arXiv:2304.05208v1 [math.DG] 11 Apr 2023

倾斜时空正质量定理

XIAOXIANG CHAI

Abstract. 我们证明了一个适用于具有非紧边界的渐近平坦初始数据集的时空正质量定理。我们构造了一种质量型不变量和边界主导能量条件。我们的证明基于旋量。

1. Introduction

首个正质量定理由 Schoen 和 Yau 在其开创性工作 [SY79] 中借助极小曲面技术证明。该定理指出，如果一个完备流形是渐近平坦的，且具有非负标量曲率，那么一个称为 ADM质量、在无穷远处定义的量是非负的。ADM质量刻画了无穷远处的标量曲率。关于正质量定理已有许多研究： [Wit81], [EHLS16], [ACG 08], [Wan01], [CH03], [Sak21]。这里的列表绝非详尽无遗。

对具有非紧边界的渐近平坦流形的正质量型定理的研究始于 [ABdL16]。因此，平均曲率的影响被纳入无穷远，并在ADM质量中加入了边界项。有关时空和双曲情形的一些发展，参见 [AdL20], [AdLM19], [Cha18], [Cha21] 以及 [AdL22] 。

本文重新审视了具有非紧边界的渐近平坦初始数据集，引入了边界主导条件 (1.2)，并证明了两个时空正质量定理（定理 1.4、1.5）。当初始数据集具有自旋结构时，我们采用了Witten 的旋量论证 [Wit81]（另见 [PT82]），这大大简化了时空正质量定理的证明。在与物理学更为相关的三维情形中，旋性条件自动满足。

初始数据集（M^n， g， p）是一个 n维流形，它是洛伦兹流形（$\mathcal{S}^{n,\,1}$， $\tilde{g}$）中的一个类空超曲面，其中 p 为第二基本形式。爱因斯坦张量（或能量-动量张量） T 的分量 T_{00} 和 T_{0i} 分别称为能量密度 μ 和电流密度 J。令 e_0 为 M 相对于 $\mathcal{S}$ 的未来指向单位法向量，令 e_i 为 M 切空间的一组正交基，并采用如下 p 约定：$p_{ij} = \tilde{g}\,(\nabla_{e_i} e_0,\ e_j)$ 。

由高斯方程给出的能量密度是

$$2\mu = R_g + (\mathrm{tr}_g\, p)^2 - |p|_g^2$$

2020 *Mathematics Subject Classification.* 53C50,83C05.*Key words and phrases.* 倾斜主导能量条件、时空正质量定理、旋量、质量、线性动量。

以及根据高斯-科达齐方程得出的电流密度为

$$J = \operatorname{div} p - g\mathrm{d}(\operatorname{tr}_g p).$$

定义 1.1。 我们称 (M, g, p) 满足内部主导能量条件，如果

$$\mu \geqslant |J|. \tag{1.1}$$

如果 $\partial M \neq \emptyset$，令 η 为 M 中 ∂M 的外法向量， $H_{\partial M} = \operatorname{div}_{\partial M} \eta$。如果$(M, g, p)$ 满足倾斜边界主导能量条件，我们称其为七码

$$H_{\partial M} \pm \cos\theta \operatorname{tr}_{\partial M} p \geqslant \sin\theta |p(\eta, \cdot)^\top| \ on\ \partial M, \tag{1.2}$$

其中 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 是一个常角， $p(\eta, \cdot)^\top$ 表示 *1*-形式 $p(\eta, \cdot)$ 切于 ∂M 的分量。

倾斜边界主导能量条件 (1.2) 推广了 [AdLM19] 中的切向边界主导能量条件 ($\theta = \pm\frac{\pi}{2}$) 和法向边界主导能量条件 ($\theta = 0$)。现在我们回顾带有非紧致边界的渐近平坦初始数据组的定义，以及其 ADM 能量和线性动量 [AdLM19]。

定义 1.2。 我们称初始数据集 (M, g, p) 具有非紧边界的渐近平坦性，如果存在一个紧集 K 使得 M 与欧氏半空间 $\mathbb{R}^n_+ \backslash B_1$ 微分同胚，并且

$$|g - \delta| + |x||\partial g| + |x|^2|\partial^2 g| + |x||p| + |x|^2|p| = o(r^{-\frac{n-2}{2}}), \tag{1.3}$$

其中 B_1 是一个标准欧几里得球。

定义 1.3。 定义为的量

$$E = \lim_{r\to\infty} \left[\int_{S^{n-1,r}_+} (g_{ij,j} - g_{jj,i})\nu^i - \int_{S^{n-2,r}} e_{\alpha n}\vartheta^\alpha \right],$$

and

$$P_i = 2\int_{S^{n-1,r}_+} \pi_{ij}\nu^j.$$

分别称为 *ADM* 能量和 *ADM* 线性动量。在这里， ν 是 $S^{n-1}{}_+{}^{,r}$ 的单位法向量， ϑ 是 $S^{n-2,r}$ 在 ∂M 中的法向量，且为 $\pi = p - g\mathrm{tr}_g p$。记 $\hat{} P = (P_1, \ldots, P_{n-1})$，其中 $S^{n-1}{}_+{}^{,r}$ 是半径为 r 的坐标球的上半部分，且 $S^{n-2,r} = \partial S^{n-1}{}_+{}^{,r}$ 。

请注意，我们在ADM线性动量中包含了 P_n 。这与 [AdLM19] 相比有所不同。我们有以下两个时空正质量定理。

定理 1.4。 如果 (M, g) 是自旋的，并且 (M, g, p) 满足内部主导能量条件 (1.1) 和倾斜边界主导能量条件 (1.2)，其中 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$ 非零，则

$$E \pm \cos\theta P_n \geqslant \sin\theta |\hat{P}|. \tag{1.4}$$

该定理的特殊情形 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 归功于 [AdLM19]。正如我们稍后将看到的，(1.4) 与能量-动量向量 (2.1) 有关，而定理 1.4 的证明已经蕴含了下面这个特殊情形。

定理1.5。 若 M 是自旋， $\mu \geqslant |J|$ 且 $H \pm \mathrm{tr}_{\partial M} p \geqslant 0$，则

$$E \pm P_n \geqslant 0. \tag{1.5}$$

定理的时间对称情形 $p = 0$ 最初发表于 [ABdL16]，其中也给出了一种极小曲面证明。大致思路是：假设能量（质量） E 为负，我们可以扰动度量，使其成为调和平坦的，并使标量曲率和边界的平均曲率严格为正。然后，边界 ∂M 与一个渐近平行于 ∂M 的平面充当障碍物，我们可以找到一张面积极小极小曲面，它渐近于夹在两者之间的一个坐标平面。随后，在稳定极小平面上应用高斯-博内定理，便与标量曲率和平均曲率的非负性相矛盾。作者 [Cha18]给出了另一种证明。该证明改用自由边界极小曲面。假设 $E < 0$，我们可以类似地构造一张夹在两个坐标半平面之间的自由边界面积极小曲面。该曲面的存在同样与高斯-博内定理相矛盾。

观察这两部作品，应当可以得出结论：这两个使用极小曲面的证明实际上是在 p 消失时的两个特殊情形下的证明：（I） $\theta = \pi/2$ 在 [Cha18]中；（II）或 $\theta = 0$ 在 [ABdL16] 中。这表明，对于情形$p \equiv 0$，同样也存在一种通过具有毛细边界条件的稳定极小曲面进行证明的方法。

毛细作用也自然地出现在格罗莫夫二面角刚性猜想 [Gro14]中。格罗莫夫二面角刚性猜想的欧几里得版本指出：如果一个黎-曼多面体具有非负标量曲率、平均凸面，并且其二面角小于其欧几里得模型中的二面角，那么它必定是平坦的。格罗莫夫二面角刚性的最初动机，是在弱意义下刻画非负标量曲率；它也是正质量定理的一种局部化。李 [Li20] 在某些特殊情形下证实了这一猜想，而他所采用的方法正是带有毛细边界条件的极小曲面。利用毛细边界边际外陷曲面 [ALY20]直接建立实施 [EHLS16] 定理 1.4 是合理的。关于正质量定理的简明版本，请参见附录 A。

本文的组织结构如下：

在第 2 节中，我们提出了与质量相关的定理1.4和1.5，并证明了不变性。在第 3 节中，我们汇总了手征算子 (3.2) 和超曲面狄拉克算子的基础知识，包括最重要的薛定谔-利希涅罗维奇公式。在第 4 节中，我们给出了定理1.4和1.5的证明。我们还给出了一些关于刚性的部分结果，即何时在 (1.4) 和 (1.5) 中等号成立。参见命题 4.3 和 4.6。

致谢

我谨向 Xueyuan Wan（CQUT，重庆）、Tin Yau Tsang（UCI）和 Martin Li（CUHK）对各种问题的讨论，以及向 Levi Lima（UFC，巴西）转达预印本 [AdL22] 表示感谢。该预印本将定理 1.5 置于定理 1.4 更一般的背景下。本文部分工作是在我作为韩国高等研究院（KIAS）成员期间完成的，资助编号为 MG074402。我还得到韩国国家研究基金会资助项目 No. 2002R1C1C1013511 的部分支持。

2. The invariance of mass

本节基于 [HH96] 中进行的哈密顿分析，介绍（2.1）中的能量-动量向量（E^θ, P_i^θ），并指出，在选择合适的空隙函数和移位向量时，会出现倾斜主导能量条件 (1.2)。

2.1. 哈密顿表述与质量不变性。 目前假设M是紧致的，我们沿未来指向的类时向量场 T的方向，对 $\mathcal{S}^{n,1}$中的初始数据集（M, g, p）作无穷小变形。令 ϕ_s 为 T的局部流，$M_s = \phi_s(M)$。我们假设， M_s 的单位法向量 e_0 始终切于由 ∂M_s所分叶的类时超曲面。令 $T = Ne_0 + X$，其中 N 称为**闵可夫斯基函数**，而切于 M 的向量场 X 称为**移位向量**，则沿着 M 的哈密顿量为（见 [HH96]）

$$\mathcal{H}(N, X) = \int_M [N\mu + 2J(X)] + 2\int_{\partial M} [NH - p(X, \eta) + \mathrm{tr}_g\, p\langle X, \eta\rangle].$$

现在，通过在哈密顿量的边界项中选取$N = 1$和 $X = \cos\theta\eta + \sin\theta\tau$（其中 τ切于 ∂M），即可得到倾斜边界主导能量条件（1.2）。事实上，

$$\begin{aligned} &NH - p(X, \eta) + \mathrm{tr}_g\, p\langle X, \eta\rangle \\ =&H - \cos\theta p(\eta, \eta) - \sin\theta p(\tau, \eta) + \cos\theta\, \mathrm{tr}_g\, p \\ =&H + \cos\theta\, \mathrm{tr}_{\partial M}\, p - \sin\theta p(\tau, \eta) \\ \geqslant&0 \end{aligned}$$

如果（1.2）成立。

现在令（M， g， p）为背景（$\mathbb{R}^n_+$， δ，0），我们取 N为常数，并令 X为 $\mathbb{R}^n_+$的平移型基灵向量场。我们考虑（M， $\delta + \varepsilon g$， εp）上的哈密顿量 $\mathcal{H}_\varepsilon$（N， X），其中（g， p）满足（1.3）。我们对 $\mathcal{H}_\varepsilon$关于 ε作泰勒展开。由于 M 是非紧的，通常一阶项不会消失。这些项在无穷远处的取值正是定义1.3中给出的项。关于这些事实的更完整论述，参见[HH96], [Mic11] 和 [AdLM19]。

我们定义荷密度，它是一个1-形式，

$$\begin{aligned} &\mathbb{U}_{(g,k)}(N, X) \\ =&N(\mathrm{div}_\delta\, g - \mathrm{d}(\mathrm{tr}_\delta\, g)) - (g - \delta)(\nabla^\delta N, \cdot) \\ &+ \mathrm{tr}_\delta(g - \delta)\mathrm{d}N + 2(p(X, \cdot) - \mathrm{tr}_\delta\, p\langle\cdot, X\rangle_\delta). \end{aligned}$$

令 $\mathcal{T}$为闵可夫斯基时空中平移型基灵向量场的空间，记为 $\mathbb{R}^{1,\,n}$。容易看出， $\mathcal{T}$ 可与 $\mathbb{R} \oplus W$相对应，其中 $\mathbb{R}$ 因子表示沿选定类时方向 ∂_0 的平移，而 W是由与 ∂_0 正交的（$\mathbb{R}^n$， δ）的所有平移型基灵向量场张成的线性空间。每个 $T \in \mathcal{T}$都可以唯一地写成 $T = N\partial_0 + X^i\partial_i$ 的形式，其中 $N \in \mathbb{R}$和 $X^i \in \mathbb{R}$。我们定义能量-动量泛函如下：

$$\mathcal{M}(T) = \lim_{r\to\infty} \left[\int_{S^{n-1,r}_+} \mathbb{U}_{(g,k)}(N, X) + \int_{S^{n-2,r}} Ng(\bar\eta, \bar\vartheta)\right].$$

已在 [AdLM19, 命题 3.3] 中证明，能量-动量泛函$\mathcal{M}(T)$ 与在无穷远处选取的渐近坐标（固定 ∂_0）无关。

对于任意 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$，我们定义

$$E^\theta = \mathcal{M}(\tfrac{1}{\sin\theta}\partial_0 + \tfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\partial_n), P_i^\theta = \mathcal{M}(\partial_i) \text{ for any } i \neq n. \tag{2.1}$$

容易验证，$E = \mathcal{M}(\partial_0)$、$P_i = \mathcal{M}(\partial_i)$，其中（$E, P$）如定义 1.3 中所定义，因此 $E^\theta = {}^{1}\!/_{\text{正弦}\,\theta} E + {}^{\text{余弦}\,\theta}\!/_{\text{正弦}\,\theta} P_n$。我们有如下结论。

定理 2.1。对于任意渐近平坦初始数据组（M, g, k），对于任意$\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$，向量（$E^\theta, P^\theta$）$\in \mathbb{R}^{1,n-1}$ 定义良好（至多与SO_{1}中的$n-1$某个元素复合）。特别地，

$$-(E^\theta)^2 + \sum_{i\neq n}(P_i^\theta)^2$$

并且因果类型$(E^\theta, P^\theta) \in \mathbb{R}^{1,n-1}$ 计算(E^θ, P^θ)时不依赖于无穷远处的坐标图。

证明。令 $\tilde{\partial}_0 = {}^{1}\!/_{\text{正弦}\,\theta}(\partial_0 + \cos\theta\partial_n)$，$\tilde{\partial}_n = {}^{1}\!/_{\text{正弦}\,\theta}(\cos\theta\partial_0 + \partial_n)$ 和 $\tilde{\partial}_i = \partial_i$。存在一个从$(\partial_0, \partial_1, \ldots, \partial_n)$ 到$(\partial_0, \partial_1, \ldots, \partial_n)$ 的洛伦兹变换，使得

$$\begin{pmatrix} \tilde{\partial}_0 \\ \tilde{\partial}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\rho & \sinh\rho \\ \sinh\rho & \cosh\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_0 \\ \partial_n \end{pmatrix},$$

在由 $\{\partial_0, \partial_n\}$ 张成的平面上，ρ 由 $\cosh\rho = {}^{1}\!/_{\sin\theta}$ 定义。因此，$(\tilde{\partial}_0, \tilde{\partial}_1, \ldots, \tilde{\partial}_n)$ 给出了闵可夫斯基时空 $\mathbb{R}^{1,n}$ 的一个新坐标系。令 $(\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) \in \mathbb{R}^{1,n}$，其中 $\tilde{x}$ 用新坐标表示。显然，

$$-(\tilde{x}_0)^2 + \sum_{i\neq n}(\tilde{x}_n)^2$$

在保持 $\tilde{\partial}_n$不变的 $\mathbb{R}^{1,n}$ 的线性洛伦兹变换下保持不变。这些变换作为特殊洛伦兹群 $SO_{1,n}$ 的一个子群，与$SO_{1,n-1}$同构。上述讨论适用于

$$(\mathcal{M}(\tilde{\partial}_0), \mathcal{M}(\widetilde{\partial_1}), \ldots, \mathcal{M}(\tilde{\partial}_{n-1}), \mathcal{M}(\tilde{\partial}_n)),$$

这就是我们的定理。 □

对于 $\theta = 0$ 的情形，证明更简单。

定理 2.2。给定任意渐近平坦初始数据组 (M, g, k)，量$E \pm P_n$ 是 $\mathbb{R}^n_+$ 等距变换下的数值不变量，其中包括该 $(n-1)$维超平面 $\partial\mathbb{R}^n_+$的旋转和平移。

证明。注意，E 和 P_n 在超平面 $\{\partial_1, \ldots, \partial_{n-1}\}$的旋转和平移下保持不变，参见 [AdLM19，命题 3.3]。□

3. Hypersurface Dirac operator

本节回顾超曲面狄拉克旋量及相关的薛定谔–利希尼罗维茨公式（3.1）。我们介绍手征算子（3.2），并在引理 3.6 中将边界条件（3.3）与边界 ∂M处的几何量联系起来。

3.1. 超曲面狄拉克算子。旋量几何的标准参考文献是 [LM89], ，我们也参阅 [PT82], [HZ03]。记 $\mathbb{S}$ 为 $\mathcal{S}$的局部旋量丛。由于 M 是自旋的， $\mathbb{S}$ 在 M上全局存在。这个旋量丛 $\mathbb{S}$ 称为 M的˜超曲面旋量丛。令 ∇ 和 ∇ 分别表示 $\tilde{g}$ 和 g的 Levi-Civita 联络；我们用相同的符号表示这些联络在超曲面旋量丛上的提升。

存在一个厄米内积 $(\cdot,\cdot)$，定义在 $\mathbb{S}$ 上、位于 M 之上，并且与˜自旋联络 ∇ 相容。对于 $\mathcal{S}$ 的任意1-形式 ω 以及超曲面旋量ϕ、 ψ，我们有

$$(\omega\cdot\phi,\psi)=(\phi,\omega\cdot\psi)$$

其中，点号 $\cdot$ 表示克利福德乘法。此内积不是正定的。然而，在 $\mathbb{S}$ 上存在一个正定的厄米内积，定义为 M бойичэ

$$\langle\phi,\psi\rangle=(e^0\cdot\phi,\psi)$$

其中 e^0 是指向未来的单位类时法向量，垂直于 M。我们看到，

$$\langle e^0\cdot\phi,\psi\rangle=\langle\phi,e^0\cdot\psi\rangle,\ \langle e^i\cdot\phi,\psi\rangle=-\langle\phi,e^i\cdot\psi\rangle,$$

其中， $\{e^i\}$ 是 M上的正交规范基 $\{e_i\}$ 的对偶标架。则，˜旋量联络 ∇ 在 $\mathbb{S}$ 上与 ∇ 的关系为

$$\tilde{\nabla}_i=\nabla_i-\tfrac{1}{2}p_{ij}e^j\cdot e^0\cdot.$$

这本质上是旋量高斯方程。此外，联络 ∇ 与 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 和 $\nabla_i(e^0\cdot\phi)=e^0\cdot\nabla_i\phi$ 相容。

超曲面 Dirac（或 Dirac-Witten）算子随后定义为

$$\tilde{D}=e^i\cdot\tilde{\nabla}_i=D+\tfrac{1}{2}\operatorname{tr}_g pe^0\cdot,$$

˜其中 D 是标准狄拉克算子。我们将旋量 ϕ （满足 $D\phi=0$ ）称为（时空）调和旋量。

当我们的时空 $\mathcal{S}$ 维数为 $3+1$时，局部旋量丛 $\mathbb{S}$ 可通过特殊线性群 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 的表示论得到更简单的代数描述。在这种情况下，该理论更容易理解，参见 [PT82，第2]节。

˜ ˜我们现在汇总关于 ∇ 和 D 的相关事实。

˜**引理 3.1** ([PT82])。 ∇ 的伴随为

$$\tilde{\nabla}_i^*\psi=-\nabla_i\psi-\tfrac{1}{2}p_{ij}e^j\cdot e^0\psi,$$
$$\mathrm{d}(\langle\phi,\psi\rangle*e^i)=[\langle\tilde{\nabla}_i\phi,\psi\rangle-\langle\phi,\tilde{\nabla}_i^*\psi\rangle]*1.$$

˜此处 $*$ 表示霍奇算子。狄拉克算子 D 是自伴的，且

$$\mathrm{d}(\langle e^i\cdot\phi,\psi\rangle*e^i)=(\langle\tilde{D}\phi,\psi\rangle-\langle\phi,\tilde{D}\psi\rangle)*1.$$

薛定谔-利希涅罗维奇公式为

$$\tilde{D}^2-\tilde{\nabla}^*\tilde{\nabla}=\tfrac{1}{2}(\mu-J\cdot e^0\cdot).$$

薛定谔-利希涅罗维奇公式的积分形式是引理 3.1 的直接推论。

定理 3.2 ([PT82])。 设Ω是一个带边界的紧流形，对于任意光滑旋量 ϕ ，有

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |\tilde{D}\phi|^2-\int_\Omega |\tilde{\nabla}\phi|^2+\int_{\partial\Omega}[\langle e^i\cdot\tilde{D}\phi,\phi\rangle+\langle\phi,\tilde{\nabla}_i\phi\rangle]*e^i\\ =&\tfrac{1}{2}\int_\Omega\langle(\mu-J\cdot e^0\cdot)\phi,\phi\rangle.\end{aligned}\tag{3.1}$$

3.2. **边界手征算子**。我们固定这一约定。本文用希腊字母 α,β,γ 表示其余部分中不属于 n 的指标。向量 e_n 表示 ∂M 在 M 中的外法向量，而 h 表示由 $h_{\alpha\beta}=\langle\nabla_{e_\alpha}e_n,e_\beta\rangle$给出的 ∂M 的第二基本形式，于是 $H:=H_{\partial M}=\sum_\alpha h_{\alpha\alpha}$。

以下手征算子 Q 由 [AdL22 中的定义 3.3]引入，其中 $e^0\cdot e^n\cdot$ 被复体积元的克利福德乘法所取代。

定义 3.3. 令 $\theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，定义 Q 为

$$Q\phi=\cos\theta e^0\cdot e^n\cdot\phi+\sqrt{-1}\sin\theta e^n\cdot\phi.\tag{3.2}$$

在 (3.2) 中，我们要求 $\theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，但在 (1.2) 中，我们要求 $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$。原因是，在定理 1.4 的证明后续部分，我们需要选择 θ 的符号。下面列出 Q 的一些交换性质和反交换性质。

引理 3.4。 对于算子 Q，我们有

(1) $Q^2=1$ *and* Q *is self-adjoint;*
(2) $e^n\cdot Q+Q\cdot e^n=-2\sqrt{-1}\sin\theta$*;*
(3) $e^\alpha\cdot e^\beta\cdot e^n\cdot Q+Qe^\alpha\cdot e^\beta\cdot e^n\cdot=-2\sqrt{-1}\sin\theta e^\alpha\cdot e^\beta\cdot$*;*
(4) $e^0\cdot Q+Q\cdot e^0=0$*;*
(5) $e^\alpha\cdot e^\beta\cdot e^0\cdot Q+Qe^\alpha\cdot e^\beta\cdot e^0\cdot=0$*;*
(6) $e^\alpha\cdot Q\phi-Q(e_\alpha\cdot\phi)=2\sqrt{-1}\sin\theta e^\alpha\cdot e^n\cdot\phi$*;*
(7) $e^\alpha\cdot Q\phi+Q(e_\alpha\cdot\phi)=2\cos\theta e^\alpha\cdot e^0\cdot e^n\cdot\phi$
(8) $e^\alpha\cdot e^n\cdot Q+Q\cdot e^\alpha\cdot e^n=0$*;*
(9) $e^n\cdot e^0\cdot Q+Qe^n\cdot e^0=-2\cos\theta$*;*
(10) $e^\alpha\cdot e^\beta\cdot e^0\cdot e^n\cdot Q+Qe^\alpha\cdot e^\beta\cdot e^0\cdot e^n\cdot=2\cos\theta e^\alpha\cdot e^\beta\cdot$.
(11) $e^\alpha\cdot e^0\cdot Q+Qe^\alpha\cdot e^0=2\sqrt{-1}\sin\theta e^\alpha\cdot e^0\cdot e^n$*;*
(12) *For* $\alpha\neq\beta$, $e^\alpha\cdot e^\beta\cdot Q=Qe^\alpha\cdot e^\beta\cdot$*;*
(13) $e^\alpha\cdot e^n\cdot e^0\cdot Q=Q\cdot e^\alpha\cdot e^n\cdot e^0$.

证明。 所有这些结论都可由 Q在（3.2）中的定义直接计算得到。作为示例，我们仅证明最后一项。根据（3.2）以及克利福德乘法的反交换性质，

$$\begin{aligned}e^\alpha\cdot e^n\cdot e^0\cdot Q\phi&=\cos\theta e^\alpha\cdot e^n\cdot e^0\cdot e^0\cdot e^n\cdot\phi+\sqrt{-1}\sin\theta e^\alpha\cdot e^n\cdot e^0\cdot e^n\cdot\phi\\&=-\cos\theta e^\alpha\cdot\phi+\sqrt{-1}\sin\theta e^\alpha\cdot e^0\cdot\phi,\\Q(e_\alpha\cdot e^n\cdot e^0\cdot\phi)&=\cos\theta e^0\cdot e^n\cdot e^\alpha\cdot e^n\cdot e^0\cdot\phi+\sqrt{-1}\sin\theta e^n\cdot e^\alpha\cdot e^n\cdot e^0\cdot\phi\\&=-\cos\theta e^\alpha\cdot\phi+\sqrt{-1}\sin\theta e^\alpha\cdot e^0\cdot\phi.\end{aligned}$$

因此，我们知道最后一项成立。 □

3.3. **薛定谔-利希涅罗维奇公式中的边界项**。我们计算

$$[\langle e^i \cdot \tilde{D}\phi, \phi\rangle + \langle \phi, \tilde{\nabla}_i \phi\rangle] * e^i$$

沿着 ∂M 当时

$$Q\phi = \pm\phi. \tag{3.3}$$

首先，我们计算满足 (3.3) 的旋量的几个内积。

引理 3.5。如果一个旋量 ϕ 沿着 ∂M 满足 (3.3)，那么

$$\langle \sqrt{-1} e^n \cdot \phi, \phi\rangle = \pm \sin\theta |\phi|^2, \tag{3.4}$$

$$\langle e^n \cdot e^0 \cdot \phi, \phi\rangle = \mp \cos\theta |\phi|^2, \tag{3.5}$$

$$\langle e^\alpha \cdot e^0 \cdot \phi, \phi\rangle = \mp \langle \sqrt{-1} \sin\theta e^\alpha \cdot e^n \cdot e^0 \cdot \phi, \phi\rangle. \tag{3.6}$$

证明。第一项 (3.4) 已经出现在 [AdL22 的命题 3.11] 中。由引理 3.4，我们有

$$\langle \sqrt{-1} e^n \cdot Q\phi, \phi\rangle + \langle Q \cdot \sqrt{-1} e^n \cdot \phi, \phi\rangle = 2\sin\theta |\phi|^2.$$

由于 Q 是自伴的，因此

$$\langle \sqrt{-1} e^n \cdot Q\phi, \phi\rangle + \langle \sqrt{-1} e^n \cdot \phi, Q\phi\rangle = 2\sin\theta |\phi|^2.$$

由于 $Q\phi = \pm\phi$，我们有

$$\pm 2\langle \sqrt{-1} e^n \cdot \phi, \phi\rangle = 2\sin\theta |\phi|^2,$$

这是第一项。其余项可由引理 3.4 中相应的关系类似地推出。□

以下引理将薛定谔–利希涅罗维奇公式 (3.1) 的积分形式中的边界项与沿边界的平均曲率 H、$\mathrm{tr}_{\partial M} p$，$p_{nj}$ 联系起来，尤其与倾斜边界主导能量条件 (1.2) 联系起来。

引理 3.6. 如果旋量 ϕ 沿着 ∂M 满足 (3.3)，则

$$\begin{aligned}
&\langle \tilde{\nabla}_{e^n}\phi + e^n \cdot \tilde{D}\phi, \phi\rangle \\
=&\langle D^{\partial M}\phi, \phi\rangle - \tfrac{1}{2} H|\phi|^2 \mp \tfrac{1}{2}\cos\theta \,\mathrm{tr}_{\partial M} p |\phi|^2 \\
&\pm \tfrac{1}{2}\sin\theta \langle \sqrt{-1} p_{n\gamma} e^\gamma \cdot e^n \cdot e^0 \cdot \phi, \phi\rangle.
\end{aligned}$$

证明。令 $D^{\partial M}$ 为一个边界狄拉克算子，定义为

$$D^{\partial M} = e^n \cdot e^\alpha \cdot \nabla^{\partial M}_\alpha.$$

此处，$\nabla^{\partial M}$ 是 ∂M 的内禀自旋联络，明确地定义在 ∂M 上受限于 M 的旋量场上，如同

$$\nabla^{\partial M}_\alpha = \nabla_\alpha - \tfrac{1}{2} h_{\alpha\beta} e^n \cdot e^\beta \cdot .$$

我们计算 $D^{\partial M}\phi$，其中 ϕ 满足 (3.3)，由此可得

$$\begin{aligned}
&D^{\partial M}\phi \\
=&e^n \cdot e^\alpha \cdot (\nabla_\alpha \phi - \tfrac{1}{2} h_{\alpha\beta} e^n \cdot e^\beta \cdot \phi) \\
=&e^n \cdot (D\phi - e^n \cdot \nabla_{e^n}\phi) + \tfrac{1}{2} H\phi \\
=&e^n \cdot D\phi + \nabla_{e^n}\phi + \tfrac{1}{2} H\phi \\
=&e^n \cdot (\tilde{D}\phi - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{tr}_g\, p e^0 \cdot \phi) + (\tilde{\nabla}_{e^n}\phi + \tfrac{1}{2} p_{nj} e^j \cdot e^0 \cdot \phi) + \tfrac{1}{2} H\phi
\end{aligned}$$

因此我们有

$$\begin{aligned}&\langle\tilde{\nabla}_{e^n}\phi+e^n\cdot\tilde{D}\phi,\phi\rangle\\=&\langle D^{\partial M}\phi,\phi\rangle+\langle\tfrac{1}{2}\operatorname{tr}_g pe^n\cdot e^0\cdot\phi-\tfrac{1}{2}p_{nj}e^j\cdot e^0\cdot\phi,\phi\rangle-\tfrac{1}{2}H|\phi|^2.\end{aligned}$$

由 (3.5)，我们有

$$\begin{aligned}&\big\langle\tfrac{1}{2}\operatorname{tr}_g pe^n\cdot e^0\cdot\phi-\tfrac{1}{2}p_{nj}e^j\cdot e^0\cdot\phi,\phi\big\rangle\\=&\big\langle\tfrac{1}{2}(\operatorname{tr}_{\partial M}pe^n+p_{nn}e^n)\cdot e^0\cdot\phi-\tfrac{1}{2}(p_{n\alpha}e^\alpha+p_{nn}e^n)\cdot e^0\cdot\phi,\phi\big\rangle\\=&\tfrac{1}{2}\operatorname{tr}_{\partial M}p\langle e^n\cdot e^0\cdot\phi,\phi\rangle-\tfrac{1}{2}\langle p_{n\alpha}e^\alpha\cdot e^0\cdot\phi,\phi\rangle\\=&\mp\tfrac{1}{2}\cos\theta\operatorname{tr}_{\partial M}p|\phi|^2-\tfrac{1}{2}\langle p_{n\alpha}e^\alpha\cdot e^0\cdot\phi,\phi\rangle\\=&\mp\tfrac{1}{2}\cos\theta\operatorname{tr}_{\partial M}p|\phi|^2\mp\tfrac{1}{2}\sin\theta\langle\sqrt{-1}p_{n\alpha}e^\alpha\cdot e^0\cdot e^n\cdot\phi,\phi\rangle\end{aligned}$$

这由（3.5）和（3.6）可得。 □

4. THE POSITIVE MASS THEOREM

借助前几节的结果，本节我们完成定理1.4和1.5的证明。我们给出质量为零的一些推论，即，

$$E\pm\cos\theta P_n=\sin\theta|\hat{P}|. \tag{4.1}$$

参见命题 4.3 和 4.6。

4.1. 时空调和旋量的存在性。 当初始数据集 (M,g,p) 是平坦且全测地的，即 (M,g,p) 是 $(\mathbb{R}^n_+,\delta,0)$ 时，我们定义

$$\bar{Q}\phi=\cos\theta\mathrm{d}x^0\cdot\mathrm{d}x^n\cdot\phi+\sqrt{-1}\sin\theta\mathrm{d}x^n\cdot\phi.$$

注意，$\bar{Q}^2=I$ 的特征值为 ±1。标准超曲面旋量丛 $\mathbb{S}$ 在 $(\mathbb{R}^n_+,\delta,0)$ 上分裂为两个特征子丛，而满足以下条件的旋量 ϕ

$$\bar{Q}\phi=\pm\phi \tag{4.2}$$

与我们的问题密切相关。

我们回顾如下时空调和旋量 ϕ 的存在性：它渐近于满足 (4.2) 的常旋量 ϕ_0，并从 (3.1) 中的边界积分提取质量。根据 [AdLM19，命题 5.3] 及其后续讨论，我们有如下结论。

定理 4.1。 假设(M,g,k)满足主导能量条件 (1.1)和(1.2)，对任意满足(4.2) 的非零常旋量 ϕ_0，存在一个旋量 ϕ，它渐近于 ϕ_0 并满足

$$\begin{aligned}&\tilde{D}\phi=0\ in\ M,\\&Q\phi=\pm\phi\ on\ \partial M.\end{aligned}$$

4.2. **正质量定理的证明**。利用定理 4.1 在(3.1) 中的 ϕ ，我们可以给出定理 1.2 的证明，而该证明同样适用于定理 1.5。

定理 *1.4* 的证明。令 M_r 为由 ∂M 和 $S^{n-1}_{,r}$ $^{+}$围成的紧区域。根据薛定谔-利希涅罗维奇公式 (3.1) 的积分形式，对于任意旋量 ϕ，有

$$\begin{aligned}&\int_{M_r}|\tilde{D}\phi|^2-\int_{M_r}|\tilde{\nabla}\phi|^2+\int_{\partial M_r}[\langle e^i\cdot\tilde{D}\phi,\phi\rangle+\langle\phi,\tilde{\nabla}_i\phi\rangle]*e^i\\=&\tfrac{1}{2}\int_{M_r}\langle(\mu-J\cdot e^0\cdot)\phi,\phi\rangle.\end{aligned}$$

注意， ∂M_r 由两部分构成：一部分位于 M 的内部，另一部分位于 ∂M上。我们要求 $Q\phi=\pm\phi$ 沿着 ∂M，因此由引理 3.6 可得，

$$\begin{aligned}&\int_{M_r}|\tilde{D}\phi|^2-\int_{M_r}|\tilde{\nabla}\phi|^2+\int_{\partial M_r\cap\operatorname{int}M}[\langle e^i\cdot\tilde{D}\phi,\phi\rangle+\langle\phi,\tilde{\nabla}_i\phi\rangle]*e^i\\&+\int_{\partial M_r\cap\partial M}\langle D^{\partial M}\phi,\phi\rangle-\tfrac{1}{2}H|\phi|^2\mp\tfrac{1}{2}\cos\theta\operatorname{tr}_{\partial M}p|\phi|^2\\&\pm\int_{\partial M_r\cap\partial M}\tfrac{1}{2}\sin\theta\langle\sqrt{-1}p_{n\gamma}e^\gamma\cdot e^n\cdot e^0\cdot\phi,\phi\rangle\\=&\tfrac{1}{2}\int_{M_r}\langle(\mu-J\cdot e^0\cdot)\phi,\phi\rangle.\end{aligned}$$

由此可知， $\langle D^{\partial M}\phi,\phi\rangle=0$来自 [CH03, (4.27)]（其中将 ε替换为 Q）。我们有

$$\begin{aligned}&\int_{\partial M_r\cap\operatorname{int}M}[\langle e^i\cdot\tilde{D}\phi,\phi\rangle+\langle\phi,\tilde{\nabla}_i\phi\rangle]*e^i\\\to&\tfrac{1}{4}(E\pm\cos\theta P_n)|\phi|^2\pm\sin\theta P_\gamma\langle\sqrt{-1}\mathrm{d}x^\gamma\cdot\mathrm{d}x^n\cdot\mathrm{d}x^0\cdot\phi_0,\phi_0\rangle_\delta\end{aligned}$$

由于 $r\to\infty$。我们计算得

$$\begin{aligned}&[\langle e^i\cdot\tilde{D}\phi,\phi\rangle+\langle\phi,\tilde{\nabla}_i\phi\rangle]*e^i\\=&\langle\nu^\flat\cdot\tilde{D}\phi,\phi\rangle+\langle\phi,\tilde{\nabla}_\nu\phi\rangle\\=&\langle\nu^\flat\cdot D\phi,\phi\rangle+\langle\phi,\nabla_\nu\phi\rangle\\&+\tfrac{1}{2}(\operatorname{tr}_g p\nu^i-p_{ij}\nu^j)\langle e^i\cdot e^0\cdot\phi,\phi\rangle\\=&\langle\nu^\flat\cdot D\phi,\phi\rangle+\langle\phi,\nabla_\nu\phi\rangle-\tfrac{1}{2}\pi_{ij}\nu^j\langle e^i\cdot e^0\cdot\phi,\phi\rangle,\end{aligned}$$

其中 ν是 $\partial M_r\cap\operatorname{int}M$的单位法向量，方向指向无穷远处。由于 ϕ收敛到常旋量 ϕ_0，我们知道，当 $r\to\infty$时

$$\int_{\partial M_r\cap\operatorname{int}M}\langle\nu^\flat\cdot D\phi,\phi\rangle+\langle\phi,\nabla_\nu\phi\rangle\to\tfrac{1}{4}E|\phi_0|^2_\delta$$

来自 [ABdL16，第 5 节。2]和

$$-\tfrac{1}{2}\int_{\partial M_r\cap\operatorname{int}M}\pi_{ij}\nu^j\langle e^i\cdot e^0\cdot\phi,\phi\rangle\to-\tfrac{1}{4}P_i\langle\mathrm{d}x^i\cdot\mathrm{d}x^0\cdot\phi_0,\phi_0\rangle_\delta$$

由于 $\langle e^i\cdot e^0\cdot\phi,\phi\rangle$ 收敛到常数 $\langle \mathrm{d}x^i\cdot \mathrm{d}x^0\cdot\phi_0,\ \phi_0\rangle_\delta$。这里 δ 是标准欧几里得度量。由 (3.5) 可知 that

$$P_n\langle \mathrm{d}x^n\cdot \mathrm{d}x^0\cdot\phi_0,\phi_0\rangle_\delta = \mp\cos\theta P_n|\phi_0|_\delta^2,$$

以及由 (3.6) 可得

$$P_\gamma\langle \mathrm{d}x^\gamma\cdot \mathrm{d}x^0\cdot\phi_0,\phi_0\rangle_\delta = \mp\sin\theta P_\gamma\langle\sqrt{-1}\mathrm{d}x^\gamma\cdot \mathrm{d}x^n\cdot \mathrm{d}x^0\cdot\phi_0,\phi_0\rangle_\delta. \tag{4.3}$$

由下面的引理，我们可以选取常旋量 ϕ_0 以及 θ 的符号，使得

$$P_\gamma\langle \mathrm{d}x^\gamma\cdot \mathrm{d}x^0\cdot\phi_0,\phi_0\rangle_\delta = \sin|\theta||\hat{P}||\phi_0|_\delta.$$

因此，当 $r\to\infty$ 取极限时，我们有

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{4}(E\pm\cos\theta P_n-\sin|\theta||\hat{P}|)|\phi_0|_\delta^2\\ =&\tfrac{1}{2}\int_M\langle(\mu-J\cdot e^0\cdot)\phi,\phi\rangle\\ &+\tfrac{1}{2}\int_{\partial M}(H\pm\cos\theta\,\mathrm{tr}_{\partial M}\,p)|\phi|^2\pm\sin\theta\langle\sqrt{-1}p_{n\gamma}e^\gamma\cdot e^n\cdot e^0\cdot\phi,\phi\rangle.\end{aligned} \tag{4.4}$$

由主导能量条件 (1.1) 和 (1.2)，可得 $E\pm\cos\theta P_n\geqslant\hat{}\sin\ |\theta||P|$. □

引理 4.2. 存在一种对 ϕ_0 的选取以及对 θ 符号的选取，使得

$$\mp\sin\theta P_\gamma\langle\sqrt{-1}\mathrm{d}x^\gamma\cdot \mathrm{d}x^n\cdot \mathrm{d}x^0\cdot\phi_0,\phi_0\rangle_\delta = \sin|\theta||\hat{P}||\phi_0|_\delta.$$

证明。 在此证明中，我们使用平坦度量。设

$$A = P_\alpha\sqrt{-1}\mathrm{d}x^\alpha\cdot \mathrm{d}x^n\cdot \mathrm{d}x^0,$$

¯我们从引理3.4的最后一项得知， Q 与 A对易。因此，它们具有¯相同的特征旋量。于是对于某个 $\phi_0\neq 0$ ，满足 $Q\phi_0=\pm\phi_0$，所以 $A\phi_0=\lambda\phi_0$对于某个 $\lambda\in\mathbb{C}$。容易检查出 A 是厄米的，因此 $\lambda\in\mathbb{R}$。我们通过以下方式计算λ:

$$\begin{aligned}\lambda^2|\phi_0|^2 &= P_\alpha P_\beta\langle\sqrt{-1}\mathrm{d}x^\alpha\cdot \mathrm{d}x^n\cdot \mathrm{d}x^0\cdot\phi_0,\sqrt{-1}\mathrm{d}x^\beta\cdot \mathrm{d}x^n\cdot \mathrm{d}x^0\cdot\phi_0\rangle_\delta\\ &= P_\alpha P_\beta\langle \mathrm{d}x^\alpha\cdot \mathrm{d}x^n\cdot \mathrm{d}x^0\cdot\phi_0,\mathrm{d}x^\beta\cdot \mathrm{d}x^n\cdot \mathrm{d}x^0\cdot\phi_0\rangle_\delta\\ &= P_\alpha P_\beta\langle \mathrm{d}x^n\cdot \mathrm{d}x^\alpha\cdot \mathrm{d}x^0\cdot\phi_0,\mathrm{d}x^n\cdot \mathrm{d}x^\beta\cdot \mathrm{d}x^0\cdot\phi_0\rangle_\delta\\ &= P_\alpha P_\beta\langle \mathrm{d}x^\alpha\cdot \mathrm{d}x^0\cdot\phi_0,\mathrm{d}x^\beta\cdot \mathrm{d}x^0\cdot\phi_0\rangle_\delta\\ &= P_\alpha P_\beta\langle \mathrm{d}x^0\cdot \mathrm{d}x^\alpha\cdot\phi_0,\mathrm{d}x^0\cdot \mathrm{d}x^\beta\cdot\phi_0\rangle_\delta\\ &= P_\alpha P_\beta\langle \mathrm{d}x^\alpha\cdot\phi_0,\mathrm{d}x^\beta\cdot\phi_0\rangle_\delta\\ &= -P_\alpha P_\beta\langle \mathrm{d}x^\alpha\cdot \mathrm{d}x^\beta\cdot\phi_0,\phi_0\rangle_\delta\\ &= -P_\alpha P_\beta\langle\tfrac{1}{2}(\mathrm{d}x^\beta\cdot \mathrm{d}x^\alpha\cdot+\mathrm{d}x^\alpha\cdot \mathrm{d}x^\beta\cdot)\phi_0,\phi_0\rangle_\delta\\ &= |\hat{P}|^2|\phi_0|_\delta^2.\end{aligned}$$

因此 $\lambda=\pm|\hat{}P|$。利用对 ϕ_0 的这一选择，由 (4.3) 可得

$$\begin{aligned}&\langle P_\gamma\mathrm{d}x^\gamma\cdot \mathrm{d}x^n\cdot \mathrm{d}x^0\cdot\phi_0,\phi_0\rangle_\delta\\ =&\mp\sin\theta\lambda|\phi_0|_\delta^2\\ =&(\mp1)(\pm1)|\hat{P}|\sin\theta|\phi_0|_\delta^2.\end{aligned}$$

如果 $|\hat{}P|$ 不为零，那么无论 $Q\phi = \pm\phi$ 中 $\bar{}$ 的符号如何，我们总能通过自由选择 θ 的符号使 $\mp \sin\theta\lambda$ 为正。固定这样的 θ 后，我们有

$$\langle P_\gamma \mathrm{d}x^\gamma \cdot \mathrm{d}x^n \cdot \mathrm{d}x^0 \cdot \phi_0, \phi_0\rangle_\delta = \sin|\theta||\hat{P}||\phi_0|_\delta^2.$$

证明完成了。 □

4.3. 质量消失的一些推论。 我们无法证明定理 1.4 的刚性结论。不过，根据定理 1.4 中的等式，我们确实可以得到一些简单的推论。本小节中我们假设 $\theta \neq 0$，但这些结果及其证明稍作修改后也适用于 $\theta = 0$。

根据(1.1)、(1.2)、(3.3) 和 (4.4)，存在一个非零旋量 ϕ，满足

$$\tilde{\nabla}\phi = 0, \tag{4.5}$$

$$\mathrm{Re}\langle(\mu - J\cdot e^0\cdot)\phi, \phi\rangle = 0 \text{ in } M, \tag{4.6}$$

$$Q\phi = \pm\phi,$$

$$\mathrm{Re}\langle\tilde{H}\phi, \phi\rangle = 0 \text{ on } \partial M, \tag{4.7}$$

其中 $\tilde{}$ H 是简写，表示

$$\tilde{H} = H \pm \cos\theta\,\mathrm{tr}_{\partial M}\, p \mp \sin\theta\sqrt{-1}p_{\alpha n}e^\alpha \cdot e^n \cdot e^0\cdot,$$

我们定义

$$N = \langle\phi, \phi\rangle, X = \sum_j (e^j \cdot \phi, \phi)e_j = X^j e_j.$$

正如 N 和 X 的命名所示，它们与第 2 节中的空隙函数和移位向量有关。在 M 的内部，我们得到 (4.5) 的如下推论。

命题 4.3. 如果 (4.5)成立，那么

$$L_X g + 2Np = 0,\ \mathrm{d}(N^2 - |X|^2) = 0 \tag{4.8}$$

在 M 中。如果 (1.1) 和 (4.6) 成立，那么

$$\mu N + \langle J, X\rangle = 0,\ \mu X^k + NJ^k = 0$$

在 M。

证明。我们通过直接计算证明。我们在 M的一个内点处选择一个测地正规标架 e_i，结合(4.5)，可得

$$\begin{aligned} e_i(N) &= \tilde{\nabla}_i(e^0 \cdot \phi, \phi) = (\tilde{\nabla}_i e^0 \cdot \phi, \phi) \\ &= -p_{ij}(e^j \cdot \phi, \phi) = -p_{ij}X^j, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \nabla_i X &= e_i[(e^j \cdot \phi, \phi)e_j] = (\tilde{\nabla}_i e^j \cdot \phi, \phi)e_j \\ &= -p_{ij}(e^0 \cdot \phi, \phi)e_j = -p_{ij}Ne_j. \end{aligned}$$

这证明了（4.8）。由（4.6），我们得到

$$\begin{aligned} 0 &= \langle(\mu - J\cdot e^0\cdot)\phi, \phi\rangle \\ &= \mu\langle\phi, \phi\rangle - J_i\langle e^i \cdot e^0 \cdot \phi, \phi\rangle \\ &= \mu\langle\phi, \phi\rangle + J_i(e^i \cdot \phi, \phi) \\ &= \mu N + J_i X^i. \end{aligned}$$

对于任意 C^2 旋量 ψ 和 $s \in \mathbb{R}$，由 (1.1) 可得

$$\mathrm{Re}\langle(\mu - J \cdot e^0 \cdot)(\phi + s\psi), \phi + s\psi\rangle \geqslant 0.$$

将 (4.6) 从上式中减去，得到

$$\begin{aligned} & s\,\mathrm{Re}\langle(\mu - J \cdot e^0 \cdot)\phi, \psi\rangle + s\,\mathrm{Re}\langle(\mu - J \cdot e^0 \cdot \psi), \phi\rangle \\ & + s^2\,\mathrm{Re}\langle(\mu - J \cdot e^0 \cdot)\psi, \psi\rangle \geqslant 0, \end{aligned}$$

从而迫使

$$\mathrm{Re}\langle(\mu - J \cdot e^0 \cdot)\phi, \psi\rangle + \mathrm{Re}\langle(\mu - J \cdot e^0 \cdot \psi), \phi\rangle = 0.$$

因为 $\mu - J \cdot e^0 \cdot$ 相对于 $\langle \cdot, \cdot \rangle$是厄米的，所以

$$\mathrm{Re}\langle(\mu - J \cdot e^0 \cdot)\phi, \psi\rangle = 0. \tag{4.9}$$

将 ψ 设为 $e^0 \cdot e^k \cdot \phi$ 得到

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{Re}\langle(\mu - J \cdot e^0 \cdot)\phi, e^0 \cdot e^k \cdot \phi\rangle \\ &= \mu\langle\phi, e^0 \cdot e^k \cdot \phi\rangle - J_i\,\mathrm{Re}\langle e^i \cdot e^0 \cdot \phi, e^0 \cdot e^k \cdot \phi\rangle \\ &= \mu\langle e^0 \cdot e^k \cdot \phi, \phi\rangle + J_i\,\mathrm{Re}\langle e^i \cdot \phi, e^k \cdot \phi\rangle \\ &= \mu(e^k \cdot \phi, \phi) + J_i\delta^{ik}|\phi|^2 \\ &= \mu X^k + NJ^k. \end{aligned}$$

引理得证。 □

现在我们研究（4.1）在边界 ∂M 处的推论。首先，我们沿着 ∂M 展示一些基本计算。

引理 4.4. 我们有

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_\alpha(Q\phi) = & \cos\theta[-p_{\alpha\beta}e^\beta \cdot e^n \cdot \phi + h_{\alpha\beta}e^0 \cdot e^\beta \cdot \phi] \\ & + \sqrt{-1}\sin\theta[-p_{\alpha n}e^0 \cdot \phi + h_{\alpha\beta}e^\beta \cdot \phi]. \end{aligned}$$

证明。首先,

$$\tilde{\nabla}_i e^0 = -p_{ij}e^j, \tilde{\nabla}_\alpha e^n = -p_{\alpha n}e^0 + h_{\alpha\beta}e^\beta.$$

˜根据乘积法则以及 $\nabla\phi = 0$，我们有

$$\begin{aligned} & \tilde{\nabla}_\alpha(\cos\theta e^0 \cdot e^n \cdot \phi + \sqrt{-1}\sin\theta e^n \cdot \phi) \\ = & \cos\theta[\tilde{\nabla}_\alpha e^0 \cdot e^n \cdot \phi + e^0 \cdot \tilde{\nabla}_\alpha e^n \cdot \phi] + \sqrt{-1}\sin\theta\tilde{\nabla}_\alpha e^n \cdot \phi \\ = & \cos\theta[-p_{\alpha i}e^i \cdot e^n \cdot \phi - e^0 \cdot p_{\alpha n}e^0 \cdot \phi + e^0 \cdot h_{\alpha\beta}e^\beta \cdot \phi] \\ & + \sqrt{-1}\sin\theta[-p_{\alpha n}e^0 \cdot \phi + h_{\alpha\beta}e^\beta \cdot \phi] \\ = & \cos\theta[-p_{\alpha\beta}e^\beta \cdot e^n \cdot \phi + e^0 \cdot h_{\alpha\beta}e^\beta \cdot \phi] + \sqrt{-1}\sin\theta[-p_{\alpha n}e^0 \cdot \phi + h_{\alpha\beta}e^\beta \cdot \phi]. \end{aligned}$$

□

引理 4.5。我们有

$$\langle e^\alpha \cdot \phi, \phi\rangle = X^\alpha\sqrt{-1}\cot\theta.$$

证明。由 Q 与 $e^\alpha \cdot e^0 \cdot$ 的关系（见引理 3.4），可知

$$X^\alpha = (e^\alpha \cdot \phi, \phi) = \langle e^0 \cdot e^\alpha \cdot \phi, \phi\rangle = \pm\sqrt{-1}\sin\theta\langle e^0 \cdot e^\alpha \cdot e^n \cdot \phi, \phi\rangle.$$

同样,

$$\begin{aligned}
&\langle e^\alpha \cdot \phi, \phi\rangle \\
=& \pm\cos\theta\langle e^\alpha \cdot e^0 \cdot e^n \cdot \phi, \phi\rangle \\
=& -\cos\theta(\pm\langle e^0 \cdot e^\alpha \cdot e^n \cdot \phi, \phi\rangle) \\
=& -\cos\theta\tfrac{X^\alpha}{\sqrt{-1}\sin\theta} = X^\alpha\sqrt{-1}\cot\theta.
\end{aligned}$$

□

命题 4.6。我们有

$$p_{\alpha n}N\sin^2\theta = \pm p_{\alpha\beta}X^\beta\cos\theta + h_{\alpha\beta}X^\beta = (H \pm \cos\theta\,\mathrm{tr}_{\partial M}\,p)X_\alpha \tag{4.10}$$

and

$$p_{\alpha n}X^\gamma \mp \cos\theta p_{\alpha\gamma}N - h_{\alpha\gamma}N = 0 \tag{4.11}$$

沿着 ∂M。

证明。取乘积 $\langle\tilde\nabla_\alpha(Q\phi)\ e^0\cdot\phi\rangle$，得到

$$\begin{aligned}
&\langle\tilde\nabla_\alpha(Q\phi), e^0\cdot\phi\rangle \\
=& -\cos\theta p_{\alpha\beta}\langle e^\beta\cdot e^n\cdot\phi, e^0\cdot\phi\rangle \\
&+\cos\theta h_{\alpha\beta}\langle e^0\cdot e^\beta\cdot\phi, e^0\cdot\phi\rangle \\
&-\sqrt{-1}\sin\theta p_{\alpha n}\langle e^0\cdot\phi, e^0\cdot\phi\rangle \\
&+\sqrt{-1}\sin\theta h_{\alpha\beta}\langle e^\beta\cdot\phi, e^0\cdot\phi\rangle \\
=& \mp\cos\theta p_{\alpha\beta}\tfrac{X^\beta}{\sqrt{-1}\sin\theta} \\
&+\cos\theta h_{\alpha\beta}\sqrt{-1}X^\beta\cot\theta \\
&-\sqrt{-1}p_{\alpha n}N\sin\theta \\
&+\sqrt{-1}\sin\theta h_{\alpha\beta}X^\beta.
\end{aligned}$$

˜由于 $\nabla\phi = 0$ 且 $Q\phi = \pm\phi$ 沿着 ∂M，因此 $\nabla_\alpha(Q\phi) = 0$ 沿着 ∂M。所以我们得到

$$p_{\alpha n}N = \pm p_{\alpha\beta}X^\beta\tfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta} + h_{\alpha\beta}X^\beta\tfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} + h_{\alpha\beta}X^\beta$$

˜由此得到（4.10）的第一个恒等式。乘积 $\langle\nabla_\alpha(Q\phi)\ e^\gamma\cdot\phi\rangle$ 得到

$$\begin{aligned}
&\langle\tilde\nabla_\alpha(Q\phi), e^\gamma\cdot\phi\rangle \\
=& -\cos\theta p_{\alpha\beta}\langle e^\beta\cdot e^n\cdot\phi, e^\gamma\cdot\phi\rangle + \cos\theta h_{\alpha\beta}\langle e^0\cdot e^\beta\cdot\phi, e^\gamma\cdot\phi\rangle \\
&-\sqrt{-1}\sin\theta p_{\alpha n}\langle e^0\cdot\phi, e^\gamma\cdot\phi\rangle + \sqrt{-1}\sin\theta h_{\alpha\beta}\langle e^\beta\cdot\phi, e^\gamma\cdot\phi\rangle \\
=& \mp\sin\theta\cos\theta\sqrt{-1}p_{\alpha\beta}\langle e^\gamma\cdot e^\beta\cdot\phi, \phi\rangle \\
&-\sqrt{-1}\sin\theta p_{\alpha n}X^\gamma \\
&-\sqrt{-1}\sin\theta h_{\alpha\beta}\langle e^\gamma\cdot e^\beta\cdot\phi, \phi\rangle.
\end{aligned}$$

˜考虑到 $\nabla_\alpha(Q\phi) = 0$，我们有

$$\sin\theta p_{\alpha n}X^\gamma \pm \cos\theta\sin\theta p_{\alpha\beta}\langle e^\gamma\cdot e^\beta\cdot\phi, \phi\rangle + h_{\alpha\beta}\sin\theta\langle e^\gamma\cdot e^\beta\cdot\phi, \phi\rangle = 0.$$

取实部并除以 $\sin\theta$,

$$p_{\alpha n}X^\gamma \mp \cos\theta p_{\alpha\gamma}N - h_{\alpha\gamma}N = 0.$$

这就是 (4.11)。

类似于 (4.9) 的推导，由 (1.2) 和 (4.7) 可得，对于任意 $C^{2^\sim}$旋量 ψ，有 Re $\langle H\phi, \psi\rangle = 0$。令 ψ 为 $e^\gamma\cdot\phi$，得到

$$\begin{aligned}
&\langle\tilde{H}\phi, e^\gamma\cdot\phi\rangle\\
=&\langle H\phi \pm \cos\theta\,\mathrm{tr}_{\partial M}\,p\phi \pm \sin\theta p_{n\alpha}\sqrt{-1}e^\alpha\cdot e^0\cdot e^n\cdot\phi, e^\gamma\cdot\phi\rangle\\
=&-(H\pm\cos\theta\,\mathrm{tr}_{\partial M}\,p)\langle e^\gamma\cdot\phi,\phi\rangle \mp \sqrt{-1}\sin\theta p_{\alpha n}\langle e^\gamma\cdot e^\alpha\cdot e^0\cdot e^n\cdot\phi,\phi\rangle\\
=&-(H\pm\cos\theta\,\mathrm{tr}_{\partial M}\,p)X^\gamma\sqrt{-1}\cot\theta \mp \sqrt{-1}\sin\theta p_{\alpha n}(\pm1)\cos\theta\langle e^\gamma\cdot e^\alpha\cdot\phi,\phi\rangle\\
=&-(H\pm\cos\theta\,\mathrm{tr}_{\partial M}\,p)X^\gamma\sqrt{-1}\cot\theta - \sqrt{-1}\sin\theta p_{\alpha n}\cos\theta\langle e^\gamma\cdot e^\alpha\cdot\phi,\phi\rangle.
\end{aligned}$$

因此，取上式的虚部可得

$$(H\pm\cos\theta\,\mathrm{tr}_{\partial M}\,p)X^\gamma + \sin^2\theta p_{\alpha n}\langle e^\gamma\cdot e^\alpha\cdot\phi,\phi\rangle = 0.$$

取上式的实部可得 (4.11) 的第二个恒等式。 □

Appendix A. Stable capillary MOTS

设 $(M,\ g,\ p)$ 是一个紧致初始数据集，γ是 M 上取值于 $(0,\ 2\pi)$ 的函数。设 Σ是 M 中边界为 $\partial\Sigma\subset\partial M$ 的超曲面。

我们固定本附录中使用的一些记号：

- N，Σ在 M中的单位法向量；A，Σ在 M中的第二基本形式；H，Σ 在 M中的平均曲率；
- η，$\partial\Sigma$ 在 ∂M中的单位法向量；
- X，∂M在 M中的单位外法向量；$A_{\partial M}$，∂M在 M中的第二基本形式；$H_{\partial M}$，∂M 在 M中的平均曲率；
- ν，$\partial\Sigma$ 在 Σ中的单位外法向量；$H_{\partial\Sigma}$，$\partial\Sigma$ 在 Σ中的平均曲率。

参见图1。

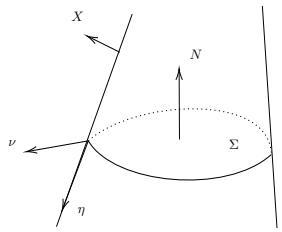


Figure 1. 各种向量的命名。

定义 A.1. 我们称带边界 $\partial\Sigma\subset\partial M$ 的超曲面 $\Sigma\subset M$ 为边缘外陷俘曲面（简称 *MOTS*），如果

$$H + \mathrm{tr}_M\,p = 0. \tag{A.1}$$

如果……，则称其为毛细的

$$\langle X, N\rangle = \cos\gamma \ \textit{along}\ \partial\Sigma.$$

定义A.2。 我们称 Σ 是稳定毛细管边际外视界，如果它同时满足 (A.1)和 (A.1)，此外还存在一个向量场 Y 沿着 $\partial\Sigma$与 ∂M 相切，使得 $\langle Y, N\rangle > 0$,

$$\nabla_Y(H + \mathrm{tr}_M\, p) \geqslant 0 \ \textit{in}\ \Sigma$$

and

$$\nabla_Y(\langle X, N\rangle - \cos\gamma) = 0 \ \textit{along}\ \partial\Sigma. \tag{A.2}$$

我们通过允许角度变化如下，对（1.2）作略微推广。

定义 A.3。我们称(M, g, p) 满足广义倾斜边界主导能量条件，如果边界满足不等式

$$H_{\partial M} + \cos\gamma\, \mathrm{tr}_{\partial M}\, p \geqslant \sin\gamma |p(X, \cdot) - \tfrac{1}{\sin\gamma}\langle \nabla^{\partial M}\gamma, \cdot\rangle|. \tag{A.3}$$

我们沿用 [GS06] 得到以下结果。这也是 [Men22] 的推广，其中讨论了自由边界边际外视界。

定理 A.4。 如果 M 满足主导能量条件 (1.1) 和 (A.3)，那么稳定毛细管边际外视界属于正 *Yamabe* 型，除非 Σ 是 *Ricci* 平坦且具有全测地边界。

证明。 设 Y 是定义 A.2 中给出的向量场，且 $\phi = \langle Y, N\rangle$。根据定义， ϕ 为正。利用 $H + \mathrm{tr}_\Sigma\, p$ ([GS06], [AMS05] or[EHLS16，命题 2]) 的变分公式，我们得到:

$$L\phi := -\Delta\phi + 2\langle W, \nabla\phi\rangle + (Q + \mathrm{div}\, W - |W|^2)\phi \geqslant 0.$$

其中，$Q = \frac{1}{2}R_\Sigma - (\mu + J(N)) - \frac{1}{2}|\chi|^2$, $\chi = A + p$, W是与 Σ相切、与1-形式 $p(N, \cdot)$对偶的向量场， R_Σ 是 Σ的标量曲率。令 $Z = W - \nabla\log\ \phi$，如同在 [GS06],中那样，我们得到

$$-Q\psi^2 \leqslant \mathrm{div}(\psi^2 Z) + |\nabla\psi|^2$$

对于任意 $\psi \in C^\infty(\Sigma)$。我们将上述内容在 Σ 上积分，并利用散度定理，得到

$$\int_{\partial\Sigma} \psi^2\langle Z, \nu\rangle + \int_\Sigma |\nabla\psi|^2 + Q\psi^2 \geqslant 0. \tag{A.4}$$

现在我们进行计算

$$\begin{aligned}
\langle Z, \nu\rangle =& \langle W, \nu\rangle - \langle \nabla\log\phi, \nu\rangle \\
=& p(N, \nu) - (\tfrac{1}{\sin\gamma}A_{\partial M}(\eta, \eta) - \cot\gamma A(\nu, \nu) + \tfrac{1}{\sin^2\gamma}\partial_\eta\cos\gamma) \\
=& p(N, \nu) - (-H\cot\gamma + \tfrac{H_{\partial M}}{\sin\gamma} - H_{\partial\Sigma}) + \tfrac{1}{\sin\gamma}\partial_\eta\gamma \\
=& H_{\partial\Sigma} - \tfrac{1}{\sin\gamma}(H_{\partial M} - H\cos\gamma - \sin\gamma p(N, \nu)) + \tfrac{1}{\sin\gamma}\partial_\eta\gamma \\
=& H_{\partial\Sigma} - \tfrac{1}{\sin\gamma}(H_{\partial M} + \mathrm{tr}_\Sigma\, p\cos\gamma - \sin\gamma p(N, \nu) - \partial_\eta\gamma).
\end{aligned}$$

以上，第二个恒等式可通过显式计算（A.2）得出，具体细节见 [RS97] 的附录。第三个恒等式见 [RS97，引理 3.1]。我们断言

$$\mathrm{tr}_\Sigma\, p\cos\gamma - \sin\gamma p(N, \nu) = \cos\gamma\, \mathrm{tr}_{\partial M}\, p + \sin\gamma p(X, \eta).$$

设 $\{e_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ 是 $T\Sigma$ 上的一个正交归一标架，使得 $\nu = e_n$。那么

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tr}_\Sigma p\cos\gamma - \sin\gamma p(N,\nu)\\
=&\cos\gamma\sum_{i\neq n} p_{ii} + \cos\gamma p_{\nu\nu} - \sin\gamma p_{N\nu}\\
=&\cos\gamma\sum_{i\neq n} p_{ii} + p(\cos\gamma\nu - \sin\gamma N,\nu)\\
=&\cos\gamma\sum_{i\neq n} p_{ii} + p(\eta,\nu)\\
=&\left(\sum_{i\neq n}\cos\gamma p_{ii} + \cos\gamma p_{\eta\eta}\right) + p(\eta,\nu-\cos\gamma\eta)\\
=&\cos\gamma\operatorname{tr}_{\partial M} p + \sin\gamma p(\eta,X)
\end{aligned}$$

由不等式 (A.4)，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_\Sigma R_\Sigma\psi^2 + 2\int_{\partial\Sigma} H_{\partial\Sigma}\psi^2\\
\geqslant&\int_\Sigma 2(\mu - J(N))\psi^2 + \int_{\partial\Sigma}\tfrac{1}{\sin\gamma}[H_{\partial M} + \cos\gamma\operatorname{tr}_{\partial M} p + \sin\gamma p(\eta,X) - \partial_\eta\gamma].
\end{aligned}$$

由主导能量条件 (1.1) 和 (A.3)，可知

$$\int_\Sigma R_\Sigma\psi^2 + 2\int_{\partial\Sigma} H_{\partial\Sigma}\psi^2 \geqslant 0$$

这确认了 Σ 属于非负 Yamabe 类型。其余部分涉及 Σ上的一个特征值问题，与自由边界情形并无不同，参见 [Men22]。□

注 A.5。(A.1) 中的量 $H+\operatorname{tr}_\Sigma p$ 称为外向零膨胀。构造常零膨胀叶层等进一步结果，以及相关的刚性分析并不困难，读者可再次参阅 [Men22]。

References

[ABdL16] S´ergio Almaraz、EzequielBarbosa和LeviLopesde Lima。具有非紧边界的渐近平坦流形的正质量定理。*Communications in Analysis and Geometry*，24(4):673–715，2016。[ACG08] Lars Andersson、MingliangCai和 GregoryJ. Galloway。渐近双曲流形的刚性与质量正性。

Annales Henri Poincaré 9 1 1 33, , ( ): – 。[2008

AdL20] S´ergioAlmaraz和LeviLopes de Lima。具有非紧边界的渐近双曲流形的质量。

Ann. Henri Poincaré，21(11):3727–3756，2020。[AdL22] SergioAlmaraz和 LeviLopesde Lima。通过正质量定理研究双曲空间中非紧静态区域的刚性。2022。arXiv:2206.09768 [gr-qc]。[AdLM19] Sergio Almaraz、LeviLopesdeLima 和LucianoMari。具有非紧边界的初始数据集的时空正质量定理。2019。[ALY20] AghilAlaee、MartinLesourd和丘成桐。稳定曲面与自由边界边缘外陷曲面。 *ArXiv:2009.07933 [gr-qc, physics:math-ph]*，2020。[AMS05] Lars Andersson、MarcMars和WalterSimon。动力学视界与俘获视界的局部存在性。 *Phys. Rev. Lett.*，95:111102，2005。[CH03] Piotr T.Chru´sciel 和MarcHerzlich。渐近双曲黎曼流形的质量。

Pacific journal of mathematics，212(2):231–264，2003。

[Cha18] XiaoxiangChai。正质量定理与自由边界极小曲面。*ArXiv:1811.06254 [math]*，2018。[Cha 21] XiaoxiangChai。带视界边界的渐近双曲流形。*ArXiv:2102.08889 [gr-qc]*，2021。[EHLS16] Michael Eichmair、Lan-Hsuan Huang、DanA.Lee和Richard Schoen。八维以下的时空正质量定理。 *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*，181 83( ): –121，2016。[Gro14] MishaGromov。带角点区域中的Dirac与Plateau台球。*Cent. Eur. J. Math.*，12(8):1109–1156，2014。[GS06] Gregory J. Galloway和RichardSchoen。Hawking黑洞拓扑定理向高维的推广。 *Comm. Math. Phys.*，266(2):571–576，2006。[HH96] S.W.Hawking和Gary T.Horowitz。引力哈密顿量、作用量、熵和曲面项。 *Classical Quantum Gravity*，13(6):1487–1498，1996。[HZ03] Oussama Hijazi 和Xiao Zhang。类空超曲面上的Dirac-Witten算子。*Comm. Anal. Geom.*，11(4):737–750，2003。[Li20] Chao Li。具有正标量曲率的三维流形的多面体比较定理。 *Invent. Math.*，219(1):1–37，2020。[LM89] H. Blaine Lawson,Jr.和Marie-LouiseMichelsohn。 *Spin geometry*, *Princeton Mathematical Series*的第38卷。普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1989。[Men 22] Abra˜ao Mendes。自由边界MOTS刚性。 *Nonlinear Anal.*，220:0，2022。[Mic11] B.Michel。类质量渐近不变量的几何不变性。*Journal of Mathematical Physics*，52(5):52504，2011。[PT82] ThomasParker和Clifford HenryTaubes。论Witten的正能量定理证明。 *Communications in Mathematical Physics*，84(2):223–238，1982。[RS97] AntonioRos和Rabah Souam。论球中毛细曲面的稳定性。*Pacific J. Math.*，178(2):345–361，1997。[Sak21] AnnaSakovich。渐近双曲背景下的Jang方程与正质量定理。 *Communications in Mathematical Physics*，2021年4月。[SY79] RichardSchoen 和Shing Tung Yau。论广义相对论中正质量猜想的证明。 *Comm. Math. Phys.*，65(1):45–76，1979。[Wan01] Xiaodong Wang。渐近双曲流形的质量。*Journal of Differential Geometry*，57(2):273–299，2001。[Wit81] Edward Witten。正能量定理的新证明。*Communications in Mathematical Physics*，80(3):381–402，1981。

Department of Mathematics, POSTECH, Pohang, Gyeongbuk, South Korea
Email address: xxchai@kias.re.kr, xxchai@postech.ac.kr