arXiv:2304.05185v1 [math.AT] 11 Apr 2023

Rips复形中的临界边与持久性

PETER GORI ˇCAN 和 ˇZIGA VIRK

摘要。我们考虑将同调应用于紧致度量空间（X,d）的开Rips过滤所得到的持久同调。我们证明，零维持久性的每次下降和一维持久性的每次上升，均由距离函数d的局部极小值所诱导。当d 仅在有限多个点对处取得局部极小值时，我们证明上述每次持久性变化都由Rips复形中的某条特定临界边所诱导，该边表示d的一个局部极小值。我们利用这一事实发展出一套关于持久性的临界边的理论（包括其解释）。所得结果包括一维持久性的秩的上界，以及相应的重构结果。一个可能具有计算价值的结果是：我们给出一个简单的几何判据，用于识别诱导持久性变化的d 的局部极小值。最后，我们证明，每个局部孤立的d 极小值都可以通过选择性Rips 复形的持久同调检测出来。本文结果首次阐释了一般紧致度量空间中持久同调（通过Rips复形获得）的临界尺度。

2023年4月12日

1. 引言

给定一个度量空间 X 和尺度 $r \geq 0$，有多种构造方法可以在尺度 $r \geq 0$下为 X 赋予一个单纯复形：Rips 复形、Čech 复形、α复形等。对所有 $r \geq 0$ 取上述任意一种复形，便得到一个过滤，即一个递增的单纯复形序列，用以表示X 在所有尺度下的情形。在过去一百年里，过滤被用于从无穷小（形状理论）和渐近（粗几何）的角度研究度量空间。世纪之交，过滤成为持久同调的基础概念之一：对 Rips过滤应用同调即可得到持久同调，它是度量空间的一个稳定描述符。这一视角在拓扑数据分析中发挥了重要作用。首个针对有限过滤的持久性算法 [11] 确立了其计算上的便利性。该算法采用的一个简化拓扑思想如下：向单纯复形添加一条边，要么使 H_0 减小，要么使 H_1增大。进一步展开这一思想可知，每次 H_0 减小或 H_1 增大，都可以归因于一条特定的边。这一事实至关重要，因为它使我们能够提取相应的同调代表元，从而识别空间中生成持久同调部分内容的几何特征。

在本文中，我们研究了将 Rips过滤应用于紧致度量空间所得到的持久同调的类似结果。在这一背景下，与持久性变化相对应的临界边是什么，以及它们是否存在，并不明显（事实上，一般而言它们并不存在）。除了其自身的理论意义之外，持久同调的稳定性结果还意味着，我们的结果描述了由.....所得到的持久同调的极限

研究工作得到了斯洛文尼亚研究署项目编号 N1-0114、J1-4001、J1-4031 和 P1-0292 的资助。关键词：持久同调；Rips 复形；临界单形；重构结果 MSC 2020：55N31

越来越精细的有限样本 X。因此，我们的结果诠释并为持久同调的实际计算提供额外结构。

本文的**主要结果** 是：

- 定理 3.4 和4.4：每个尺度 c，在 $H0$下降或 $H1$ 下降时，都属于距离函数d的局部极小值的闭包。
- 定理3.4和命题 4.7：当 d 取到局部极小值的配对的基数有限时，持久同调中提及的每一次变化都对应于 d 取到局部极小值的特定配对。

在此背景下，我们运用主要结果来发展持久同调临界边的理论。我们的 **次要结果** 包括：

- 定理4.13：紧致度量空间的第一同调与基本群的重构结果。
- 推论 4.12 和定理 4.18：持久同调在临界尺度处 $H1$ 和 $H0$ 的变化界，以及这些群的秩界。这些结果包括首批关于非有限空间的 Rips 复形在所有尺度下 $H1$ 秩有限性的结论。
- 定理 4.20：一个简单的组合判据，可用于确定在 d 取到孤立局部极小值时对应的唯一一对点，是否会导致持久同调发生变化。
- 定理 5.3：通过选择性 Rips 复形，利用持久同调检测 d 的每个严格局部极小值。

这些结果还辅以若干示例，说明我们的假设不可或缺。尽管本文的一些结果看起来可能是有限过滤情形下预期的类比，但上述示例表明，这种类比在技术细节上远非简单直接。若 X 不是紧空间，或使用闭 Rips 过滤而非开 Rips 过滤，我们几乎所有结果都不再成立。

虽然我们的主要关注点是持久同调，但我们的结果经过陈述和证明，同样适用于持久基本群。我们使用“持久性”一词来涵盖持久同调和持久基本群。图1通过一个简单示例展示了我们的结果。

相关工作。据我们所知，针对非有限紧空间中通过 Rips复形导致持久同调发生变化的特定单纯形进行识别，目前仅在 [20]中开展，并应用于 [21]。其中证明了，在紧测地空间中终止一维持久性的单纯形是等边三角形。在类似的研究中， [4]研究了欧氏空间中有限点集的 Cech 过滤的临界单纯形。尽管 [5], 隐式地研究了一维持久性的神经，但该方法并未利用特定单纯形，而是使用了 Spanier 群。

越来越多的研究开始探讨简单空间的 Rips 复形 [1, 2, 12,18, 19]，或利用底层空间的性质来解释持久图的部分内容[3, 17, 20, 21, 22, 23]。使用 Rips 复形的重构结果通常关注于重构底层空间的同伦类型 [15, 24]。据我们所知，定理4.13是首个旨在更一般假设下、仅针对某一维度重构持久同调的重构定理。

我们关于在某些假设下 Rips 复形的第一同调为有限生成的结果，补充了 [9], 中聚焦于Čech复形的结果。此外， [9] 给出了一个空间的例子，其闭Rips复形的第一同调

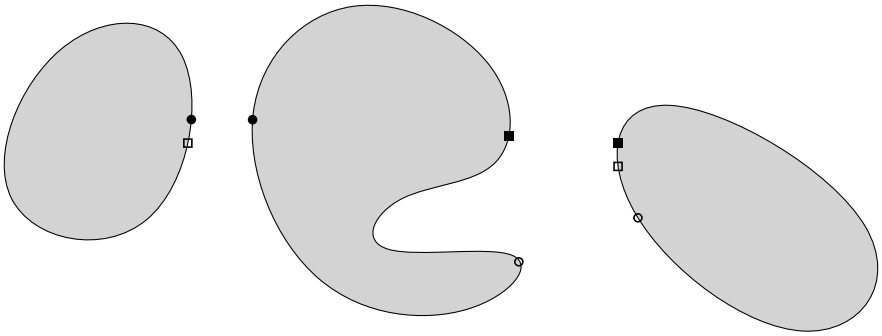

图 1. 由三个连通分支组成的空间 X 。根据定理 3.4 和 4.4，H_0 (Rips(X,r)) 的减少或 H_1(Rips(X,r)) 的增加，只能发生在与 d 的局部极小值相对应的尺度 r 处。距离函数 d 在外观相同的点对处取得四个非零局部极小值。我们将不同的局部极小值（即相应点之间的距离）记为 $min_{●}$、$min_{○}$$min_{■}$ 和 $min_{□}$。在 $min_{●}$ 和 $min_{■}$ 处，两个连通分支合并，因此根据定理 3.4 和 4.18，唯一的变化是 H_0 减少。在 $min_{○}$ 处，根据定理 4.4、定理 4.18 和定理 4.20，H_1 的秩增加 1。在 $min_{□}$ 处，根据定理 4.20，H_0 或 H_1 均无变化；不过，利用适当的选择性 Rips 复形，我们可以看到根据定理 5.4，H_1 的秩有所增加。

群具有无限秩。关于开Rips复形是否存在这样的例子，这个问题仍未解决。我们在例6.3中给出了这样的例子。

上一节中的选择性 Rips 复形最初在 [25] 中提出，原因与本文采用它们的原因相同：检测度量空间的更多几何特征。在 [25]中，所关注的特征是某些简单闭测地线；而在本文中，它们是d的局部极小值。

论文结构。第 2 节介绍预备知识。第 3 节对零维持久性进行完整描述。第 4 节内容最为丰富，深入分析一维持久性的涌现同调，并给出大部分次要结果。第 5 节介绍选择性 Rips 复形，以及如何利用它们比使用 Rips 复形检测更多局部极小值。第 6 节给出若干（反）例，展示我们的条件为何不可或缺，并说明我们作出某些选择的理由，例如要求X 是紧的，以及使用开 Rips 复形而非闭 Rips 复形。

2. 预备知识

设 $\mathrm{X}=(\mathrm{X},\mathrm{d})$ 为一个度量空间，其中 $\mathrm{d}:\mathrm{X}\times\mathrm{X}\to[0,\infty)$。对于每个 $\mathrm{r}>0$ 以及 $\mathrm{x}\in\mathrm{X}$，令 $\mathrm{B}(\mathrm{x},\mathrm{r})=\{\mathrm{y}\in\mathrm{X}\mid\mathrm{d}(\mathrm{x},\mathrm{y})<\mathrm{r}\}$ 表示开球，令 $\mathrm{B}(\mathrm{x},\mathrm{r})=\{\mathrm{y}\in\mathrm{X}\mid\mathrm{d}(\mathrm{x},\mathrm{y})\leq\mathrm{r}\}$ 表示闭球。令 LocMin(d) 表示距离函数 d 的所有局部极小值构成的集合。注意，当 $\mathrm{X}\neq\emptyset$ 时，$0\in\mathrm{LocMin}(\mathrm{d})$。如果尺度 c 是距离函数 d 的孤立局部极小值，则它是某个包含 c 的开区间上 d 的唯一局部极小值。

给定尺度 $r \geq 0$，开 **Rips 复形** Rips(X,r) 是一个抽象单纯复形，其定义规则如下：子集 $\sigma \subset X$ 是单形，当且仅当 Diam(σ) $< r$。特别地，Rips(X, 0) 是空集，并且对于每个 $r > 0$，Rips(X,r) 的顶点集为 X。

给定尺度 $r \geq 0$ 闭Rips复形 Rips(X,r) 是一个丽豕单纯复形，其定义规则如下：子集 $\sigma \subset X$ 是单形，当且仅当 Diam(σ) $\leq r$。

接下来我们将定义基于开 Rips复形的持久同调。也可以采用闭Rips复形或任何其他能够得到良定义过滤的构造（例如开、闭Čech复形，以及后文定义的选择性 Rips 复形等）。另一方面，我们也可以（并且将会）对基本群进行同样的构造。我们所说的“持久性”泛指应用于任何过滤的持久同调或持久基本群，不过我们将着重讨论 Rips过滤及其变体。

Rips过滤 of$X$ 是 Rips复形的集合 $\{\text{Rips}(X,r)\}_{r\geq 0}$ 以及自然包含映射 $i_{s,t}\colon \text{Rips}(X,s) \hookrightarrow \text{Rips}(X,t)$ for all $s \leq t$。我们将使用 i 来表示形如 $i_{s,t}$ 的映射，而不具体指定指标。

对过滤应用H_q 同调（系数为G），可得到**持久同调**，它由同调群 $\{H_q(\text{Rips}(X,r);G)\}_{r\geq 0}$ 及其诱导同态 $\{(i_{s,t})_*\}_{s\leq t}$组成。在文献中，持久同调有时也表示为映射 $(i_{s,t})_*$的秩的集合。本文中，持久同调（或持久基本群）指对过滤应用同调（或基本群）所得到的对象。系数阿贝尔群G 视为固定，并从记号中省略。

固定维数$q \in \{0,1,\ldots\}$，我们称尺度 $a \geq 0$是 H_q的正则值，如果存在 $\varepsilon > 0$，使得对于所有满足 $s \leq t$ 的$s, t \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap [0,\infty)$，映射 $(i_{s,t})_*$是一个同构（参见 [13] 和 [6] 中对这一概念的先前介绍）。如果尺度$a \geq 0$ 不是正则值，则称其为 H_q 的临界值。进一步区分临界值将会有所帮助。如果存在 $\varepsilon > 0$，使得对于所有满足 $s \leq t$ 的 $s, t \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap [0,\infty)$，映射$(i_{s,t})_*$是满射，则称尺度 $a \geq 0$ 是H_q 的新生正则值；如果不是新生正则值，则称其为新生临界值。类似地，如果存在 $\varepsilon > 0$，使得对于所有满足$s \leq t$ 的 $s,t \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap [0,\infty)$，映射$(i_{s,t})_*$ 是单射，则称尺度 $a \geq 0$ 是H_q的终端正则值；如果不是终端正则值，则称其为终端临界值。以类似的方式，我们定义持久基本群的正则值和临界值。

我们将把上述任一情形中的临界值集合称为**谱**。例如，涌现的H_1 谱是H_1的涌现临界值集合。注意，根据定义，每个谱都是 $[0,\infty)$ 的闭子集。

给定一个域 $\mathbb{F}$ 和一个区间$J \subset [0,\infty)$，区间模**区间模** $\mathbb{F}_J$ 是由$\mathbb{F}$-向量空间 $\{V_r\}_{r\in[0,\infty)}$ 构成的，带有

- $V_r = \mathbb{F}$ 对于 $r \in J$;
- $V_r = 0$ 对于 $r \notin J$,

以及相互可交换的线性黏合映射 $V_s \to V_t$，在可能的情况下（即对于 $s,t \in J$）为恒等映射，其他情况下为零。对于紧致度量空间 X 的 Rips 过滤，以域 $\mathbb{F}$为系数计算其持久同调时，该同调可分解为区间模的直和（除求和项的排列外，该分解唯一；详情请参见 [9], 中关于 q-温和条件的命题 5.1、[8], 中关于具有根式性质的讨论，以及 [8] 中的主要结果及其推论）。决定上述区间模集合的区间称为**条**。这些条构成一个多重集，称为持久同调的**条形码**。对于每一条，其端点构成一对来自 $(0,\infty) \cup \{\infty\}$的数，其中

左端点小于 ∞。这些数对构成一个称为**持久图**的多重集。

3. 零维持久性

本节将分析通过 Rips过滤得到的紧致度量空间 X 的持久零维同调的临界尺度。显然，H_0 唯一的涌现临界值是零，因为 $\mathrm{Rips}(X,0) = \emptyset$，而对于每个 $r > 0$，$\mathrm{Rips}(X,r)$ 的顶点集都是 X。因此，我们转而关注终端临界值。

引理 3.1. *[有限性性质]* 设 X 为紧致度量空间。那么对于每个 $r > 0$，$H_0(\mathrm{Rips}(X,r))$ 都是有限生成的。$H_0(\mathrm{Rips}(X,r))$ 的秩至多为覆盖 X 所需的半径为 $r/2$ 的开球数量。

证明。设 $r > 0$。$H_0((\mathrm{Rips}(X, r))$ 由形如 $[v_n]$ 的元素生成，其中 $v_n \in X$。由于 X 是紧的，我们可以用有限个半径为 r2 的开球覆盖它，即 $\bigcup_{j=1}^{k} B(v_j, r/2) = X$。对于每个 $x \in B(v_n, r/2)$，都有 $[x] = [v_n] \in H_0((\mathrm{Rips}(X, r))$，因此$[v_1]$,。 .. $[v_k]$ 构成一个有限生成集。□

设 $\rho > 0$。点 x、y ∈X 之间的有限 ρ-序列，是指 X 中点的序列 $x = x_1, x_2, \ldots, x_p = y$，满足 $d(x_j, x_{j+1}) \le \rho$。点 x、y ∈X 之间的有限严格 ρ-序列，是指 X 中点的序列 $x = x_1, x_2, \ldots, x_p = y$，满足 $d(x_j, x_{j+1}) < \rho$。

定义3.2。设X 为紧致度量空间，且$r > 0$。我们通过$x \sim_r y \Leftrightarrow [x] = [y] \in H_0(\mathrm{Rips}(X,r))$，在 X 上定义一个等价关系 $\sim_r$。等价地，若 x 与 y 之间存在有限严格r-序列，则$x \sim_r y$。

引理 3.3。 该等价类 $\sim_r$ 是 X 的开闭子集。

证明。 若$x \in X$ 且$y \in B(x, r2)$，则 $[x] = [y]$，因此等价类 $[x]$ 在X中是开集。根据引理 3.1，等价类只有有限多个，因此它们也是闭集。□

定理3.4。 *[终端临界尺度的几何]* 设 X 是一个紧致度量空间。那么：

(1) H_0 临界值唯一可能的聚点是0。*(2)* 每个持续 H_0 的终端临界值（即 $\{H_0(\mathrm{Rips}(X,r))\}_{r\ge 0}$）都是距离函数 d 的局部极小值。*(3)* 假设 $a_1 < a_2$ 是相邻的 H_0 终端临界值，且 $r \in (a_1, a_2]$，，或者 a_1 是最大的 H_0 临界值且 $r > a_1$。那么点 $x, y \in X$ 满足 $x \sim_r y$ iff当且仅当它们之间存在有限个 a_1-序列。

证明。 令$r_1 > 0$，并假设$A_1, A_2, \ldots A_n \subseteq X$是$\sim_{r_1}$的有限个等价类（由引理 3.1 可知）。显然，$H_0$中大于$r_1$, 的临界尺度至多有$n-1$个，并且每个临界尺度上至少有两个等价类合并。由于$r_1 > 0$ 可以任意选取，这就证明了（1）。定义

$$d(A_j, A_k) = \min\{d(x_j, x_k) | x_j \in A_j, x_k \in A_k\},\ j,k = 1,2,\ldots n.$$

令 $c_1 = \min_{j\ne k}\{d(Aj, A_k)\}$。根据引理3.3，我们可以假设$c_1 = d(A_1, A_2) = d(x_1, x_2)$，其中 $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2$。对于每个 $s > c_1$, $[A_1] = [A_2] \in H_0(\mathrm{Rips}(X,s))$。此外，对于每个 $r \le c_1$, $[A_j] \ne [A_k] \in H_0((\mathrm{Rips}(X, r))$，对于所有 $j \ne k$，因为根据c_1的定义，X 中距离小于r 的每一对点都包含在单个类A_j 中。因此c_1 是H_0 中大于 r_1的第一个临界值。我们断言 c_1 是距离函数 d 的局部极小值。

假设 d 在 $d(x_1,y_2)$ 处未取得局部极小值。那么存在 $x'_1 \in A_1$ and $x'_2 \in A_2$，使得 $d(x'_1, x'_2) < d(x_1, x_2)$（因为 A_1 and A_2 是开集。）这是矛盾的，因为 $d(x_1, x_2) = d(A_1, A_2)$。因此，$c_1$ 是在最近点对 (x_1,x_2) 处取得的 d 的局部极小值。由于 H_0 大于 r_1 的临界尺度只有有限多个，我们可以通过归纳法继续进行：令 $r_2 = c_1$，并对 r_2 而非 r_1，重复上述论证，依此类推。由此我们得到 (2)。

为了证明 (3)，我们可以假设 $a_1 = c_1$。根据上述论证可观察到，a_1 是 $\min_{j\neq k}\{d(A_j,A_k)\}$ 中的最小值，而 a_2——如果有限——是 $\min_{j\neq k}\{d(A_j,A_k)\}$ 中的第二小数。由于 $x \sim_r y$，它们之间存在一个有限的严格 r-序列。该序列中每一对相邻的点 (x'_j, x'_{j+1}) 都可以如下替换为一个有限的 c_1- 序列：

- 如果 x'_j 和 x'_{j+1} 来自同一个 A_k，那么它们可以通过有限的严格 $c1$-序列相连。
- 假设 $x'j \in Ak1$ 且 $x'j_{+1} \in Ak2$，其中 $k_1 \neq k2$。于是 $d(Ak1, Ak2) < r$，因此 $d(Ak1, Ak2) = c1$。不失一般性，结合证明开头的设定，我们可以假设 $k_1 = 1$ 且 $k_2 = 2$。于是可以将它们连接起来：– x′j 到 x1，通过一个有限的严格 c1-序列。– x1 到 x2，通过显然的有限 c1-序列 x1, x2。– $x'j_{+1}$ 到 x2，通过一个有限的严格 c1-序列。

因此，我们从 x 到 y 得到一个有限的 c_1-序列，因此 (3) 成立。 □

备注 3.5。 让我们总结一下所获得的一些结果：

(1) H_0 唯一的涌现临界值是零。(2) H_0 的每个终端临界值都是 d 的一个局部极小值，即 H_0 的谱包含于 LocMin(d)。(3) H_0 的终端临界值集合要么有限，要么构成一个趋近于零的序列。(4) 给定 H_0 的一个终端临界值 c，选取 $\varepsilon > 0$，使得没有其他临界值落在 $(c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon)$ 内。则对于每个非平凡的 $[\alpha] \in \ker i_{c-\varepsilon, c+\varepsilon} \subset H_0(\mathrm{Rips}(X, c - \varepsilon))$，0-链 α 在 $H_0(\mathrm{Rips}(X,c))$ 中是非平凡的。特别地，$[\alpha]$（例如，它可以表示即将在 c 处合并的两个连通分支之形式差）在超过 c 后变为平凡，但在 c 处尚未变为平凡。(5) 当持久同调使用来自一个域的系数计算时，陈述 (4) 意味着 H_0 的所有条在左端点 0 处开放，在右端点处闭合。

注记 3.6. 上述陈述 (1) 对于 X 空间的任意情形都适用于 H_0，，但对于更高维持久同调则不适用。如果 X 不是紧空间，陈述 (2) 则不成立：考虑函数图像 $1 + 1/x$ 和 $-1 - 1/x$ 的并集，其中 $x > 0$，它有一个临界值 2，但距离函数没有正局部极小值。陈述 (3) 可由引理 3.1 得出，对于全有界空间也成立，但显然并非一般情况下都成立。陈述 (4) 对任意空间 X 都成立。

如果我们使用紧致度量空间 X 上的闭 Rips 过滤，而非开过滤，那么陈述 (1)–(3) 保持不变，而 (4) 则变为：c 是链 $[\alpha]$ 变为平凡的最小尺度。陈述 (5) 变为：所有条都是左端点 0 闭合、右端点开放的区间。

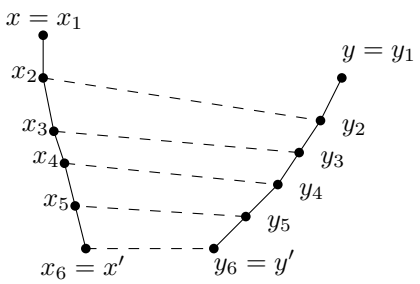

图2。 ν-下降示意图。相邻点之间的距离（实线）小于 ν。虚线所表示的距离小于$d(x,y)$。

4. 一维持久性

本节将分析通过 Rips 过滤得到的紧致度量空间 X 的持久 H_1 的涌现谱和持久基本群。我们首先证明，所提及的谱包含于局部极小值 d的闭包 LocMin(d) 中。

4.1. **谱的几何**。

定义 4.1。固定 $r > 0$。设 (X, d) 为一个紧度量空间，且 $x, y \in X$，满足 $d(x, y) < r$。选取 $\nu < r - d(x, y)$。如果存在有限的 ν-序列 $x = x_1, x_2, \ldots\ldots, x_p = x'$ 以及 $y = y_1, y_2, \ldots\ldots, y_p = y'$，使得对每个 j 都有 $d(x_j, y_j) < d(x, y)$，则称 (x, y) ν-下降（或简称下降）到 (x′, y′)，见图2。

下降的概念使我们能够用一组更短的边替换单纯形环路（或同调循环）中的一条边，而不改变同伦（同调）类型。下面的下降引理指出，我们总能进行下降，使所得边的长度至多为小于 d 的 r 的第一个局部极小值，前提是这样的局部极小值存在。为此，我们引入以下记号。

令 $\rho > 0$。一个有限的 ρ-循环是X 中点的有限 ρ-序列 $x = x_1, x_2, \ldots, x_p = x$（特别地，$d(x_j, x_{j+1}) \leq \rho$）。有限的 ρ-循环通常会被视为Rips(X,ρ) 中的一个循环，其定义为 $\sum_{j=1}^{p-1} \langle x_j, x_{j+1} \rangle$。一个有限的严格 ρ-循环是X中点的有限严格 ρ-序列 $x = x_1, x_2, \ldots, x_p = x$（特别地，$d(x_j, x_{j+1}) < \rho$）。有限的 ρ-循环通常会被视为Rips(X,ρ) 中的一个循环，其定义为 $\sum_{j=1}^{p-1} \langle x_j, x_{j+1} \rangle$。

令 $\bullet$ 为 X 及其所有 Rips复形中的基点，除非另有明确说明。

引理 4.2. *[下降引理]* 假设 X 是一个紧致度量空间，并令 $r > 0$。

(1) 如果 $c > 0$ 是区间 $[c, r)$ 上距离函数 d 的唯一局部极小值，那么：*(a)* 每对满足 $d(x, y) < r$ 的点 $x, y \in X$ 都可下降到一对距离至多为 c 的点 (x', y')。*(b)* 对于 $Rips(X, r)$ 中的每个 *1*-循环 α，都存在 X 中的一个有限 c-循环 α'，使得 $[\alpha'] = [\alpha] \in H_1(Rips(X, r))$。*(c)* 对于 $Rips(X, r)$ 中的每个基于点的单纯形环路 α，都存在 $Rips(X, c)$ 中的一个基于点的单纯形环路α'，使得 $\alpha' \simeq \alpha \, rel \bullet \, in \, Rips(X, r)$。 ____

(2) 若对于某个 $a \geq 0$，距离 d 在区间 (a,r)上没有局部极小值，则对于每个 $\varepsilon > 0$:

*(a)*每一对点x、$y \in X$ 且满足$d(x,y) < r$都降为一对点(x', y')，其距离至多为$a+\varepsilon$。*(b)* 对于 *Rips(X,r)* 中的每个 *1*-循环 α，都存在一个有限的 $(a+\varepsilon)$-循环 α'，使得$[\alpha'] = [\alpha] \in H_1(Rips(X,r))$。*(c)* 对于*Rips(X,r)*中的每个基于点的单纯形环路 α，都存在一个基于点的单纯形环路α'，位于 *Rips(X, a +ε)*中，使得 $\alpha' \simeq \alpha$ *rel* $\bullet$ 位于 *Rips(X, r)* 中。

证明。 (1a) 设 a、$b \in X$，$c < d(a, b) < r$，并固定 $\nu < r - d(a,b)$。定义集合

$$A = A(a,b) = \{r' \le r \mid \exists a', b' \in X \mid (a,b) \ \nu\text{-descends to } (a',b') \text{ and } d(a'b') \le r'\}.$$

只需证明 $[c,r] \subseteq A$。显然 A 非空（$r \in A$），且 A 是一个区间，因为若对某个 $t < r$ 有 $t \in A$，那么对每个 $t' \in [t, r]$，都有 $t' \in A$。我们分两步进行：

i. 首先证明，若 $A = [\rho, r]$，则 $\rho \le c$。假设 $A = [\rho, r]$，其中 $\rho > c$。存在一对 (a′,b′)，满足 $d(a',b') = \rho$，且 (a, b) 可下降至该点。由于 ρ 不是局部极小值，我们可以找到 a″,b″ ∈X，使得 $d(a'', b'') < d(a', b') = \rho$，$d(a', a'') < \nu$，且 $d(b', b'') < \nu$。利用 a″ 和 b″ 将上述下降延长一步，可见 (a, b) 可下降至 (a″, b″)，$d(a'', b'') \in A$，因此 $A \neq [\rho, r]$。ii. 接下来证明 A 在左端点处闭。对每个 $n \in \mathbb{N}$，令 (a_n, b_n) 为 X 中的一对点，(a, b) 可下降至该点，且 $d(a_n, b_n) \le \rho + \frac{1}{n}$。由于 X 是紧的，序列 (a_n) 和 (b_n) 分别有聚点 a′ 和 b′。注意 $d(a'b') = \rho$。我们断言 (a, b) 可下降至 (a′, b′)。取 $m \in \mathbb{N}$，使得 $d(a_m, a') < \nu$ 且 $d(b_m, b') < \nu$。我们可以将从 (a, b) 到 (a_m, b_m) 的下降延长一步至 (a′, b′)，这意味着 $\rho \in A$。

根据 i. 和 ii.，我们得出 $[c,r] \subseteq A$，因此 (1) 成立。

(1b) 给定 Rips(X, r) 中的一个 1-循环，将其中每条边 ⟨x, y⟩ 替换为通过第 (1) 部分得到的有限 c-序列 $x = x_1, x_2, \ldots, x_p = x', y' = y_p, y_{p-1}, \ldots, y_1 = y$。显然，如图 3 所示，所得修改保持了该 1-循环的同调类。注意，三角形 (x_j, x_{j+1}, y_j) 和 (x_{j+1}, y_j, y_{j+1}) 的边长分别至多为 d(x, y)、ν 和 $d(x, y) + \nu$，根据 ν 的定义，这些值都小于 r。

(1c) 证明与 (1b) 的证明相同。

（2）的证明与（1）的证明类似。当$a = 0$ 时，我们需要选择 $\nu < \varepsilon$。□

注释 4.3. 引理 4.2 包含两部分。第 (1) 部分讨论 $\mathrm{LocMin}(d) \cap [0,r)$ 存在最大值的情形（在陈述中记为 c）。并非总是如此，参见$\{(1/n, \pm(1 - 1/n)) \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^2$。第 (2) 部分讨论 $\mathrm{LocMin}(d) \cap [0,r)$ 不存在最大值（其上确界记为 a）或最大值为零的情形。

定理4.4.假设X是一个紧致度量空间。那么，涌现的H_1 谱和涌现的 π_1 谱都包含于局部极小值(d) （当通过开*Rips*过滤获得时）。

证明。 对于$b \notin$ 局部极小值(d)，存在 $\varepsilon > 0$ 使得局部极小值$(d) \cap (b - \varepsilon', b + \varepsilon') = \emptyset$。根据引理 4.2 的(2)，包含映射 $\{i_{t,s} \mid b - \varepsilon' < t < s < b + \varepsilon'\}$ 在H_1和 π_1上诱导的映射是满射。□

注 4.5. 当X 不是紧空间时，定理 4.4 可能不成立。注意，若$X \subseteq \mathbb{R}^n$是开集（且非空），则 $\mathrm{LocMin}(d) = \{0\}$，而持久同调可能非常丰富。我们还指出，涌现的$H_1$ 谱可能不包含在涌现的

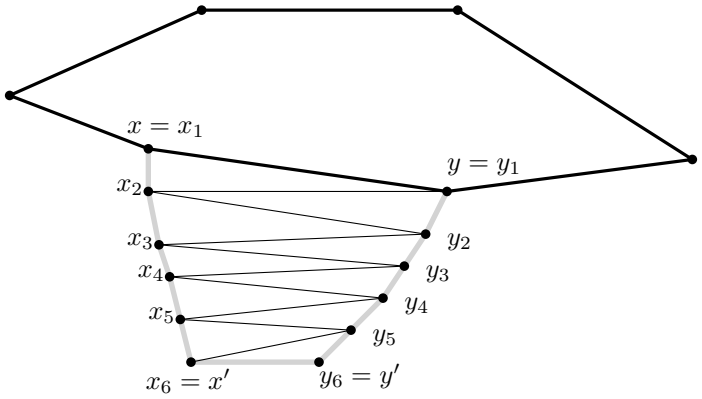

图3.引理 4.2 的陈述 (1a) 示意图。粗体 1-循环的边 $\langle x,y\rangle$ 被 (1a) 部分中沿着下降的有限 ν-序列的灰色有限 c-序列所替代。这样的修改保持了包含边 $\langle x,y\rangle$ 的循环的同调类（以及路径的基于同伦类）。

π_1 谱中，因为后者只考虑包含 $\bullet$ 的连通分支（Rips 复形中）内的环。

在考虑通过闭Rips过滤获得的持久性时，短暂的直和项可能产生不属于LocMin(d)的临界值，参见示例6.1。此外，当使用来自域的系数计算持久同调时，陈述(4b)意味着，如果左端点非零，则H_1 的所有条在左端点处都是闭的。如果H_1中某条的左端点为零，则该条在左端点处是开的，因为Rips(X,0)是一个离散集，因此具有平凡的H_1。

4.2. **涌现的循环（环）及其基数**。 在本小节中，我们证明，在 d 的一个局部孤立局部极小值 c 处涌现的一维同调，是通过将 $\mathcal{M}_c$ 的元素（见定义 4.6）附加到 Rips(X,c) 而产生的。随后，我们利用这一事实估计 c处 H_1 的秩增量。

定义 4.6. 对于 $c \in$ 局部极小值(d)，定义

$$\mathcal{M}_c := \{(x,y) \in X^2 \mid d(x,y) = c,\ d \text{ has a local minimum at } (x,y)\}$$

作为满足 d 在d =c处取得局部极小值的点对的集合。

以下是定理 4.4 和引理 4.2 的直接推论。

命题 4.7。 假设 X 是一个紧致度量空间。令 $c > 0$ 为 d 的一个孤立局部极小值（即 $(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \cap$ d 的局部极小值集合 $(d) = \{c\}$），且为 H_1 的一个涌现临界值。定义

$$\text{Rips}^*(X,r) = \text{Rips}(X,r) \bigcup_{(x,y)\in\mathcal{M}_c} \langle x,y\rangle.$$

然后，对于区间$(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$内的每个 $t < s$，包含$\text{Rips}^*(X,t) \hookrightarrow \text{Rips}(X,s)$所诱导的 H_1 上的映射是满射。

命题 4.8。 假设 X 是一个紧致度量空间。设 $c > 0$ 是 d 的一个孤立局部极小值（即 $(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \cap$局部极小值$(d) = \{c\}$），也是 π_1 的一个涌现临界值。

定义

$$\mathrm{Rips}^*(X,r) = \mathrm{Rips}(X,r) \bigcup_{(x,y)\in\mathcal{M}_c} \langle x,y\rangle.$$

那么，对于每个 $t < s$ 属于 $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$，包含映射 $\mathrm{Rips}^*(X,t) \hookrightarrow \mathrm{Rips}(X,s)$ 在 π_1 上诱导的映射是满射。

命题 4.7 指出，在临界点处持久 H_1 中出现的同调，其生成元是通过向 Rips 复形补入与满足 d 在值 c处取得局部极小值的点对相对应的边而得到的；该临界点是一个孤立局部极小值。一方面，这为描述新出现的圈（以及持久基本群中的环）提供了便利。另一方面，它使我们能够估计 H_1的秩的增长。

定义 4.9. 群 G的**最小生成集的基数记为 mgs(**GG**)**。

显然，$\mathrm{rank}(G) \le \mathrm{mgs}(G)$，因此后续关于群的 mgs 的所有上界也适用于秩。

命题4.10。 假设 X 是一个紧致度量空间。设 $c > 0$ 是 d 的一个孤立局部极小值。那么，对于区间$(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ 内的每个 $t < s$，我们都有最小生成集大小$(H_1(\mathrm{Rips}(X,s)))$ ≤最小生成集大小$(H_1(\mathrm{Rips}(X,t))) + |\mathcal{M}_c|$。

证明。 证明直接源自命题 4.7，因为向单纯复形添加 $|\mathcal{M}_c|$ 条边，最多会使其 H_1 的极小生成集的基数增加 $|\mathcal{M}_c|$。 □

注4.11。 命题4.10关于基本群的类似结论，仅当对于某个$r < c$，Rips(X,r)是连通的时才成立。向单纯复形中添加一条边，最多会使H_1 的最小生成集的基数增加1；但如果该边连接了该单纯复形的不同连通分支，则可能使基本群的最小生成集的秩增加超过1。

下面的推论细化了命题4.10。它指出， $|\mathcal{M}_c|$ 是H_1 在c处的 MGS 增量与H_0 在c处的秩减量之和的上界。

推论 4.12。 假设 X 是一个紧致度量空间。设 $c > 0$ 是 d 的一个孤立局部极小值。那么，对于每个处于$(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ 内的 $t < s$，我们有

$$\mathrm{mgs}(H_1(\mathrm{Rips}(X,s))) - \mathrm{mgs}(H_1(\mathrm{Rips}(X,t))) +$$
$$+ \mathrm{rank}(H_0(\mathrm{Rips}(X,t))) - \mathrm{rank}(H_0(\mathrm{Rips}(X,s))) \le |\mathcal{M}_c|.$$

证明。 由命题 4.7 可直接得出证明：向一个单纯复形添加一条边，要么将其两个连通分支连接起来（从而使H_0 的秩减一），要么使其H_1 的最小生成集大小增加一。□

4.3. **关于H_1 和 π_1的重构结果**。 在本小节中，我们证明，对于一大类空间，其小尺度下的 Rips 复形能够捕捉底层空间X的H_1 和 π_1 。关于神经复形基本群的类似结果已多次得到证明，包括 [5, 7]。另一方面，针对某些空间类别，利用 Rips 复形重构X 的同伦类型的结果已在 [15, 24]中得到证明。

空间 X 是**尺度不超过** $R > 0$ 时单连通的，若对于每个$x \in X$ 以及每个正$r < R$，以x为中心的r开球都是单连通的。特别地，这意味着这样的空间是

局部道路连通。因此，一个在尺度$R>0$上单连通的紧空间由有限个开道路连通分支组成。

定理4.13。令 $(X,\bullet)$ 为一个带基点空间，其在尺度 $R>0$以内是紧的且单连通的。那么 $\pi_1(\mathrm{Rips}(X,r),\bullet)\cong\pi_1(X,\bullet)$对于每个正的 $r<R/3$ 均成立。此外，如果 $r'\in(r,R/3)$，则尺度为 $r<r'$ 的 *Rips*复形之间的自然包含映射$i_{r,r'}$ 在基本群上诱导同构。

证明。定义映射 $\varphi=\varphi_r\colon\ \pi_1(\mathrm{Rips}(X,r),\bullet)\to\pi_1(X,\bullet)$，规则如下。若 α 是 $\mathrm{Rips}(X,r)$ 中由顶点序列 $\bullet=x_1,x_2,\ldots,x_n=\bullet$ 给出的基于点的单纯形环路，则将 $\varphi([\alpha])$ 定义为环路 α^X 的基于点的同伦类型；该环路由 X 中连接点 x_k 和 x_{k+1} 的路径 ψ_k 按对应顺序连接而成，其中每条路径 ψ_k 都包含在 $\mathrm{B}(x_k,r)$ 中。

我们首先证明 φ定义良好。

- 我们首先说明，$\varphi([\alpha])=[\alpha X]$ 与路径 ψ_k 的选择无关。假设 ψ'_k 是从 x_k 到 x_{k+1}的另一条路径。将 ψ_k 与反向路径 ψ'_k 连接起来，得到一个包含在 $\mathrm{B}(x_k,2r)$ 中的环。由于 $2r<R$，这个环是零伦的。因此，用 ψ'_k 替换 ψ_k 不会改变上文定义的 $\varphi([\alpha])$ 的同伦类型。
- 现在我们证明，$\varphi([\alpha])$ 与 $[\alpha]$的同伦代表元无关。假设 α 和 β 是 Rips(X, r) 中同伦的基于点的单纯形环路。该同伦由一个从 $\mathrm{S}^1\times\mathrm{I}$ 到 Rips(X, r) 的单纯形映射 H 给出，其定义域是 S τ的一个三角剖分。按如下方式在同一三角剖分 τ 上定义同伦 $\mathrm{H}'\colon \mathrm{S}^1\times\mathrm{I}\to\mathrm{X}$：– 对每个顶点 $\mathrm{v}\in\tau$，定义 $\mathrm{H}'(\mathrm{v})=\mathrm{H}(\mathrm{v})$。– 给 τ中的所有边定向。对于每条定向边 $\langle\mathrm{a},\mathrm{b}\rangle\in\tau$，将 H′ 在 [a, b] 上的取值定义为 B(H(a), r) 中连接 H(a) 与 H(b) 的一条路径。若 H(a) = H(b)，则选取常值路径。这样可确保得到的同伦 H′ 保持基点。– 对每个三角形 $[\mathrm{a},\mathrm{b},\mathrm{c}]\in\tau$，将 H′ 在 [a, b, c] 上的取值定义为 X 中由 H′ 在 [a, b, c]的边界上所定义的环的零伦。注意，该环包含在以其某个顶点为中心的 3r-球内（从该顶点出发，沿三条边所选定的定向可到达另外两个顶点），并且由于 3r <R，所述零伦存在。因此，我们得到 $\varphi([\alpha])$ 与 $\varphi([\beta])$ 之间的一个保基点同伦。

因此，φ是良定义的。此外，它显然是一个同态。

接下来我们证明 φ 是单射。设 α 是 Rips(X, r) 中由顶点序列 $\bullet=\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\ldots,\mathrm{x}_n=\bullet$给出的一个基于点的单纯形环路。假设 $\varphi([\alpha])$ 是可缩的。那么存在一个零伦 $\mathrm{H}:\mathrm{B}^2\to\mathrm{X}$，其定义在闭二维圆盘 B^2, 上，并且在边界 $\mathrm{S}^1=\partial\mathrm{B}^2$ 上的限制为 α^X。选取 B^2 的一个三角剖分 τ，其中包含顶点 $\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\ldots,\mathrm{x}_n$，使得对于 τ中的每个三角形 T，H(T) 的像都包含在半径为 r/2 的球内。定义一个单纯形同伦 $\mathrm{H}'\colon\mathrm{B}^2\to\mathrm{Rips}(\mathrm{X},\mathrm{r})$，其中

- 所用的 B^2 三角剖分为 τ，并且
- 对每个顶点 $v\in\tau$，定义 $H'(v)$ 为 $\mathrm{Rips}(X,r)$ 中与点 $H(v)\in X$ 对应的顶点。

注意，由于每个三角形的顶点构成的集合的直径小于r，因此H' 是良定义的。因此，H' 是 α'的单纯形壳同伦，其定义为将H'限制在 $\mathrm{Rips}(X,r)$ 中的$S^1=\partial B^2$,上。接下来只需证明 $[\alpha]=[\alpha']\in\pi_1(\mathrm{Rips}(X,r),\bullet)$。限制在$S^1$ 上的三角剖分 τ 是由顶点$x_1,x_2,\ldots,x_n$在S^1 上诱导的三角剖分的细化。因此，限制在S^1上的 τ的顶点（按循环顺序排列，以便

确定一个单纯形环路 α'）

$$\bullet = x_1 = x_{1,1}, x_{1,2}, \ldots, x_{1,k_1} = x_2 = x_{2,1}, x_{2,2}, \ldots, x_{2,k_2} = x_3 = x_{3,1} \ldots, x_n = \bullet.$$

我们断言，对每个 j，单纯形环路

$$x_j = x_{j,1}, x_{j,2}, \ldots, x_{j,k_j} = x_{j+1}, x_j$$

在 Rips(X,r) 中是零伦的。注意，所有提到的顶点都对应于 B(x_j, r) 中的点。这意味着所提到的单纯形环路包含在 Rips(X, r) 中x_j 的闭星内，因而是可缩的。将 x_j与 x_{j+1} 之间的单纯形环路α'部分替换为从 x_j 到x_{j+1} 的单条边（如 α 中所示），从而保持同伦类型。对每个j 进行这种保持同伦类型的修改，我们将 α' 变为 α，并得出满射性的证明。

现在证明 φ 是满射。设 $f\colon S^1 \to X$ 是一个以 $\bullet$ 为基点的环。对于每个 $t \in S^1$，在 S^1 上选取一个包含t 的开区间，使其经由 f 的像包含于 X 中的一个开(r/2)-球内。由紧致性可知，存在有限个这样的区间覆盖S^1。将所得区间的中心记为 t_j，我们得到一个有限的点序列 $\bullet = t_1, t_2, \ldots\ldots, t_k = \bullet$，它们按 S^1 上的正向顺序出现，并且恰好绕其一周，使得对于每个 k，从 t_k 到t_{k+1} 的闭区间（沿正方向）的经由 f 的像包含于 B(t_k, r) 中。有限的严格 r-循环

$\bullet = f(t1)$、$f(t2)$、……、$f(t_k) = \bullet$是 Rips(X, r) 中的一个基点单纯闭环，其基点同伦类经由 φ 映射到 f。

因此，对于所有正的 $r < R/3$，φ_rRips(X, r) 的基本群 $\cong \pi_1(X, \bullet)$。由于 φ_r与 Rips 复形基本群上的包含诱导映射可交换，定理的第二个结论也成立。□

定理4.14。设 X 是一个紧的带基点空间，且在尺度 $R > 0$以下是单连通的。那么，对于每个正数 $r < R/3$，H_1(*Rips* 复形 X, r) $\cong H_1(X)$。此外，若 $r' \in (r, R/3)$，则尺度为 $r < r'$ 的 *Rips* 复形之间的自然包含映射 $i_{r,r'}$ 在 H_1上诱导同构。

证明。由于 X 是紧且局部道路连通的，它由有限个紧的道路连通分支 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 组成。由 R 的定义可知，不同的连通分支之间的距离至少为 R，因此 Rips(X, r) 是子复形 Rips(A_j, r) 的不交并。不失一般性，我们可以假设 $\bullet \in A_1$。定理4.14 结合 Hurewicz 定理表明，H_1(Rips(A_1,r)) $\cong H_1(A_1)$。将基点更换为不同的连通分支 A_j，我们得到 H_1(Rips(A_j, r)) $\cong H_1(A_j)$。由于 j 是任意的，我们得出同构 H_1(Rips(X, r)) $\cong$ H_1(X)。

第二部分同样源于基本 1

群。□

注记 4.15。定理 4.13 和 4.14 表明，起初 persistent π_1 和 H_1 均为常数，并且同构于 X 的相应不变量。

4.4. **1维持久性的生成集界**。在本小节中，我们结合上一小节的重构结果以及第 4.2 小节所讨论的 1 维持久性在临界尺度处的行为，为 Rips 复形基本群的秩H_1 提供一个全局界。

给定一个空间 K，其连通分支为 $K_1, K_2, \ldots, K_m$，并且 $x_j \in K_j, \forall j$，定义

$$\mathrm{MGS(K)} = \sum_{j=1}^{m} \mathrm{mgs}(\pi_1(K_j, x_j)).$$

注4.16。 向单纯复形E 添加一条边到单纯复形K 中，可以通过两种方式增大基本群（另见注4.11）：

(1) 若E 的两个端点位于同一个连通分支B中，则加入E 会使B的基本群（以B中的一点为基点）的秩增加 1。(2) 若E 的两个端点位于不同的连通分支$B_j \neq B_k$中，则加入E会连接这两个连通分支，并按以下方式增加基本群的秩：(a) 对于基点$b \notin B_j \cup B_k$， $\pi_1(K, b)$的秩不变。(b) 对于基点$b_j \in B_j$和$b_k \in B_k$， $\mathrm{mgs}(\pi_1(K, b_j))$增加 $\mathrm{mgs}(\pi_1(B_k, b_k))$

特别地，向单纯复形K 中添加一条边，至多使 MGS(K) 增加 1。

注记 4.17。 若Y 是紧、连通且局部道路连通的度量空间，则已知 $\mathrm{mgs}(\pi_1(Y))$ 有限，例见 [10]。因此，每个在尺度$R > 0$下单连通的紧空间X，其 $\mathrm{mgs}(\pi_1(X))$、MGS(X) 和 $\mathrm{mgs}(H_1(X))$ 均有限。特别地，这样的空间由有限多个紧连通分支组成，且这些分支在尺度$R > 0$下单连通。将本注记的第一条结论应用于每个连通分支（同调版本则应用 Hurewicz定理），即可得出所有上述不变量均有限。

定理 4.18。 设 $(X, \bullet)$ 是一个带基点空间，在尺度 $R > 0$以内是紧且单连通的。假设 LocMin(d) 是有限集。若对于每个 $c > 0$，M_c 均为有限，则对于每个 $r > 0$:

$$\mathrm{mgs}(H_1(\mathrm{Rips}(X, r))) \leq \mathrm{mgs}(H_1(X)) + \sum_{c<r} |\mathcal{M}_c| < \infty.$$

此外，若 $A_1, A_2, \ldots,$ A_n是道路连通分支，且 $x_j \in A\,j$，则对于每个 $r > 0$:

$$\mathrm{MGS}(\mathrm{Rips}(X, r)) \leq \mathrm{MGS}(\mathrm{X}) + \sum_{c<r} |\mathcal{M}_c| < \infty.$$

特别地，

$$\mathrm{mgs}(\pi_1(\mathrm{Rips}(X, r), \bullet)) \leq \mathrm{MGS}(\mathrm{X}) + \sum_{c<r} |\mathcal{M}_c| < \infty.$$

证明。 根据定理 4.4，$\mathrm{mgs}(H_1(\mathrm{Rips}(X,r)))$ 只会在 LocMin(d) 处增加。对于充分小的正r ，根据定理 4.14，有 $\mathrm{mgs}(H_1(\mathrm{Rips}(X,r))) = \mathrm{mgs}(H_1(X))$。根据命题4.10，$\mathrm{mgs}(H_1($ Rips(X,r))) 在 LocMin(d) 的每一点处的增量均不超过 $|\mathcal{M}_c|$ ，从而证明了定理的第一部分。

根据注4.16、定理 4.4 和定理3.4，MGS(Rips(X, r)) 只会在 LocMin(d) 处增加。不失一般性，设有 $\bullet = \mathrm{x}_1$。对于充分小的正 r，Rips(X, r) 是 $\mathrm{Rips}(\mathrm{A}_1, \mathrm{r})$、$\mathrm{Rips}(\mathrm{A}_s, \mathrm{r})$、.. . 、$\mathrm{Rips}(\mathrm{A}_n, \mathrm{r})$ 的不交并，因此根据定理 4.13，有 $\pi_1(\mathrm{Rips}(\mathrm{X}, \mathrm{r}), \bullet) = \pi_1(\mathrm{Rips}(\mathrm{A}_1, \mathrm{r}), \bullet)$。因此，对于充分小的正 r，有 $\mathrm{mgs}(\pi_1(\mathrm{Rips}(\mathrm{X}, \mathrm{r}), \bullet)) = \mathrm{mgs}(\pi_1(\mathrm{A1}, \bullet))$；通过推广该论证，对于充分小的正 r，MGS(Rips(X, r)) = MGS(X)。根据命题4.10，MGS(Rips(X, r)) 在 LocMin(d) 的每一点处的增量都是通过添加 $|\mathcal{M}_c|$ 条边产生的，因此根据注4.16，MGS(Rips(X, r)) 在 c 处至多增加 $|\mathcal{M}_c|$。

最后一个结论成立，因为 $\mathrm{mgs}(\pi_1(\mathrm{Rips}(X,r), \bullet)) \leq \mathrm{MGS}(\mathrm{Rips}(X,r))$。上述不变量的有限性由注释 4.17 得出。□

推论 4.19。 设$(X, \bullet)$ 为一个带基点空间，它在尺度 $R > 0$, |局部极小值(d)| $< \infty$下是紧且单连通的，并且 $|M_c| < \infty, \forall c > 0$。那么对于每个 r:

$$\mathrm{rank}(H_1(\mathrm{Rips}(X, r))) < \infty \quad \textit{and} \quad \mathrm{rank}(\pi_1(\mathrm{Rips}(X, r)), \bullet) < \infty.$$

证明。 该结论由定理 4.18 得出。 □

上一节中的例 6.3 表明，如果 X 是一个紧致度量空间，则秩$(H_1(\mathrm{Rips}(X,r)))$ 可能是无穷的。

4.5. **谱的组合判据**。 到目前为止，我们的结果探讨并利用了这样一个事实：紧致度量空间的H_0 谱和涌现的一维谱，在某种意义上是由 $\mathcal{M}_c$中的元素诱导的。要给出一个充分条件，以判定 $\mathcal{M}_c$ 中的某个特定元素会诱导上述任一种临界效应，似乎更加复杂。在本小节中，我们针对孤立局部极小值c的情形给出这样的条件。注意，这种情形涵盖了处于一般位置的每个有限$X \subset \mathbb{R}^n$ 。

定理 4.20。 假设 X 是一个紧致度量空间。设 $c > 0$ 是 d 的一个孤立局部极小值，并且 $\mathcal{M}_c = \{(x,y)\}$。 那么，以下条件等价：

(a)： c 是 X 的 H_0 谱或涌现 H_1 谱中的一个元素。**(b)：** 不存在 $z \in X \setminus \{x,y\}$，使得 $d(z,x) \le c$ 且 $d(y,z) \le c$。

证明。 （**a**） $\Longrightarrow$ （**b**）：显然，c 不可能同时属于H_0 谱和H_1 的涌现谱，因为X 中的 $\mathcal{M}_c = \{(x,y)\}$ 添加一条边要么连接两个连通分支，要么增加H_1 （见命题 4.7）。

设 c 是 H_0 谱中的一个元素。则 $x \in K_x$ 且 $y \in K_y$，其中 K_x 和 K_y 是 Rips(X, r) 在 c 之前紧邻的尺度 r 处的不同连通分支。根据引理 3.3，K_x 和 K_y 在 X 中的顶点集（分别记为 $X_x \subset X$ 和 $X_y \subset Y$）是 X 中距离为 c 的紧开子集。假设存在 $z \in X \setminus \{x, y\}$，使得 $d(z, x) \le c$ 且 $d(y, z) \le c$。

- 如果 $z \in X_x$，那么$d(y,z) = c$，因为X_x与X_y之间的距离是c。但此时 (y,z) 是d 的一个不同于 (x,y) 的局部极小值，这与 $|\mathcal{M}_c| = 1$ 矛盾。
- 情形 $z \in X_y$ 的处理类似。
- 令z 属于$X_z \subset X$ 的另一个$_c$ 等价类，而非X_x 和X_y。根据 $\sim_c$的定义，X_z 与X_x 和X_y 的距离至少为c ，因此$d(x,z) = c$。与上面第一项的论证类似，这意味着 (x,z)是d的一个局部极小值，矛盾。

因此，假设的z可能不存在。

设 c 是出现于 H_1 谱中的一个元素，设 $[\alpha]$ 是在 c 处出现的连通循环的一个同调类。根据引理 4.2， α 可以选为 X 中的一个有限 c-循环，其中包含定向边 $\langle x, y\rangle$ 的非零倍数。假设存在 $z \in X \setminus \{x, y\}$，使得 $d(z, x) \le c$ 且 $d(y, z) \le c$。那么， α 中每次出现的 $\langle x,y\rangle$ 都可以用 $\partial\langle x, z, y\rangle$ 替换，实际上就是将边 $\langle x, y\rangle$ 替换为边 $\langle x, z\rangle$ 和 $\langle z,y\rangle$，而不改变 $[\alpha]$。现在，我们可以使用引理 4.2 的过程，将 α 中距离为 c 的每条边替换为一个有限严格 c-序列，而不改变 $[\alpha]$，因为这类点对不是 d 的局部极小值。因此，我们构造出了一个在小于 c 的尺度处出现的 $[\alpha]$ 的代表元，所以 $[\alpha]$ 并未在 c 处出现。由此，假设的 z 不可能存在。

（**b**） $\Longrightarrow$ （**a**）：假设（**a**）不成立。

(1) 由于c 不在H_0 谱中， $\{x,y\}$ 这对点不会在 Rips(X, c) 中连接两个不同的连通分支。因此，存在一个有限的严格c-序列$x = x_0, x_1, \ldots, x_m = y$。令 α为与有限c-环 $x = x_0, x_1, \ldots, x_m = y$, x对应的单纯循环。(2) 根据我们的假设，对于每个$r > c$， $[\alpha]$ 在 Rips(X,r) 中是零调。

(3) 由于$c \in$局部极小值(d) 且 $|\mathcal{M}_c| = 1$ 我们可以选取$R < c/4$，使得$d(x',y') > c$，$\forall x' \in \overline{B}(x,R) \setminus \{x\}$，$\forall y' \in \overline{B}(y,R) \setminus \{y\}$。

(4) 定义紧集 $A_x = \overline{B}(x,R) \setminus B(x,R/2)$ 和 $A^y = \overline{B}(y,R) \setminus B(y,R/2)$。注意，由于紧致性和 $|\mathcal{M}_c| = 1$，存在实数 $w_1 < w_2$，使得$d(A_x \times B(y,R) \cup B(x,R) \times A^y) \subseteq [w_1, w_2] \subset (c, \infty)$。

(5) 选择 $\varepsilon_0 > 0$，使得对于每个 $x' \in \overline{B(x,R)}$ 和 $y' \in \overline{B(y,R)}$，若 $d(x',y') \in (c, c+\varepsilon_0)$，则 $x' \in B(x, R/2)$ 且 $y' \in B(y,R/2)$。若不存在这样的 ε_0，则对每个充分大的 $n \in \mathbb{N}$，都存在一对 $t_n \in B(x,R)$ 和 $s_n \in B(y,R)$，满足 $d(t_n, s_n) \in (c, c+1/n)$，且 $t_n \in A_x$ 或 $s_n \in A_y$。不失一般性，我们可以选取 $\mathbb{N}$ 的一个子序列 $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$，使得 $t^{n_j} \in A_x, \forall j$。于是 $t = \lim_{j\to\infty} t^{n_j} \in A_x$，$s = \lim_{j\to\infty} s^{n_j} \in \overline{B}(y,R)$，并且 $d(t,s) = c$，这与 $|\mathcal{M}_c| = 1$ 矛盾。

(6) 设 $r \in (c, c+\varepsilon_0)$。对于Rips(X, r)中的每个1-链$\beta = \sum_{j=1}^{k} \mu_j \sigma_j$（即，$\mu_j \in G$ 且 σ_j 是 Rips(X, r) 中的一个定向1-单形），我们如下定义不变量 $N_r(\beta)$。定义 F_r 为满足以下条件的指标 $j \in \{1,2,\ldots,k\}$ 的集合：σ_j 的第一个顶点位于 $B(x,R/2)$中，且第二个顶点位于$B(y,R/2)$中。类似地，令 L_r 为满足以下条件的指标 $j \in \{1,2,\ldots,k\}$ 的集合：σ_j 的第二个顶点位于 $B(x,R/2)$ 中，且第一个顶点位于 $B(y,R/2)$ 中。定义

$$N_r(\beta) = \sum_{j\in F_r} \mu_j - \sum_{j\in L_r} \mu_j \in G.$$

数量 $N_r(\beta)$ 表示在 G 中，沿 β 的有向边从 $B(x,R/2)$ 指向 $B(y,R/2)$ 的权重总量。

(7) 固定$r \in (c, c+\varepsilon_0)$。注意，$N_r(\alpha) = 1$。另一方面，(2) 意味着 α 是 Rips(X,r) 中一个2-循环的边界，因此该边界的N_r 也为 1。由此，至少存在一个N_r非平凡的 2-单形。简单的分类讨论表明，当且仅当所讨论的 2-单形具有以下性质时，这才有可能：

- 一个顶点，例如a_r，位于 $B(x,R/2)$ 中。
- 一个顶点，例如b_r，位于 $B(y,R/2)$ 中。
- 一个顶点，例如z_r，位于$X \setminus \left(B(x,R/2) \cup B(y,R/2)\right)$中。

由于 $\{a_r, b_r, z_r\}$ 在 Rips(X,r) 中构成一个单形，因此两两之间的距离都小于r。另一方面，(5) 意味着$z_r \notin B(x,R) \cup B(y,R)$，因此$d(a_r,z_r) \geq R/2$ 且$d(b_r,z_r) \geq R/2$。

(8) 由于 $B(x,R/2)$、$B(y,R/2)$ 以及 $X \setminus (B(x,R) \cup B(y,R))$ 都是紧的，因此存在 $\mathbb{N}$ 的一个子序列 $(\ell_j)_{j\in\mathbb{N}}$，使得以下极限在相应提及的紧集中存在：

$$a = \lim_{j\to\infty} a_{c+1/\ell_j} \quad b = \lim_{j\to\infty} b_{c+1/\ell_j}, \quad z = \lim_{j\to\infty} a_{c+1/\ell_j}.$$

(9) 由 (3) 可知 $a = x$ 且 $b = y$。由 (7) 中两两距离的上界可得 $d(a,z) \leq r$ 且 $d(b,z) \leq r$。此外，(7) 中的下界意味着$d(a,z) \geq R/2$ 且 $d(b,z) \geq R/2$，这尤其意味着 $z \in X \setminus \{x,y\}$。因此**(b)**不成立。

□

若X 连通，那么在上述证明中用单纯形环路替换环，就可得到关于涌现 π_1 谱的类似结论。

命题 4.21。设 X 是一个连通的紧致度量空间。令 $c > 0$ 为 d 的一个孤立局部极小值，且 $\mathcal{M}_c = \{(x, y)\}$。那么，若不存在 $z \in X \setminus \{x, y\}$ 使得 $d(z, x) \leq c$ 且 $d(y, z) \leq c$，则 c 属于 X 的 H_0 谱或涌现 π_1谱。

5. D检测距离函 nction

定理 4.20 给出了一个条件，在该条件下，LocMin(d) 中某些局部孤立元素可通过持久性检测到。本节证明，事实上，如果使用适当的选择性 Rips 复形，而非 Rips 复形，那么持久性可以检测到 LocMin(d) 中每个有限 $\mathcal{M}_c$的元素。选择性 Rips 复形已在[25] 中引入，它们是 Rips 复形的子复形，其中单形的厚度可控（相应的重构结果也见 [16]）。构造它们的动机是提供一种灵活的过滤构造，使之与 Rips 过滤密切相关，从而尽可能多地利用持久性检测测地空间内部的测地圆（即配备测地度量的圆的等距像）。本节采用类似的方法来检测 LocMin(d)。

定义 5.1. [25] 设Y 是一个度量空间，$r_1 \geq r_2, n \in \mathbb{N}$。**选择性 Rips 复形**sRips($Y$; r_1,n,r_2)是一个抽象单纯复形，定义规则如下：有限子集 $\sigma \subset Y$ 是单形，当且仅当满足以下两个条件：

(1) Diam(σ) < r_1；(2) 存在子集 $U_0, U_1, \ldots, U_n \subset U$，其直径小于$r_2$，使得 $\sigma \subset U_0 \cup U_1 \cup \ldots \cup U_n$。

定义 5.1 背后的几何直觉是，sRips(Y; r_1,n,r_2)中维数高于n 的单形非常薄；除去“扭曲”r_2后，它们接近于 Rips(X, r_1)中的一个n维单形。注意，sRips(Y;r_1, n, r_2) ≤ Rips(Y, r)。本文将使用形式为 sRips(Y;$r_1, 1, r_2$) 的选择性 Rips 复形，这意味着 2-单形将是薄的，即 2-单形最短边的长度小于r_2。为简化以选择性 Rips 复形为对象的过滤的记号，我们将聚焦于形式为

$$\mathcal{F} = \{\text{sRips}(Y; r, 1, r_2(r))\}_{r \geq 0},$$

其中 $r_2 = r_2(r)$: $[0, \infty) \to [0, \infty)$ 是满足条件的严格递增连续双射。 g $r_2(r) \leq r$.

前面各节中的许多结果同样适用于选择性 Rips 复形：

- Rips过滤的$H0$持久性与X 的选择性 Vietoris–Rips 过滤 $\mathcal{F}$ 的$H0$持久性同构，因为 Rips(X,r) 和 sRips(Y; r,1,r2(r)) 的一维骨架重合。因此，定理3.4对于由过滤 $\mathcal{F}$产生的选择性 Rips 复形同样成立。

- 引理 4.2 对由过滤 $\mathcal{F}$ 得到的选择性 Rips 复形同样成立。原因在于，定义 4.1 的递降条件是针对任意小的正值 ν 建立的，并且引理 4.2 的 1(a) 部分也正是如此证明的。因此，用于证明引理 4.2 的 1(b) 和 1(c) 部分的 2-单形（见图 3）可以取得足够薄，以满足 $\mathcal{F}$ 的要求。由此我们得到定理 4.4 的以下推广。

定理 5.2. 假设 X 是一个紧致度量空间。那么，由过滤 $\mathcal{F}$ 产生的涌现 H_1 谱和涌现 π_1 谱都包含在 局部极小值(d) 中。

现在我们可以证明本节的主要结果：若 $\mathcal{M}_c$ 有限，则可通过选择性 Rips 复形的持久性检测每个成员 $c \in$局部极小值(d)。若 $\mathcal{M}_c$ 无限，例 6.2 表明，即使借助选择性 Rips 复形，也可能无法检测到 c 。

定理 5.3. 假设 X 是一个紧致度量空间，$c \in$局部极小值(d)，且 $\mathcal{M}_c$ 是有限的。存在一个过滤 $\mathcal{F}$ 及函数 $r_{2,}$，使得 c 要么是 H_0 的临界值，要么是由过滤 $\mathcal{F}$ 产生的 H_1 的涌现临界值。

以下证明与定理 4.20 的**(b)** 证明所使用的部分设置相同。总体思路受到 [25] 主要结果证明的启发。

证明。选取 $(x, y) \in \mathcal{M}_c$。不失一般性，我们可以假设 c 不在 H_0 谱中。因此 $c > 0$，并且 X 中存在有限严格 c-序列 $x = x_0, x_1, \ldots, x_m = y$。令 α 为对应于有限 c-环 $x = x_0, x_1, \ldots, x_m = y, x$ 的单纯循环。我们断言，存在函数 r_2，使得 $[\alpha] \in H_1$(选择性 Vietoris–Rips(Y; r, 1, r_2(r))) 对于某个 $\varepsilon > 0$，在 $r \in (c, c + \varepsilon)$ 时是非平凡的。

(1) 选择 $R < c/4$，使得 $d(x', y') > c$，且 $\forall x' \in \overline{B}(x, R) \setminus \{x\}$，$\forall y' \in \overline{B}(y, R) \setminus \{y\}$。(2) 定义紧集 $A_x = B(x, R) \setminus B(\overline{x}, R/2)$ 和 $A^y = B(y, R) \setminus B(\overline{y}, R/2)$。注意，由于紧致性以及 $\mathcal{M}_c$ 的有限性，存在实数 $w_1 < w_2$，使得 $d(A_x \times B(y, R) \cup B(x, R) \times A^y) \subseteq [w_1, w_2] \subset (c, \infty)$。(3) 选择 $\varepsilon > 0$，使得对于每个 $x' \in \underline{B}(x, R)$ 和 $y' \in B(y, R)$，只要 $d(x', y') \in (c, c + \varepsilon)$，就有 $x' \in B(x, R/2)$ 且 $y' \in B(y, R/2)$。(4) 选择 r_2，使得 $r_2(c + \varepsilon) < R/2$。这是对 r_2施加的唯一附加条件。(5) 令 $r \in (c, c + \varepsilon)$。对于 sRips(X; r, 1, r_2(r)) 中的每个 1-链 $\beta = \sum_{j=1}^{k} \mu_j \sigma_j$（即 $\mu_j \in G$，且 σ_j 是 sRips(X; r, 1, r_2(r)) 中的定向1-单形），我们定义不变量 $N_r(\beta)$ 如下。定义 F_r 为所有满足以下条件的指标 $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ 的集合：σ_j的第一个顶点位于 B(x, R/2) 中，第二个顶点位于 B(y, R/2) 中。类似地，令 L_r为所有满足以下条件的指标 $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$的集合：$\sigma_j$ 的第二个顶点位于 B(x, R/2) 中，第一个顶点位于 B(y, R/2) 中。定义

$$N_r(\beta) = \sum_{j \in F_r} \mu_j - \sum_{j \in L_r} \mu_j \in G.$$

(6) 固定尺度 $r \in (c, c + \varepsilon)$。现在我们证明，sRips($X$;$r$, 1, $r_2(r)$ 中 2-循环的边界具有偶数个 N_r。根据可加性，只需考虑单个 2-单形。简单的分类讨论表明，sRips(X; r,1,$r_2(r)$) 中的 2-单形在以下情况下具有奇数个 N_r：

- 一个顶点，比如 a_r，位于 B(x,R/2) 中。
- 一个顶点，例如 b_r，位于 B(y,R/2) 中。
- 一个顶点，比如 z_r，位于 $X \setminus \big(B(x, R/2) \cup B(y, R/2)\big)$ 中。由 (2) 可知，这意味着 $z_r \in X \setminus \big(B(x, R) \cup B(y, R)\big)$。

这意味着此类 2-单形中的三个成对距离都会大于R/2，这与 (4) 矛盾。因此，这样的 2-单形不存在。

(7) 注意到 $N_r(\alpha) = 1$，因此根据 (6)，α 不能表示为选择性 Vietoris–Rips(X;r, 1, $r_2(r)$) 中某个 2-链的边界。这证明了我们的断言：$[\alpha] \in H_1$(选择性 Vietoris–Rips(Y; r, 1, $r_2(r)$))对于 $r \in (c, c + \varepsilon)$ 是非平凡的。由于对于每个 $r' < c$，选择性 Vietoris–Rips(Y;r', 1, $r_2(r')$) 中的每个 1-链都具有平凡的 N_r，我们还得出结论：$[\alpha]$ 在 c 处出现。证明完毕。

□

以下定理表明，如果距离函数 d 在X中的点对上至多取得有限个局部极小值，那么 d 的所有局部极小值都可以使用单个选择性 Vietoris–Rips 过滤通过持久性检测到 $\mathcal{F}$。

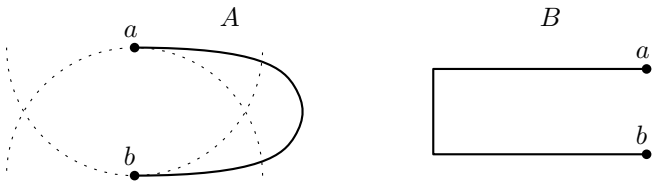

图 4. 示例 6.1（左）和 6.2（右）的空间，二者均为欧几里得平面的子空间。

定理 5.4. 假设 X 是紧致度量空间，局部极小值(d) 是有限集，并且对每个正数 $c \in$ 局部极小值(d) 集合 $\mathcal{M}_c$ 都是有限集。那么存在一个过滤 $\mathcal{F}$ 及函数 r_2, ，使得 局部极小值(d) 中的每个元素要么是 H_0 的临界值，要么是由过滤 $\mathcal{F}$ 产生的 H_1 的涌现临界值。特别地，局部极小值(d) 是 X 经由过滤 $\mathcal{F}$ 得到的 H_0谱与涌现 H_1 谱的并集。

证明。 假设尺度$c \in$局部极小值(d)不在 H_0 谱中。根据定理 5.3，当定理 5.3 的证明中的条件 (4)成立时，尺度 c 通过 $\mathcal{F}$ 属于涌现的 H_1 谱。由于同时满足有限个此类条件很容易，因此存在r_2 使得定理成立。 □

6.（反）例子

在本节中，我们给出三个例子，以说明我们的结果中某些假设的必要性。

示例6.1。闭Rips过滤可能产生不属于 局部极小值(d)**的临界值**。图 6 的左侧将空间A 显示为实线曲线。虚线圆弧是以点 a 和b为圆心的圆的一部分。注意，点对(a,b)不是 d 的局部极~~小值，它~~也不属于局部极小值(d)。然而，A 的闭Rips过滤仍将 $d(a,b)$ 作为一个涌现的 ~~H_1~~值，因为 Rips(A, $d(a,b)$) 包含边 $\langle a, b\rangle$作为一个极大单形。这表明定理 4.4 不适用于闭Rips过滤。该示例首次发表于 [23]。

在 $d(a, b)$ 处出现的非平凡类 $H_1(\text{Rips}(A,d(a, b)))$ 对所有 $r > d(a,b)$ 在 H_1 (Rips(A,r)) 中都是平凡的，这意味着其寿命为零。由于开Rips过滤与闭Rips过滤是 0-交错的，零寿命元素（也称为瞬时直和项）是闭Rips过滤的谱可能大于开Rips过滤谱的唯一原因，详见 [8, 9] ，其中给出了所提及术语的详细信息和定义。

例 6.2. 局部极小值 c 的 d 可能无法检测到，如果 $\mathcal{M}_c$ 是无穷的。 图 6 的右侧展示了空间 B。它由三条线段组成，其中两条彼此平行。距离函数 d 在点对 (a,b) 处取得局部极小值，然而，对于 B 的每个选择性 Vietoris–Rips 过滤，尺度 $d(a,b)$ 都不在 B 的谱中。这说明定理 5.4 中的要求 $|\mathcal{M}_c| < \infty$ 是必要的。

例 6.3. $H_1(\text{Rips}(X,r))$ **即使** X **是紧集，也可能具有无限秩**。 例$Z = U \sqcup L$ 示意图见图 5 左侧。作为一个集合，它由平面上的下点 L 和上点U 组成，定义如下：

$$L = \{x_j \mid j \in \{\infty, 1, 2, \ldots\}\}, \quad U = \{y_j \mid j \in \{\infty, 1, 2, \ldots\}\}.$$

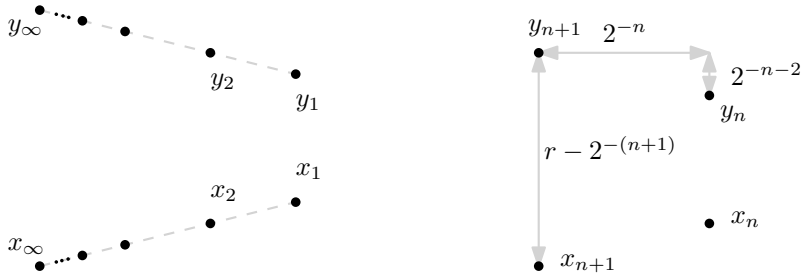

图 5. 左侧是例 6.3 中的空间 Z，右侧是其局部构型的细节。所用度量为 d_1。

所用的度量是曼哈顿度量，记作 $d = d_1$，，即：

$$d((a_1,a_2),(b_1,b_2)) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|.$$

局部距离的细节标示在图 5 的右侧。注意，$\lim_{j\to\infty} x_j = x_\infty$ 以及 $\lim_{j\to\infty} y_j = y_\infty$。由于 $\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} = 1$ 我们看到 $d(x_1, x_\infty) = d(y_1, y_\infty) = 5/4$。另请注意：

(1) $d(x_j, x_k) \le 5/4, \forall j, k \in \{\infty, 1, 2, \ldots\}$. (2) $d(x_1, y_1) = r - 1$ and also $d(x_j, y_j) < r$, $\forall j < \infty$. (3) $d(x_j, y_{j+1}) = d(y_j, x_{j+1}) = r + 2^{-(n+2)} > r$, $\forall j < \infty$. (4) 观察 (2) 和 (3) 意味着 $d(x_j, y_k) < r$ 当且仅当 $j = k$。

固定 $r \ge 5/4$，我们对 Rips(Z,r) 作出如下观察：

- Rips(Z,r) 包含以 L 为顶点的完整单形，因为 $\mathrm{Diam}(L) = 5/4$，根据 (1) 可知。类似地，Rips(Z,r) 包含以 U 为顶点的完整单形。
- 观察（2）、（3）和（4）意味着，在 Rips(Z, r) 中，连接 U 和 L 的唯一单形是对所有 $j < \infty$ 都成立的“垂直”边 $\langle x_j, y_j \rangle$。

因此 $H_1(\mathrm{Rips}(Z, r), \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{j=1, 2, \ldots} \mathbb{Z}$ 是整数群的可数直和，不是有限生成的。

此例补充了 [9]中关于闭Rips复形的类似例子。它还表明，推论4.19要求 LocMin(d)是有限的。另一方面，请注意，$r = 5/4$是H_1 的一个涌现临界尺度，尽管它不是d的局部极小值。

例 6.4。本文的结果表明，d 的局部极小值可以作为临界边，对持久性产生两种潜在影响：使H_1 增加，或使H_0减少。然而，事实证明，当 $\mathcal{M}_c$ 为无限时，它实际上可以以任何方式影响持久同调，也就是说，可以终止任何维度的同调，也可以使任何维度的同调产生。因此，临界边的一般理论要复杂得多，完全不能类比有限度量空间上的持久性。

例如，设A 为半径为 10 的平面圆，且$x \in A$。定义

$$B = A \times \{0, 1\} \cup \{x\} \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^3$$

由两条平行圆和一条线段连接而成。注意，B是一个连通空间，第一贝蒂数为 2。根据定理4.13，当$r < 1$时，H_1(Rips(B,r))的秩也为 2。然而，对于 $\in (1, 2)$，在不可数多个点对 $\{y\} \times \{0, 1\}$（其中$y \in A \setminus \{x\}$）处达到的局部极小值会在圆上“堆积”，从而终止一个一维同调类，并使H_1(Rips(B,r))的秩在$r = 1$时降至 1。

参考文献

[1] M. Adamaszek, H. Adams. 圆的 Vietoris-Rips 复形。《太平洋数学杂志》290 (2017)，1–40。[2] M. Adamaszek、H. Adams 和 S. Reddy：椭圆的 Vietoris-Rips 复形，《拓扑与分析杂志》11 (2019)，661-690。[3] H. Adams 和 B. Coskunuzer，持久同调的几何方法，待刊于《SIAM 应用代数与几何杂志》（2022）。[4] U. Bauer 和 H. Edelsbrunner，Čech 复形与 Delaunay 复形的 Morse 理论，《美国数学会汇刊》369:5 (2017)，3741–3762。[5] J. Brazas 和 P. Fabel，厚 Spanier 群与第一形状群，《落基山数学杂志》44 (2014) 1415–1444。[6] P. Bubenik 和 J.A. Scott，持久同调的范畴化，《离散与计算几何》51，600–627 (2014)。[7] J. W. Cannon 和 G. R. Conner，一维空间的基本群，《应用拓扑学》153 (2006)，2648–2672。[8] F. Chazal、W. Crawley-Boevey 和 V. de Silva，持久模的可观测结构，《同调、同伦与应用》（2016）18(2): 247–265。[9] F. Chazal、V. de Silva 和 S. Oudot，几何复形的持久性稳定性，《几何专题论文》 (2014) 173: 193。[10] J. Dydak 和 Ž. Virk，关于如下结论的另一种证明：若群可数，则 Peano 连续统的基本群有限表示，《数学公报》46(2011)，第2期。[11] H. Edelsbrunner、D. Letscher 和 A. Zomorodian，拓扑持久性与简化，《离散与计算几何》28(4) (2002)，511–533。[12] Ziqin Feng 和 Naga Chandra Padmini Nukala，尺度为 2 的有限度量空间的 Vietoris-Rips 复形，arXiv:2302.14664。[13] D. Govc，关于同调临界值的定义，《同伦相关结构杂志》11，143–151 (2016)。[14] A. Hatcher，《代数拓扑》。剑桥大学出版社，剑桥，2002。[15] Jean-Claude Hausmann，关于 Vietoris-Rips 复形及度量空间的一种上同调理论。《数学研究年刊》138:175–188，1995。[16] B. Lemež 和 Ž. Virk，选择性 Rips 复形的重构性质，《数学公报》57(2022)，第2卷，73–88。[17] S. Lim、F. M´emoli 和 O.B. Okutan，Vietoris–Rips 持久同调、内射度量空间与填充半径，待刊于《代数与几何拓扑》，2022。[18] N. Saleh、T. Titz Mite 和 S. Witzel，柏拉图立体的 Vietoris-Rips 复形，arXiv:2302.14388。[19] S. Shukla，关于超立方体图的 Vietoris–Rips 复形（尺度为 3），arXiv:2202.02756，2022。[20] Ž. Virk，测地空间的一维内在持久性，《拓扑与分析杂志》12 (2020)，169–207。[21] Ž. Virk，测地空间一维内在持久性的近似及其稳定性，《马德里康普顿斯数学杂志》32 (2019)，195–213。[22] Ž. Virk：Hausmann 猜想的一个反例，《计算数学基础》22(2022)，469–475。[23] Ž. Virk，持久同调中测地线的印迹，《地中海数学杂志》19 (2022)。[24] Ž. Virk，作为神经的 Rips 复形与函子性 Dowker-神经图，《地中海数学杂志》18 (2021)。[25] Ž. Virk，利用选择性 Rips 复形的持久同调检测测地圆，arXiv:2108.07460。卢布尔雅那大学数学与物理学院，Jadranska 21，SI-1000 卢布尔雅那，斯洛文尼亚；以及 IMFM 研究所，Jadranska 19，SI-1000 卢布尔雅那，斯洛文尼亚

电子邮箱地址: peter.gorican@imfm.si

卢布尔雅那大学计算机与信息科学学院，Ve˘cna pot 113，SI-1000卢布尔雅那，斯洛文尼亚，以及 IMFM 研究所，Jadranska 19，SI-1000 卢布尔雅那，斯洛文尼亚电子邮件地址: ziga.virk@fri.uni-lj.si