arXiv:2304.05228v2 [math.AC] 6 Jul 2024

相对弱全局Gorenstein维数、AB-上下文与模型结构

Driss Bennis[1] Rachid El Maaouy[2,*]

J. R. Garc´ía Rozas[3] Luis Oyonarte[4]

1：CeReMaR研究中心，理学院，B.P. 1014，拉巴特穆罕默德五世大学，摩洛哥拉巴特。

电子邮箱：driss.bennis@um5.ac.ma；driss bennis@hotmail.com
2：CeReMaR研究中心，理学院，B.P. 1014，拉巴特穆罕默德五世大学，摩洛哥拉巴特。

电子邮箱：rachid elmaaouy@um5.ac.ma；elmaaouy.rachid@gmail.com
3：数学系，阿尔梅里亚大学，04071 阿尔梅里亚，西班牙。电子邮箱：jrgrozas@ual.es

4：数学系，阿尔梅里亚大学，04071 阿尔梅里亚，西班牙。电子邮箱：oyonarte@ual.es

摘要

本文介绍并研究环 R 关于左 R-模 C的弱 Gorenstein 全局维数。我们给出了这一同调不变量有界的若干刻画。本文的两项主要应用如下：首先，我们证明，相对于半对偶化（R, S）-双模 C， R 的弱 Gorenstein 全局维数既可以通过左 R-模的 G_C-平坦维数计算，也可以通过右 S-模的 G_C-平坦维数计算，与（绝对）弱全局维数的情形相同。由此，我们获得了解决 Bennis猜想的一种新论证。其次，我们具体描述了作者近期发现的 G_C-平坦模型结构中的弱等价。为证明这一结果，我们证明了阿贝尔模型结构与（弱）AB-弱上下文之间存在有趣的联系。这种联系导出了一个结果，可用于构造平凡对象描述更简单的阿贝尔模型结构。

2020年数学主题分类：18N40, 16E10, 16E65。
关键词：相对戈伦斯坦平坦模与维数、 w^{+}-倾斜模、Auslander-Buchweitz 上下文和模型结构。

1 引言

Auslander 于 1966年引入了Cohen-Macaulay 诺特环上有限生成模的 G-维数概念，并研究了其基本性质。这一G-维数概念已沿多个方向得到扩展。例如，Enochs 等人（[12], [13]）引入了Gorenstein投射维数和Gorenstein 平坦维数。Golod [21] 考虑了另一种扩展，即用半对偶化模 C替换基环 R 。随后他

*通讯作者

介绍并研究了诺特环上有限生成模的 G_C-维数。

几年后，Holm和 Jϕrgensen [26], White [32], Liu、Huang 和 Xu [30] 以及Xu和Ding [35]沿着这一方向给出了其他推广，它们所需的假设更少，并产生了（不一定是有限生成的）G_C-投射模和G_C-平坦 R-模的概念，其中 C 是一个半对偶化（R, S）-双模。

然而，要求 C 是半对偶化模并不算特别严格；定义它的一些条件在许多情况下已被证明并非必要。因此，近期有研究探索如何避免对 C 施加这些条件，同时不损失该理论的良好性质。文献 [5, 3]中的作者找出了要求 C 仍能发展出良好理论所需的最少条件。满足这些条件的模，在 G_C-投射的情形下称为 w-倾斜模，在 G_C-平坦的情形下称为 w^+-倾斜模。

本文旨在从同调和同伦方面继续研究这一主题。我们主要关注 R 的全局 G_C-平坦维数。

我们的第一个主要结果是给出一种计算 R 的全局 G_C-平坦维数的简便方法。我们证明，该全局维数有限与否仅取决于 $\mathcal{I}_{C^+}$-内射右 R-模的平坦维数，以及内射左 R-模的 $\mathcal{F}_C$-平坦维数是否有限。更准确地说，我们有如下结果，并将在第3节中证明。

定理 A. 假设 ${}_RC$ 是 w^+-倾斜的，并且 G_C-平坦左 R-模构成的类在扩张下封闭。那么，对于正整数 n，以下断言等价：

1. $\mathrm{G_C\text{-}FD}(R) := \sup\{\mathrm{G_C\text{-}fd}_R(M) \mid M \in R\text{-Mod}\} \leq n.$
2. 以下两个断言成立：
   (a) 对每个 $\mathcal{I}_{C^+}$-内射右 R-模 M，$\mathrm{fd}_R(M) \leq n$。 (b) 对每个内射左 R-模 M， $\mathcal{F}_C\text{-}\mathrm{fd}_R(M) \leq n$。
3. 以下两个断言成立：
   (a) 对每个 $\mathcal{I}_{C^+}$-内射右 R-模 M，$\mathrm{fd}_R(M) \leq n$。(b) 对每个内射左 R-模 M，$\mathrm{G_C\text{-}fd}_R(M) \leq n$。

* * *

众所周知，任意环 R 的弱全局维数都可以通过左侧或右侧 R-模的平坦维数来计算。更准确地说，我们有以下等式：

$$\sup\{\mathrm{fd}_R(M) | M \text{ 是左 } R\text{-模}\} = \sup\{\mathrm{fd}_R(M) | M \text{ 是右 } R\text{-模}\}.$$

相对于半对偶化模的 Gorenstein 平坦维数理论通常在交换环上研究。然而，一旦不再要求环具有交换性，并考虑到半对偶化 (R, S)-双模 C 的定义具有左右对称性，就会产生一个类似于弱全局维数的问题：

问题：以下等式是否成立?

$$\sup\{\mathrm{G_C\text{-}fd}_R(M) | M \in R\text{-Mod}\} = \sup\{\mathrm{G_C\text{-}fd}_S(M) | M \in \text{Mod-}S\}$$

在第4节中，作为定理 A 的一个应用，当 G_C-平坦左 R-模类和 G_C-平坦右 S- 模类都对扩张封闭时，我们对这个问题给出了肯定的回答（见定理 4.4 和推论 4.5）。

定理 B. 设 C 是一个半对偶化的（R,S）-双模，并假设 G_C-平坦左 R-模和 G_C-平坦右 S-模的类都对扩张封闭。那么

$$\sup\{\mathrm{G_C}\text{-}\operatorname{fd}_R(M) \mid M \in R\text{-Mod}\} = \sup\{\mathrm{G_C}\text{-}\operatorname{fd}_S(M) \mid M \in \text{Mod-}S\}.$$

特别地，当 R 是左相容且 S 是右相容时，这一点成立。

作为定理 B 的直接推论，我们对任意环 R 给出了 Bennis猜想 [2] 的肯定回答（推论 4.6）。然而，该猜想最近已由 S. Bouchiba [8] 独立解决，随后 Christensen、Estrada 和 Thompson [9] 也分别给出了解答。值得注意的是，我们的方法与他们不同。特别是，定理 B 提供了一种全新且更简洁的证明，使我们能够更深入地了解这类对称性。

* * *

在 [24] 中，Hovey 引入并研究了阿贝尔范畴上的阿贝尔模型结构。他证明，阿贝尔范畴$\mathcal{A}$ 上的阿贝尔模型结构等价于 $\mathcal{A}$ 中的一个子范畴三元组（$\mathcal{Q}$、$\mathcal{W}$、$\mathcal{R}$），其中 $\mathcal{W}$ 是厚的，且（$\mathcal{Q}$、$\mathcal{W}\cap\mathcal{R}$）和（$\mathcal{Q}\cap\mathcal{W}$、$\mathcal{R}$）是两个完备余挠对。在这种情况下，$\mathcal{Q}$（分别为 $\mathcal{W}$ 和 R）是 $\mathcal{A}$ 的子范畴，由与相应阿贝尔模型结构关联的所有余纤维对象（分别为平凡对象和纤维对象）组成。阿贝尔遗传模型结构的一个重要特征是，其同伦范畴是三角范畴。因此，构造遗传阿贝尔模型结构，是为三角范畴建立模型的一种简便有效的方法。

当 R 是一个交换诺特环且 C 是一个半对偶化模时，根据 Hu、Geng、Wu 和Li 的定理 [25, 定理 4，属于 Bass类 $\mathcal{B}_C(R)$的 $\mathrm{G_C F}(R) \cap \mathcal{B}_C(R) \cap \mathcal{C}_C(R)$ 中的 G_C-平坦且 $\mathcal{C}_C$-余挠 R-模构成一个Frobenius 范畴，其投射-内射对象全都是 R-模，且位于 $\mathcal{F}_C(R) \cap \mathcal{C}_C(R)$中。因此，稳定范畴

$$\underline{\mathrm{G_C F}(R) \cap \mathcal{B}_C(R) \cap \mathcal{C}_C(R)}$$

是一个三角范畴。

从同伦论的角度来看，自然会问，是否存在一个能够刻画这个稳定范畴的遗传阿贝尔模型结构。换言之，是否存在一个遗传阿贝尔模型结构 $\mathcal{M} = (\mathcal{Q}, \mathcal{W}, \mathcal{R})$，使得其同伦范畴Ho($\mathcal{M}$) 与该稳定范畴三角等价

$$\underline{\mathrm{G_C F}(R) \cap \mathcal{B}_C(R) \cap \mathcal{C}_C(R)}?$$

本文作者在其近期工作 [4] 中构造了这样的遗传阿贝尔模型结构 $\mathcal{M} = (\mathrm{G_C F}(R)\ \mathcal{W}, \mathcal{B}_C(R) \cap \mathcal{C}_C(R))$。因此，这个模型结构解决了先前的问题，但也提出了一个新的问题：我们尚不清楚如何描述任一模型结构中最重要的类——平凡对象类 $\mathcal{W}$。

我们的下一个结果表明，如果 R 的全局 G_C-平坦维数是有限的，那么我们可以对这个问题给出肯定的回答（见定理 5.8）。

定理 C。假设 C 是 w-倾斜的，并且具有一个逐次有限投射分解，使得 $\mathrm{G}_C\mathrm{F}(R)$ 在扩张下封闭。如果 R 具有有限的全局 G_C-平坦维数，则存在一个遗传阿贝尔模型结构

$$\left(\mathrm{G}_C\mathrm{F}(R), \widehat{\mathcal{V}_C(R)}, \mathcal{H}_C(R)\right),$$

如下：

- 余纤维化与具有 G_C-平坦余核的单态射一致。
- 纤维化与具有 $\mathcal{H}_C$-余挠核的满态射一致。
- 平凡对象与所有具有有限 $\mathcal{V}_C$-平坦维数的模相一致。

此处，$\mathcal{H}_C(R) := \mathcal{B}_C(R) \cap \mathcal{C}_C(R)$ 和 $\mathcal{V}_C(R) = {}^{\perp}(\mathcal{B}_C(R) \cap \mathcal{C}_C(R))$ 是 $\mathcal{H}_C(R)$ 的左 Ext-正交类。我们分别称 $\mathcal{V}_C(R)$ 和 $\mathcal{H}_C(R)$中的模为 $\mathcal{V}_C$-平坦模和 $\mathcal{H}_C$-余挠模。之所以这样称呼它们，是因为它们满足平坦模和余挠模所具有的大多数良好性质。

这个关于平凡对象信息缺乏的问题，即使在阿贝尔范畴的一般情形下也会出现。在我们之前的论文中 [4], 为了构造 G_C-平坦模型结构，我们使用了 Gillespie ~ ~[18, 定理 1.1]中的一个众所周知的结果。该结果表明，如果（$\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$）和（$\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$）是 $\mathcal{A}$ 中的两个完备~ ~遗传的余挠对，满足 $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{Q}$和 $\mathcal{Q} \cap \mathcal{R} = \mathcal{Q} \cap \mathcal{R}$，那么存在唯一的厚类 $\mathcal{W}$，使得（$\mathcal{Q}$, $\mathcal{W}$, $\mathcal{R}$）是一个 Hovey 三元组。并且，~ ~类 $\mathcal{W}$ 由类 $\mathcal{Q}$ 和 $\mathcal{R}$刻画。这个结果是构建模型结构的一个非常有用的工具，许多研究人员都曾为此使用过它。

对模型结构感兴趣的研究者希望了解更多关于平凡对象的信息，而不只是这一结果所提供的内容。这些对象之所以重要，主要是因为它们决定了相关的同伦范畴，正如模型范畴基本定理 [23, 定理 1.2.10]所解释的那样。

因此，人们乐于看到一种新方法。例如，ˇSaroch 和 ˇSˇtovíˇcek[28, 在第 4 节及 5], 之后，Estrada 、 Iacob 、 P´erez [16] 和第二位署名作者 [10], 最近采用了新技术，构造出新的模型结构，并明确描述了其中的平凡对象。

我们的最后一个主要结果用于证明定理 C，它为更好地理解这类平凡对象又推进了一步。

~ ~定理 D. 假设 $(\mathcal{Q}, \mathcal{R})$ 和 $(\mathcal{Q}, \mathcal{R})$ 是阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 中的完备遗传余挠对，且满足

~ ~(a)

$\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{Q}$（或者等价地， $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}$）。

~ ~(b) $\mathcal{Q} \cap \mathcal{R} = \mathcal{Q} \cap \mathcal{R}$。

那么，以下断言成立：

1. 若 $\sup\{\mathcal{Q}\text{-resdim}_{\mathcal{A}}(A) | A \in \mathcal{A}\} < \infty$，则 $(\mathcal{Q}, \mathcal{W}, \mathcal{R})$ 是一个 Hovey 三元组，其中

$$\mathcal{W} = \{A \in \mathcal{A},\ \widetilde{\mathcal{Q}}\text{-resdim}_{\mathcal{A}}(A) < \infty\}.$$

2.若$\sup\{\mathcal{R}\text{-coresdim}_{\mathcal{A}}(A) | A \in \mathcal{A}\} < \infty$，则 $(\mathcal{Q}, \mathcal{W}, \mathcal{R})$ 是一个 Hovey 三元组，其中

$$\mathcal{W} = \{A \in \mathcal{A},\ \widetilde{\mathcal{R}}\text{-coresdim}_{\mathcal{A}}(A) < \infty\}.$$

该结果的证明基于 Hovey 三元组与（弱）AB上下文之间一个有趣的联系。后者由 Auslander 和 Buchweitz 在 [1] 中研究，并由 Hashimoto 在其著作 [22] 中命名。关于这一主题的最新进展，另请参见 [7] 。（弱）AB上下文已知有助于构造特殊（预）覆盖和（预）包络。事实证明，它们在构造 Hovey 三元组时也很有用（见定理 5.5）。

2 预备知识

本文中， R 和 S 均为带单位元的结合环（不一定交换），除非另有说明，所有 R-模和所有 S-模分别为幺左 R-模和右 S-模。右 R-模（分别地，左 S-模）将视为对环 R^{op} 上的左模（分别地， S^{op}上的右模）。我们用 $\mathcal{I}(R)$、 $\mathcal{P}(R)$、 $\mathcal{F}(R)$ 和$\mathcal{C}(R)$分别表示内射、投射、平坦和余扭挠 R-模所成的类。

从现在起， C 表示一个 R-模， S 表示其自同态环，$S = \mathrm{End}_R(C)$，而 C^+ 表示 C的特征模， $C^+ = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$。注意， C是一个（R, S）-双模，而 C^+ 是一个（S, R）-双模。我们用 $\mathrm{Add}_R(C)$（分别地，$\mathrm{Prod}_R(C)$）表示所有 R-模所成的类，其中每个模都同构于若干个 C的直和（分别地，直积）的直和项。

我们用 $\mathcal{A}$ 表示一个阿贝尔范畴；而对于 $\mathcal{A}$的子范畴，我们始终指在同构下封闭的全子范畴。 $\mathcal{A}$ 中的任意对象类都将被视为一个（全）子范畴。

设 $\mathcal{X}$是 $\mathcal{A}$中的一个对象类。若 $\mathcal{A}$中的一个序列 X 对每个 $X \in \mathcal{X}$而言，$\mathrm{Hom}_R(\mathcal{X}, -)$（分别地，$\mathrm{Hom}_R(-, \mathcal{X})$）都是正合复形，则称 X 为 $\mathrm{Hom}_R(\mathcal{X}, -)$-正合的（分别地，$\mathrm{Hom}_R(-, \mathcal{X})$-正合的）。在 $\mathcal{A} = R$-模范畴中，若 $\mathcal{Y}$ 是右R-模的一个类，则当对每个$Y \in \mathcal{Y}$而言 $Y \otimes_R$X 是正合复形时，称 X 为 $(\mathcal{Y} \otimes_R -)$-正合的。对象 A 的一个 $\mathcal{X}$-分解是一个正合复形

$$\cdots \to X_1 \to X_0 \to A \to 0$$

其中 $X_i \in \mathcal{X}$。 M的一个 $\mathcal{X}$-余分解作对偶定义。

类 $\mathcal{X}$ 若对扩张和满态射的核封闭，并且包含 $\mathcal{A}$的投射对象，则称其为投射可解。若 $\mathcal{X}$ 对扩张、满态射的核和直和项封闭，则称其为左厚。内射余可解类和右厚类作对偶定义。若 $\mathcal{X}$ 既左厚又右厚，则称其为厚。

（余）解消维数。若对象 $A \in \mathcal{A}$ 具有小于或等于整数 $n \geq 0$ 的 $\mathcal{X}$-解消维数，记作 $\mathcal{X}$-$\mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}(A) \leq n$，当且仅当 A 具有有限的 $\mathcal{X}$-解消:
$0 \to X_n \to \cdots \to X_1 \to X_0 \to M \to 0.$

如果 n 是使得这样的序列存在的最小非负整数，那么其$\mathcal{X}$-分辨维数恰好为 n；如果不存在这样的 n，则定义其$\mathcal{X}$-分辨维数为 ∞。我们将 $\mathcal{X}$ 记作 $\mathcal{A}$中具有有限 $\mathcal{X}$-分辨的对象的全子范畴。类 $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{A}$的 $\mathcal{X}$-分辨维数定义为

$$\mathcal{X}\text{-}\mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}(\mathcal{Y}) = \sup\{\mathcal{X}\text{-}\mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}(Y) | Y \in \mathcal{Y}\}.$$

余挠对。给定一个类 $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}$，我们用 $\mathcal{X}^{\perp}$ 表示所有满足以下条件的对象类：对于所有 $X \in \mathcal{X}$，$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(X, M) = 0$。类似地，${}^{\perp}\mathcal{X} = \{M \in \mathcal{A} | \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(M, X) = 0, \ \forall X \in \mathcal{X}\}$。

$\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 是 $\mathcal{A}$ 中对象类的一个对，若 $\mathcal{X}^{\perp} = \mathcal{Y}$ 且 $\mathcal{X} = {}^{\perp}\mathcal{Y}$，则称为余挠对。若对每个 $i \geq 1$ 都有 $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = 0$，则称余挠对 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 为遗传的。若对于任意 $A \in \mathcal{A}$，都存在两个短正合列，则称余挠对 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 为完备的。

$$0 \to Y \to X \to A \to 0 \text{ and } 0 \to A \to Y' \to X' \to 0$$

与 $X, X' \in \mathcal{X}$和 $Y, Y' \in \mathcal{Y}$。
阿贝尔模型结构。假设 $\mathcal{A}$ 是一个双完备范畴。 $\mathcal{A}$ 上的模型结构由 $\mathcal{A}$的三个态射类给出，称为余纤维化、纤维化和弱等价，它们满足一组公理，使得可以在该范畴上引入同伦论（[23, 定义 1.1.3.]）。

Hovey在 [24] 中定义了阿贝尔模型结构的概念，并证明了[24, 定理 2.2]阿贝尔模型结构与某些余挠对之间存在密切联系。具体而言，任意阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 上的阿贝尔模型结构等价于 $\mathcal{M} =$ 中的对象类的一个三元组$\mathcal{Q}(\mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{A})$（称为 Hovey 三元组），满足 $\mathcal{W}$是厚的，且$(\mathcal{Q}, \mathcal{W} \cap \mathcal{R})$和 $(\mathcal{Q} \cap \mathcal{W}, \mathcal{R})$ 是完备的余挠对。在这种情况下， $\mathcal{Q}$ 是余纤维对象类， $\mathcal{R}$是纤维对象类，而 $\mathcal{W}$ 是该模型结构的平凡对象类。这里，阿贝尔模型结构([24], 另见 [19])是定义在一个双完备阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 上的模型结构，并满足：(1)一个态射是（平凡）余纤维化当且仅当它是一个具有（平凡）余纤维余核的单态射；(2)一个态射是（平凡）纤维化当且仅当它是一个具有（平凡）纤维核的满态射。

如果两个相关的余挠对都是遗传的，则称 Hovey 三元组是遗传的。在本文中，我们经常将任意阿贝尔模型结构与其相关的 Hovey 三元组等同起来。

（弱）Auslander-Buchweitz上下文。给定 $\mathcal{A}$ 的两个子范畴 ω 和 $\mathcal{X}$，如果 $\omega \subseteq \mathcal{X}$，并且对于任意 $X \in \mathcal{X}$，都存在一个正合列 $0 \to X \to W \to X' \to 0$，使得 $X' \in \mathcal{X}$ 和 $W \in \omega$，则称 ω 是 $\mathcal{X}$ 的余生成元。如果进一步地，对于所有 $i \geq 1$， ω 都满足 $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, \omega) = 0$，则称 ω 是 $\mathcal{X}$ 的内射余生成元。

回顾 [22]，按照 Hashimoto 的术语， $\mathcal{A}$ 的子范畴三元组（$\mathcal{X}$、$\mathcal{Y}$、ω）称为左弱 Auslander-Buchweitz上下文（简称弱AB背景），如果满足以下三个条件:

(AB1) $\mathcal{X}$ 是左厚的。

(AB2) $\mathcal{Y}$ 是右厚的，且 $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$。

(AB3) $\omega = \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$，且 ω 是 $\mathcal{X}$的内射余生成元。

此外，若 $\mathcal{X} = \mathcal{A}$，则称其为左 Auslander-Buchweitz上下文（简称 AB上下文）。

相对Gorenstein平坦维数。

定义 2.1 若右 R-模 N 属于 $\mathrm{Prod}_{R^{op}}(C^+)$，则称其为$\mathcal{I}_{C^+}$-内射；若 R-模 M 的特征模M^+是$\mathcal{I}_{C^+}$-内射的，则称其为 $\mathcal{F}_C$-平坦。

我们用 $\mathcal{F}_C(R)$和 $\mathcal{I}_{C^+}(R^{op})$ 分别表示左 $\mathcal{F}_C$-平坦模和右$\mathcal{I}_{C^+}$-内射模的类。

$\mathcal{F}_C$-平坦模和 $\mathcal{I}_{C^+}$-内射模是平坦模和内射模在相对情形下的自然推广。按照 [27,Definition 5.1] 的含义，它们也推广了 C-平坦模和 C- 内射模。

例 2.2 以下例子将在本文中反复使用。

如果 ${}_RC = R$ （或更一般地说， ${}_RC$ 是 R-模的平坦生成元），那么

$$\mathcal{F}_C(R) = \mathcal{F}(R) \text{ and } \mathcal{I}_{C^+}(R^{op}) = \mathcal{I}(R^{op}).$$

2. *[3,* 命题 3.*3]* 如果 ${}_RC$ 是有限表示的，那么

$$\mathcal{F}_C(R) = C \otimes_S \mathcal{F}(S^{op}) \text{ and } \mathcal{I}_{C^+}(R^{op}) = \mathrm{Hom}_S(C, \mathcal{I}(S)).$$

定义 2.3（[3], 定义 4.1）若 R-模 C 满足以下两个性质，则称其为 w^+-倾斜模：

1. C *is* $\prod$-Tor-*orthogonal, that is,* $\mathrm{Tor}^R_{i\geq 1}((C^+)^I, C) = 0$ *for every set* I.
2. 存在一个 $(\mathcal{I}_{C^+}(R^{op}) \otimes_R -)$-精确的 $\mathcal{F}_C(R)$-余分解

$$\boldsymbol{X} : 0 \to R \to C_{-1} \to C_{-2} \to \cdots$$

定义 2.4（[3], 定义 4.4）若存在一个正合且（$\mathcal{I}_{C^+}(R^{op}) \otimes_R -$）-正合序列，则称 M 是一个 G_C-平坦 R-模。

$$\boldsymbol{X} : \cdots \to F_1 \to F_0 \to C_{-1} \to C_{-2} \to \cdots$$

对于每个 $C_i \in \mathcal{F}_C(R)$ 和 $F_j \in \mathcal{F}(R)$，使得 $M \cong \mathrm{Im}(F_0 \to C_{-1})$。

所有G_C-平坦 R-模组成的类记作 $\mathsf{G}_C\mathrm{F}(R)$。

定义2.5([4])若 R-模 M 被称为G_C-余挠（分别地， $\mathcal{C}_C$-余挠），如果对于所有G_C-平坦（分别地， $\mathcal{F}_C$-平坦）的 R-模 N，$\mathrm{Ext}^1_R(N, M) = 0$。

所有 G_C-余挠（分别为 $\mathcal{C}_C$-余挠） R-模组成的类记为 $\mathsf{G}_C\mathrm{C}(R)$（分别为 $\mathcal{C}_C(R)$）。

定义 2.6（[3], 定义 4.4） $\mathcal{F}_C$-平坦维数和 G_C-平坦维数分别定义为：

$$\mathcal{F}_C\text{-}\mathrm{fd}_R(M) = \mathcal{F}_C(R)\text{-}\mathrm{resdim}_R(M) \text{ and } \mathrm{G}_C\text{-}\mathrm{fd}_R(M) = \mathrm{G}_C\mathrm{F}(R)\text{-}\mathrm{resdim}_R(M).$$

我们的一些结果与 G_C-平坦模类在扩张下闭合这一条件有关。

定义 2.7（[3], 定义 4.14）若环 R 满足 $\mathsf{G}_C\mathrm{F}$-闭，则称其为 G_C-平坦 R-模类在扩张下封闭。

下面的引理给出了 G_C-平坦 R-模类在扩张下封闭的几种情形，这些情形取自 [3] 和 [4]。

引理 2.8 假设 C 是 $\prod$-Tor-正交的。环 R 在以下情形下是 $\mathsf{G}_C\mathrm{F}$-闭的：

(a) ${}_RC$ 是一个平坦生成元。

(b) $\mathcal{F}_C(R)$ 在直积下封闭。例如，如果 $S = \mathrm{End}_R(C)$ 是右相容的，并且 ${}_RC$ 和 C_S 都是有限表示的。

(c) 每个 R-模的 $\mathcal{F}_C$-平坦维数都是有限的。

证明。(a)由于 ${}_RC$ 是平坦生成元， $\mathcal{F}_C(R) = \mathcal{F}(R)$。容易直接验证，在 [3, 命题 4.23(2)⇒ (1)] 中，假设 R 是$\mathrm{G_W}$F-闭的且 W 是 w^+-倾斜的并非必要。因此，该断言由 [3, 命题 4.23(2)⇒ (1)] 和 [28, 定理 4.11(3)]的证明得出。

(b) 由 [3, 推论 4.13] 和 [4, 引理 4.7]可得。 (c) 由 [3, 推论 7.5]可得。 ■

最后，我们回顾 Foxby 类的定义。本文末尾将讨论 Bass 类。

与双模 ${}_RC_S$ 相关的 Auslander 类和 Bass 类分别为 $\mathcal{A}_C(S) \subseteq S$-模和 $\mathcal{B}_C(R) \subseteq R$-模，其定义如下:

• $\mathcal{A}_C(S)$ 是满足以下条件的所有左 S-模 M 所成的类:
$\mathrm{Tor}_{\geq 1}^S(C, M)$、 $= 0 = \mathrm{Ext}_R^{\geq 1}(C, C \otimes_S M)$ 以及典范映射

$$\mu_M : M \to \mathrm{Hom}_{S^{op}}(C, C \otimes_R M)$$

是左 S-模的一个同构。

• $\mathcal{B}_C(R)$由所有满足以下条件的 R-模组成： N
$\mathrm{Ext}_R^{\geq 1}(C, N) = 0 = \mathrm{Tor}_{\geq 1}^S(C, \mathrm{Hom}_R(C, N)) = 0$ 以及典范映射

$$\nu_N : C \otimes_S \mathrm{Hom}_R(C, N) \to N$$

是 R-模的一个同构。

3 相对弱 Gorenstein 全局维数

本节定义并研究 R 的全局 G_C-平坦维数。

定义3.1 R 的全局G_C-平坦维数被定义为每个 R-模的 G_C-平坦维数的上确界（如果存在）:

$$\mathrm{G_C\text{-}FD}(R) := \sup\{\mathrm{G_C\text{-}fd}_R(M) |\ M \textit{ is an } R\textit{-module }\}.$$

如果这样的上确界不存在，我们定义 $\mathrm{G_C}$-FD(R) $= \infty$ 。

注 3.2 1. 环的全局 G_C-平坦维数曾在*[36, 38]* 中针对以 C 为半对偶化 R-模的交换环进行过简要研究。

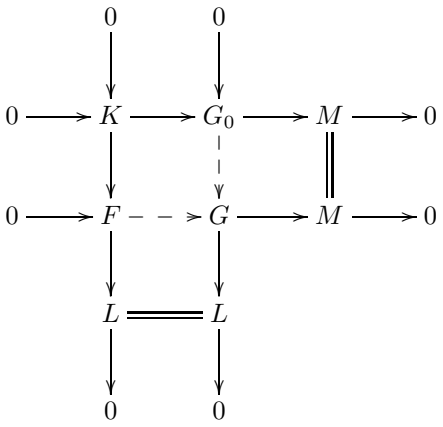
2. 当 ${}_RC$ 是平坦生成元时，我们可将$\mathrm{G_C}$-FD(R)恢复为Gorenstein 平坦维数(R)，即 R的弱全局 Gorenstein 维数。

为了证明定理 A，我们需要以下两个引理。

引理 3.3 设 R 为 G_CF-闭，且 ${}_RC$ 为 $\prod$-Tor-正交。对于一个 R-模 M 和一个整数 $n \geq 1$，若 $\mathrm{G_C}$-fd$_R(M) \leq n$，则存在一个 R-模的正合列 $0 \to F \to G \to M \to 0$，其中 G 为 G_C-平坦，且 $\mathcal{F}_\mathrm{C}$-fd$_R(F) \leq n-1$.

证明。根据定义，存在 R-模的短正合列 $0 \to K \to G_0 \to M \to 0$，其中 G_0 是 G_C-平坦的，并且 $\mathrm{G_C}$-fd$_R(K) \leq n-1$。根据 [3,命题 7.11], , 存在 R-模的正合列 $0 \to K \to F \to L \to 0$，其中 L 是 G_C-平坦的，并且 $\mathcal{F}_\mathrm{C}$-fd$_R(F) \leq n-1$.

考虑以下推出图:



因此， G是 G_C-平坦的，因为 G_0和 L是 G_C-平坦的，而 R是 G_CF-闭的。■

在绝对情形下， [2, 推论 2.3], 中的以下关键引理基于这样一个事实：有限平坦维数模构成的类在取直和项下封闭，而在我们的相对情形中并非如此。这里我们采用另一种证明方法。

引理 3.4 设 R 是 G_CF-闭的，且 C 是一个 w^+-倾斜 R-模。若 M 是一个内射 R-模，则 $\mathcal{F}_C\text{-}\mathrm{fd}_R(M) = \mathsf{G}_C\text{-}\mathrm{fd}_R(M)$。

证明。由 [3,定理 7.12]可得不等式 $\mathsf{G}_C\text{-}\mathrm{fd}_R(M) \leq \mathcal{F}_C\text{-}\mathrm{fd}_R(M)$。对于另一个不等式，不妨设 $n = \mathsf{G}_C\text{-}\mathrm{fd}_R(M) < \infty$。

若 $n = 0$，则 M 是 G_C-平坦的，并且由于 M 是内射的，根据 [3,命题 4.10]，存在一个分裂正合列 $0 \to M \to V \to L \to 0$，其中 $V \in \mathcal{F}_C(R)$。因此， $M \in \mathcal{F}_C(R)$，从而 $\mathcal{F}_C\text{-}\mathrm{fd}_R(M) = 0$。

现在假设 $n \geq 1$。根据 [3, 命题 7.11]和引理 3.3，存在两个 R-模的正合列

$$0 \to M \to F_1 \to G_1 \to 0 \text{ and } 0 \to F_2 \to G_2 \to M \to 0$$

其中 G_1和 G_2是 G_C-平坦的，且 $\mathcal{F}_C\text{-}\mathrm{fd}_R(F_1) \leq n$和 $\mathcal{F}_C\text{-}\mathrm{fd}_R(F_2) \leq n-1$。由于 M 是内射的，第一个序列分裂，因此 $M \oplus G_1 \cong F_1$。然后，将第二个序列与 $0 \to 0 \to G_1 \to G_1 \to 0$ 相加，我们得到一个形如 $0 \to F_2 \to G_2 \oplus G_1 \to F_1 \to 0$的短正合列。

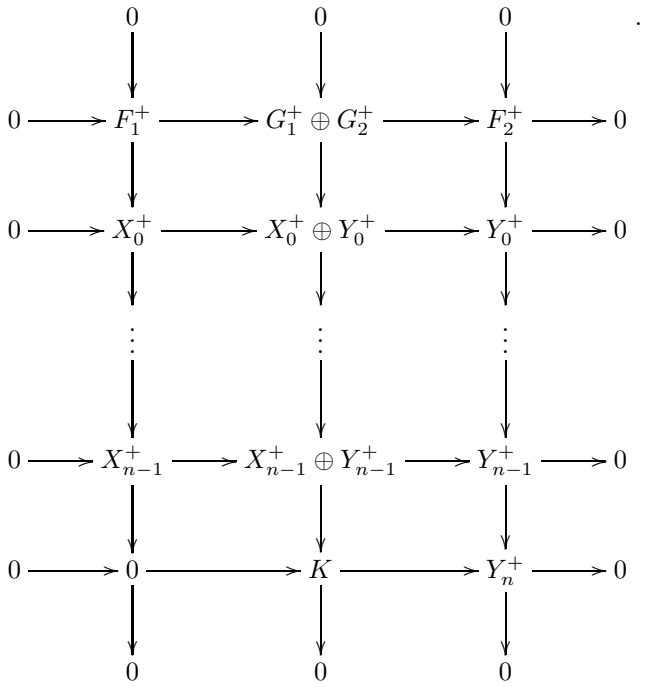
由于 $\mathcal{F}_C\text{-}\mathrm{fd}_R(F_1) \leq n$和 $\mathcal{F}_C\text{-}\mathrm{fd}_R(F_2) \leq n-1$，存在正合列

$$0 \to X_{n-1} \to \cdots \to X_0 \to F_1 \to 0 \text{ and } 0 \to Y_n \to Y_{n-1} \to \cdots \to Y_0 \to F_2 \to 0$$

其中 $X_i, Y_j \in \mathcal{F}_C(R)$。由 [3, 命题 3.5] 可知， C^+ 是 $\prod$-自正交的。这意味着，对所有 $j = 0, \cdots, n$ 以及所有 $E \in \mathcal{I}_{C^+}(R^{op})$， $\mathrm{Ext}^{k\geq 1}_{R^{op}}(Y_j^+, E) = 0$，因此根据维数移位可得 $\mathrm{Ext}^1_{R^{op}}(F_2^+, E) = 0$。因此，正合列

$$0 \to F_1^+ \to G_1^+ \oplus G_2^+ \to F_2^+ \to 0$$

是 $\mathrm{Hom}_R(-, \mathcal{I}_{C^+}(R^{op}))$-正合的，并且根据马蹄引理，我们得到如下具有正合行和列的交换图:



由上述图表可见，$K \cong Y_n^+ \in \mathcal{I}_{C^+}(R^{op})$。然后，我们得到$\mathcal{I}_{C^+}$-$\mathrm{id}_{R^{op}}(G_1^+ \oplus G_2^+) \leq n$。根据 [3, 命题 4.7和定理 4.12],$(G_1 \oplus G_2)^+$是 G_{C^+}-内射，因为 G_1和 G_2是 G_C-平坦。这由 [6,命题 3.4(2)], 推出$(G_1 \oplus G_2)^+ \cong G_1^+ \oplus G_2^+ \in \mathcal{I}_{C^+}(R^{op})$，从而得到$G_2 \in \mathcal{F}_C(R)$。因此，$\mathcal{F}_C$-$\mathrm{fd}_R(M) \leq n$ $\blacksquare$ G_C-$\mathrm{fd}_R(M)$。

现在我们准备证明定理 A。

定理 3.5 假设 R 是 G_CF-闭的，且 ${}_RC$ 是 w^+-倾斜的。那么，对于一个正整数 n，以下断言是等价的：

1. G_C-$\mathrm{FD}(R) \leq n$.

2. 以下两个断言成立：

   (a) $\mathrm{fd}_{R^{op}}(M) \leq n$ *for every* $\mathcal{I}_{C^+}$*-injective right* R*-module* M.

   (b) $\mathcal{F}_C$-$\mathrm{fd}_R(M) \leq n$ *for every injective left* R*-module* M.

3. 以下两个断言成立：

   (a) $\mathrm{fd}_{R^{op}}(M) \leq n$ *for every* $\mathcal{I}_{C^+}$*-injective right* R*-module* M.

   (b) G_C-$\mathrm{fd}_R(M) \leq n$ *for every injective left* R*-module* M.

因此，R 的全局 G_C-平坦维数可通过以下公式计算：

$$\mathrm{G}_C\text{-}\mathrm{FD}(R) = max\{\mathrm{fd}_{R^{op}}(\mathcal{I}_{C^+}(R^{op})), \mathcal{F}_C\text{-}\mathrm{fd}_R(\mathcal{I}(R))\}.$$

证明。 2. $\Leftrightarrow$ 3. 由引理 3.4 得出。

1. $\Rightarrow$ 3. 断言（b）依据定义成立。下面证明（a）。

注意，$\mathrm{fd}_{R^{op}}(M) \leq n$ 当且仅当对每个 R-模A，$\mathrm{Tor}_{n+1}^{R}(M,A) = 0$。但是 $\mathrm{G_C}$-$\mathrm{FD}(R) \leq n$ 意味着，对每个这样的 A，都存在一个正合列

$$0 \to G_n \to \cdots \to G_0 \to A \to 0$$

对于所有 $i \geq 0$，有 $G_i \in \mathsf{G_C F}(R)$。现在，$M \in \mathcal{I}_{C^+}(R^{op})$ 意味着对所有 i，$\mathrm{Tor}_{i\geq 1}^{R}(M, G_i) = 0$，因此 $\mathrm{Tor}_{n+1}^{R}(M,A) \cong \mathrm{Tor}_{1}^{R}(M,G_n) = 0$。

设 M 是一个 R-模。考虑 M 的一个投射分解和一个内射余分解:

$$\cdots \to P_1 \to P_0 \to P_{-1} = M \to 0 \quad \text{and} \quad 0 \to M = I_{-1} \to I_0 \to I_1 \to \cdots,$$

分别地。将这些正合列分解为短正合列，我们得到，对于每个整数 $i \in \mathbb{N}$,

$$0 \to N_{i+1} \to P_i \to N_i \to 0 \quad \text{and} \quad 0 \to K_i \to I_i \to K_{i+1} \to 0$$

其中 $N_i = \mathrm{Im}(P_i \to P_{i-1})$ 和 $K_i = \mathrm{Ker}(I_i \to I_{i+1})$。将第一组序列取直和,

$$0 \to \oplus_{i\in\mathbb{N}} N_{i+1} \to \oplus_{i\in\mathbb{N}} P_i \to M \oplus (\oplus_{i\in\mathbb{N}} N_{i+1}) \to 0,$$

到第二个对象的直积,

$$0 \to M \oplus (\prod_{i\in\mathbb{N}} K_{i+1}) \to \prod_{i\in\mathbb{N}} I_i \to \prod_{i\in\mathbb{N}} K_{i+1} \to 0,$$

我们得到正合列

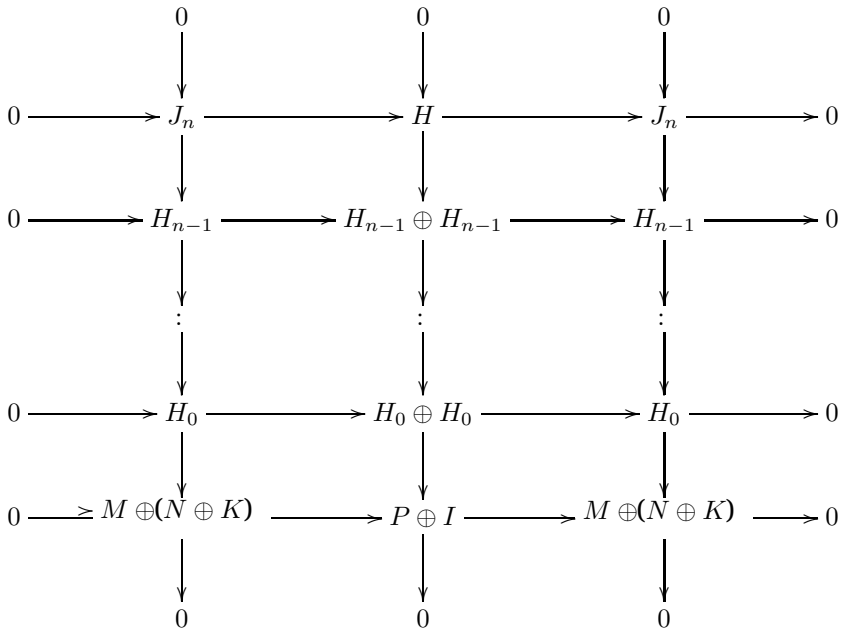
$$0 \to M \oplus (N \oplus K) \to P \oplus I \to M \oplus (N \oplus K) \to 0$$

其中 $N = \oplus_{i\in\mathbb{N}} N_{i+1}$、$K = \prod_{i\in\mathbb{N}} K_{i+1}$、$P = \oplus_{i\in\mathbb{N}} P_i$ 和 $I = \prod_{i\in\mathbb{N}} I_i$。

现在，考虑 $M \oplus (N \oplus K)$ 的一个投射分解:

$$\cdots \to H_1 \to H_0 \to M \oplus (N \oplus K) \to 0.$$

因此，由马蹄引理，我们得到一个行列均为正合的交换图



注意，由于 I 是内射的， P 根据 [3, 命题 4.17] 是 G_C-平坦的；根据 [3, 推论 7.8(2)] 及假设，$\mathrm{G_C\text{-}fd}_R(P\oplus I) = \mathrm{G_C\text{-}fd}_R(I) \leq n$。但是，由于每个 H_i 都是 G_C-平坦的，根据 [3, 定理 7.7]， H 也是 G_C-平坦的。

现在，设 X_R 是任意一个$\mathcal{I}_{C^+}$-内射右 R-模。根据假设，$\mathrm{fd}_{R^{op}}(X) \leq n$。然后，利用 $M\oplus(N\oplus K)$的投射分解，我们得到

$$\mathrm{Tor}_1^R(X, J_n) \cong \mathrm{Tor}_{n+1}^R(X, M\oplus(N\oplus K)) = 0.$$

因此，序列 $0\to J_n \to H \to J_n \to 0$ 是$(\mathcal{I}_{C^+}(R^{op})\otimes_R -)$-正合的。然后，将这些序列组装起来，我们得到一个 $(\mathcal{I}_{C^+}(R^{op})\otimes_R -)$-正合的正合列

$$\cdots \to H \xrightarrow{f} H \xrightarrow{f} H \to \cdots$$

其中 $J_n = \mathrm{Ker} f$。因此，根据 [3,定理 5.1]， J_n是 G_C-平坦的，进而 $\mathrm{G_C\text{-}fd}_R(M) \leq \mathrm{G_C\text{-}fd}_R(M\oplus(N\oplus K)) \leq n$，根据 [3,推论 7.8]，即得所需结论。 ■

当 R 的 Gorenstein 弱维数有限时，Emmanouil 证明了定理 3.5 的以下特殊情形（[11,定理 5.3]）。这里我们不再要求这一有限性条件。

推论 3.6 R 的弱全局 Gorenstein 维数可通过以下简单公式计算：

$$\begin{aligned}\mathrm{GFD}(R) &= max\{\mathrm{fd}_{R^{op}}(\mathcal{I}(R^{op})), \mathrm{Gfd}_R(\mathcal{I}(R))\}\\ &= max\{\mathrm{fd}_{R^{op}}(\mathcal{I}(R^{op})), \mathrm{fd}_R(\mathcal{I}(R))\}.\end{aligned}$$

4 全局 G_C-平坦维数的左右对称性

本节旨在证明定理 B及其一些推论。

定义 4.1（[**27**], 定义 2.1）一个（R, S）-双模 C 是半对偶化的，如果：

1. ${}_RC$ 和 C_S 都具有逐次有限投射分解。
2. $\mathrm{Ext}_R^{\geq 1}(C, C) = \mathrm{Ext}_S^{\geq 1}(C, C) = 0.$
3. 自然的自同态映射 $R\to \mathrm{Hom}_S(C, C)$ 和 $S\to \mathrm{Hom}_R(C, C)$ 都是环同构。

这里，逐次有限投射分解是指每个投射模都是有限生成的投射分解。

在本节余下部分，除非另有说明， C 将是一个半对偶化（R, S）-双模。

引理 4.2 以下等式成立：

1. 对每个内射的 R-模，$\mathrm{fd}_{S^{op}}(\mathrm{Hom}_R(C, E)) = \mathcal{F}_C\text{-}\mathrm{fd}_R(E)$。因此，$\mathrm{fd}_{S^{op}}(\mathcal{I}_{C^+}(S^{op})) = \mathcal{F}_C\text{-}\mathrm{fd}_R(\mathcal{I}(R))$。 2. 对每个内射的 S-模，$\mathrm{fd}_R(\mathrm{Hom}_S(C, E)) = \mathcal{F}_C\text{-}\mathrm{fd}_S(E)$。因此，$\mathrm{fd}_{R^{op}}(\mathcal{I}_{C^+}(R^{op})) = \mathcal{F}_C\text{-}\mathrm{fd}_S(\mathcal{I}(S))$。

证明。断言（2）可以用与（1）类似的方法证明；因此我们只证明（1）。

首先，我们证明 $\mathrm{fd}_{S^{op}}(\mathrm{Hom}_R(C,E)) \leq \mathcal{F}_C\text{-}\mathrm{fd}_R(E)$。

我们可以假设 $n = \mathcal{F}_C\text{-}\mathrm{fd}_R(E) < \infty$，因为无穷情形显然成立。回顾一下（例 2.2(2)），根据我们的假设，我们有 $\mathcal{F}_C(R) = C \otimes_S \mathcal{F}(S^{op})$，因此存在一个由 R-模组成的正合列：

$$0 \to C \otimes_S F_n \to \cdots \to C \otimes_S F_0 \to E \to 0$$

其中每个 ${}_SF_i$ 都是平坦的。由 [14, 定理 3.2.15 和注 3.2.27], ，对于每个$k \geq 1$，我们得到

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^k_R(C, C \otimes_S F_i)^+ &\cong (\mathrm{Ext}^k_R(C,C) \otimes_S F_i)^+ \\ &\cong \mathrm{Hom}_{S^{op}}(F, \mathrm{Ext}^k_R(C,C)^+) = 0 \end{aligned}$$

因此，对每个 $i \geq 1$，$\mathrm{Ext}^k_R(C, C \otimes_S F_i) = 0$。于是，左$S$-模的序列

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(C, C \otimes_S F_n) \to \cdots \to \mathrm{Hom}_R(C, C \otimes_S F_0) \to \mathrm{Hom}_R(C,E) \to 0$$

是正合的。但是，对于每个 $i = 0、\cdots、n$

$$\mathrm{Hom}_R(C, C \otimes_S F_i) \cong \mathrm{Hom}_R(C,C) \otimes_S F_i \cong {}_SF_i$$

由 [14, 定理 3.2.14], 可知，$\mathrm{fd}_{S^{op}}(\mathrm{Hom}_R(C,E)) \leq n$.

现在我们证明另一个不等式。假设 $n = \mathrm{fd}_{S^{op}}(\mathrm{Hom}_R(C,E)) < \infty$。那么，存在一个 ${}_S\mathrm{Hom}_R(C,E)$ 的有限平坦分解：

$$0 \to F_n \to \cdots \to F_0 \to \mathrm{Hom}_R(C,E) \to 0.$$

使用 [20, 引理 1.2。11], 我们得到，对于每个 $k \geq 0$,

$$\mathrm{Tor}^S_k(C, \mathrm{Hom}_R(C,E)) \cong \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Ext}^k_S(C,C), E) \cong \begin{cases} E \text{ if } k = 0 \\ \\ 0 \text{ if } k \geq 1 \end{cases}.$$

于是，我们得到一个正合列

$$0 \to C \otimes_S F_n \to \cdots \to C \otimes_S F_0 \to E \to 0$$

其中每个 $C \otimes_S F_i$ 都是 $\mathcal{F}_C$-平坦的。因此，$\mathcal{F}_C\text{-}\mathrm{fd}_R(E) \leq n = \mathrm{fd}_{S^{op}}(\mathrm{Hom}_R(C,E))$。

最后，注意到 $\mathcal{I}_{C^+}(S^{op}) = \mathrm{Hom}_R(C, \mathcal{I}(R))$，我们得到最后一个等式。

■

为完整起见，我们陈述定理 3.5 的右侧版本。

定理 4.3 假设 S 是任意 $\mathrm{G_C}$F-闭环，且 C 是一个 w^+-倾斜S-模。S 的全局 G_C-平坦维数可按如下方式计算：

$$\begin{aligned} \mathrm{G_C}\text{-}\mathrm{FD}(S) &= max\{\mathrm{fd}_{S^{op}}(\mathcal{I}_{C^+}(S^{op})), \mathcal{F}_C\text{-}\mathrm{fd}_S(\mathcal{I}(S))\} \\ &= max\{\mathrm{fd}_{S^{op}}(\mathcal{I}_{C^+}(S^{op})), \mathrm{G_C}\text{-}\mathrm{fd}_S(\mathcal{I}(S))\}. \end{aligned}$$

现在，我们可以证明引言中的定理 B。

定理 4.4 设 R 为左 $\mathrm{G_C}$F-闭，且 S 为右 $\mathrm{G_C}$F-闭。那么

$$\mathrm{G_C}\text{-}\mathrm{FD}(R) = \mathrm{G_C}\text{-}\mathrm{FD}(S),$$

在这种情况下，我们将这两个数的共同值定义为环对 (R, S) 的 G_C-平坦维数，并记作 $\mathrm{G_C}$-FD(R, S)。

证明。由定理 3.5 和 4.3 可得以下两个公式:

$$\mathrm{G_C}\text{-}\mathrm{FD}(R) = max\{\mathrm{fd}_{R^{op}}(\mathcal{I}_{C^+}(R^{op})), \mathcal{F}_{\mathrm{C}}\text{-}\mathrm{fd}_R(\mathcal{I}(R))\},$$

$$\mathrm{G_C}\text{-}\mathrm{FD}(S) = max\{\mathrm{fd}_{S^{op}}(\mathcal{I}_{C^+}(S^{op})), \mathcal{F}_{\mathrm{C}}\text{-}\mathrm{fd}_S(\mathcal{I}(S))\}.$$

另一方面，由引理 4.2 可知

$$\mathrm{fd}_{R^{op}}(\mathcal{I}_{C^+}(R^{op})) = \mathcal{F}_{\mathrm{C}}\text{-}\mathrm{fd}_S(\mathcal{I}(S)) \text{ and } \mathrm{fd}_{R^{op}}(\mathcal{I}_{C^+}(S^{op})) = \mathcal{F}_{\mathrm{C}}\text{-}\mathrm{fd}_R(\mathcal{I}(R)).$$

因此，$\mathrm{G_C}$-FD(R) $= \mathrm{G_C}$-FD(S)。 ■

我们以定理 4.4 的一些推论结束本节。

将定理 4.4 中的 $\mathrm{G_C}$F-紧致条件替换为相容条件，并注意引理 2.8(b)，可得以下特例。

推论 4.5 设 R 是左相容的，且 S 是右相容的。那么

$$\mathrm{G_C}\text{-}\mathrm{FD}(R) = \mathrm{G_C}\text{-}\mathrm{FD}(S).$$

Bennis 在 [2] 中猜想， R 的弱全局 Gorenstein 维数具有对称性。也就是说，等式 GFD(R) = GFD(R^{op})成立。

许多作者研究了这一猜想。在 [31, 推论 2.8], 中，Mahdou 和 Tamekkante 在 R 是（双侧）相容的情况下证明了这一猜想；Emmanouil 在 [11, 定理 5.3] 中则在 R和 R^{op} 的 Gorenstein 弱整体维数均有限的情况下证明了这一猜想。另一方面，Bouchiba 在 [8, 推论 3.5], 中指出，当 Gorenstein 平坦左、右 R-模的类对扩张封闭时，这一猜想成立。不过，根据 Šaroch 和 Šťovíček 的研究´ [28] （见引理 2.8(a)），这一条件总是成立。因此，这一猜想已得到证明。最近，Christensen、Estrada 和 Thompson 采用不同的方法重新证明了这一事实 [9, 推论 2.5]。

作为定理 4.4 的直接推论，我们得到第三种证明。请注意，我们的证明简单明了，与 [8] 和 [9] 中给出的证明截然不同。

推论4.6（*[8,* 推论3.5。*]* 和 *[9,* 推论 2。*5]*）在任意环 R 上， R 的弱全局 Gorenstein 维数是对称的，也就是说，我们有等式:

$$\mathrm{GFD}(R) = \mathrm{GFD}(R^{op}).$$

回忆一下， [2] 若环 R 是 n-IF环，则每个左、右内射 R-模的平坦维数至多为 n。双侧诺特环是 n-IF 环，当且仅当根据 [14, 定理 9.1.11]它是 n-Gorenstein 环。Bennis刻画了 [2, 定理2.8]n-IF 环，前提是它们是（双侧）相干的。作为定理 3.5 的另一项推论，我们去掉相干性假设。

推论 4.7 环 R 是 n-IF 当且仅当 Gorenstein 平坦维数$(R) \leq n$。

一旦确立了 Gorenstein 弱整体维数的对称性，也可以由 [11, 定理 5.3]推导出该推论。

假设 R 是左相容的， S 是右相容的。朱和 Ding（[37,定理 2.6]）证明了，若 ${}_RC$和 C_S 的 FP-内射维数有限，则 FP $-\mathrm{id}_R(C) = \mathrm{FP}$ $-\mathrm{id}_S(C)$。接下来我们证明，当且仅当 R（或 S）的全局 G_C-平坦维数有限时，这一结论成立。但首先，我们需要以下引理。

引理4.8

1. 如果 R 是左相容，则 $\mathrm{fd}_{R^{op}}(\mathcal{I}_{C^+}(R^{op})) = \mathrm{FP}-\mathrm{id}_R(C)$。 2. 如果 S 是右相容，则$\mathrm{fd}_{S^{op}}(\mathcal{I}_{C^+}(S^{op})) = \mathrm{FP}$ $-\mathrm{id}_S(C)$。

证明。我们只证明（1），因为（2）的证明类似。

由 [17, 定理 2.2], 可得，FP $-\mathrm{id}_R(C)$ $= \mathrm{fd}_{R^{op}}(C^+)$ $\leq \mathrm{fd}_{R^{op}}(\mathcal{I}_{C^+}(R^{op}))$。反之，若 FP $-\mathrm{id}_R(C)$ $= \infty$，则等式成立。因此，我们可以假设 $n = \mathrm{FP}$ $-\mathrm{id}_R(C) < \infty$。

设 $X \in \mathcal{I}_{C^+}(R^{op})$。那么， X 是某个 $(C^+)^I$的直和项。再次利用 [17, 定理 2.2], , 我们得到 $\mathrm{fd}_{R^{op}}(C^+) = \mathrm{FP}$ $-\mathrm{id}_R(C) = n$。但是，根据[14, 定理 3.2. 24]，任意右 R-模的平坦分解的直积仍是一个平坦分解。这意味着 $\mathrm{fd}_{R^{op}}((C^+)^I) \leq n$。因此，$\mathrm{fd}_{R^{op}}(X) \leq \mathrm{fd}_{R^{op}}((C^+)^I) \leq n$。从而，$\mathrm{fd}_{R^{op}}(\mathcal{I}_{C^+}(R^{op})) \leq n$。

假设 R 和 S 分别是左诺特环和右诺特环。回顾（ [15, 定义 3.1]），如果 C_S 和 ${}_RC$ 都具有有限内射维数，则半对偶化（R, S）-双模称为对偶化双模。将“诺特”替换为“相干”，并将“内射”替换为“FP-内射”，我们得到下面较弱的概念。

定义4.9设 R 和 S 分别为左相容环和右相容环。若半对偶化(R, S)-双模 C 满足 ${}_RC$ 和 C_S 都具有有限的 FP-内射维数，则称其为弱对偶化模。在此情况下，称 C 为弱 n-对偶化，其中 $n =$ FP $-$内射维数$_R(C) =$ FP $-$内射维数$_S(C)$。

推论4.10 假设 R 是左相容的，且 S 是右相容的。那么，$\mathrm{G_C}$- FD$(R, S) \leq n$ 当且仅当 C 是弱 n-对偶化的。

因此，$\mathrm{G_C}$-FD$(R, S) = max\{\mathrm{FP}$ $-\mathrm{id}_R(C), \mathrm{FP}$ $-\mathrm{id}_S(C)\}$.

证明。由推论4.5、定理 3.5、引理4.2和引理4.8，以及引理4.8之前的注释可得。 ■

推论4.11 假设 R 是左相容的且 S 是右相容的。那么，$\mathrm{G_C}$-FD$(R, S) = 0$ 当且仅当 ${}_RC$和 C_S 都是 FP-内射模。

5 G_C-平坦模型结构

本节将在 R的全局G_C-平坦维数有限的条件下，描述最近发现的G_C-平坦模型结构中的弱等价。该结果是一个更一般结果（引言中的定理 D）的推论，我们将在本节中证明这一结果。首先，我们需要发展一些将在本节中贯穿使用的初步结果。

回顾一下， $\mathcal{A}$ 中的对象类 $\mathcal{X}$ 被称为特殊预覆盖，如果对于任意对象 $A \in \mathcal{A}$，都存在一个正合列 $0 \to K \to X \to A \to 0$，其中有 $X \in \mathcal{X}$和 $K \in \mathcal{X}^{\perp}$。特殊预包络类可以对偶地定义。注意，余挠对（$\mathcal{X}$， $\mathcal{Y}$）是完备的，当且仅当 $\mathcal{X}$是特殊预覆盖且 $\mathcal{Y}$是特殊预包络。

所谓特殊适当的 $\mathcal{X}$ 分解，指的是一个 $\mathcal{X}$ 分解。

$$\cdots \to X_1 \to X_0 \to A \to 0$$

其中每个 $\mathrm{Ker}(X_i \to X_{i-1}) \in \mathcal{X}^{\perp}$ with $X_{-1} := A$。注意，当且仅当 $\mathcal{X}$ 是一个特殊预覆盖类时，任意对象 $A \in \mathcal{A}$ 都有一个特殊的适当 $\mathcal{X}$-分解。

命题 5.1 假设 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一个完备遗传余挠对。对于任意对象 A（在 $\mathcal{A}$ 中）以及任意整数 $n \geq 1$，以下断言等价。

(a) $\mathcal{X}\text{-resdim}_{\mathcal{A}}(A) \leq n$.

(b) 对于任意特殊的 proper $\mathcal{X}$-分解

$$\cdots \to X_n \to X_{n-1} \to \cdots \to X_1 \to X_0 \to A \to 0$$

with $X_{-1} = A$, *we have* $K_{n-1} := \mathrm{Ker}(X_{n-1} \to X_{n-2}) \in \mathcal{X}$.

(c) 存在一个特殊的适当 $\mathcal{X}$-分解

$$0 \to X_n \to \cdots \to X_0 \to A \to 0$$

(d) 对所有对象 $Y \in \mathcal{Y}$ 和所有 $k \geq n+1$， $\mathrm{Ext}^k_{\mathcal{A}}(A, Y) = 0$。

(e) 对所有对象 $Y \in \mathcal{Y}$， $\mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathcal{A}}(A, Y) = 0$。

因此，

$$\mathcal{X}\text{-resdim}_{\mathcal{A}}(A) = \sup\{i \in \mathbb{N} : \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(A, Y) \neq 0 \ \textit{for some}\ Y \in \mathcal{Y}\}.$$

证明。 $(a) \Rightarrow (b)$ 我们采用归纳法。

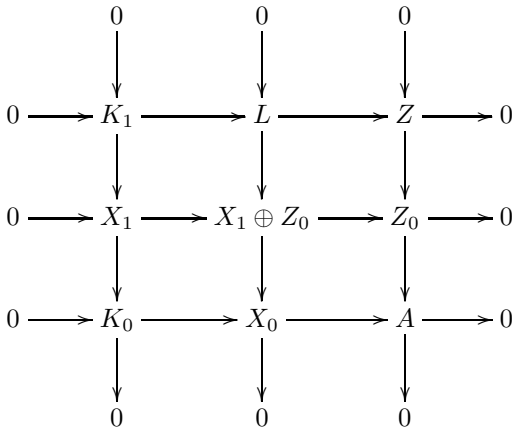
若 $n = 1$， 即 $\mathcal{X}\text{-resdim}_{\mathcal{A}}(A) \leq 1$， 则存在一个正合列$0 \to Z_1 \to Z_0 \to A \to 0$, 其中 $Z_1, Z_0 \in \mathcal{X}$。下面证明 $K_0 := \mathrm{Ker}(X_0 \to A) \in \mathcal{X}$。我们有如下交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Z_1 & \longrightarrow & Z_0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & K_0 & \longrightarrow & X_0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

由此诱导出的映射锥给出短正合列 $0 \to Z_1 \to Z_0 \oplus K_0 \to X_0 \to 0$。因此， $K_0 \in \mathcal{X}$ 由于 $Z_1, X_0 \in \mathcal{X}$， 且 $\mathcal{X}$ 对扩张和直和项封闭。

对于情形 $n \geq 2$， 存在一个正合列 $0 \to Z \to Z_0 \to A \to 0$， 其中 $Z_0 \in \mathcal{X}$和 $\mathcal{X}\text{-resdim}_{\mathcal{A}}(Z) \leq n-1$。由于 $K_0 \in \mathcal{X}^{\perp}$， 我们可以构造如下

具有正合行和正合列的交换图:



注意到 $L \in \mathcal{X}$as $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ 是一个遗传的余挠对，且 $X_0, X_1, Z_0 \in \mathcal{X}$。现在， $\mathcal{X}$-resdim$_{\mathcal{A}}(Z) \leq n-1$ 且 Z 具有如下特殊真 $\mathcal{X}$-分解:

$$\cdots \to X'_{n-2} = X_{n-1} \to X'_{n-3} = X_{n-2} \to \cdots \to X'_1 = X_2 \to X'_0 = L \to Z \to 0$$

由归纳法， $K_{n-1} =$ Ker$(X_{n-1} \to X_{n-2}) =$ Ker$(X'_{n-2} \to X'_{n-3}) \in \mathcal{X}$ ，如所需。

$(b) \Rightarrow (c)$ 根据假设以及 $\mathcal{X}$ 是一个特殊预覆盖类这一事实。

$(c) \Rightarrow (d)$ 由于 $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ 是一个遗传的余挠对，对于任意对象 $Y \in \mathcal{Y}$ 和任意整数 $k \geq n+1$，我们得到如下同构:

$$\mathrm{Ext}^k_{\mathcal{A}}(A,Y) \cong \mathrm{Ext}^{k-1}_{\mathcal{A}}(K_0,Y) \cong \cdots \cong \mathrm{Ext}^{k-n}_{\mathcal{A}}(K_{n-1},Y) = \mathrm{Ext}^{k-n}_{\mathcal{A}}(X_n,Y) = 0.$$

$(d) \Rightarrow (e)$ 显然。

$(e) \Rightarrow (a)$ 考虑一个特殊真 $\mathcal{X}$-分解:

$$\cdots \to X_n \to \cdots \to X_0 \to A \to 0.$$

由于 $K_n \in \mathcal{Y}$ 且每个 $X_i \in \mathcal{X}$， Ext$^1_{\mathcal{A}}(K_{n-1}, K_n) \cong \cdots \cong$ Ext$^{n+1}_{\mathcal{A}}(A, K_n) = 0$。因此，短正合列 $0 \to K_n \to X_n \to K_{n-1} \to 0$ 分裂。所以$K_{n-1} \in \mathcal{X}$ 且 $\mathcal{X}$-相对分辨维数$_{\mathcal{A}}(A) \leq n$。 ■

利用命题 5.1 中给出的 $\mathcal{X}$-分辨维数的描述，下面的结果是标准且直接的。

命题 5.2 设 $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ 是 $\mathcal{A}$ 中的完备遗传余挠对。

1. 给定短正合列 $\mathcal{E}$： $0 \to M \to N \to L \to 0$ 属于 $\mathcal{A}$，则有:

(a) $\mathcal{X}$-相对分辨维数$_{\mathcal{A}}(M) \leq max\{\mathcal{X}$-相对分辨维数$_{\mathcal{A}}(N)$ $\mathcal{X}$-相对分辨维数$_{\mathcal{A}}(L) - 1\}$.当且仅当 $\mathcal{X}$-相对分辨维数$_{\mathcal{A}}(N) \neq \mathcal{X}$-相对分辨维数$_{\mathcal{A}}(L)$ 时，等号成立。
(b) $\mathcal{X}$-相对分辨维数$_{\mathcal{A}}(N) \leq max\{\mathcal{X}$-相对分辨维数$_{\mathcal{A}}(M)$ $\mathcal{X}$-相对分辨维数$_{\mathcal{A}}(L)\}$. 当且仅当 $\mathcal{X}$-相对分辨维数$_{\mathcal{A}}(L) \neq \mathcal{X}$-相对分辨维数$_{\mathcal{A}}(M) + 1$.(c) $\mathcal{X}$-相对分辨维数$_{\mathcal{A}}(L) \leq max\{\mathcal{X}$-相对分辨维数$_{\mathcal{A}}(N)$ $\mathcal{X}$-相对分辨维数$_{\mathcal{A}}(M) + 1\}$.当且仅当 $\mathcal{X}$-相对分辨维数$_{\mathcal{A}}(M) \neq \mathcal{X}$-相对分辨维数$_{\mathcal{A}}(N)$ 时，等号成立。

2. 对于任意对象族 $(M_i)_{i=1,\ \cdots,\ n}$ ，其中的对象属于 $\mathcal{A}$，我们有

$$\mathcal{X}\text{-resdim}_{\mathcal{A}}(\oplus_{i=1}^n M_i) = \sup\{\mathcal{X}\text{-resdim}_{\mathcal{A}}(M_i) | i = 1, \cdots, n\}.$$

$\widehat{\ }$因此， $\mathcal{X}$ 是厚的。

引理 5.3 设 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{G}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的两个对象类，且 $\mathcal{X}$ 对直和项封闭。令 $\mathcal{H}=\mathcal{G}^{\perp}$ 和 $\mathcal{Y}=\mathcal{X}^{\perp}$。若 $\mathcal{X}$ 是$\mathcal{G}$的余生成元，则 $\mathcal{G}\cap\mathcal{H}\subseteq\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}$.

此外，若 $(\mathcal{G},\mathcal{H})$ 是完备余挠对，且 $\mathcal{G}\cap$ $\widehat{\mathcal{X}}=\mathcal{X}$，则

$$\mathcal{G}\cap\mathcal{H}=\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}.$$

证明。设 A 是 $\mathcal{A}$中的一个对象。对于第一个包含，假设 $A\in\mathcal{G}\cap\mathcal{H}$。由于 $\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{G}$的余生成元， $\mathcal{X}\subseteq\mathcal{G}$ ，进而 $A\in\mathcal{H}\subseteq\mathcal{Y}$。此外，存在正合列 $0\to A\to X\to G\to 0$ ，其中 $X\in\mathcal{X}$ 且 $G\in\mathcal{G}$。该序列分裂为 $A\in\mathcal{H}$ 和 $G\in\mathcal{G}$。因此， $A\in\mathcal{X}$。

反过来，假设 $A\in\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}$。那么， $A\in\mathcal{X}\subseteq\mathcal{G}$。由于余挠对 $(\mathcal{G},\mathcal{H})$ 是完备的，存在一个正合列

$$0\to A\to W\to G\to 0$$

满足 $W\in\mathcal{H}$ 和 $G\in\mathcal{G}$。注意，根据前面的包含关系， $W\in\mathcal{G}\cap\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{G}\cap\mathcal{H}\subseteq\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}$。现在，我们有 $G\in\mathcal{G}$ ，其中 $\operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(G)\leq 1<\infty$，也就是说，$G\in\mathcal{G}\cap\mathcal{X}$。因此， $G\in\mathcal{X}$，且该序列分裂。所以， $A\in\mathcal{H}$。 ■

下面两个结果以一种便捷的方式，将余挠对和 Hovey 三元组与（弱）AB-上下文联系起来。第一个结果受到 Liang 和 Yang 的两个结果的启发，即 [29, 命题 2.5 和命题 2.10]。

命题 5.4 设 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{G}$ 是 $\mathcal{A}$ 中两个对象类，且 $\mathcal{X}$ 对直和项封闭。令 $\mathcal{Y}=\mathcal{X}^{\perp}$ 和 $\mathcal{H}=\mathcal{G}^{\perp}$。

1. 假设 $\mathcal{X}$是 $\mathcal{G}$和 $\mathcal{G}\cap\mathcal{X}=\mathcal{X}$的余生成元。如果 $(\mathcal{G},\mathcal{H})$ 是一个遗传完备余挠对，那么 $(\mathcal{G},\mathcal{X}\cap\mathcal{Y},\mathcal{X}\cap\mathcal{Y})$ 是一个左弱 AB-上下文。 2. 假设 $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ 是一个完备遗传余挠对。如果 $(\mathcal{G},\mathcal{X}\cap\mathcal{Y},\mathcal{X}\cap\mathcal{Y})$ 是一个左 AB-上下文，那么 $(\mathcal{G},\mathcal{H})$ 是一个遗传完备余挠对 $\widehat{\ }$，且满足 $\mathcal{H}=\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}=\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}$。

证明。1. 根据 [29, 命题2.5], , 对$(\mathcal{G},\mathcal{G}\cap\mathcal{H})$而言，该对是 [7, 定义2.5] 意义下的弗罗贝尼乌斯对。此外，利用 [7, 定理 5.4(1)], 中左AB-上下文与左弗罗贝尼乌斯对之间的一一对应关系，我们得到三元组 $(\mathcal{G},(\mathcal{G}\cap\mathcal{H})\ \mathcal{G}\cap(\mathcal{G}\cap\mathcal{H}))=(\mathcal{G},(\mathcal{G}\cap\mathcal{H})\ \mathcal{G}\cap\mathcal{H})$是一个左弱AB-上下文。最后，应用引理 5.3，我们得到所需的左弱 AB-上下文$(\mathcal{G},\mathcal{X}\cap\mathcal{Y},\mathcal{X}\cap\mathcal{Y})$。

2.根据 [22, 定理1.12。10], 我们得到，$(\mathcal{G},\mathcal{X}\cap\mathcal{Y})$是一个完备的遗传的$\widehat{\ }$余挠对，并且满足 $\mathcal{H}=\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}$。现在我们来证明 $\mathcal{H}=\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}$。

若 $A\in\mathcal{H}$，则存在一个有限的 $(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y})$-分解

$$0\to X_n\to\cdots\to X_0\to A\to 0.$$

$\widehat{\ }$由于每个 $X_i\in\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}\subseteq\mathcal{X}$, $A\in\mathcal{X}$。我们还知道 $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ 是遗传的，$\widehat{\ }$因此 $A\in\mathcal{Y}$。于是， $A\in\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}$。

反过来，若 $A\in\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}$，由命题 5.1，存在一个有限的特殊适当 $\mathcal{X}$-分解

$$0\to X_n\to\cdots\to X_0\to A\to 0$$

由于 $\mathcal{Y}$ 在扩张下封闭，每个 $X_i\in\mathcal{Y}$，继而 $X_i\in\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}$。因此， $A\in\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}=\mathcal{H}$。 ■

假设 $(\mathcal{Q},\mathcal{W},\mathcal{R})$ 是一个遗传霍维三元组，并设

$$(\widetilde{\mathcal{Q}},\mathcal{R}) := (\mathcal{Q}\cap\mathcal{W},\mathcal{R}) \text{ and } (\mathcal{Q},\widetilde{\mathcal{R}}) := (\mathcal{Q},\mathcal{W}\cap\mathcal{R})$$

为相应的余挠对。那么，以下两个断言总是成立：

- $(\widetilde{\mathcal{Q}},\mathcal{R})$ 是一个完备遗传余挠对。
- $\left(\mathcal{Q},\ \widetilde{(\mathcal{Q}\cap\widetilde{\mathcal{R}})}\ \widetilde{\mathcal{Q}\cap\mathcal{R}}\right)$ 是一个左弱 AB-上下文：事实上，由于 $(\mathcal{Q},\widetilde{\mathcal{R}})$ 是一个完备遗传余挠对，且 $\widetilde{\mathcal{Q}\cap\mathcal{R}} = \widetilde{\mathcal{Q}\cap\mathcal{R}}$，我们在命题 5.4(1) 中令 $\mathcal{G} = \mathcal{X} = \mathcal{Q}$，即可得到这个弱 AB-上下文。

在有限性假设 $\mathcal{A} = \mathcal{G}$ 下，以下结果表明这一结论也有逆向命题，从而给出了用 AB-上下文刻画遗传霍维三元组的一种新方法。我们注意到，A. Xu 在特定情形下的 [34, 定理 4.2] 中也指出了 Hovey 三元组与（弱）AB-上下文之间存在这种关系。

定理 5.5 设 $\mathcal{X}\subseteq\mathcal{G}\subseteq\mathcal{A}$ 是两个类，满足：

1. $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ 是一个完备遗传余挠对。
2. $(\mathcal{G},\mathcal{H},\mathcal{X}\cap\mathcal{Y})$ 是一个左 AB-上下文。

那么，$(\mathcal{G},\mathcal{X},\mathcal{Y})$ 是一个遗传霍维三元组。

证明。我们将证明分为三部分：

(a) 类 $\widehat{\mathcal{X}}$ 由命题 5.2 可知是厚的。

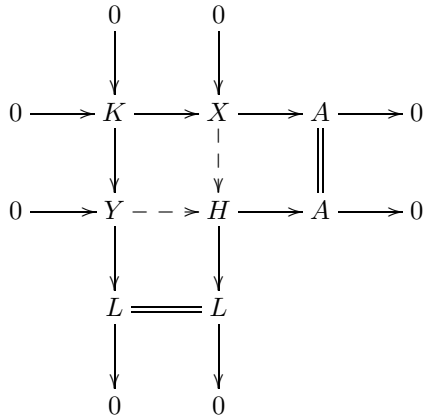
(b)根据假设和 [22, 定理1.12.10(1)] $\mathcal{H} = \mathcal{X}\cap\mathcal{Y}$。于是，$\mathcal{H} = \mathcal{X}\cap\mathcal{Y}$ 且偶对$(\mathcal{G},\mathcal{X}\cap\mathcal{Y})$ 根据命题 5.4(2) 是一个遗传完备余挠对。

(c)仍需证明$(\mathcal{G}\cap\mathcal{X},\mathcal{Y})$是一个遗传的完备余挠对。根据假设，我们只需证明 $\mathcal{X} = \mathcal{G}\cap\mathcal{X}$。

包含 $\mathcal{X}\subseteq\mathcal{G}\cap\widehat{\mathcal{X}}$ 是显然的。

反之，假设 $A\in\mathcal{G}\cap\widehat{\mathcal{X}}$ 且 $\mathcal{X}\text{-resdim}(A) < \infty$。若 $n = 0$，也就是说，$X\in\mathcal{X}$，则结论成立。现在假设 $n\geq 1$。我们对 n进行归纳法。

存在一个正合列 $0\to K\to X\to A\to 0$，满足 $\mathcal{X}\text{-resdim}_{\mathcal{A}}(K) = n-1$ 和 $X\in\mathcal{X}$。由于 $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ 是完备的，存在一个正合列$0\to K\to Y\to L\to 0$，满足 $\mathcal{Y}\in\mathcal{Y}$ 和 $L\in\mathcal{X}$。现在考虑以下推出：



由于 $A \in \mathcal{G}$、 $X \in \mathcal{X} \subseteq \mathcal{G}$ 和 $\mathcal{G}$ 对满态射的核封闭， $K \in \mathcal{G}$。因此，通过归纳法， $K \in \mathcal{X}$。于是， $Y \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$。

另一方面， $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \mathcal{G} \cap \mathcal{H}$ 根据假设。因此，中间的短正合列分裂为 $A \in \mathcal{G}$ 和 $Y \in \mathcal{H} = \mathcal{G}^{\perp}$。但是，根据中间列， $H \in \mathcal{X}$。因此， $A \in \mathcal{X}$，如所需。 ■

现在我们可以证明本节的第一个主要结果（引言中的定理 D）。我们只陈述并证明第一个断言，因为第二个断言完全对偶。

~ ~定理 5.6 假设 $(\mathcal{Q}, \mathcal{R})$ 和 $(\mathcal{Q}, \mathcal{R})$ 是两个完备遗传余扭挠对，使得：

~ ~(b) $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{Q}$（或等价地， $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}$）。

(c) $\mathcal{Q} \cap \widetilde{\mathcal{R}} = \widetilde{\mathcal{Q}} \cap \mathcal{R}$。

If $\mathcal{Q}\text{-resdim}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) < \infty$, *then* $(\mathcal{Q}, \widehat{(\widetilde{\mathcal{Q}})}, \mathcal{R})$ *is a hereditary Hovey triple.*

证明。利用前面引入的记号，令

$$(\mathcal{G}, \mathcal{H}) = (\mathcal{Q}, \widetilde{\mathcal{R}}) \text{ and } (\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = (\widetilde{\mathcal{Q}}, \mathcal{R}).$$

由定理 5.5 和假设可知，只需证明

$$(\mathcal{G}, \mathcal{H}, \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}) = (\mathcal{Q}, \widetilde{\mathcal{R}}, \widetilde{\mathcal{Q}} \cap \mathcal{R})$$

是一个左弱 AB-上下文。注意到 $\mathcal{G}$ 是 $\mathcal{G}$ 的一个余生成元，且满足 $\mathcal{G} \cap \mathcal{G} = \mathcal{G}$，因此由命题 5.4(1)可知， $(\mathcal{G}, \mathcal{G} \cap \mathcal{H}, \mathcal{G} \cap \mathcal{H})$ 是一个左 AB-上下文，进而如 $\mathcal{A} = \mathcal{Q}$所示，它也是一个左 AB-上下文。于是， 由于 $\mathcal{G} \cap \mathcal{H} = \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$，我们可以应用命题 5.4(2)得到 $\mathcal{H} = \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$，因此， $(\mathcal{G}, \mathcal{H}, \mathcal{X} \cap \mathcal{Y})$ 如所需，是一个左 AB-上下文。 ■

现在我们转而讨论最后一个主要结果（引言中的定理 C）。

在 [3, 4] 中，引入了 $\mathcal{F}_C$-平坦模和 $\mathcal{C}_C$-余挠模的概念，分别作为平坦模和余挠模的相对版本。这两个概念保留了平坦模和余挠模所满足的大多数性质。但与我们的 G_C-平坦模型结构相关的一些性质却无法通过这种推广得到。例如，除非 $R \in \mathcal{F}_C(R)$[4, 定理 3.7(3)]，否则， $(\mathcal{F}_C(R)\ \mathcal{C}_C(R))$不是一个余挠对。然而，事实证明还有另外两个模类，

$$\mathcal{V}_C(R) = {}^{\perp}(\mathcal{B}_C(R) \cap \mathcal{C}_C(R)) \text{ and } \mathcal{H}_C(R) = \mathcal{B}_C(R) \cap \mathcal{C}_C(R),$$

它们可以分别作为平坦模和余挠模类的相对版本。在某些假设下（具体取决于各项性质），它们具备以下一些性质，支持这一观点：

(a) If $C = R$, then $\mathcal{F}_C(R) = \mathcal{V}_C(R) = \mathcal{F}(R)$ and $\mathcal{C}_C(R) = \mathcal{H}_C(R) = \mathcal{C}(R)$.

(b)$(\mathcal{V}_C(R)\ \mathcal{H}_C(R))$ 是一个完备遗传余挠对。

(c) $\mathcal{F}_C(R) \subseteq \mathcal{V}_C(R) \subseteq \mathsf{G}_C\mathsf{F}(R)$】【。

(d) $\mathsf{G}_C\mathsf{C}(R) \subseteq \mathcal{H}_C(R) \subseteq \mathcal{C}_C(R)$。

(e) $\mathcal{F}_C(R)\cap\mathcal{C}_C(R)=\mathcal{V}_C(R)\cap\mathcal{H}_C(R)=\mathrm{G_C F}(R)\cap\mathrm{G_C C}(R)$.

基于上述讨论，自然可以引入以下定义。

定义 5.7 若 R-模 H 属于$\mathcal{H}_C(R):=\mathcal{B}_C(R)\cap\mathcal{C}_C(R)$，则称其为 $\mathcal{H}_C$-余挠的。若 $\mathrm{Ext}^1_R(V,H)=0$ 对所有 $\mathcal{H}_C$-余挠 R-模均成立，则称 R-模 V为 $\mathcal{V}_C$-平坦的。

令 $\mathcal{V}_C(R):={}^{\perp}\mathcal{H}_C(R)$ 表示所有 $\mathcal{V}_C$-平坦 R-模构成的类。
给定一个 R-模 M，我们将其 $\mathcal{V}_C$-平坦维数定义为

$$\mathcal{V}_C\text{-}\mathrm{fd}_R(R)=\mathcal{V}_C(R)\text{-}\mathrm{resdim}_R(M).$$

我们回顾最后一个要素，然后就可以证明定理 C。根据定义 2.1] ，若对每个集合 I 都有 $\mathrm{Ext}^{i\geq 1}_R(C,C^{(I)})=0$ ，且${}_RR$ 具有一个 $\mathrm{Hom}_R(-,\mathrm{Add}_R(C))$-正合的 $\mathrm{Add}_R(C)$-余解，则称 R-模 C 为 w-倾斜模。由 [5, 第 2] 节和 [4, 命题 2.14], ，我们得到以下断言之间的关系 $(a)\Rightarrow(b)\Rightarrow(c)$:

(a) C 是半对偶化的 (R,S)-双模。(b) ${}_RC$ 和 C_S 是具有逐次有限投射分解的 w-倾斜模。(c) ${}_RC$ 和 C_S 是 w^+-倾斜模。

定理 5.8 假设 R 是 $\mathrm{G_C F}$-闭的，且 C 是具有逐次有限投射分解的 w-倾斜模。如果 R 具有有限的全局 G_C-平坦维数，那么在 R-Mod 上存在一个阿贝尔模型结构,

$$\left(\mathrm{G_C F}(R),\widehat{\mathcal{V}_C(R)},\mathcal{H}_C(R)\right),$$

如下:
- 余纤维对象恰为 G_C-平坦的 R-模。
- 平凡对象恰为具有有限 $\mathcal{V}_C$-平坦维数的模。
- 纤维对象恰为 $\mathcal{H}_C$-余挠的 R-模。

证明。根据 [4, 定理4.15、命题4.13和命题4.14],可知

$$(\mathrm{G_C F}(R),\mathrm{G}_C(R))\text{ and }(\mathcal{V}_C(R),\mathcal{H}_C(R))$$

是两个具有相同核的完备遗传余挠对，即,

$$\mathrm{G_C F}(R)\cap\mathrm{G_C C}(R)=\mathcal{V}_C(R)\cap\mathcal{H}_C(R).$$

此外，从 [4, 定理 4.15] 的证明中可以看出，$\mathrm{G_C C}(R)\subseteq\mathcal{H}_C(R)$。因此，该结果由定理 5.6得出。 ■

当环是右相干的，A. Xu 已证明以下推论 [34, 推论 4.6(3)]。

推论 5.9对于具有有限弱全局 Gorenstein 维数的任意环 R ，我们在 R-模上有一个遗传阿贝尔模型结构

$$(\mathrm{GF(R)},\widehat{\mathcal{F}(\mathrm{R})},\mathcal{C}(\mathrm{R})).$$

致谢。
作者谨向审稿人致以感谢，感谢其富有洞见的建议，使论述更加完善。

参考文献

[1] M.Auslander和 R. O. Buchweitz, *The homological theory of maximal Cohen-Macaulay approximations* ´ **38** 1989 5 37 ,

《法国数学学会回忆录》（新系列）, （）, -。纪念Pierre Samuel的会议（奥赛, 1987年）。[2] D. Bennis, *Weak Gorenstein global dimension*, 《国际代数电子杂志》8（2010）, 140–152。[3] D.Bennis、R. El Maaouy、J.R. Garc´ *Relative Gorenstein flat modules and dimension* **50** 2022 3853 3882

ıaRozas和L.Oyonarte, , Comm. Alg.（）, –。[4] D.Bennis、R. El Maaouy、J.R. Garc´ *Relative Gorenstein flat modules and Foxby classes and their model structures* ıa Rozas 和 L. Oyonarte, , 《代数与应用杂志》（2024）, 2550194。DOI: 10.1142/S0219498825501944[5] D. Bennis、J.R.Garc´ıa Rozas和 L. Oyonarte, *Relative Gorenstein dimensions*, 《地中海数学杂志》13（2016）, 65–91。[6] D. Bennis、J.R. Garc´ *Relative projective and injective dimensions* **44** 2016 3383 3396

ıaRozas和 L.Oyonarte, , Comm. Alg.（）, –。[7] V.Becerril、O. Mendoza、M. A. P´erez 和 V. Santiago, , J. Homotopy Relat. Struct.（）, –。[8] S.Bouchiba, Gorenstein 平坦维数的一种变体理论, Colloq. Math. 140（2015）, 183–204。[9] L. W. Christensen、S. Estrada和P.Thompson, *Gorenstein weak global dimension is symmetric* **294** 2021 2121 2128 ,

Math.Nachr.（）, –。[10] R.ElMaaouy, *Model structures n-Gorenstein flat modules and PGF dimensions* , , 2302 12905 即将在《爱丁堡数学学会会刊》上发表。可从arXiv：获取。[11] I. Emmanouil, *On the finiteness of Gorenstein homological dimensions*, J. Alge- bra. 372（2012）, 376–396。[12] E. Enochs、O. Jenda 和 B. Torrecillas, *Gorenstein flat modules*, J.Nanjing Univ.10（1994）, 1–9。[13] E. Enochs 和 O.Jenda, *Gorenstein injective and projective modules*, Math. Zeit. 220（1995）, 611–633。[14] E. Enochs和 O. Jenda, *Relative Homological Algebra*, de Gruyter 数学论丛30, Walterde Gruyter（2000）。[15] E. Enochs、O. Jenda 和 J. A. L´opez-Ramos, , Proc.EdinburghMath. Soc.（）, –。[16] S. Estrada、A.Iacob和 M.A.P´erez, *Model structures and relative Gorenstein flat modules and chain complexes*, 《代数中的范畴、同调与组合方法》。751（2020）, 135–175。[17] D.J. Fieldhouse, *Character modules, dimension and purity*, GlasgowMath. J. 13（1972）, 144–146。[18] J.Gillespie, *How to construct a Hovey triple from two cotorsion pairs*, Fund. Math. 230（2015）, 281–289。[19] J. Gillespie, *Hereditary abelian model categories*, Bull. Lond. Math. Soc. 48（2016）, 895–922。

[20] R. G ¨ *Approximations and Endomorphism Algebras of Modules* obel 和 J. Trlifaj, 《de Gruyter 数学论丛》, 第 41 卷, 第 2 版（修订并扩充版）。柏林、波士顿。（2012 年）。[21] E. S. Golod, *G-dimension and generalized perfect ideals Algebraic geometry and* , 《论文集》。Steklov 数学研究所论文集。（）, – 66。[22] M. Hashimoto, *its applications* **165** 1984 62 *Auslander-Buchweitz Approximations of Equivariant Modules*, 伦敦数学会讲义系列, 第 282 卷, 剑桥大学出版社, 剑桥, （2000 年）。[23] M. Hovey, *Model categories*, 数学调查与专著第 63 卷（美国数学学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 1999 年）。[24] M. Hovey, *Cotorsion pairs, model category structures, and representation theory*, 《数学杂志》241（2002）, 553–592。[25] J. Hu, Y. Geng, J. Wu 和 H. Li, *Buchweitz's equivalences for Gorenstein flat modules with respect to semidualizing modules* **20** 2021 , 《代数与应用杂志》。（）, 2150006。[26] H. Holm 和 P. Jørgensen, *Semi-dualizing modules and related Gorenstein homological dimensions* **205** 2006 423 445 , 《纯粹与应用代数杂志》。（）, –。[27] H. Holm 和 D. White, *Foxby equivalence over associative rings*, 《京都大学数学杂志》205（2006）, 423-445。[28] J. ˇSaroch 和 J. ˇS ˇtov´ıˇcek, , *Singular compactness and definability for Σ-cotorsion and Gorenstein modules* **26** 2020 23 40 《精选数学》。（）, –。[29] L. Liang 和 G. Yang, *Constructions of Frobenius Pairs in Abelian Categories*, 《地中海数学杂志》19（2022）, 76。[30] Z. Liu、Z. Huang 和 A. Xu, *Gorenstein projective dimension relative to a semidualizing bimodule* **41** 2013 1 18 , 《代数通讯》。（）, –。[31] N. Mahbou 和 M. Tamekkante, *Note on (weak) Gorenstein global dimensions*, 预印本 arXiv:0910.5752v1。[32] D. White, *Gorenstein projective dimension with respect to a semidualizing module* **2** 2010 111 137 , 《代数通讯杂志》。（）, –。[33] S. Sather-Wagstaff, T. Sharif 和 D. White, *AB-contexts and stability for Gorenstein flat modules with respect to semidualizing modules* , 《代数表示论》14（2011）, 403–428。[34] A. Xu, *Gorenstein Modules and Gorenstein Model Structures*, 《格拉斯哥数学杂志》59（2017）, 685–703。[35] A. Xu 和 N. Ding, *Semidualizing bimodules and related Gorenstein homological dimensions* **15** 2016 165 193 , 《代数与应用杂志》。（）, –。[36] G. Zhao 和 J. Sun, *Global dimensions of rings with respect to a semidualizing module* 1307 0628 , 重印本 arXiv:。。[37] Y. Zhu 和 N. Ding, *Wakamatsu tilting modules with finite FP-injective dimension* **21** 2009 101 116 , 《数学论坛》。（）, –。[38] Z. Zhang 和 J. Wei, *Gorenstein homological dimensions with respect to a semidualizing module* **23** 2018 131 142 , 《国际代数电子杂志》。（）, –。