + S$$

and

$$(\mathbf{w}, \ell) \doteq (\mathbf{w}', \ell) + R + S$$

其中 (w', ℓ) 是空墙，或者 b′ 和 c′ 都是空序列。

证明　　推论16. 将引理15 应用于 $(\mathsf{w}\ \ell)$、b、c，并得到 [(w', ℓ)、b′、c′、R、S、C]。现在　，

- 如果满足引理 15 的第 (i)+(ii) 部分，那么我们再次应用引理 15，其中 $k \leftarrow k$、(w ℓ) $\leftarrow$ (w′, ℓ)、b $\leftarrow$ b′ 和 c $\leftarrow$ c′，且 w′ $<_{\text{lex}}$ w 严格更小，并且 $\binom{\mathbf{b}'}{k} + \binom{\mathbf{c}'}{k} < \binom{\mathbf{b}}{k} + \binom{\mathbf{c}}{k}$。
- 如果满足引理 15 的第 (iii) 部分，那么就完成了。
- 如果满足引理 15 的第 (iv) 部分，且 (w ℓ) 不是空墙，那么我们再次应用引理 15，其中 $k \leftarrow k$，(w ℓ) $\leftarrow$ (w′, ℓ)，b $\leftarrow$ c′，以及 c $\leftarrow \emptyset$。
- 如果 (w ℓ) 是空集，那么该命题成立。
- 如果 b 和 c 是空集，那么该命题成立。

因此，重复上述某个步骤，并且由于我们总是在减少 (w ℓ)、b 或 c，最终会满足推论陈述中的某个条件。 □

引理 15 的证明。注意，我们实际上是在证明三个结果，即 (i)+(ii)、(iii) 和 (iv)。所有结果都通过对 w 和 $\binom{\mathbf{b}}{k} + \binom{\mathbf{c}}{k}$ 进行归纳法证明，基本情形是 (w ℓ) 为空集，或 b（从而 c）为空集。在这些情形下，相应的 b′ $\leftarrow$ b、c′ $\leftarrow$ c 和 (w′, ℓ) $\leftarrow$ (w ℓ) 满足这些条件。

令 $j = b_t - (k - t)$ 为 $\binom{\mathbf{b}}{k}$ 的最后一项所在的对角线。我们在 j中进行分类讨论。情况 1：$\ell - h \le j \le \ell$。在这种情况下，“b 碰到了墙”。一些分类讨论。情况 1.1：如果 $k - t < k$。我们对 $k \leftarrow k - t$ b $\leftarrow (b_t)$、c $\leftarrow \emptyset$、(w ℓ) $\leftarrow ((w_{\ell-j}, \ldots, w_h)$ $j)$ 使用 (iii)，得到b″、c″、(w″, j) 分别为：空集、 R''、 S''、 C''。

为了证明 (iv)，我们再次应用 (iv)，取 b $\leftarrow (b_0, \ldots, b_{k-t-1}$,b″)、c $\leftarrow$ c、(w ℓ) $\leftarrow ((w_0, \ldots, w_{\ell-j-1})$ ℓ)，得到b‴ 空集、c‴、(w‴, ℓ)、 R'''、 S'''、 C'''。于是 (iv)对b′ $\leftarrow$ b‴ 空集、c′ $\leftarrow$ c‴、(w′, ℓ) $\leftarrow$ (w‴, ℓ)、 $R \leftarrow R''' + R''$、$S \leftarrow S''' + S''$、 $C \leftarrow C''' + C''$成立。

为证明 [(i)+(ii), (iii)]，我们对 b $\leftarrow (b_0, \ldots, b_{k-t-1}, \max\{\mathbf{b}'', \mathbf{c}''\})$、c $\leftarrow (c_0, \ldots, c_{t-1}, \min\{\mathbf{b}'', \mathbf{c}''\})$、(w ℓ) $\leftarrow ((w_0, \ldots, w_{\ell-j-1})$ ℓ) 归纳应用 [(i)+(ii), (iv)]，得到 b‴, c‴, (w‴, ℓ), R''', S''', C'''。于是[(i)+(ii), (iii)] 成立，其中 b′ $\leftarrow$ b‴, c′ $\leftarrow$ c‴, (w′, ℓ) $\leftarrow$ (w‴, ℓ), $R \leftarrow R''' + R''$, $S \leftarrow S''' + S''$, $C \leftarrow C''' + C''$。情形 1.2：如果 $k - t = k$。那么 $b_t - (k - t) = b_0 - k = \ell$，且 $b_0 - (k - w_0) = w_0 + \ell$。条件 $\binom{\mathbf{b}}{k} \preceq$ (w ℓ)使得在证明 (iv) 时不会出现这种情形。

我们令

$$\binom{b_0}{k} \doteq \sum_{i=0}^{k-w_0-1} \binom{b_0 - i - 1}{k - i} + \binom{b_0 - (k - w_0)}{w_0}.$$

还需进一步分类讨论。

情形 1.2.1：若 $b_0 > k$。

于是我们归纳地应用 (iii)（因为在此情形下 $k - t = k$），再次取 b $\leftarrow (b_0 - 1, b_0 - 2, \ldots, b_0 - (k - w_0))$、c $\leftarrow \emptyset$、(w ℓ'') $\leftarrow ((w_1, \ldots, w_h)$ $\ell - 1)$，得到 b″、c″ 空集、(w″, ℓ'') 空集、 R'', S'', C''。

于是取 b′ $\leftarrow$ b‴、c′ $\leftarrow$ c、(w′, ℓ) 空墙、 $R \leftarrow R''' + R''$, $S \leftarrow S''' + S'' + \binom{b_0 - (k-w_0)}{w_0}$, $C \leftarrow C''' + C''$，即可推出 (iii)。

于是 (i)+(ii) 成立，其中 b′ $\leftarrow \max\{\mathbf{b}''', \mathbf{c}\}$, c′ $\leftarrow \min\{\mathbf{b}''', \mathbf{c}\}$, (w′, ℓ) 为空墙， $R \leftarrow R''' + R''$, $S \leftarrow S''' + S'' + \binom{b_0 - (k-w_0)}{w_0}$, $C \leftarrow C''' + C''$.

情形 1.2.2：若 $b_0 = k$。则 $\ell = 0$，移除项 $\binom{b_0 - (k-w_0)}{w_0}$ 后便没有更多的墙了。

于是 (iii) 成立，其中 b′ 为空序列，c′ $\leftarrow$ c，(w′, ℓ) 为空墙， $R \leftarrow \emptyset$, $S \leftarrow \binom{b_0 - (k-w_0)}{w_0}$, $C \leftarrow \sum_{i=0}^{k-w_0-1} \binom{b_0 - i - 1}{k - i}$.

于是 (i)+(ii) 随之成立，其中 b′ $\leftarrow$ c，c′ 空序列，(w′, ℓ) 为空墙， $R \leftarrow \emptyset$, $S \leftarrow \binom{b_0 - (k-w_0)}{w_0}$, $C \leftarrow \sum_{i=0}^{k-w_0-1} \binom{b_0 - i - 1}{k - i}$。

情形 2：$0 \le j < \ell - h$。在这种情况下，“墙位于 b 上方”。

情形 2.1：$w_h > k - t$。因此，b 严格延伸至 w_h 所确定的竖线之外。利用 w_h 的列消去 b 中相应的部分，然后加入 c 的部分并继续。也就是说。

我们在 $k \leftarrow w_h$ b $\leftarrow (b_{k-w_h}, \ldots, b_t)$, c $\leftarrow \emptyset$, (w $\ell - h$) $\leftarrow ((w_h)\ \ell - h)$ 上应用 (iii)，得到 b″ 为空集，c″ 为空集，$(\mathrm{w}'', \ell - h)$，R'', S'', C''。

为证明 (iv)，我们将 (iv) 应用于 b $\leftarrow (b_0, \ldots, b_{k-t-1}, \mathrm{b}'')$, c $\leftarrow$ c, (w ℓ) $\leftarrow ((w_0, \ldots, w_{\ell-j-1})\ \ell)$，得到 b‴ 为空集，$(\mathrm{c}''', (\mathrm{w}''', \ell)$，$R'''$, S''', C'''。于是，在 b′ $\leftarrow$ b‴ 为空集，c′ $\leftarrow$ c‴, (w′, ℓ) $\leftarrow (\mathrm{w}''', \ell)$，$R \leftarrow R''' + R''$，$S \leftarrow S''' + S''$, $C \leftarrow C''' + C''$ 的情况下，(iv) 成立。

为证明 [(i)+(ii)、(iii)、(iv)]，我们对 b $\leftarrow (b_0, \ldots, b_{w_h-1}, c_{w_h}, \ldots, c_{t'})$、c $\leftarrow (c_0, \ldots, c_{w_h-1})$、(w ℓ) $\leftarrow ((w_0, \ldots, w_{h-1}, \mathrm{w}')\ \ell)$ 归纳地应用 [(i)+(ii)、(iii)、(iv)]，得到 b‴、c‴、(w‴, ℓ)、R'''、S'''、C'''。于是[(i)+(ii)、(iii)、(iv)] 成立，其中 b′ $\leftarrow$ b‴、c′ $\leftarrow$ c‴、(w′, ℓ) $\leftarrow (\mathrm{w}''', \ell)$、$R \leftarrow R''' + R''$、$S \leftarrow S''' + S''$、$C \leftarrow C''' + C''$。

情形 2.2：$w_h = k - t$。于是 b 向右延伸，直到墙的最后一部分的垂直线处。我们使用 w_h 来明确移除 b_t 并继续。

Let

$$\binom{w_h + \ell - h}{w_h} \doteq \sum_{i=0}^{w_h+\ell-h-b_t-1} \binom{w_h + \ell - h - i - 1}{w_h - 1} + \binom{b_t}{w_h} \tag{46}$$

情形 2.2.1：$w_h > 1$。为了证明 [(i)+(ii)、(iii)、(iv)]，我们对 b $\leftarrow (b_0, \ldots, b_{t-1}, c_t)$、c $\leftarrow (c_0, \ldots, c_{t-1})$、(w ℓ) $\leftarrow ((w_0, \ldots, w_{h-1}, w_h - 1, \ldots, w_h - 1)\ \ell)$（$w_h + \ell - h - b_t$ 份 $w_h - 1$）归纳应用 [(i)+(ii)、(iii)、(iv)]，得到 b‴、c‴、(w‴, ℓ)、R'''、S'''、C'''。于是，[(i)+(ii)、(iii)、(iv)] 成立，其中 b′ $\leftarrow$ b‴、c′ $\leftarrow$ c‴、(w′, ℓ) $\leftarrow (\mathrm{w}''', \ell)$、$R \leftarrow R'''$、$S \leftarrow S''' + \binom{b_t}{w_h}$、$C \leftarrow C'''$。

情形 2.2.2：$w_h = 1$。为证明 [(i)+(ii)、(iii)、(iv)]，我们对 b $\leftarrow (b_0, \ldots, b_{t-1}, c_t)$、c $\leftarrow (c_0, \ldots, c_{t-1})$、(w ℓ) $\leftarrow ((w_0, \ldots, w_{h-1})\ \ell)$，归纳应用 [(i)+(ii)、(iii)、(iv)]，得到 b‴、c‴、(w‴, ℓ)、R'''、S'''、C'''。于是，[(i)+(ii)、(iii)、(iv)] 由 b′ $\leftarrow$ b‴、c′ $\leftarrow$ c‴、(w′, ℓ) $\leftarrow (\mathrm{w}''', \ell)$、$R \leftarrow R''' + \sum_{i=0}^{w_h+\ell-h-b_t-1} \binom{w_h+\ell-h-i-1}{w_h-1}$、$S \leftarrow S''' + \binom{b_t}{w_h}$、$C \leftarrow C''' + C''$可得。

情形 2.3：$w_h < k - t$。延长 b_t，直到它位于 w_h 下方，而 w_h 将位于 b_t 延长部分的上方；然后使用 (iii) 和 w_h 擦除该部分，并继续进行。这涉及根据 b_t 剩余部分进行分类讨论。

Let

$$\binom{b_t}{k-t} \doteq \sum_{i=0}^{k-w_h-1} \binom{b_t - i - 1}{k - i} + \binom{b_t - (k - w_h)}{w_h} \tag{47}$$

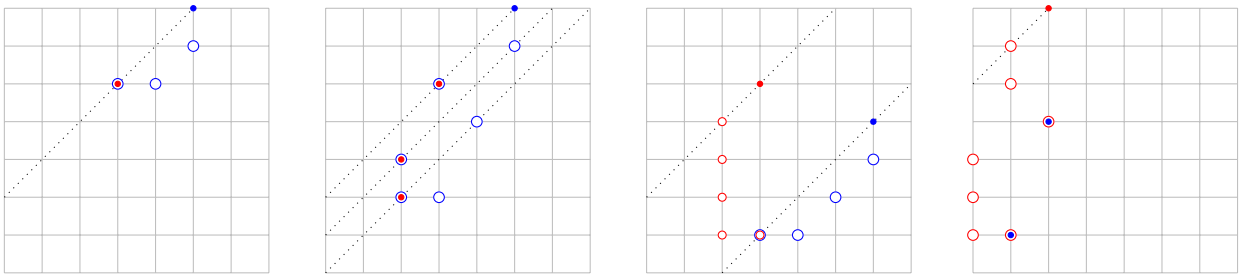
我们对 $k \leftarrow w_h$ b $\leftarrow (b_t - (k - w_h))$, c $\leftarrow \emptyset$, (w $\ell - h$) $\leftarrow ((w_h)\ \ell - h)$ 应用 (iii)，得到 b″ 为空集，c″ 为空集，$(\mathrm{w}'', \ell - h)$，R'', S'', C''。

注意，S'' 将为 $\binom{b_t - (k - w_h)}{w_h}$，因为下一步我们将使用情形 2.2。现在需要进行分类讨论，因为我们应决定将对 $\binom{b_t}{k-t}$ 进行的、来自 (47) 的分解中剩余的部分放在哪里。

情形 2.3.1：$b_t > k$。为证明 [(i)+(ii)、(iii)、(iv)]，我们对 b $\leftarrow (b_0, \ldots, b_{t-1}, \max\{(b_t - 1, \ldots, b_t - (k - w_h - 1) - 1), (c_t)\})$、c $\leftarrow (c_0, \ldots, c_{t-1}, \max\{(b_t - 1, \ldots, b_t - (k - w_h - 1) - 1), (c_t)\})$、(w ℓ) $\leftarrow ((w_0, \ldots, w_{h-1}, \mathrm{w}')\ \ell)$，归纳地应用 [(i)+(ii)、(iii)、(iv)]，从而得到 b‴、c‴、(w‴, ℓ)、R'''、S'''、C'''。于是，[(i)+(ii)、(iii)、(iv)] 由 b′ $\leftarrow$ b‴、c′ $\leftarrow$ c‴、(w′, ℓ) $\leftarrow (\mathrm{w}''', \ell)$、$R \leftarrow R''' + R''$、$S \leftarrow S''' + S''$、$C \leftarrow C''' + C''$可得。

[{ "id": 0, "output": "情形 2.3.2：$b_t = k$。为证明 [(i)+(ii)、(iii)、(iv)]，我们将 [(i)+(ii)、(iii)、(iv)] 归纳地应用于 b $\leftarrow (b_0, \ldots, b_{t-1}, c_t)$)、c $\leftarrow (c_0, \ldots, c_{t-1})$、(w ℓ) $\leftarrow ((w_0, \ldots, w_{h-1}, \mathrm{w}')\ \ell)$，从而得到 b‴、c‴、(w‴, ℓ)、R'''、S'''、C'''。于是，[(i)+(ii)、(iii)、(iv)] 成立，其中 b′ $\leftarrow$ b‴、c′ $\leftarrow$ c‴、(w′, ℓ) $\leftarrow (\mathrm{w}''', \ell)$、$R \leftarrow R''' + R''$、$S \leftarrow S''' + S''$、$C \leftarrow C''' + C''' + \sum_{i=0}^{k-w_h-1} \binom{b_t-i-1}{k-i}$。" }] □

在图 2 中，我们可以找到引理 15 中所执行约化的几何表示。



(1.a) (1.b) (2.1) (2.2)

图 2：实心蓝点来自 $\binom{\mathbf{b}}{k}$，实心红点来自 (w ℓ)，空心点是引理 15 各种情形中约化的结果，双色点则是 S 中的项。

备注 1. 引理 15 用于两个地方：引理 10 的证明和推论 11 的证明。可以将 n-碎石（n 为负数时）定义为形如 $\binom{\cdot}{-1}$ 的二项式项之和。于是，类似于引理 15 的陈述可在 $w_h \geq 0$ 下成立，且碎石 R 是一个 n-碎石。该陈述的证明与引出引理 15 的论证类似，但 w_h 的边界情形是 0 而不是 1。这意味着情形 2.2.1 和 2.2.2 消失了，而新的边界情形出现在情形 2.3 中；此时应区分 $w_h = k-t-1 = 0$ 的单独情形，这正是产生带有二项式分母 -1 的碎石的情形。$\binom{\cdot}{-1}$ 类型的碎石略微简化了引出引理 10 的论证，该论证在第 4.6 节中作了概述。另一方面，它使推论 11 的证明变得困难，因为我们在其中关键地用到了带有 $\binom{\cdot}{0}$ 的碎石的性质。

4.8 引理 10 的证明

引理 10 中不等式（26）的证明是对 k 和 $m = \binom{\mathbf{a}}{k}$进行归纳。

基本情形 1：$k = 1$ 和任意的 $m > 0$。对于 $k = 1$，结论对每个 m都成立。事实上，我们有 $\binom{\mathbf{a}}{k-1} = 1$。如果 k'、$k'' \geq k$，那么 $\binom{\mathbf{b}}{k'}$ 或 $\binom{\mathbf{c}}{k''}$ 至少有一个非空，并且其中包含一个大于或等于 $\binom{i}{i}$ 的二项式系数，且满足 $i \geq 1$，因此 $\binom{\mathbf{b}}{k'-1} + \binom{\mathbf{c}}{k''-1} \geq 1$。如果 $k' = 1$ 和 $k'' = k-1$，且 $\binom{\mathbf{b}}{k} \geq 1$，那么 $\binom{\mathbf{b}}{k-1} \geq 1$，结论也成立（因为如果 $\binom{\mathbf{c}}{k-1}$ 非空，则 $\binom{\mathbf{c}}{k-2}$ 为 ≥ 0；如果它是空序列，则为 $= 0$）。如果 $k' = 1$ 和 $k'' = k-1$，且 $\binom{\mathbf{b}}{k} = 0$，那么条件 $\mathbf{b} \geq_{\text{lex}} \mathbf{a} - 1$ 迫使 $b_0 = k-1$成立，这意味着 $\binom{\mathbf{b}}{k-1} \geq 1$，从而证明了这些最初的基本情形中的结论。

基本情形 2：任意 $k > 1$ 和 $m \leq k$。我们有

$$\binom{\mathbf{a}}{k} = \sum_{i=0}^{m-1} \binom{k-i}{k-i},$$

$$\binom{\mathbf{b}}{k'} = \sum_{i=0}^{m'-1} \binom{k'-i}{k'-i} + \sum_{i=m'}^{m'''-1} \binom{k'-i-1}{k'-i}$$

and

$$\binom{\mathbf{c}}{k''} = \sum_{i=0}^{m''-1} \binom{k''-i}{k''-i} + \sum_{i=m''}^{m''''-1} \binom{k''-i-1}{k''-i}$$

当

$$\binom{\mathbf{a}}{k-1} = \sum_{i=0}^{m-1} \binom{k-i}{k-i-1},$$

$$\binom{\mathbf{b}}{k'-1} = \sum_{i=0}^{m'-1} \binom{k'-i}{k'-i-1} + \sum_{i=m'}^{m'''-1} \binom{k'-i-1}{k'-i-1}$$

and

$$\binom{\mathbf{c}}{k''-1} = \sum_{i=0}^{m''-1} \binom{k''-i}{k''-i-1} + \sum_{i=m''}^{m''''-1} \binom{k''-i-1}{k''-i-1}.$$

当 $k', k'' \geq k$ 时，结论显然成立：对于每个使得 $b_i \geq k' - i$ 存在的 i，都有 $\binom{b_i}{k'-i-1} \geq \binom{a_i}{k-i-1}$（当 $c_i \geq k'' - i$ 时也同样成立），并且等式 $\binom{\mathbf{a}}{k} = \binom{\mathbf{b}}{k'} + \binom{\mathbf{c}}{k''}$ 两边二项式系数中的项数相同。为了证明 $k' = k, k'' = k-1$ 的情形，我们要么有 $\binom{\mathbf{b}}{k} > 0$，此时可以使用与前面类似的论证；要么有 $\binom{\mathbf{b}}{k} = 0$。在第二种情形下，对零的表示施加的条件 $\mathbf{b} \geq_{\text{lex}} \mathbf{a} - 1$ 意味着 $\binom{\mathbf{b}}{k-1} \geq m$。于是，若 $m \leq k-1$，则有 $\binom{\mathbf{c}}{k-2} = (k-1) + (k-2) + \ldots + (k-m)$，而 $\binom{\mathbf{a}}{k-1} = k + (k-1) + \ldots + (k-(m-1))$，从而证明了结论。当 $m = k$ 时，我们有 $\binom{\mathbf{a}}{k-1} = \binom{k+1}{2}$，而 $\binom{\mathbf{c}}{k-2} = \binom{k}{2}$ 且 $\binom{\mathbf{b}}{k-1} \geq k$，因此此情形下结论同样成立。

归纳步骤。假设 $m > k > 1$。我们假设 $k' \geq k''$。我们还可以假设

$$(b_0, k') \neq (a_0, k) \tag{48}$$

否则，我们可以 删去 (3) 中的 $\binom{b_0}{k'}$ 和 $\binom{a_0}{k}$，并对 k应用归纳法。类似地，$(c_0, k'') \neq (a_0, k)$.

根据断言 1，只需证明当 (36) 成立时该命题成立。

设 r 是满足 $a_r - (k-r) = a_0 - k$的最大下标。因此，$\binom{a_r}{k-r}$ 对应于与 $\binom{a_0}{k}$位于同一对角线上的 $\binom{\mathbf{a}}{k}$ 中的较小二项式系数。我们记 $\binom{a_r}{k-r} = \binom{a_r-1}{k-r} + \binom{a_r-1}{k-r-1}$，并令 $\mathbf{a}'$ 为将 $\mathbf{a}$ 中的 a_r 替换为 $a_r - 1$后得到的序列。根据 r 的定义以及 $m > k$这一事实，$\binom{\mathbf{a}'}{k}$是一个 k–二项式分解。

现在对 r 进行一个简单的分类讨论。注意，由于 $\mathbf{a}$ 是一个 k 二项式分解，$0 \leq r \leq k-1$。情况 $r = k-1$。于是 $k - r - 1 = 0$。我们有

$$\binom{\mathbf{a}}{k} \doteq \binom{\mathbf{a}'}{k} + \binom{a_r - 1}{k-r-1} \doteq \binom{\mathbf{a}'}{k} + \binom{a_r - 1}{0} \doteq \binom{\mathbf{a}'}{k} + \binom{a_r - 1}{0} \doteq \binom{\mathbf{a}'}{k} + R = \binom{\mathbf{a}'}{k} + 1$$

现在，如果 $\mathbf{c}$ 是一个非零的 k'' 二项式分解，那么我们考虑 $\binom{\mathbf{c}'}{k''} \stackrel{b}{=} \binom{\mathbf{c}}{k''} - 1$ 和 $\mathbf{b}' = \mathbf{b}$；如果 $\mathbf{c}$ 是一个等于 0 的 k'' 二项式分解，那么我们考虑 $\binom{\mathbf{b}'}{k'} \stackrel{b}{=} \binom{\mathbf{b}}{k'} - 1$，并将 $\mathbf{c}' = \mathbf{c}$ 视为空分解。在这两种情况下，我们都有 $\mathbf{b}' \leq_{\text{lex}} \mathbf{b}$、$\mathbf{c}' \leq_{\text{lex}} \mathbf{c}$，且它们都是二项式分解，并且 $\mathbf{b}' \geq_{\text{lex}} \mathbf{a}' - 1$。于是我们还有

$$\begin{gathered} \binom{\mathbf{a}'}{k} = \binom{\mathbf{b}'}{k'} + \binom{\mathbf{c}'}{k''} \\ \binom{\mathbf{b}'}{k'-1} + \binom{\mathbf{c}'}{k''-1} \leq \binom{\mathbf{b}}{k'-1} + \binom{\mathbf{c}}{k''-1} \\ \binom{\mathbf{a}'}{k-1} = \binom{\mathbf{a}}{k-1} \end{gathered} \tag{49}$$

最后一个等式成立是因为 $\binom{\mathbf{a}}{k-1} > k$，且 r 位于最大对角线上，并且 $r = k-1$，所以 $a_{k-1} - 1 \geq 1$，而我们只从 $\binom{\mathbf{a}}{k}$ 中减去了1 个单位。由于 $\mathbf{a}' \leq_{\text{lex}} \mathbf{a}$，且这是一个 k-二项式分解，并且 $\mathbf{b}'$ 且

$\mathbf{c}'$ 是 k', k''-二项式分解（并且 $\mathbf{b}' \geq_{\text{lex}} \mathbf{a}' - 1$ 在 $(k, k-1)$情况下），根据(49)，我们可以对 $\mathbf{a}'$,$\mathbf{b}'$,$\mathbf{c}'$ 应用归纳假设，从而得出

$$\binom{\mathbf{a}'}{k-1} \leq \binom{\mathbf{b}'}{k'-1} + \binom{\mathbf{c}'}{k''-1}$$

然后，如果 $R' = \binom{a_r - 1}{-1} = 0$，我们有:

$$\binom{\mathbf{a}}{k-1} \doteq \binom{\mathbf{a}'}{k-1} + R' \leq \binom{\mathbf{b}'}{k'-1} + \binom{\mathbf{c}'}{k''-1} + R' = \binom{\mathbf{b}'}{k'-1} + \binom{\mathbf{c}'}{k''-1} \leq \binom{\mathbf{b}}{k'-1} + \binom{\mathbf{c}}{k''-1}$$

这就证明了此情形下的结论。
情形 $0 \leq r < k-1$。于是 $k - r - 1 \geq 1$，我们考虑满足 $w_0 = w_h = k - r - 1 \geq 1$ 的墙 $W = \binom{a_r - 1}{k-r-1}$。由 (36)，$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ 是 k' 和 k'' 二项式分解。进一步假设:

$$\text{there exists the term } b_{k'-k+r+1} \text{ in } \mathbf{b} \text{ or the term } c_{k''-k+r+1} \text{ in } \mathbf{c}. \tag{50}$$

不满足 (50) 的情形见下文的“否则”情形。
设 $k''' = k - r - 1$，并定义 $\binom{\mathbf{b}^+}{k'''}$ 和 $\binom{\mathbf{c}^-}{k'''}$ 为

$$\mathbf{b}^+ = \max\{(b_{k'-k+r+1}, b_{k'-k+r+1+1}, \ldots, b_{k'-1}), (c_{k''-k+r+1}, c_{k''-k+r+1}, \ldots, c_{k''-1})\},$$
$$\mathbf{c}^- = \min\{(b_{k'-k+r+1}, b_{k'-k+r+1+1}, \ldots, b_{k'-1}), (c_{k''-k+r+1}, c_{k''-k+r+1}, \ldots, c_{k''-1})\}$$

利用 (50)，所得二项式和 $\binom{\mathbf{b}^+}{k'''}$ 和 $\binom{\mathbf{c}^-}{k'''}$ 是 k''–二项式分解，并且至少有一个 $\binom{\mathbf{b}^+}{k'''}$ 非空。记

$$\mathbf{b}^{in} = \begin{cases} (b_0, \ldots, b_{k'-k+r}) & \text{if } b_{k'-k+r+1} \text{ exists} \\ \mathbf{b} & \text{otherwise} \end{cases}$$
$$\mathbf{c}^{in} = \begin{cases} (c_0, \ldots, c_{k''-k+r}) & \text{if } c_{k''-k+r+1} \text{ exists} \\ \mathbf{c} & \text{otherwise} \end{cases}$$

序列$\mathbf{b}$和 $\mathbf{c}$的初始段，从而 $\binom{\mathbf{b}^{in}}{k'}$ 是一个 k'–二项式分解，且 $\binom{\mathbf{c}^{in}}{k''}$ 是一个k''–二项式分解

$$\text{Note: if (50) is not satisfied, then } \mathbf{b} = \mathbf{b}^{in} \text{ and } \mathbf{c} = \mathbf{c}^{in}. \tag{51}$$

由于这些仅涉及对二项式和进行重排，因此我们当然有

$$\binom{\mathbf{b}^{in}}{k'} + \binom{\mathbf{b}^+}{k'''} + \binom{\mathbf{c}^{in}}{k''} + \binom{\mathbf{c}^-}{k'''} \doteq \binom{\mathbf{b}}{k'} + \binom{\mathbf{c}}{k''} \tag{52}$$

断言2. 墙 $W = \binom{a_r - 1}{k-r-1}$ (等价地$((k-r-1)\ a_r - 1 - (k-r-1))$) 支配 $\binom{\mathbf{b}}{k'}$ 和 $\binom{\mathbf{c}}{k''}$，以及 $\binom{\mathbf{b}^+}{k'''}$ 和 $\binom{\mathbf{c}^-}{k'''}$。

证明。由于 k'、$k'' \geq k'''$ 和 $k''' = k - r - 1 = w_0$，因此条件 (D3) 对 $\binom{\mathbf{b}}{k'}$、$\binom{\mathbf{c}}{k''}$、$\binom{\mathbf{b}^+}{k'''}$、$\binom{\mathbf{c}^-}{k'''}$也成立。特别地，由于 $\binom{\mathbf{b}^+}{k''}$ 和 $\binom{\mathbf{c}^-}{k''}$ 的每个二项式系数都来自 $\binom{\mathbf{b}}{k'}$ 和 $\binom{\mathbf{c}}{k''}$，只需证明 W支配 $\binom{\mathbf{b}}{k'}$ 和 $\binom{\mathbf{c}}{k''}$。

我们观察到 $\binom{b_0}{k'} \leq \binom{\mathbf{b}}{k'} \leq \binom{\mathbf{a}}{k} < \binom{a_0+1}{k}$。由于二项式系数沿对角线和垂直线递增，且 $k' \geq k$，因此 $\binom{b_0}{k'}$ 位于一条不大于 $a_0 - k$ 的对角线上，$\binom{\mathbf{b}}{k'}$ 的所有项也一样。

对于 $\binom{\mathbf{c}}{k''}$，若 $k'' \geq k$，则类似的论证也适用。若 $k'' = k-1$ 且 $k' = k$，则由 (36) 可知 $\mathbf{c} \leq_{lex} \mathbf{a} - 1$。这证明了 $\binom{\mathbf{b}}{k'}$ 和 $\binom{\mathbf{c}}{k''}$ 满足条件（D1）。

让我们证明 (D2) 成立。根据 (D1)，$\binom{\mathbf{b}}{k'}$ 以及 $\binom{\mathbf{c}}{k''}$ 中的所有项都位于不大于 $a_0 - k$ 所在对角线的对角线上。假设 $\binom{b_0}{k'}$ 与 $\binom{a_0}{k}$位于同一条对角线上。那么，由于我们假设 $\binom{b_0}{k'} \neq \binom{a_0}{k}$，有 $k' > k$（见 (48)）。因此，$\binom{b_0}{k'} > \binom{a_0}{k}$和 $\binom{\mathbf{b}}{k'} \leq \binom{\mathbf{a}}{k}$意味着：如果 $\binom{\mathbf{b}}{k'}$ 中有一项位于 $\binom{a_r-1}{k-r-1}$的竖线中，那么它应位于其下方，因为尾项 $\sum_{i>r}\binom{a_i}{k-i} < \binom{a_r-1}{k-r-1}$（注意，$r$ 是最大对角线上的最大索引）。如果 $\binom{b_0}{k'}$ 位于低于 $\binom{a_0}{k}$ 的对角线上（这与位于 $\binom{a_r-1}{k-r-1}$所在的对角线上相同），那么 $\binom{\mathbf{b}}{k'}$ 中位于 $\binom{a_r-1}{k-r-1}$的竖线中的一项（如果存在）就在其下方。在 $k'' \geq k$ 的情况下，对 $\binom{\mathbf{c}}{k''}$ 也可应用类似的论证。当 $k'' = k-1$ 时，$k' = k$，并且如前所述，(36) 意味着 $\mathbf{c} \leq_{lex} \mathbf{a} - \mathbf{1}$。由此可知，$\binom{\mathbf{c}}{k''}$ 中位于 $\binom{a_j-1}{k-j-1}$的竖线中的一项（如果存在）就在其下方。这就证明了 (D2)。

□

利用断言2以及 $\binom{\mathbf{b}^+}{k'''}$ 和 $\binom{\mathbf{c}^-}{k'''}$的定义，我们得出三元组 $\left[W, \binom{\mathbf{b}^+}{k'''}, \binom{\mathbf{c}^-}{k'''}\right]$ 满足推论16的假设，其中 $k \leftarrow k''$，$(\mathbf{w}\ \ell) \leftarrow ((k-r-1)\ a_r - 1 - (k-r-1)) = W$是高度为0的墙，$\mathbf{b} \leftarrow \mathbf{b}^+$，且 $\mathbf{c} \leftarrow \mathbf{c}^-$。因此，我们得到五元组 $\left(\left[W', \binom{\mathbf{b}_1}{k'''}, \binom{\mathbf{c}_1}{k'''}\right], S_1, R_1, C_1\right)$，其中

W' is the empty sum or, $\mathbf{b}_1$ and $\mathbf{c}_1$ are the empty sequences.

现在我们进行分类讨论。我们将注意到，如果 $b_{k'-k+r+1}$ 或 $c_{k''-k+r+1}$ 不存在，那么在推论16所涉及的整个过程中，$\binom{\mathbf{c}^-}{k'''}$ 始终是空序列（见第(i)部分中的条件 $c'_0 \leq c_0$ ）。

如果 W' 是空和，那么归约过程就结束了。我们令

$$\binom{\mathbf{b}''}{k'} = \begin{cases} \binom{\mathbf{b}^{in}}{k'} + \binom{\mathbf{b}_1}{k'''} & \text{if } b_{k'-k+r+1} \text{ exists and } (\mathbf{b}^{in}, \mathbf{b}_1) \text{ is strictly decreasing} \\ \binom{\mathbf{b}^{in}}{k'} + \binom{\mathbf{c}_1}{k'''} & \text{if } b_{k'-k+r+1} \text{ exists and } (\mathbf{b}^{in}, \mathbf{b}_1) \text{ is not strictly decreasing} \\ \binom{\mathbf{b}^{in}}{k'} & \text{otherwise} \end{cases}$$

and

$$\binom{\mathbf{c}''}{k''} = \begin{cases} \binom{\mathbf{c}^{in}}{k''} + \binom{\mathbf{c}_1}{k'''} & \text{if } b_{k'-k+r+1} \text{ exists and } (\mathbf{b}^{in}, \mathbf{b}_1) \text{ is strictly decreasing} \\ \binom{\mathbf{c}^{in}}{k''} + \binom{\mathbf{b}_1}{k'''} & \text{if } b_{k'-k+r+1} \text{ exists and } (\mathbf{b}^{in}, \mathbf{b}_1) \text{ is not strictly decreasing} \\ \binom{\mathbf{c}^{in}}{k''} + \binom{\mathbf{b}_1}{k'''} & \text{otherwise} \end{cases}$$

以及 $S = S_1$、$R = R_1$、$C = C_1$。针对 k'、$k'' \geq k$ 情况的论证如下 .

对于 $k' = k, k'' = k-1$ 的情形：如果 $b^{in}_0 = b''_0$ 不存在，则对应于 $m < k$ 的情形（根据条件 $\mathbf{b} \geq_{\text{lex}} \mathbf{a} - 1$），这些情形已在基本情形中处理。现在，由于 $a'_r = a_r - 1 \geq k - r$（否则$m < k$），我们有：如果 $\mathbf{b} \geq_{\text{lex}} \mathbf{a} - 1$，那么 $\mathbf{b}^{in} >_{\text{lex}} \mathbf{a}' - 1$，因为 $b^{in}_r = b_r$ 如果 b_r 存在，或者存在一个更小的指标 $0 \leq r' < r$ 满足 $b_r = b^{in}_{r'} > a_{r'} = a'_{r'}$，因此 $\mathbf{b}^{in} >_{\text{lex}} \mathbf{a}' - 1$ 也成立，这意味着 $\mathbf{b}'' >_{\text{lex}} \mathbf{a}' - 1$。

否则：$\mathbf{b}_1$ 和 $\mathbf{c}_1$ 是空序列。显然有 $W' < \binom{\mathbf{b}^{in}}{k'} + \binom{\mathbf{e}^{in}}{k''}$（因为 $W \lessdot \binom{\mathbf{b}^{in}}{k'} + \binom{\mathbf{b}^+}{k'''} + \binom{\mathbf{c}^{in}}{k''} + \binom{\mathbf{c}^-}{k'''}$）。我们还有 $\binom{\mathbf{b}^{in}}{k'} \preceq W'$和 $\binom{\mathbf{e}^{in}}{k'} \preceq W'$。利用（51），此情形也涵盖（50）不成立的情况。我们对 $[W', (\mathbf{c}^{in}_{k'}), \emptyset]$ 应用推论16，返回结果为 $([\emptyset, \binom{\mathbf{c}_2}{k'}, \emptyset], S_2, R_2, D_2)$ 或 $[W'', \emptyset, \emptyset]$；若是第一种情况，我们就停止；若是第二种情况，我们再次对 $[W'', \binom{\mathbf{b}^{in}}{k'}, \emptyset]$ 应用推论16，并将得到 $([\emptyset, \binom{\mathbf{b}_3}{k'}, \emptyset], S_3, R_3, D_3)$（由于 $W' < \binom{\mathbf{b}^{in}}{k'} + \binom{\mathbf{c}^{in}}{k''}$，且墙的约化留下一个非零项，即碎石，而 $\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{c}$ 的约化留下一个非零项，即铺砌）。第一种情况下，我们令 $\mathbf{b}'' = \mathbf{b}^{in}$，$\mathbf{c}'' = \mathbf{c}_3$，$C = C_1 + C_2$，$R = R_1 + R_2$，$S = S_1 + S_2$；第二种情况下，我们令 $\mathbf{b}'' = \mathbf{b}_3$，$\mathbf{c}'' = \emptyset$，$C = C_1 + C_2 + C_3$，$R = R_1 + R_2 + R_3$，$S = S_1 + S_2 + S_3$。

继续论证。在两种情况下（W' 为空，或 $\mathbf{b}_1$ 和 $\mathbf{a}_1$ 为空），我们都可以写出不变恒等式

$$\binom{\mathbf{b}}{k'} + \binom{\mathbf{c}}{k''} \doteq \binom{\mathbf{b}''}{k'} + \binom{\mathbf{c}''}{k''} + S + C, \tag{53}$$

$$\binom{\mathbf{a}}{k} \doteq \binom{\mathbf{a}'}{k} + \binom{a_r - 1}{k - r - 1} \doteq \binom{\mathbf{a}'}{k} + S + R. \tag{54}$$

由 $C = 0$，可得

$$\binom{\mathbf{a}'}{k} + R = \binom{\mathbf{b}''}{k'} + \binom{\mathbf{c}''}{k''},$$

现在，令 $\binom{\mathbf{b}'''}{k'}\ \binom{\mathbf{c}'''}{k''}$ 为两个二项式分解，使得

$$\binom{\mathbf{a}'}{k} = \binom{\mathbf{b}'''}{k'} + \binom{\mathbf{c}'''}{k''},$$

并且其中 $\mathbf{b}'''$ 和 $\mathbf{c}'''$ 是通过先减小$\mathbf{c}'''$，然后减小$\mathbf{b}'''$（如果$\mathbf{c}'''$ 变为空序列）而得到的。特别是，$\mathbf{b}''' \leq_{\text{lex}} \mathbf{b}''$ 和 $\mathbf{c}''' \leq_{\text{lex}} \mathbf{c}''$，这意味着

$$\binom{\mathbf{b}'''}{k' - 1} + \binom{\mathbf{c}'''}{k'' - 1} \leq \binom{\mathbf{b}'''}{k' - 1} + \binom{\mathbf{c}'''}{k'' - 1}. \tag{55}$$

总体而言，我们有 $R \neq \emptyset$ 或 $S \neq \emptyset$，这尤其意味着 $\binom{\mathbf{b}'''}{k'}\ \binom{\mathbf{c}'''}{k''} < \binom{\mathbf{b}}{k'} + \binom{\mathbf{c}}{k''}$。此外，在 $k' = k$ 且 $k'' = k - 1$ 的情况下，我们还有 $\mathbf{b}'' \geq_{\text{lex}} \mathbf{a}' - 1$，因此 $\mathbf{b}''' \geq_{\text{lex}} \mathbf{a}' - 1$。因此，通过归纳法，

$$\binom{\mathbf{a}'}{k - 1} \leq \binom{\mathbf{b}'''}{k' - 1} + \binom{\mathbf{c}'''}{k'' - 1}. \tag{56}$$

另一方面，根据平移不变性、(53) 和 (54)，我们得出

$$\binom{\mathbf{b}}{k' - 1} + \binom{\mathbf{c}}{k'' - 1} \doteq \binom{\mathbf{b}''}{k' - 1} + \binom{\mathbf{c}''}{k'' - 1} + S' + C', \tag{57}$$

$$\binom{\mathbf{a}}{k - 1} \doteq \binom{\mathbf{a}'}{k - 1} + S' + R', \tag{58}$$

其中，S'、C' 和 R' 分别通过将 S、C 和 R 中的二项式系数的所有低阶项减去一个单位而得到。由于铺砌 C 还具有以下额外性质：项$\binom{i-1}{i}$ 满足 $i \geq 1$，因此$C' \geq 0$；又由于 R 中各项的所有二项式分母均为 0，因此 $R' = 0$。由此可得

$$\begin{aligned}
\binom{\mathbf{a}}{k - 1} &\doteq \binom{\mathbf{a}'}{k - 1} + S' + R' && (58)\\
&= \binom{\mathbf{a}'}{k - 1} + S' && \text{as } R' = 0\\
&\leq \binom{\mathbf{b}'''}{k' - 1} + \binom{\mathbf{c}'''}{k'' - 1} + S' && \text{by } (56)\\
&\leq \binom{\mathbf{b}'''}{k' - 1} + \binom{\mathbf{c}'''}{k'' - 1} + S' + C' && C' \geq 0\\
&\leq \binom{\mathbf{b}''}{k' - 1} + \binom{\mathbf{c}''}{k'' - 1} + S' + C' && (55)\\
&\doteq \binom{\mathbf{b}}{k' - 1} + \binom{\mathbf{c}}{k'' - 1}, && (57)
\end{aligned} \tag{59}$$

完成了这一一般情形的证明。

观察 17。如果 C 在此归纳法步骤中不是空集，那么 (59) 中存在严格不等式，因此 (26) 中也是如此。

引理 10 的不等式 (27) 的证明与上述针对 (26) 的证明采用类似的论证。下面强调其中的差异。除非各项属于 C 中的 $\binom{0}{1}$ 型并转化为 C' 中的 $\binom{-1}{0}=1$ 型，否则 C' 不会对该不等式作出贡献；特别地，观察 17 仅在这种情况下成立。 R' 的处理方式与前一种情况相同。基本情形也类似：对于 $k=1$，由于关键只在于得到二项式分母为 0 的各项，因此同样的论证仍然适用。对于 $k>1$ 和 $m<k$ 的情形，由于两边的项数相同，且它们仍属于 $\binom{i}{i}$ 型，(27) 成立；这一论证也可以推广到 $m=k$。

4.9 推论 11 的证明，或引理 2 的 (5)

我们先证明 (30) 和 (31)。

Now:

1. 对 给定的 (a, b, c) 应用断言 1，得到 (a, b″, c″)，其中 b″ 和 c″ 是二项式分解 s.
2. 如有需要，将 c″ 化为 c‴，从而得到等式 $\binom{\mathbf{a}}{k}=\binom{\mathbf{b}''}{k}+\binom{\mathbf{c}'''}{k-1}$。如果 c‴ 变为零，那么 b″ =a，结论便得证。

3. 将引理 10 应用于 (a,b″,c‴)

4. 对结果应用观察 12，得到新的 $k-1$、 $k-1$ 和 $k-2$ 二项式分解 (a′, b‴, c⁗)。

5. 从步骤 2 开始重复此过程，直到第一个二项式分解由一个（组成 $_0$项；此时，论证结束，不等式 (30) 和 (31) 得证。

现在我们继续讨论“此外”部分。假设指出，对于四元组 (a, b, c k) 和 (a, b, c $k-1$)，等式成立。也就是说，

$$\binom{\mathbf{a}}{k}=\binom{\mathbf{b}}{k}+\binom{\mathbf{c}}{k-1},\binom{\mathbf{a}}{k-1}=\binom{\mathbf{b}}{k-1}+\binom{\mathbf{c}}{k-2}$$

于是我们得到

$$\binom{\mathbf{a}+1}{k}=\binom{\mathbf{b}+1}{k}+\binom{\mathbf{c}+1}{k-1},$$

并且 a $+1$、b $+1$、c$+1$均为二项式分解。然后，由 (31) 应用于 (a $+1$, b $+1$, c$+1$, k) 且 $i=2$，以及 (31) 应用于 (a, b, c $k-1$)，可得它们也都是此类“k”的二项式分解，从而得到：

$$\binom{\mathbf{a}-1}{k-2}\leq\binom{\mathbf{b}-1}{k-2}+\binom{\mathbf{c}}{k-3},\binom{\mathbf{a}-1}{k-1}\leq\binom{\mathbf{b}-1}{k-1}+\binom{\mathbf{c}}{k-2}$$

结合前面的等式

$$\binom{\mathbf{a}}{k-1}=\binom{\mathbf{b}}{k-1}+\binom{\mathbf{c}}{k-2}$$

我们得出结论，实际上，

$$\binom{\mathbf{a}-1}{k-2}=\binom{\mathbf{b}-1}{k-2}+\binom{\mathbf{c}}{k-3},\binom{\mathbf{a}-1}{k-1}=\binom{\mathbf{b}-1}{k-1}+\binom{\mathbf{c}}{k-2}$$

因此，对于 (a -1, b -1, c $-1, k-1$)和 (a -1, b -1, c $-1, k-2$)，我们有等式。然后，类似的论证将表明，对于所有 $i \geq 0$，(a $-i$, b $-i$, c $-i, k-i$) 和 (a $-i$, b $-i$, c $-i, k-i-1$) 也都有等式（第一对等式就是假设中的等式）。

特别地，对于 $k-i=1$，等式成立，因此 (a $-(k-1)$, b $-(k-1)$, c $-(k-1)$, 1) 和 (a $-(k-1)$, b $-(k-1)$, c $-(k-1)$, 0)。现在，这意味着我们还具有所有等式：

$$(\mathbf{a}-(k-1)+j, \mathbf{b}-(k-1)+j, \mathbf{c}-(k-1)+j, 1) \text{ and for all } j \geq 0.$$

现在，我们使用 (a $-(k-1)+1$, b $-(k-1)+1$, c $-(k-1)+1$, 1)以及带有$i=k-2$的 (a $-i$, b $-i$, c $-i, k-i$) 的等式，得到 (a $-(k-2)+1$, b $-(k-2)+1$, c $-(k-2)+1$, 2) 的一个等式；然后我们使用 (a $-(k-2)+1$, b $-(k-2)+1$, c $-(k-2)+1$, 2) 和带有 $j=2$ 的 (a $-(k-1)+j$, b $-(k-1)+j$, c $-(k-1)+j$, 1) 的等式，得到 (a $-(k-2)+2$, b $-(k-2)+2$, c $-(k-2)+2$, 2) 的一个等式。我们对 $j=3, 4, \ldots$ 重复这一过程，从而得到 (32) 中所述的所有等式。

现在我们用归纳论证证明 (34)。可以验证，该结果对 $m<k$ 以及所有 $k>1$ 都成立。假设该结果对某些 $k'<k$ 和 $m'<m$成立。首先，我们使用与断言 1 相同的论证得出：若要取等号

$$\binom{\mathbf{a}}{k-1} = \binom{\mathbf{b}}{k-1} + \binom{\mathbf{c}}{k-2} \tag{60}$$

那么可以假设 c 是一个 $k-1$ 二项式分解，而 b 是一个 k-二项式分解，且 b $\geq_{\text{lex}}$ a -1。假设 b 是一个 k-二项式分解，这一条件仅排除了以下情形：在$\binom{\mathbf{a}}{k-1} = \binom{\mathbf{b}}{k-1} + \binom{\mathbf{c}}{k-2}$的前提下，b $=$ a $-1=$ c；这是一个有效的分解，并且由 $i=t+1$ 时的 (34) 涵盖。因此，我们可以假设 a、b、c 都是二项式分解，并按照引理 10 的证明中的分解方式继续。于是，设 r 为满足 $a_r-(k-r)=a_0-k>0$的最大索引（根据假设 $m \geq k$，>0 成立）。令 a′ $=(a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}, a_r-1, a_{r+1}, \ldots, a_t)$，它仍具有$t<k-1$，并且是一个 k-二项式分解，如 $m \geq k$所示。然后我们得到如下分解（利用推论16以及引理 10 证明最后几步中的论证，将墙移至空集）：

$$\begin{aligned}
\binom{\mathbf{a}}{k} &\doteq \binom{\mathbf{a}'}{k} + \binom{a_r-1}{k-r-1} \doteq \binom{\mathbf{a}'}{k} + S + R \\
\binom{\mathbf{b}}{k} + \binom{\mathbf{c}}{k} &\doteq \binom{\mathbf{b}'}{k} + \binom{\mathbf{c}'}{k-1} + S + C \\
\binom{\mathbf{a}'}{k} + S + R &= \binom{\mathbf{b}'}{k} + \binom{\mathbf{c}'}{k-1} + S + C
\end{aligned} \tag{61}$$

其中 S 不等于空集。由于 b 和 c 是二项式分解，因此我们使用观察 17 得出结论：C 是空集（否则我们将得出假设 (60) 不成立）。因此，(61) 可写为

$$\binom{\mathbf{a}'}{k} + S + R = \binom{\mathbf{b}'}{k} + \binom{\mathbf{c}'}{k} + S \tag{62}$$

现在我们知道：

$$\binom{\mathbf{a}'}{k-1} + S' + R' = \binom{\mathbf{b}'-}{k} + \binom{\mathbf{c}'-1}{k-2} + S' \tag{63}$$

因为 $\binom{\mathbf{a}}{k-1} = \binom{\mathbf{b}}{k-1} + \binom{\mathbf{c}}{k-2}$，所以

$$\binom{\mathbf{a}'}{k-1} = \binom{\mathbf{b}'}{k} + \binom{\mathbf{c}'-1}{k-2} \tag{64}$$

由于 R 只是一组形如 $\binom{x}{0}$ 的二项式系数，其中 $x \geq 0$ 是一个整数，因此 $R' = \sum \binom{x}{-1} = 0$。然而，令 a″，使得 $\binom{\mathbf{a}''}{k} \doteq \binom{\mathbf{a}'}{k} + R$；如果 R 不是空集，那么 $\binom{\mathbf{a}'}{k} + R > \binom{\mathbf{a}'}{k}$，

并且由于 a' 有 $t+1<k$ 个系数，因此 $\binom{\mathbf{a}\ \ ''}{k-1} > \binom{\mathbf{a}_{k-1}\ \ '}{}$，因为 $\binom{\mathbf{a}'''}{k} \overset{b}{=} \binom{\mathbf{a}'}{k}+1$ 满足 $a'''_{t+1} = k-(t+1) \geq 1$，这意味着 $\binom{\mathbf{a}'''}{k-1} > \binom{\mathbf{a}_{k-1}\ \ '}{}$；又由于 $\mathsf{a}'' \geq_{\text{lex}} \mathsf{a}'''$，因此 $\binom{\mathbf{a}\ \ ''}{k-1} \geq \binom{\mathbf{a}'''}{k-1} > \binom{\mathbf{a}_{k-1}\ \ '}{}$，如所述。

因此，我们有 R 是空集，从而

$$\binom{\mathbf{a}'}{k} + S = \binom{\mathbf{b}'}{k} + \binom{\mathbf{c}'}{k-1} + S, \qquad \binom{\mathbf{a}'}{k-1} + S' = \binom{\mathbf{b}'}{k-1} + \binom{\mathbf{c}'}{k-1-1} + S' \tag{65}$$

于是

$$\binom{\mathbf{a}'}{k} = \binom{\mathbf{b}'}{k} + \binom{\mathbf{c}'}{k-1}, \qquad \binom{\mathbf{a}'}{k-1} = \binom{\mathbf{b}'}{k-1} + \binom{\mathbf{c}'}{k-1-1} \tag{66}$$

根据归纳假设，且由于 a' 有 t 个系数，因此 (34) 也成立。事实上，注意到

$$\begin{aligned}
\binom{\mathbf{a}'}{k} &\doteq \binom{\mathbf{b}'}{k} + \binom{\mathbf{c}'}{k-1} && \text{by induction hypothesis} \\
\binom{\mathbf{a}}{k} &\doteq \binom{\mathbf{a}'}{k} + S, S = \binom{a_r - 1}{k-r-1}, && \text{by construction of } S \text{ and argument on } R = \emptyset \\
\binom{\mathbf{b}}{k} + \binom{\mathbf{c}}{k-1} &\doteq \binom{\mathbf{b}'}{k} + \binom{\mathbf{c}'}{k-1} + S && \text{by construction of } S \text{ and argument on } D = \emptyset
\end{aligned}$$

因此（平移不变性具有传递性）

$$\binom{\mathbf{a}}{k} \doteq \binom{\mathbf{b}}{k} + \binom{\mathbf{c}}{k-1} \tag{67}$$

这意味着 (33) 成立。利用归纳假设处理 $(\mathsf{a}', \mathsf{b}', \mathsf{c}')$，再注意到 S 应当通过对 $\binom{\mathbf{b}}{k} + \binom{\mathbf{c}\ \ }{k-1}$ 使用命题 14 中所述的运算得到，即可推出 (34)。（事实上，取决于 a、b' 和 c'，b 和 c 的选择非常有限。例如，如果项 $\binom{a_r-1}{k-r}$ 在 b' 和 c' 之间拆分为 $\binom{a_r-2}{k-r} + \binom{a_r-2}{k-r-1}$ 和 $a_{r+1} \leq a_r - 3$，那么 b 和 c 也会将该项拆分为两个 $\binom{a_r-1}{k-r} + \binom{a_r-1}{k-r-1}$。）我们可以进行一些简单的分类讨论，同时利用这样一个事实：项 $\binom{a_r-1}{k-r-1}$ 应在 b' 和 c' 之间留存，且不产生任何碎石。证明完成。

5 colex序的唯一性

本节证明关于 colex序唯一性的定理4。我们从定理的 (i)部分开始。如果 $\ell(\mathsf{a}) < k$，则称序列在层级 k 上是非完全的。

引理18。设 S 是$\binom{[n]}{k}$ 和 $\binom{\mathbf{a}}{k} \overset{b}{=} |S|$的极值族。如果$\mathsf{a}$在 k层是非完全的，那么 S 就是colex序中长度为 $m = |S|$ 的初始段。

证明。证明通过对 $m = |S|$ 和 k进行归纳法。我们回顾一下，不失一般性地，假设 $[n]$ 是 S 的支撑。由于 S 是一个极值集，支撑为 $\Delta^{k-1}(S)$，其基数为 a_0，如果 $\ell(\mathsf{a}) = 1$；或者为 $a_0 + 1$，如果 $\ell(\mathsf{a}) > 1$。

选择一个具有 $i \in [n]$ 最小度的元素，并令 $\binom{\mathbf{b}}{k} \overset{b}{=} |S \setminus S(i)|$ 以及 $\binom{\mathbf{c}\ \ }{k-1} \overset{b}{=} |S(i)|$。对于 $m \leq k$，由于所有 k–集合的 $[k+1]$ 族都同构于colex序的初始段，因此结论显然成立。假设 $m > k$。那么 $a_0 > k$，根据定理 3，b非空，并且根据引理 6，$\mathsf{b} \geq_{\text{lex}} \mathsf{a} - 1$。

如果 $\mathsf{b} =_{\text{lex}} \mathsf{a} - 1$ 那么定理3 表明，$S(i) \setminus i$ 是极值的，并且 $\Delta(S \setminus S(i)) \subset S(i) \setminus i$。由于 $\mathsf{b} =_{\text{lex}} \mathsf{a} - 1$，我们也有 $\mathsf{c} =_{\text{lex}} \mathsf{a} - 1$，即 $|S(i)| = \binom{\mathbf{a}-1}{k-1}$。根据定理1，我们有 $\Delta(S \setminus S(i)) \geq \binom{\mathbf{a}-1}{k-1}$，而包含关系 $\Delta(S \setminus S(i)) \subset S(i) \setminus i$ 意味着等号成立。因此，$S \setminus S(i)$ 也是一个极值集。通过归纳法，由于$\binom{\mathbf{b}}{k} = \binom{\mathbf{a}-1}{k}$ 是非完全的，$S \setminus S(i)$ 是 colex序中的初始段。

因此， $\Delta(S \setminus S(i)) = S(i) \setminus i$ 也是 colex序中的初始段。通过选择 $i = 1$， $S(i)$ 也是 colex序中的初始段。由此可知， $S = (S \setminus S(i)) \cup S(i)$ 也是 colex序中的初始段。此情形至此完成。

假设 $\mathbf{b} >_{\text{lex}} \mathbf{a} - 1$。那么定理 3 表明， $S(i) \setminus i$ 和 $S \setminus S(i)$ 都是极值的，并且$S(i) \setminus i \subset \Delta(S \setminus S(i))$。根据 (34)，$\binom{\mathbf{b}}{k}$ 和 $\binom{\mathbf{c}}{k-1}$ 都是不完整的。由归纳法可知，这两个集合都是 colex序中的初始段。接下来只需证明，可以对支撑中的元素进行一种公共排序，使得它们的并集也是 colex序中的一个初始段。

我们注意到，在带有支撑 $[n]$的 colex序初始段中， I ，于是有 $d_I(1) \geq d_I(2) \ldots \geq d_I(n)$。反之，如果 $d_I(i_1) \geq d_I(i_2) \geq \cdots \geq d_I(i_n)$，那么 I 与colex序中的初始段同构（该同构由支撑的排序 $i_1 < i_2 < \cdots < i_n$ 给出）。换言之，两个具有相同度数的元素可以互换，同时保持 I 是 colex序中的初始段这一性质。因此，下面的断言完成了定理的证明。

给定 i 属于 S的支撑 $[n]$，我们使用记号 $A_i = S(i) \setminus i$、 $B_i = \Delta(S \setminus S(i))$ 和 $C_i = [n] \setminus \{i\}$。

断言 3. 假设 $\mathbf{b} >_{lex} \mathbf{a} - 1$。存在 C_i 元素的一种排序 $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1}$，使得$d_{A_i}(x_1) \leq \cdots \leq d_{A_i}(x_{n-1})$ 且 $d_{B_i}(x_1) \leq \cdots \leq d_{B_i}(x_{n-1})$。

证明。正如刚才所讨论的（利用 (34) 和归纳假设），若 $\mathbf{b} >_{\text{lex}} \mathbf{a} - 1$，则 A_i和 B_i都是 $[n] \setminus \{i\}$在 colex 序中的初始段。我们考虑 (34) 中的三种可能情况：

情况 1 $\binom{a_0}{k-1}$ $\Delta\ S \setminus S\ i$ 34 $i = 0$ i 34 $\binom{[a_0]}{k}$ $|S \setminus S\ i| = \binom{a_0}{k}$ $|\Delta\ S \setminus S\ i| =$。拆分如 ( ) 第一式及 ( ) 中的 ( ) 所示。则 ( )、(( )) 和 (( )) 是与 同构的初始段，其中所有元素的度数都相同。因此，其支撑中元素的任何排序都适合作为 colex序中的初始段，尤其是使 $S(i) \setminus i$ 成为 colex序中的初始段的那种排序。

情形 2。拆分如（34）中的第二个等式所示。由于 $\mathbf{b} >_{\text{lex}} \mathbf{a} - 1$，所以 $i < t + 1$ （i 在（34）中）。在此情形下， $|\Delta（S \setminus S（i））| = \sum_{i=0}^{j} \binom{a_i - 1}{k-i-1} + \sum_{i=j+1}^{t} \binom{a_i}{k-i-1}$，并且 $|S（i）\setminus i| = \sum_{i=0}^{j} \binom{a_i-1}{k-i-1}$ 对于 $j < t + 1$。由于二者都是初始段，所以在这两个集合中都有一个度数最大的元素 $\binom{a_0-1}{k-2}$。由于$S（i）\setminus i \subset \Delta S \setminus S（i）$，这应当是同一个元素。下一个最大的度数对于 $（a_0 - 1）-（a_1 - 1 + 1）+ 1$ 个度数为

$$\binom{a_0 - 2}{k - 1} + \binom{a_1 - 1}{k - 1 - 1} + \cdots + \binom{a_j - 1}{k - j - 1} + \binom{a_{j+1}}{k - (j + 1) - 1} + \cdots + \binom{a_t}{k - t - 1}.$$

再次，条件 $S(i) \setminus i \subset \Delta(S \setminus S(i))$意味着两组$(a_0 - 1) - (a_1 - 1 + 1) + 1$ 元素相同。我们以类似的方式继续处理，直到第$(j - 1)$–大的度数。对于支撑中的其余点，它们在 A_i 中具有相同的度数，并且在 B_i 中至少具有这一度数，因此在 B_i 中对这些元素进行的任意排列都适用于 A_i中的元素。

情形 3。如果拆分如式 (34) 的第一个等式所示，且包含 $i > 0$。与情形 2 类似，但交换 A_i 和 B_i 的角色即可。

□

至此，命题得证。 □

下面的例子表明，如果 $\ell(\mathbf{a}) = k$和 $m \neq \binom{n'}{k} - 1$，那么存在不同于 colex序初始段的极值族。令

$$m = |S| \stackrel{b}{=} \binom{a_0}{k} + \binom{a_1}{k - 1} + \cdots + \binom{a_{k-1}}{1}, a_{k-1} \geq 1.$$

colex序中长度为 m 的初始段是

$$I_{n,k}(m) = \binom{[a_0]}{k} \cup \left(\{a_0+1\} \vee \binom{[a_1]}{k-1} \right) \cup \cdots \cup \left(\{a_0+1, a_1+1, \cdots, a_{k-2}+1\} \vee \binom{a_{k-1}}{1} \right).$$

令 r 为满足 $a_r - (k-r) = a_{k-1} - 1$ 的最小指标，也就是说，二项式系数 $\binom{a_r}{k-r}$ 与 $\binom{a_{k-1}}{1}$ 位于同一对角线上。假设 $r > 0$ （否则 $m = \binom{n'}{k} - 1$）。取集合 $X = \{a_0+1, a_1+1, \ldots, a_{k-2}+1, a_{k-1}\} \in I_{n,\ k}(m)$，并将 $a_r + 1$ 替换为 $a_{k-1} + 1$。令 X' 为所得集合。那么

$$S = (I_{n,k}(m) \setminus \{X\}) \cup \{X'\},$$

其基数为 m，它具有与 $I_{n,k}(m)$相同的影，并且它不同构于 colex序的初始段。若 $r = 0$，则 $m = \binom{a_0+1}{k} - 1$，且 S 的支撑是 $[a_0]$。在这种情况下，根据定理 5 的最后一部分，极值集合的唯一例子都具有 $\binom{[a_0+1]}{k} \setminus \{x\}$ 的形式，其中 x 为某个值，并且所有这些集合都同构于 colex序的初始段。这就完成了定理 4 的证明。

6 最后说明

本文着重探讨了克鲁斯卡尔–卡托纳定理的算术性质。引理 2 中的关键不等式本身就很有研究价值。尽管二项式分解主要与克鲁斯卡尔–卡托纳定理相关，但它们也与单纯复形和组合几何的研究（这是克鲁斯卡尔论文最初的研究动机）以及 n–立方体中的等周问题有关；在这些问题中，极值集合的刻画至今仍未解决（例如参见 Bezrukov [1, 节 4]）。我们认为，算术不等式 (3) 在影优化问题中的作用十分重要，也许它为证明克鲁斯卡尔–卡托纳定理提供了最自然的方法。尤其是，它能轻松导出定理 3 中给出的极值族刻画。我们注意到，关于 $k', k'' \geq k$ 的引理 10 中的关键不等式可以由克鲁斯卡尔–卡托纳定理推出，但我们尚未找到由该定理推出 $k' = k, k'' = k-1$ 这一重要情形的方法。

在大多数相关应用中，Lov´asz 形式的克鲁斯卡尔–卡托纳定理通常就足够了。Lov´asz 的表述指出，如果 x 是由$m = \binom{x}{k}$定义的实数，那么每个集合族 S 由k–集合构成且基数为 $m = |S|$，其下影的基数为

$$|\Delta(S)| \geq \binom{x}{k-1},$$

对于上述不等式，唯一等号成立的情形是族 $\binom{[n]}{k}$。研究此情形下引理 10 的类似版本或许会很有意思，我们猜想该版本成立。

猜想 19. 设 x、y、$z \in \mathbb{R}$ 满足 $\binom{x}{k} = \binom{y}{k} + \binom{z}{k-1}$，且 $y \geq x - 1$。那么，

$$\binom{x}{k-1} \leq \binom{y}{k-1} + \binom{z}{k-2}.$$

将第一等式右侧的 k 和 $k-1$ 分别替换为 k'、$k'' \geq k$ 的类似表述确实成立，且很容易验证。

关于极值族结构性质的进一步见解，可以通过我们在另一篇论文中提出的一种补充方法获得（扩展摘要见 [14]，另见 [13]）。对于极值族 S（实际上，对于任意由 k 元集合构成的集合族），$\Delta^{k-1}(S)$ 显然是 colex 序的一个初始段。衡量极值集合与 colex 序初始段之间距离的一种可能方法，是求最小的 r，使得 $\Delta^r(S)$ 成为 colex 序的初始段（$r = 0$ 如果 S 本身就是一个初始段，

而满足 $r = 1$ 的极值族可以看作初始段的小幅扰动）。我们在 [14] 中证明，实际上有 $r = O(loglog(n))$，这说明从这个意义上说，极值集合与初始段相距不远。此外， r 的较大取值会使 $m = |S|$ 的二项式分解中系数序列迅速下降（呈双指数级），因此这类极值集合相当罕见。我们还给出了一种关于 n 的显式多项式时间算法，用于构造在上述意义下与 colex 序初始段相距给定距离的极值族。该算法给出了极值集合的实例；与第 5 节末尾给出的简单实例相比，这些集合在结构上与初始段相距更远。

当前论文最初的动机是 Johnson 图中的等周问题（例如参见[2, 9, 13]）。Johnson 图 $J(n, k)$ 的顶点集为 $\binom{[n]}{k}$，而集合 S 的邻居集合是 $\Delta(\nabla(S))$。该问题要求，对于给定的 S 的每个基数，最小化 $J(n, k)$ 中顶点集合 S 的边界。该问题的一族解尚不为人所知；不同于此类密切相关的问题，已知不存在一族嵌套的解。Kruskal–Katona 定理的极值族为 Johnson 图中的等周问题提供了极值集的渐近示例。事实证明，存在不同于 colex序中初始段的极值族，它们在此类渐近构造中优于初始段。因此，更好地理解 Kruskal–Katona 定理的极值族同样有助于解决这一等周问题。

参考文献

[1] S. L. Bezrukov。《离散空间中的等周问题》。载于《有限集的极值问题》，3：59–91，1994年。[2] B. Bollob´ás 和 I. Leader。《r-集合的等周问题》。《组合学、概率与计算》，13(2)：277–279，2004年。[3] P. Frankl。《克鲁斯卡尔–卡托纳定理的新简短证明》。《离散数学》，48(2-3)：327–329，1984年。[4] P. Frankl 和 N. Tokushige。《克鲁斯卡尔–卡托纳定理、它的一些类比及应用》。载于《有限集的极值问题》（Visegr´ad，1991），Bolyai 数学学会研究丛书第3卷，第229–250页。J´anos Bolyai 数学学会，布达佩斯，1994年。[5] Z. F¨uredi 和 J. R. Griggs。《具有最小影的有限集族》。《组合数学》，6(4)：355–363，1986年。[6] Z. F¨uredi 和 J. R. Griggs。《具有最小影的有限集族》。《组合数学》，6(4)：355–363，1986年12月。[7] G. Katona。《有限集的一个定理》。《图论》，匈牙利蒂豪尼专题讨论会论文集，1966年，187–207（1968年）。1968年。[8] G. Katona。《有限集的一个定理》。载于《组合学经典论文集》，第381–401页。Springer，2009年。[9]P. Keevash。《影与交：稳定性及新的证明》。《数学进展》，218(5)：1685–1703，2008年。[10] M. Krivelevich 和 B. Sudakov。《伪随机图》。载于《更多集合、图与数》，Bolyai 数学学会研究丛书第15卷，第199–262页。Springer，柏林，2006年。

[11] J. B. Kruskal。《复形中的单形数量》。《数学优化技术》，10：251–278，1963年。[12] M. M¨ors。《克鲁斯卡尔定理的一个推广》。《图与组合》，1(2)：167–183，1985年。[13] O. Serra 和 L. Vena。《克鲁斯卡尔–卡托纳定理的极值族》。《科门纽斯大学数学学报》，88(3)：1043–1048，2019年。[14] O. Serra 和 L. Vena。《关于 F¨uredi 和 Griggs 的一个问题》。《数学前沿》，14：752–757，2021年。