arXiv:2304.05230v1 [math.NT] 11 Apr 2023

本原勾股三元组的 Berggren树中的度量性质

卢西亚·亚尼奇科娃和埃韦琳·乔卡希

Abstract. 勾股三元组是由正整数构成的三元组（x，y，z），满足 $x^2+y^2=z^2$。如果 x，y 互素且 x 为奇数，则称其为本原勾股三元组。Berggren 指出，每个本原勾股三元组都可以从三元组（3，4，5）出发，通过依次乘以三种 3×3 矩阵中的唯一矩阵生成，从而得到一个三元三叉树。本文介绍 Berggren树中三元组的一些度量性质。首先，我们将本原勾股三元组视为直角三角形的边长；其次，将它们视为三维空间中点的坐标。

关键词：本原勾股三元组，Berggren树，本原勾股三角形，欧几里得公式

1. Introduction

生成勾股方程整数解的方法多种多样。欧几里得公式、Berggren树和Price树是其中最为人熟知的方法，但除此之外还有许多其他方法。例如，可以在 [4], [2] 中找到一些示例。用于生成Berggren树的矩阵会产生互质解，即本原勾股三元组；这些三元组可以看作勾股三角形各边的长度。

本原勾股三角形的一些性质已经有所描述。例如，具有相同直角边长度 [6] 或高度的本原勾股三元组（斜边长度与偶数边长度之差）的内切半径 [8], 三元组 [1]。

本文介绍了我们关于边长对应于本原勾股三元组的三角形，以及由 Berggren 树中的后代构成的三角形的度量性质的研究结果。我们重点研究 Berggren 树中若干特定的本原勾股三元组数列，以及这些三角形的内切圆半径和外接圆半径。

此外，本原勾股三元组可以看作三维实空间中各点的坐标。我们将探讨坐标为本原勾股三元组的点的一些性质。

2. Preliminary

首先，我们介绍本文中使用的一些基本符号和定义。

记 $\mathbb{N}:=\{1,2,3,\dots\}$ 和 $\mathbb{N}_0:=\mathbb{N}\cup\{0\}$。
对于矩阵 M，将其行列式记为 $\det(M)$，转置记为 $M^\top$.
令 E 表示 3 阶单位矩阵。
对于向量 $\vec{u}$，我们将其大小表示为 $|\vec{u}|$。

定义 2.1。一个正整数三元组 (x, y, z) 称为勾股三元组，如果 $x^2 + y^2 = z^2$. 此外，如果 $\gcd(x, y) = 1$ 且 x 为奇数，则称 (x, y, z) 为本原勾股三元组。

如果 (x, y, z) 是一个勾股三元组，那么若三角形的边长为 x, y, z，我们就称该三角形与这个三元组相对应。与勾股三元组相对应的三角形称为勾股三角形。

根据 Berggren 的结果，每个 y 为偶数的本原勾股三元组 (x, y, z)，都可以从三元组 (3,4,5) 出发，通过唯一的三重上升过程生成，该过程使用以下三个矩阵 A, B, C [3]:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

那么对每个 $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & -2n & 2n \\ 2n & 1-2n^2 & 2n^2 \\ 2n & -2n^2 & 2n^2+1 \end{pmatrix},$$

$$B^n = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^n}{2} + b_1 & \frac{(-1)^{n+1}}{2} + b_1 & b_2 \\ \frac{(-1)^{n+1}}{2} + b_1 & \frac{(-1)^n}{2} + b_1 & b_2 \\ b_2 & b_2 & 2b_1 \end{pmatrix},$$

$$C^n = \begin{pmatrix} 1-2n^2 & 2n & 2n^2 \\ -2n & 1 & 2n \\ -2n^2 & 2n & 2n^2+1 \end{pmatrix},$$

其中 $b_1 = \frac{1}{4}[(3-2\sqrt{2})^n + (3+2\sqrt{2})^n]$, $b_2 = -\frac{(3-2\sqrt{2})^n - (3+2\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}$.

定义 2.2。设 P 是一个本原勾股三元组。我们称 P 为三元组 $AP^\top, BP^\top, CP^\top$. 的父节点。三元组 $AP^\top, BP^\top, CP^\top$ 称为 Berggren树中 P 的后代。

通常可以用欧几里得公式 [5] 表示本原勾股三元组:

定理 2.3（欧几里得公式）。三元组（x、y、z）是一个奇数 x 的本原勾股三元组，当且仅当存在 m、$n \in \mathbb{N}$，使得 $m > n$，$\gcd(m、n) = 1$，并且

$$x = m^2 - n^2, \qquad y = 2mn, \qquad z = n^2 + m^2.$$

文献 [2] 中提到了另一种方法：若 (x, y, z) 是一个勾股三元组，则存在 m, $n \in \mathbb{N}$，使得

$$x = \frac{3-(-1)^m}{2}mn + m, \qquad y = \frac{x^2 - m^2}{2m}, \qquad z = \frac{x^2 + m^2}{2m}.$$

于是，将三元组 (x, y, z) 记作 $F(m, n)$。

引理 2.4. 对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $A^{n-1}(3、4、5)^\top = F(1、n)^\top$.

证明。 对于每个 $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} A^{n-1}(3,4,5)^\top &= \begin{pmatrix} 1 & -2(n-1) & 2(n-1) \\ 2(n-1) & 1-2(n-1)^2 & 2(n-1)^2 \\ 2(n-1) & -2(n-1)^2 & 2(n-1)^2+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= (2n+1, 2n^2+2n, 2n^2+2n+1)^\top \\ &= F(1,n)^\top. \end{aligned}$$

□

3. Pythagorean triangles

在 [4], 中证明了勾股三角形内切圆的一些性质。本节将介绍一些与勾股三角形内切圆和旁切圆有关的进一步结果。

显然，如果 (x, y, z) 是一个本原勾股三元组，那么相应三角形的内切半径为 $\frac{x+y-z}{2}$.

命题 3.1。 设(x, y, z) 是一个本原勾股三元组， r 是对应三角形的内切半径。那么，与三元组 $A \cdot (x, y, z)^\top, B \cdot (x, y, z)^\top$ 和 $C \cdot (x, y, z)^\top$ 对应的三角形的内切半径为

$$\begin{aligned} r_A &= r - y + z, \\ r_B &= r + z, \\ r_C &= r - x + z, \end{aligned}$$

分别地。

证明，参见 [4]。

命题 3.2。 若 $n \in \mathbb{N}$ ，则与三元组 $A^n \cdot (3,4,5)^\top$ 对应的三角形的内切半径为 $r_n = n + 1$.

证明。 容易证明 $A^n \cdot (3,4,5)^\top = (2n+3, 2n^2+6n+4, 2n^2+6n+5)^\top$,因此 $r_n = \frac{(2n+3)+(2n^2+6n+4)-(2n^2+6n+5)}{2} = n+1.$ □

推论3.3。 对于每个 $r \in \mathbb{N}$，都存在一个本原勾股三元组 *suc* h 该三角形对应于此组勾股数的内切半径为 r。

注意，内切半径并不能唯一确定本原勾股三元组。例如，与 $(21,20,29)$ 和 $(13,84,85)$ 相对应的三角形具有相同的内切半径 $r = 6$. 这引出了一个自然的问题——有多少个本原勾股三元组具有相同的内切半径? 2006 年，Robbins 在 [8] 中回答了这个问题。

定理 3.4. 设 $\omega(r)$ 为整数 r 的素因子个数，且令$I(r)$ 为内切半径为 r. 的本原勾股三元组的个数，则

$$I(r) = \begin{cases} 2^{\omega(r)} & \text{if } r \text{ is odd}, \\ 2^{\omega(r)-1} & \text{if } r \text{ is even}. \end{cases}$$

2016年，Omland 提出了一种简化的证明，见 [7]。这提供了一种简便的方法，可以找出内切半径给定的所有本原勾股三元组。下面的例子展示了内切半径为 35 的情况。

例 3.5。 令 $r = 35$。其素因数分解为 $35 = 5^1 \cdot 7^1$，因此 $\omega(r) = 2$根据定理 3。4，有 $2^{\omega(r)} = 4$ 个内切半径为 35 的本原勾股三元组。不难看出：

n(m-n)	n	m	$m^2 - n^2$	2mn	$m^2 + n^2$
1·35	1	36	1295	72	1297
5·7	5	12	95	168	193
7·5	7	12	119	120	169
35·1	35	36	71	2520	2521

FIGURE 1. 内切半径为 35 的勾股数组

因此，(1295，72，1297)，(95，168，193)，(119，120，169)，(71，2520，2521) 都是内切半径为 35 的本原勾股三元组。

命题 3.6。 如果 $n \in \mathbb{N}$ 那么与三元组 $B^n \cdot (3,4,5)^\top$ 对应的三角形的内切半径是 $r_n = \frac{(3+2\sqrt{2})^{n+1} - (3-2\sqrt{2})^{n+1}}{4\sqrt{2}}$.

证明。与上文类似，

$$B^n \cdot (3,4,5)^\top = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(-1)^n + \frac{7\sqrt{2}-10}{4\sqrt{2}}(3-2\sqrt{2})^n + \frac{7\sqrt{2}+10}{4\sqrt{2}}(3+2\sqrt{2})^n \\ \frac{1}{2}(-1)^n + \frac{7\sqrt{2}-10}{4\sqrt{2}}(3-2\sqrt{2})^n + \frac{7\sqrt{2}+10}{4\sqrt{2}}(3+2\sqrt{2})^n \\ \frac{(5\sqrt{2}-7)(3-2\sqrt{2})^n + (5\sqrt{2}+7)(3+2\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

因此

$$\begin{aligned} r_n &= \frac{\frac{7\sqrt{2}-10}{2\sqrt{2}}(3-2\sqrt{2})^n + \frac{7\sqrt{2}+10}{2\sqrt{2}}(3+2\sqrt{2})^n - \frac{(5\sqrt{2}-7)(3-2\sqrt{2})^n + (5\sqrt{2}+7)(3+2\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}}{2} \\ &= \frac{(2\sqrt{2}-3)(3-2\sqrt{2})^n + (2\sqrt{2}+3)(3+2\sqrt{2})^n}{4\sqrt{2}} \\ &= \frac{(3+2\sqrt{2})^{n+1} - (3-2\sqrt{2})^{n+1}}{4\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

□

命题 3.7。 若 $n \in \mathbb{N}$，则与三元组 $C^n \cdot (3,4,5)^\top$ 对应的三角形的内切半径为 $r_n = 2n + 1$.

证明。 类似上面， $C^n \cdot (3、4、5)^\top = (4n^2+8n+3、4n+4、4n^2+8n+5)^\top$，因此 $r_n = \frac{(n^2+8n+3)+(4n+4)-(4n^2+8n+5)}{2} = 2n + 1.$ □

同样，容易证明，如果（x， y， z）是一个本原勾股三元组，那么相应三角形的外接圆半径为 $\frac{z}{2}$.

命题 3.8. 设 (x, y, z) 是一个本原勾股三元组，设 R 为对应三角形外接圆的半径。那么，与三元组 $A \cdot (x, y, z)^\top, B \cdot (x, y, z)^\top$ 对应的三角形的外接圆半径为

$C\cdot(x,y,z)^\top$ 是

$$\begin{aligned} R_A &= x-y+3R,\\ R_B &= x+y+3R,\\ R_C &= -x+y+3R, \end{aligned}$$

分别。

证明。 直接由 $R=\frac{z}{2}$.得出 □

命题3.9。 若 $n\in\mathbb{N}$ ，则与三元组 $A^n\cdot(3,4,5)^\top$ 对应的三角形的外接圆半径为 $R_n=n^2+3n+\frac{5}{2}$.

证明。 由 $A^n\cdot(3,4,5)^\top=(2n+3,2n^2+6n+4,2n^2+6n+5)^\top$, 可得 $R_n=\frac{2n^2+6n+5}{2}=n^2+3n+\frac{5}{2}$. □

命题3.10。 若 $n\in\mathbb{N}$ ，则与三元组 $B^n\cdot(3,4,5)^\top$ 的外接圆半径为 $R_n=\frac{(5\sqrt{2}-7)(3-2\sqrt{2})^n+(5\sqrt{2}+7)(3+2\sqrt{2})^n}{4\sqrt{2}}$.

证明。类似于命题 3.6 的证明，我们计算 $B^n\cdot(3,4,5)^\top$，然后

$$R_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{(5\sqrt{2}-7)(3-2\sqrt{2})^n+(5\sqrt{2}+7)(3+2\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}.$$

□

命题3.11。 如果 $n\in\mathbb{N}$ 则与三元组 $C^n\cdot(3、4、5)^\top$ 相对应的三角形的外接圆半径为 $R_n=2n^2+4n+\frac{5}{2}$.

证明。 由 $C^n\cdot(3,4,5)^\top=(4n^2+8n+3,4n+4,4n^2+8n+5)^\top$, 可得 $R_n=\frac{4n^2+8n+5}{2}=2n^2+4n+\frac{5}{2}$. □

4. Relations in the triangle of descendant triples

本原勾股三元组可以被视为三维欧几里得空间中的点。在本节中，我们展示了Berggren树中任一本原勾股三元组的后代是一个三角形的顶点，并给出与这些三角形中的几何关系相关的结果。具体而言，我们研究由三个后代定义的三角形。

命题4.1. 设 P 为一个本原勾股三元组。则坐标为 $AP^\top$、$BP^\top$、$CP^\top$ 的点不共线。

证明。 设 $P=(x,y,z)$。我们考虑向量 $\vec{u}=BP^\top-AP^\top$ 和 $\vec{v}=CP^\top-AP^\top$。易于证明,

$$\vec{u}=(B-A)P^\top=\begin{pmatrix}0&4&0\\0&2&0\\0&4&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4y\\2y\\4y\end{pmatrix},$$

$$\vec{v}=(C-A)P^\top=\begin{pmatrix}-2&4&0\\-4&2&0\\-4&4&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2x+4y\\-4x+2y\\-4x+4y\end{pmatrix}.$$

反证法，假设这些向量线性相关，即存在非零实数 k 使得 $\vec{u}=k\vec{v}$. 那么 $(4y,2y,4y)=$

$k(-2x+4y,\ -4x+2y,\ -4x+4y)$，因此 $4y = k(-2x+4y)$ 且 $4y = k(-4x+4y)$。这意味着

$$\begin{aligned} k(-2x+4y) &= k(-4x+4y) \\ -2x+4y &= -4x+4y \\ x &= 2x \end{aligned}$$

这与假设矛盾。因此，$\vec{u}$，$\vec{v}$ 线性无关，且点$AP^\top$，$BP^\top$，$CP^\top$ 不共线。□

这意味着坐标为 $AP^\top$，$BP^\top$，$CP^\top$ 的点确定一个平面（三角形）。在以下命题中，我们将给出该平面的方程（这个三角形的面积）。

命题 4.2. 设 $P = (x, y, z)$ 是一个本原勾股三元组。那么 *th* e 坐标为 $AP^\top, BP^\top, CP^\top$ 的点属于平面 $2a+2b-3c+z=0.$

证明。与前面的证明类似，我们考虑向量 $\vec{u} = BP^\top - AP^\top$ 和 $\vec{v} = CP^\top - AP^\top$。首先，我们计算所求平面的法向量，即这两个向量的叉积：$\vec{u} \times \vec{v} = (8xy,\ 8xy,\ -12xy) \approx (2,\ 2,\ -3)$。因此，对于某个 $d \in \mathbb{R}.$，$2a+2b-3c+d=0$ 就是所求平面的方程。由于$AP^\top$ 属于该平面，我们得到 $2(x-2y+2z) + 2(2x-y+2z) - 3(2x-2y+3z) + d = 0$ 由此可得 $d = z.$ 因此，所求平面的方程为 $2a+2b-3c+z=0.$ □

命题 4.3. 设 $P = (x, y, z)$ 是一个本原勾股三元组。那么，坐标为 $AP^\top, BP^\top, CP^\top$ 的点是一个面积为 $2xy\sqrt{17}.$ 的三角形的顶点。

证明。为了计算三角形 $AP^\top, BP^\top, CP^\top$ 的面积，我们使用向量$\vec{u} = BP^\top - AP^\top$和 $\vec{v} = CP^\top - AP^\top$。根据前面的证明，$\vec{u} \times \vec{v} = (8xy, 8xy, -12xy)$，因此三角形的面积为

$$\frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{2} = \frac{\sqrt{64x^2y^2 + 64x^2y^2 + 144x^2y^2}}{2} = \frac{\sqrt{272x^2y^2}}{2} = 2xy\sqrt{17}.$$

□

本原勾股三元组可以看作一个直角三角形，而 Beggren树中与某个本原勾股数的后代相对应的点也构成一个三角形。自然会产生一个问题——这个后代三角形也可以是直角三角形吗？以下命题给出了答案。

命题4.4。设 P 是一个本原勾股三元组。坐标为 $AP^\top$、$BP^\top$、$CP^\top$ 的点构成一个非直角三角形。

证明。设 $P = (x, y, z)$，并设向量 $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ 如下：

$$\vec{u} = BP^\top - AP^\top, \vec{v} = CP^\top - AP^\top, \vec{w} = CP^\top - BP^\top.$$

要证明顶点为 $AP^\top, BP^\top, CP^\top$ 的三角形不是直角三角形，只需证明 $\vec{u} \cdot \vec{v} \neq 0, \vec{u} \cdot \vec{w} \neq 0, \vec{v} \cdot \vec{w} \neq 0.$。根据命题4.1的证明，$\vec{u} = (4y, 2y, 4y)$ 和 $\vec{v} = (-2x+4y, -4x+2y, -4x+4y)$。

同理,

$$\vec{w} = (C - B)P^\top = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -4x \\ -4x \end{pmatrix}.$$

由此可得 $\vec{u}\cdot\vec{v} = (4y,\ 2y,\ 4y)\cdot(-2x+4y,\ -4x+2z,\ -4x+4y) = -32xy+36y^2$.反设 $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$。由于 $x,\ y > 0$, 我们得到 $y = \frac{8x}{9}$.然而, $(x,\ y,\ z)$ 是一个本原勾股三元组, 从而得到

$$x^2 + \frac{64x^2}{81} = z^2$$
$$\sqrt{145}\frac{x}{9} = z$$

这与 $z \in \mathbb{N}$. 矛盾

同理, $\vec{u}\cdot\vec{w} = (4y,\ 2y,\ 4y)\cdot(-2x,\ -4x,\ -4x) = -32xy$ 并且由 $x,\ y > 0$ 可知 $\vec{u}\cdot\vec{w} \neq 0$。

最后, $\vec{v}\cdot\vec{w} = (-2x+4y,\ -4x+2z,\ -4x+4y)\cdot(-2x,\ -4x,\ -4x) = 36x^2 - 32xy$. I若 f $\vec{v}\cdot\vec{w} = 0$, 则与情形 $\vec{u}\cdot\vec{v}$. □类似, 我们得到矛盾

利用本节的结果, 可以很容易地确定顶点为某个勾股三元组的后代的三角形的内切半径和外接圆半径。

引理 4.5. 设 P 是一个本原勾股三元组。向量 $\vec{u}$、$\vec{v}$、$\vec{w}$ 如下: $\vec{u} = BP^\top - AP^\top$、$\vec{v} = CP^\top - AP^\top$、$\vec{w} = CP^\top - BP^\top$.。那么, 顶点为 $AP^\top$、$BP^\top$、$CP^\top$ 的三角形的内切半径为

$$r = \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{|\vec{u}| + |\vec{v}| + |\vec{w}|}$$

以及外接圆的半径

$$R = \frac{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}{2|\vec{u} \times \vec{v}|}.$$

证明。 显然, $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$, $|\vec{w}|$ 是这个三角形各边的长度。我们使用三角形面积的著名公式

$$S = \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{2}, \quad S = \frac{|\vec{u}| + |\vec{v}| + |\vec{w}|}{2} \cdot r, \quad S = \frac{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}{4R}$$

分别表示内切半径 r 和外接圆半径 R □

命题4.6。 设 $P = (x, y, z)$ 是一个本原勾股三元组。则以 $AP^\top$、$BP^\top$、$CP^\top$ 为顶点的三角形的内切半径

$$r = \frac{2xy\sqrt{17}}{3x + 3y + \sqrt{9x^2 - 16xy + 9y^2}}$$

以及外接圆的半径

$$R = \frac{9\sqrt{9x^2 - 16xy + 9y^2}}{\sqrt{17}}.$$

证明。 根据命题4.3和命题4.4的证明，可知

$$\begin{aligned}
&\vec{u} = (4y, 2y, 4y),\\
&\vec{v} = (-2x + 4y, -4x + 2y, -4x + 4y),\\
&\vec{w} = (-2x, -4x, -4x),\\
&|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{272x^2y^2} = 4xy\sqrt{17}.
\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}
|\vec{u}| &= \sqrt{16y^2 + 4y^2 + 16y^2} = 6y,\\
|\vec{v}| &= \sqrt{36x^2 - 64xy + 36y^2} = 2\sqrt{9x^2 - 16xy + 9y^2},\\
|\vec{w}| &= \sqrt{4x^2 + 16x^2 + 16x^2} = 6x.
\end{aligned}$$

然后根据引理 4.5，内切半径是

$$r = \frac{4xy\sqrt{17}}{6x + 6y + 2\sqrt{9x^2 - 16xy + 9y^2}} = \frac{2xy\sqrt{17}}{3x + 3y + \sqrt{9x^2 - 16xy + 9y^2}},$$

且外接圆的半径为

$$R = \frac{6y \cdot 2\sqrt{9x^2 - 16xy + 9y^2} \cdot 6x}{2 \cdot 4xy\sqrt{17}} = \frac{9\sqrt{9x^2 - 16xy + 9y^2}}{\sqrt{17}}.$$

□

5. Conclusion

将本原勾股三元组视为空间中点的坐标，为探索勾股三元组的性质提供了有趣的可能性。我们打算继续研究本原勾股数，并给出更多相关结果。具体而言，我们希望重点描述 Berggren树中本原勾股数的后代的度量性质。

References

[1] J. Austin, *Generating pythagorean triples of a given height*。《密苏里数学科学杂志》，31（2）（2019），第136–145页。[2] E. Cs´ok´asi, *O Pytagorejských trojiciach*, （2019），毕业论文，P.J. ˇSaf´arik 科希策大学。[3] A. Hall, *Genealogy of Pythagorean Triads*。《数学公报》，54（1970），第377–379页。[4] L. Janiˇckov´a, *Kvadratické diofantovské rovnice*, （2013），学士论文，P.J. ˇSaf´arik 科希策大学。[5] E. Maor, *The Pythagorean Theorem*。普林斯顿：普林斯顿大学出版社，（2007），259页。ISBN-13：978-0-691-12526-8。[6] R.C. Ochieng 等, *Pythagorean Triples with Common Sides*。《数学杂志》，（2019），第1–8页。[7] T. Omland, *How many Pythagorean triples with a given inradius?*。《数论杂志》170（2016），第1–2页。[8] N. Robbins, *On the number of primitive Pythagorean triangles with a given inradius*。《斐波那契季刊》，44（4）（2006），第368–369页。
ˇ´通讯作者：Lucia JANICKOVAˇ数学研究所，*P.J. Saf´arik* 科希策大学，斯洛伐克，*Jesenn´a 5, 041 54* 科希策，斯洛伐克电子邮箱：*lucia.janickova@upjs.sk*´ ´Evelin CSOKASIˇ数学研究所，*P.J. Saf´arik* 科希策大学，斯洛伐克，*Jesenn´a 5, 041 54* 科希策，斯洛伐克电子邮箱：*csokasi.evelinke@gmail.com*