arXiv:2304.05240v1 [physics.flu-dyn] 11 Apr 2023

平面通道中类库埃特绝热流动的耗散失稳

A. Barletta[*,1]**; M. Celli**[1]**; S. Lazzari**[2]**; P. V. Brand˜ao**[1]

[1]意大利博洛尼亚大学工业工程系，Alma Mater StudiorumUniversit`a di Bologna, Viale Risorgimento 2，40136 博洛尼亚，意大利

[2]意大利热那亚大学建筑与设计系，Stradone S. Agostino 37, 16123 热那亚

2023年4月12日

摘要

研究了具有绝热边界的平面通道内混合对流。边界具有外部指定的相对速度，从而形成类库埃特流动构型。两边界被视为热绝缘，且其间保持恒定的速度差，以维持稳态流动。黏性耗散的作用会在流动区域内产生热源，进而形成温度梯度。温度分布不均又会产生浮力，从而形成强迫对流与自然对流相结合的流动状态。对于给定的速度差，会出现两种混合对流流动。本文分析了其结构；对于格布哈特数的现实取值，通常只有其中一个分支符合奥伯贝克–布辛涅斯克近似。对存在黏性耗散的基本稳态流动进行了线性稳定性分析。通过数值求解稳定性特征值问题，确定了不同格布哈特数下的中性稳定性曲线以及临界佩克莱数。此外，还针对无限波长扰动这一特殊情形，推导了渐近解析解。

关键词：黏性加热；浮力；双流；线性稳定性；库埃特流；绝热壁

*通讯作者：antonio.barletta@unibo.it

1 引言

平面库埃特流不会通过线性扰动发生流体动力学不稳定性转变，这一结论是流体力学的基石。事实上，关于平面库埃特流线性稳定性的早期讨论可追溯至瑞利勋爵等人的论文 [1]，而更近代的研究则由 Romanov 给出了严格证明 [2]。这一重要成果的核心假设是流体处于等温状态，因此不存在温度梯度效应影响流体局部动量平衡。关于平面库埃特流流体动力学稳定性的深入讨论，例如可见于 Drazin 和 Reid 的著作 [3]以及 Schmid 和 Henningson 的著作 [4]。尽管理论上的线性稳定性分析得出了上述结论，但多个实验中都观察到有限振幅扰动会引发不稳定性转变和湍流，例如 Bottin 等人的实验 [5] 以及 Tillmark 和 Alfredsson 的实验 [6]。实验确实证明，雷诺数约为 300 时会发生不稳定性转变。

在考虑非等温情形时，当瑞利数足够大，热对流可能导致平面库埃特流发生线性失稳。瑞利数与施加在下方热壁和上方冷壁之间的温差成正比 [7–9]。通过温度边界条件施加向上的热通量，热浮力便成为流动的驱动力。除边界条件外，流体内部的温度梯度也可能由摩擦生热造成。事实上，平面边界之间的速度差会产生黏性耗散效应。

在没有通过边界条件对流体施加温差的情况下，黏性耗散效应可能是热失稳的唯一来源。事实上，局部动量平衡方程中的温度耦合项可能有多种形式。最常见的耦合项是黏性力，因为黏度显著依赖于局部温度；以及浮力，因为密度显著依赖于局部温度。Joseph [10, 11] 曾指出，变黏度与黏性耗散可能导致热诱导流动失稳；Barletta 和 Nield [12]近期也提出了这一观点。过去几十年来，多项研究也考察了浮力作为黏性耗散失稳成因的作用 [13–18]。显然，黏性耗散效应的物理机制表明，流体黏度和密度对温度的依赖都可能以某种方式影响动量平衡，其相对重要性因具体情形而异。这一观点与浮力流动的奥伯贝克–布oussinesq近似模型基本相容，因为该近似框架也可以涵盖黏度或热扩散率等其他流体性质随温度变化的情况 [19–21]。问题在于，这种扩展版的奥伯贝克–布oussinesq模型因控制参数数量显著增加而变得非常复杂。近期，已有一些初步尝试基于机器学习技术，来定义研究具有大量控制参数的流动问题的方法 [22]。我们的研究遵循这样一条原则：要理解物理现象的基本本质，就需要清晰地认识恰当而又经过简化的本体论 [23]。因此，本文分析将聚焦于经典的奥伯贝克–布oussinesq近似。将流体黏度建模为常数是恰当的，因为奥伯贝克–布oussinesq近似关注的是温度变化较小的对流过程 [24–26]。

本文的目的是 这篇论文为库埃特流的不稳定性起始带来了不同的见解。 w.

事实上，正如我们将展示的，在稳态基本流条件下，考虑黏性耗散和浮力的影响会导致库埃特型流动中的库埃特流动剖面发生改变，因此使用“库埃特型流动”这一术语更为恰当。库埃特边界条件的设置规定了受速度差作用的绝热壁面，其中绝热性确保不存在外部热强迫。非等温流动是黏性摩擦的结果，而黏性摩擦又是边界壁面之间所施加速度差的结果。本文旨在将近期一项研究中针对泊肃叶型流动系统开展的分析，扩展至库埃特型流动系统 [18]。在黏性耗散效应可能产生显著影响的条件下，即具有极大普朗特数的流体处于爬行流状态时，利用线性扰动对基本流向不稳定性转捩的过程进行分析 [14, 18]。

2 黏性耗散浮力流动

沿用经典的库埃特流型设置，我们考虑平行平面通道内由边界壁面之间的相对速度 U_0 所驱动的牛顿流体流动，其中边界壁面位于 $z=0$ 和 $z=H$处。这里， z是垂直于壁面的竖直轴， H 是通道边界之间的距离（见图1）。假设水平方向 x 和 y 上的宽度均为无限大。均匀重力加速度 $\mathbf{g}$ 平行于 z 轴，因此 $\mathbf{g}=-g\hat{}\mathbf{e}_z$，其中 $\hat{}\mathbf{e}_z$ 是 z 轴的单位向量， g 是 $\mathbf{g}$的模。

在 $z=0,H$ 处规定的边界条件对应于不可渗透且完全绝热的壁面，并施加相对速度，

$$\begin{aligned} &\mathbf{u}=0, \quad \frac{\partial T}{\partial z}=0 \quad \text{for} \quad z=0, \\ &u=U_0\cos\varphi, \quad v=U_0\sin\varphi, \quad w=0, \quad \frac{\partial T}{\partial z}=0 \quad \text{for} \quad z=H, \end{aligned} \tag{1}$$

其中， $\mathbf{u}=(u,v,w)$ 是速度场， T是温度场，而 U_0 是上边界壁面沿由单位向量 $(\cos\varphi,\sin\varphi,0)$ 定义的方向的速度，其中 $0\le\varphi\le\pi/2$。

2.1 控制方程

在奥伯贝克–布oussinesq近似框架下，控制方程为

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}=0, \tag{2a}$$

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{u}=-\frac{1}{\rho}\,\boldsymbol{\nabla}p+g\beta(T-T_0)\,\hat{\mathbf{e}}_z+\nu\,\nabla^2\mathbf{u}, \tag{2b}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,T=\alpha\,\nabla^2T+\frac{\nu}{c}\,\Phi, \tag{2c}$$

其中 ρ、 β、 ν、 α 和 c 分别为温度恒定为 T_0的参考热力学状态下流体的密度、热膨胀系数、运动黏度、热扩散率和比热容。在方程（2）中， t 表示时间， p 表示局部压力与静水压力之差。方程（ Φ2c）中采用的耗散函数表示为

$$\Phi=\frac{1}{2}\,\gamma_{ij}\gamma_{ij} \quad \text{using} \quad \gamma_{ij}=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \tag{3}$$

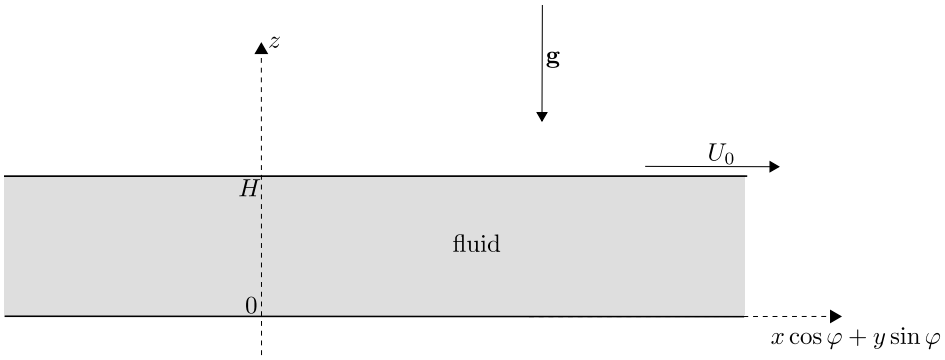


图1：流动系统示意图

其中，采用爱因斯坦求和约定，对重复指标进行隐式求和；γ_{ij} 是剪切速率张量的 ij 笛卡尔分量，而 u_i 和 x_i 分别表示速度向量$\mathbf{u}$ 和位置向量$\mathbf{x}$ 的第 i个分量 = （x， y， z）。

2.2 无量纲形式

对方程（1）和（2）进行无量纲形式处理可通过以下尺度变换实现

$$\frac{\mathbf{x}}{H} = \frac{(x,y,z)}{H} \to (x,y,z) = \mathbf{x}, \quad \frac{t}{H^2/\alpha} \to t, \quad \frac{\mathbf{u}}{\alpha/H} = \frac{(u,v,w)}{\alpha/H} \to (u,v,w) = \mathbf{u},$$
$$\frac{p}{\rho\alpha\nu/H^2} \to p, \quad \frac{T-T_0}{\Delta T} \to T, \quad \frac{\Phi}{\alpha^2/H^4} \to \Phi \quad \text{using} \quad \Delta T = \frac{\alpha\nu}{g\beta H^3}. \tag{4}$$

利用方程（4），可以将方程（2）改写为无量纲形式，

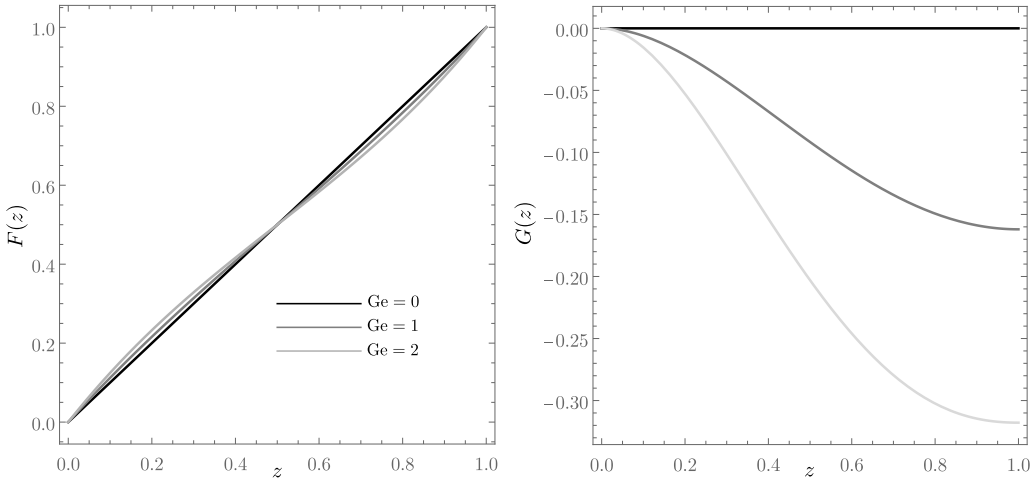
$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} = 0, \tag{5a}$$
$$\frac{1}{\mathrm{Pr}}\left[\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{u}\right] = -\boldsymbol{\nabla}p + T\,\hat{\mathbf{e}}_z + \nabla^2\mathbf{u}, \tag{5b}$$
$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,T = \nabla^2 T + \mathrm{Ge}\,\Phi, \tag{5c}$$

而无量纲边界条件（1）为

$$\mathbf{u} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad \text{for} \quad z = 0,$$
$$u = \mathrm{Pe}\,\cos\varphi, \quad v = \mathrm{Pe}\,\sin\varphi, \quad w = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad \text{for} \quad z = 1. \tag{6}$$

在方程（5b）、（5c）和（6）中，普朗特数 Pr、格布哈特数 Ge 和佩克莱数 P′定义为

$$\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}, \quad \mathrm{Ge} = \frac{g\beta H}{c}, \quad \mathrm{Pe} = \frac{U_0 H}{\alpha}. \tag{7}$$



Fig图 2：不同 G 值下 $A = A_-$ 分支的 $F(z)$ 和 $G(z)$ 曲线 e

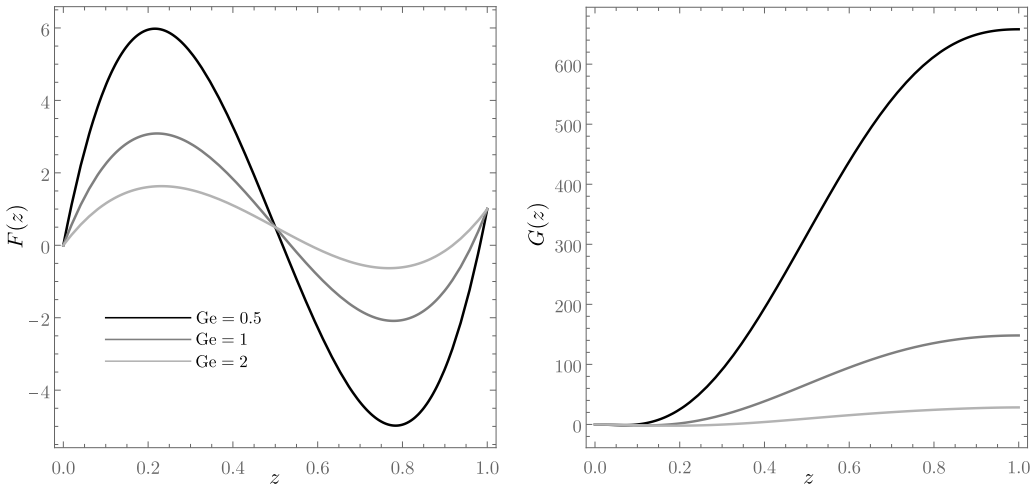


图3：不同 Ge值下 $A = A_+$ 分支的 $F(z)$ 和 $G(z)$ 曲线

3 双绝热流

确实存在满足方程（5）和（6）的稳态流，其速度场平行于单位向量（cos φ，sin φ，0），即

$$
\begin{aligned}
&u_b = \mathrm{Pe}\, F(z)\, \cos\varphi, \quad v_b = \mathrm{Pe}\, F(z)\, \sin\varphi, \quad w_b = 0,\\
&T_b = \mathrm{Pe}\, A\,(x\, \cos\varphi + y\, \sin\varphi) + \mathrm{Pe}^2\, G(z),\\
&\boldsymbol{\nabla} p_b = \Big(\mathrm{Pe}\, F''(z)\, \cos\varphi,\ \mathrm{Pe}\, F''(z)\, \sin\varphi,\ T_b\Big).
\end{aligned} \tag{8}
$$

此处，b 是表示“基本解”的下标，撇号用于表示关于 z的导数。方程（5）和（6）在函数 F（z）和 G（z）满足

这些多项式

$$
\begin{aligned}
F(z) &= z + \frac{A}{12}\, z\,(z-1)(2z-1), \\
G(z) &= \frac{z^2}{1440}\left\{2Az\left[A\left(6z^2-15z+10\right)+120\right] - \mathrm{Ge}\left[A^2\left(12z^4-36z^3+40z^2-20z+5\right)\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. +120A(z-1)^2+720\right]\right\},
\end{aligned} \tag{9}
$$

其中，常数 A 等于 A_- 或 A_+，定义为

$$
A_- = 12\,\frac{15-\sqrt{5\left(45-\mathrm{Ge}^2\right)}}{\mathrm{Ge}}, \quad A_+ = 12\,\frac{15+\sqrt{5\left(45-\mathrm{Ge}^2\right)}}{\mathrm{Ge}}. \tag{10}
$$

容易验证 $F'''(z) = A$。这一结果表明，水平方向 x 和 y 方向上的基本温度梯度与 z无关。方程（8）-（10）描述了水平流动，其中速度场与 φ 轴成 x 角。事实上，方程（9）给出

$$
\int_0^1 F(z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}, \tag{11}
$$

这意味着沿流动方向的平均无量纲速度等于 $\mathrm{Pe}/2$，也就是边界壁面的平均速度。换言之，在边界壁面平均速度为零的参考系中，流体的平均速度为零，因此流量也为零。在没有黏性耗散时，这种约束是库埃特流的典型特征。

根据方程（10），我们可以有 $A = A_-$ 或 $A = A_+$。因此，方程（8）和（9）表明，对于相同的给定 Pe 和 Ge 值，存在两种对偶流动。只有在 $\mathrm{Ge} \le 3\sqrt{5} \approx 6.70820$时，才允许存在这两种对偶流动。当 $\mathrm{Ge} = 3\sqrt{5}$时，$A_- = A_+$ 且两种对偶流动重合。需要指出的是，对于任何现实系统，这个最大Gebhart数都大得惊人。

利用式 (8)，可以推断函数 $F(z)$ 给出了基本速度分布，其中佩′克莱数是一个整体常数因子。类似地，根据式 (9) 所显示的特征 $G(0) = 0$，函数 $G(z)$ 给出了在固定 x 和 y 时，基本状态下给定位置 z 与底部边界 $z = 0$ 之间的温度差（相差一个整体因子佩克莱数^2）。基于这些考虑，可以将 $F(z)$ 和 $G(z)$ 的图像视为通道横向 $x\cos\varphi + y\sin\varphi = constant$ 横截面上的速度和温度分布。一个有趣的特征是，$F(z)$ 和 $G(z)$ 都只依赖于单个参数 Ge。

图 2 和 3 展示了 $F(z)$ 和 $G(z)$，对应不同的格布哈特数，分别涉及 A_- 分支或 A_+ 分支。两个解分支中的流动条件在速度分布和温度分布方面都截然不同。图 2展示了与A_- 分支相关的情况，相对于等温库埃特流的线性速度分布仅有轻微变化。对于大多数应用而言，诸如 $\mathrm{Ge} = 1$ 或 2 这样的数值都非常大，地球物理或天体物理系统除外。在 A_- 分支中，格布哈特数增大对温度分布的影响更为显著 $G(z)$。图 3 显示，在考察 A_+ 分支的速度和温度分布时，格布哈特数的影响要显著得多。在这里，

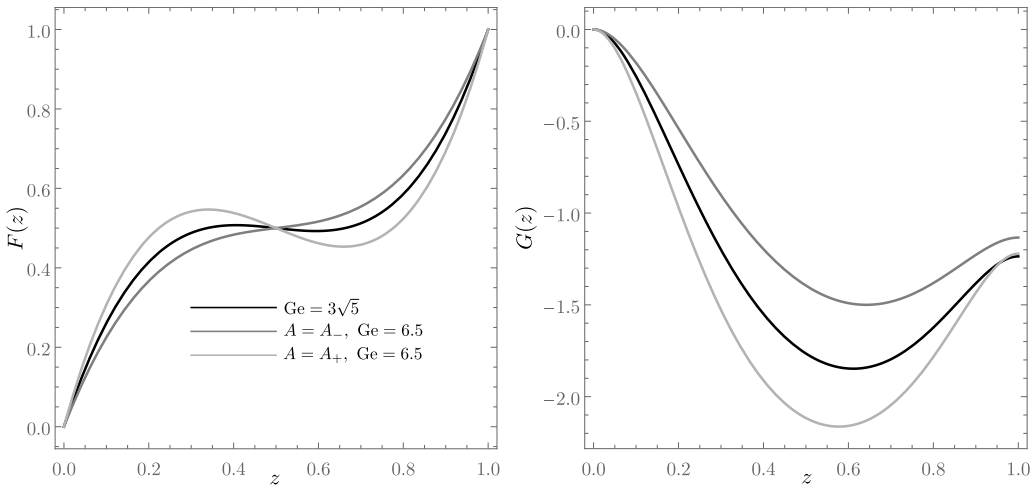


图 4：当 Ge 接近最大值且极大（$\mathrm{Ge}=3\sqrt{5}$）时， $A=A_-$ 分支和 $A=A_+$ 分支的 $F(z)$ 与 $G(z)$ 曲线

对于所考虑的所有格布哈特数，与Couette线性剖面的相似性几乎不存在。这类速度剖面描述的是一种双向流动，其中 $F(z)$沿通道横截面从正值变为负值。

我们指出，取 $\mathrm{Ge}=0$ 意味着关闭黏性耗散的影响，正如式（5c）所示。在这一极限情形下，速度呈线性库埃特分布，温度均匀，如图 2中的黑线所示。关于格布哈特数较小时的行为， A_- 分支的渐近表达式为

$$
\begin{aligned}
&A = A_- = 2\,\mathrm{Ge} + \mathcal{O}\big(\mathrm{Ge}^3\big),\\
&F(z) = z + \frac{\mathrm{Ge}}{6}\,z\,(z-1)(2z-1) + \mathcal{O}\big(\mathrm{Ge}^3\big),\\
&G(z) = \frac{\mathrm{Ge}}{6}\,z^2\,(2z-3) + \frac{\mathrm{Ge}^2}{180}\,z^2\left[z\left(6z^2-45z+70\right)-30\right] + \mathcal{O}\big(\mathrm{Ge}^3\big).
\end{aligned}
\tag{12}
$$

由式（8）和（12）可直接得出， A_- 分支在 $\mathrm{Ge}\to 0$下得到的解对应于等温库埃特流，

$$
u_b = \mathrm{Pe}\,z\,\cos\varphi,\quad v_b = \mathrm{Pe}\,z\,\sin\varphi,\quad w_b = 0,\quad T_b = 0,\quad \boldsymbol{\nabla} p_b = 0.
\tag{13}
$$

关于 co 相反， A_+ 分支在 $\mathrm{Ge}\to 0$ 的极限下表现出奇异行为。事实上 t,

$$
\begin{aligned}
&A = A_+ = \frac{360}{\mathrm{Ge}} - 2\,\mathrm{Ge} + \mathcal{O}\big(\mathrm{Ge}^3\big),\\
&F(z) = \frac{30\,z\,(z-1)(2z-1)}{\mathrm{Ge}} + z - \frac{\mathrm{Ge}}{6}\,z\,(z-1)(2z-1) + \mathcal{O}\big(\mathrm{Ge}^3\big),\\
&G(z) = \frac{180\,z^3\left(6z^2-15z+10\right)}{\mathrm{Ge}^2} - \frac{30\,z^2\big(36z^4-108z^3+120z^2-62z+15\big)}{\mathrm{Ge}}\\
&\qquad - 2\,z^2\left(6z^3-20z+15\right) + \frac{\mathrm{Ge}\,z^2}{6}\left(72z^4-216z^3+240z^2-122z+27\right)\\
&\qquad - \frac{\mathrm{Ge}^2 z^2}{180}\left(6z^3-45z^2+70z-30\right) + \mathcal{O}\big(\mathrm{Ge}^3\big).
\end{aligned}
\tag{14}
$$

方程（14）表明，A_+ 解分支在 Ge $\to 0$ 时趋于无穷。换言之，我们可以得出合理的结论：关闭黏性耗散的影响，或者等价地令 Ge $= 0$，唯一可能的解就是等温库埃特流（13）。A_+ 分支的奇异行为意味着，Ge 的微小取值会对 z 方向上的速度和温度梯度产生极其显著的影响。例如，将 Ge 从 10^{-3} 降低至 10^{-6}，会使 $0 \le z \le 1$ 范围内的最大温差扩大一百万倍。我们指出，在实验室实验中，Ge 取如此小的值并非不可能。这一情形与 Barletta 等人 [27]讨论的情况颇为相似；他们研究的是绝热通道中存在黏性耗散的类泊肃叶绝热流。沿着这一讨论思路，我们得出相同结论：A_+ 解分支与奥伯贝克–布oussinesq近似所依据的假设不相容，除非 Ge 取极大值。因此，正如 Barletta 等人 [18], 所进行的分析一样，我们的线性失稳研究将聚焦于 A_- 分支。

为求完整起见，图4 展示了当 Ge 接近基本解存在所允许的最大值（8）-（10）时的情况，即 Ge$= 3\sqrt{5}$。如果两个分支 A_- 和 A_+在最大Gebhart数处重合，那么当 Ge 略小于最大值时，它们的速度分布和温度分布也会非常相似。

4 不稳定性的起始

第3 节的讨论使本研究将重点转向分支 A_-。通过对方程（8）-（10）进行解析分析并结合图2，可以总结出该分支的特征：速度分布呈库埃特流状，仅略微偏离线性趋势；并且存在一个较宽的垂直范围，在此范围内 $\partial T_b/\partial z < 0$。后一特征表明该流动可能发生热失稳。此类潜在不稳定的温度分布是否以及何时会实际导致对流不稳定性的出现，将是后续研究的目标。

4.1 小振幅扰动

根据线性失稳的通常模态分析，我们对基本状态施加小振幅波状扰动

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_b \\ p_b \\ T_b \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} \mathbf{U}(z) \\ P(z) \\ \Theta(z) \end{pmatrix} e^{i\,k\,x}\, e^{\lambda\, t}, \tag{15}$$

其中，$\varepsilon \ll 1$ 是一个小的正扰动参数，k 是波数，λ 是一个复参数。此类复变量的实部 λ_r给出时间增长率，而其虚部为 $-\omega$，其中 ω 是波的角频率。λ_r 的物理意义体现在必须评估扰动的稳定或不稳定行为时。当 $\lambda_r > 0$时，发生线性失稳，而 $\lambda_r = 0$ 定义了中性稳定条件。中性稳定性是失稳开始时的参数阈值条件。

注意，方程（15）定义了沿水平方向传播的平面波扰动 x。这一假设并不失一般性，因为基本流方向平行于$x\cos\varphi + y\sin\varphi$轴，且角度 φ可在 $0 \le \varphi \le \pi/2$范围内任意取值。因此，x

相对于基本流方向而言，该方向是任意的。通过改变角度，可以涵盖所有可能的扰动斜向模态，范围从 $\varphi = 0$（横向模态）到$\varphi = \pi/2$（纵向模态）。$\mathbf{U}(z)$ 的笛卡尔分量记为 $U(z)$、$V(z)$ 和 $W(z)$。利用基本解方程（8）和（9），并将方程（15）代入方程（5）和（6），可得

$$W' + ik\,U = 0, \tag{16a}$$

$$\frac{1}{\mathrm{Pr}}\left[\lambda\,U + ik\,\mathrm{Pe}\,F(z)\,U\cos\varphi + \mathrm{Pe}\,F'(z)\,W\cos\varphi\right] = -ik\,P + U'' - k^2\,U, \tag{16b}$$

$$\frac{1}{\mathrm{Pr}}\left[\lambda\,V + ik\,\mathrm{Pe}\,F(z)\,V\cos\varphi + \mathrm{Pe}\,F'(z)\,W\sin\varphi\right] = V'' - k^2\,V, \tag{16c}$$

$$\frac{1}{\mathrm{Pr}}\left[\lambda\,W + ik\,\mathrm{Pe}\,F(z)\,W\cos\varphi\right] = -P' + \Theta + W'' - k^2\,W, \tag{16d}$$

$\lambda\,\Theta + ik$ 佩克莱数 $F(z)\,\Theta$ 余弦 $\varphi +$ 佩克莱数 $A\,(U$ 余弦 $\varphi + V$ 正弦 $\varphi)\; +$ 佩克莱数$^2\,G'(z)\;W$

$$= \Theta'' - k^2\,\Theta + 2\,\mathrm{Ge}\,\mathrm{Pe}\;F'(z)\left[\left(U' + ik\,W\right)\cos\varphi + V'\sin\varphi\right], \tag{16e}$$

满足以下边界条件

$$\mathbf{U} = 0, \quad \Theta' = 0 \quad \text{for} \quad z = 0, 1. \tag{17}$$

4.2 爬行流

方程（16）和（17）给出一个由齐次常微分方程和齐次边界条件构成的系统，即，稳定性特征值问题。一种合理的近似是假设流体的普朗特数非常大，因此扰动的动力学可视为爬行浮力流 [18]。事实上，非常大的普朗特数意味着流体黏度很高而热扩散率很低。当黏性耗散导致的内部加热对流动影响显著时，这两种特征——高黏度和低热扩散率——都会出现。

从数学上说，在方程（16b）–（16d）中取极限 $\mathrm{Pr} \to \infty$ 且 $\mathrm{Pe} \sim \mathcal{O}(1)$。因此，方程（16c）简化为 $V'' - k^2\,V = 0$。由于方程（17）规定在 $z = 0$处 $V = 0$ 为 1，唯一可能的解是对每个 z， $V(z) = 0$。根据联系 U 与 W'的关系，即方程（16a），可重新整理方程（16b）、（16d）和（16e），仅使用特征函数 W 和 Θ来改写稳定性特征值问题，即

$$W'''' - 2\,k^2\,W'' + k^4\,W - k^2\,\Theta = 0, \tag{18a}$$

$$\Theta'' - \left[k^2 + \lambda + ik\,\mathrm{Pe}\,F(z)\cos\varphi\right]\Theta + \frac{2i\,\mathrm{Ge}\,\mathrm{Pe}\,F'(z)\cos\varphi}{k}\left(W'' + k^2\,W\right) - \frac{i\,\mathrm{Pe}\,A\cos\varphi}{k}\,W' - \mathrm{Pe}^2\,G'(z)\,W = 0, \tag{18b}$$

$$W = 0, \quad W' = 0, \quad \Theta' = 0 \quad \text{for} \quad z = 0, 1. \tag{18c}$$

为确定中性稳定条件，将 λ 的实部设为零，使得$\lambda = -i\omega$。

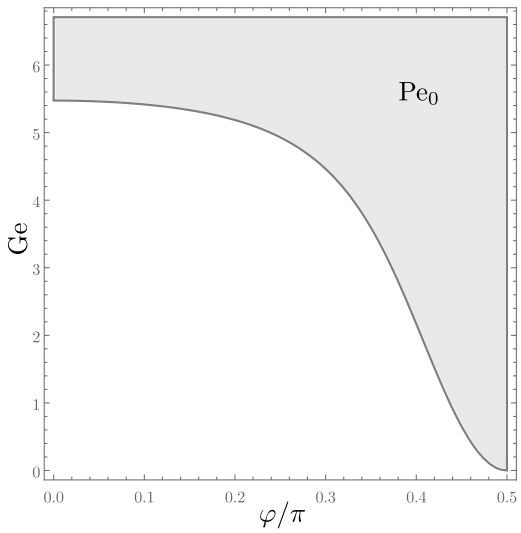


图5：中性稳定条件的存在域（灰色区域），佩克莱数 $=$ 佩克莱数$_0$, ，其中 $A = A_-$ 和 $k \to 0$

4.3 无限波长扰动

对于非常小的波数，可以求得方程（18）的渐近解。通过定义

$$\hat{\Theta} = k\,\Theta, \tag{19}$$

因此可写为

$$W'''' - 2\,k^2\,W'' + k^4\,W - k\,\hat{}\Theta = 0, \tag{20a}$$

$$\hat{\Theta}'' - \left[k^2 - i\omega + ik\,\mathrm{Pe}\,F(z)\cos\varphi\right]\hat{\Theta} + 2i\,\mathrm{Ge}\,\mathrm{Pe}\,F'(z)\left(W'' + k^2\,W\right)\cos\varphi \\ - i\,\text{佩克莱数}\;A\,W'\,\text{余弦}\;\varphi - k\,\text{佩克莱数}^2\,G'(z)\;W = 0, \tag{20b}$$

$$W = 0, \quad W' = 0, \quad \hat{\Theta}' = 0 \quad \text{for} \quad z = 0, 1. \tag{20c}$$

现在我们考虑级数展开。

$$\begin{aligned} W(z) &= W_0(z) + W_1(z)\,k + W_2(z)\,k^2 + \mathcal{O}\left(k^3\right), \\ \hat{\Theta}(z) &= \hat{\Theta}_0(z) + \hat{\Theta}_1(z)\,k + \hat{\Theta}_2(z)\,k^2 + \mathcal{O}\left(k^3\right), \\ \mathrm{Pe} &= \mathrm{Pe}_0 + \mathrm{Pe}_1\,k + \mathrm{Pe}_2\,k^2 + \mathcal{O}\left(k^3\right), \\ \omega &= \omega_0 + \omega_1\,k + \omega_2\,k^2 + \mathcal{O}\left(k^3\right), \end{aligned} \tag{21}$$

将它们代入方程（20），并分别求解各阶微分问题 k^n，其中 $n = 0$，1，2，...。对于 k^0 阶，我们直接得到

$$W_0(z) = 0, \quad \hat{\Theta}_0(z) = 1, \quad \omega_0 = 0. \tag{22}$$

ˆ我们注意到， $\Theta_0(z)$可以设为任意实数或复数常数。事实上，令ˆ$\Theta_0(z) = 1$ 只是打破齐次解尺度不变性的最简单方式

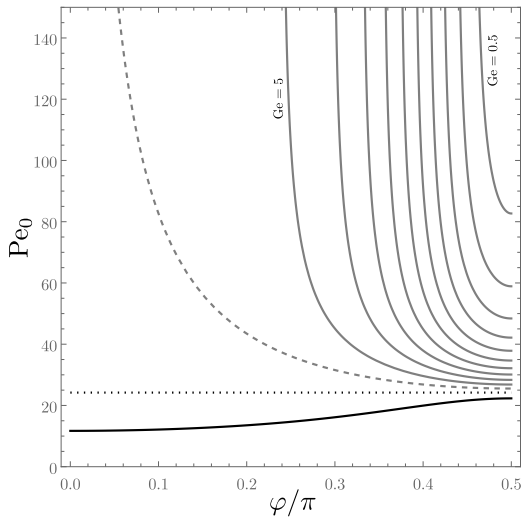


图 6： φ为 $_0$ 时的图，其中 $A = A_{-}$。灰色实线表示从 Ge $= 0.5$ 到 Ge $= 5$，步长为 0。5。虚线对应Ge $= 5.47464$，点线对应 Ge $= 5.99306$，黑色实线对应 Ge $= 3\sqrt{5}$

ˆ 边值问题并施加约束条件 $\Theta(0) = 1$。因此，对于每个 $n > 0$，都有ˆ额外的边界条件 $\Theta_n(0) = 0$。根据方程（22），截至 k^1 阶的边值问题可写为

$$W_1'''' - 1 = 0, \tag{23a}$$

$$\hat{\Theta}_1'' + i\left[\omega_1 - \mathrm{Pe}_0\, F(z)\cos\varphi\right] + 2i\,\mathrm{Ge}\,\mathrm{Pe}_0\, F'(z)\, W_1''\cos\varphi - i\,\mathrm{Pe}_0\, A\, W_1'\cos\varphi = 0, \tag{23b}$$

$$W_1(0) = 0, \quad W_1'(0) = 0, \quad \hat{\Theta}_1(0) = 0, \quad \hat{\Theta}_1'(0) = 0,$$
$$W_1(1) = 0, \quad W_1'(1) = 0. \tag{23c}$$

ˆ尽管为了简洁起见，这里省略了 $W_1(z)$ 和 $\Theta_1(z)$ 的表达式，但很容易求得解。我们只需指出，确定方程组（23）的唯一解并不需要边界条件 ˆ $\Theta_1'(1) = 0$，但施加这一额外条件后，可以写出

$$\omega_1 = \frac{\mathrm{Pe}_0\,(180 - A\,\mathrm{Ge})\cos\varphi}{360}, \tag{24}$$

与佩克莱数$_0$ 尚未确定。根据方程（22），k^2 阶边值问题为

$$W_2'''' - \hat{\Theta}_1 = 0, \tag{25a}$$

$$\begin{aligned}\hat{\Theta}_2'' - 1 + i\omega_2 - i\,\mathrm{Pe}_1\, F(z)\cos\varphi + i\left[\omega_1 - \mathrm{Pe}_0\, F(z)\cos\varphi\right]\hat{\Theta}_1 \\ + 2i\,\mathrm{Ge}\,\mathrm{Pe}_1\, F'(z)\, W_1''\cos\varphi + 2i\,\mathrm{Ge}\,\mathrm{Pe}_0\, F'(z)\, W_2''\cos\varphi \\ - i\,\mathrm{Pe}_1\, A\, W_1'\cos\varphi - i\,\mathrm{Pe}_0\, A\, W_2'\cos\varphi - \mathrm{Pe}_0^2\, G'(z)\, W_1 = 0,\end{aligned} \tag{25b}$$

$$W_2(0) = 0, \quad W_2'(0) = 0, \quad \hat{\Theta}_2(0) = 0, \quad \hat{\Theta}_2'(0) = 0,$$
$$W_2(1) = 0, \quad W_2'(1) = 0. \tag{25c}$$

ˆ再次，我们省略 $W_2(z)$ 和 $\Theta_2(z)$ 对方程（25）的唯一解的显式表达式。我们只强调，额外的边界条件 ˆ $\Theta_2'(1) = 0$，未包含在边值问题（25）中，却给出了正的佩克莱数的显式且唯一的表达式$_0$,

$$\mathrm{Pe}_0 = 720\sqrt{154}\left\{2\,A\,(A+66)\,\mathrm{Ge}^2\cos(2\varphi) - 220\left[(A-81)\,A + 1512\right]\cos(2\varphi) + A\left[2\,(A+66)\,\mathrm{Ge}^2 + 77\,A\,\mathrm{Ge} + 220\,(9-2\,A)\right] + 55440\,(\mathrm{Ge}-6)\right\}^{-1/2}. \tag{26}$$

必须强调，佩克莱数$_0$ 具有非常重要的物理意义。事实上，佩克莱数$_0$ 给出了具有 $k \to 0$的扰动正规模发生线性失稳的中性阈值。

方程（26）适用于 $A = A_-$ 和 $A = A_+$，只有当 Ge 和 φ 满足右侧花括号内的表达式非负时，才会得到实数正值佩克莱数$_0$。然而，并非每一组可能的 (Ge φ) 都满足这一条件。

图5展示了通过方程（26）计算得到的佩克莱数$_0$, 的存在区域，分别考虑分支 $A = A_-$ 或分支 $A = A_+$。一个有趣的事实是，当设定 $A = A_-$时，在整个范围 $0 <$Ge $\leq 3\sqrt{5}$内，纵向模态（$\varphi = \pi/2$）均存在佩克莱数$_0$ 。对于 φ的其他任何取值，总存在一个最小 Ge 值，低于该值时佩克莱数$_0$ 不存在。图6给出了若干佩克莱数$_0$ 关于φ的曲线，同样对应于选取 $A = A_-$的情形，其中 Ge 取不同值。图中灰线对应 Ge 从 0.5 到 5 、步长为 0.5 的取值，而最大 Ge 对应的曲线以黑线绘出。此外还有一条点线和一条虚线，分别对应一对特殊的 Ge 值。对于 Ge $= 5.99306$，点线标示出一个特殊情形：佩克莱数$_0$ 与 φ 无关，且其值为 24.2005。虚线对应 Ge $= 5.47464$，该值是佩克莱数$_0$ 存在于横向模态（$\varphi = 0$）时所需 Ge 范围的下界。由图6可推知，当 $5.99306 <$ Ge $\leq 3\sqrt{5}$时，在无限波长模态中，横向模态最不稳定。当 $0 <$Ge < 5.99306 时，情况则有所不同，因为纵向模态变得最不稳定。

5 结果讨论

无限波长正则模态的中性稳定条件可通过解析解求得，具体方法是针对波数进行幂级数展开 k。将研究范围扩展至有限波长的扰动模态，则意味着需要对方程（18）进行数值求解。

5.1 数值方法

第 4.2 节的分析18 式表明这是一个特征值问题。对于 $A = A_-$ 或 $A = A_+$，可以将（k、φ、Ge）作为输入参数，并求得（Pe ω）作为特征值。所采用的策略是射击法 [28, 29]。首先

Ge	佩克莱数$_0$ ($\varphi=\pi/2$)	佩克莱数 ($k=0.1,\ \varphi=\pi/2$)	佩克莱数$_0$ ($\varphi=0$)	佩克莱数 ($k=0.1,\ \varphi=0$)
0.1	183.638	183.670	—	—
0.2	130.083	130.106	—	—
0.5	82.6889	82.7033	—	—
0.8	65.6755	65.6869	—	—
1	58.9108	58.9211	—	—
2	42.1479	42.1552	—	—
4	30.1012	30.1061	—	—
6	24.1831	24.1861	24.0109	24.0554
$3\sqrt{5}$	22.3114	22.3123	11.7021	11.7142

表 1: 通过解析 A_- 分支得到的佩克莱数$_0$，与
表达式（26）以及通过数值计算得到的佩克莱数中性稳定值（ $k=0.1$ ）之间的比较
射击法

步骤是为边值问题设置数值求解器

$$W'''' - 2\,k^2\,W'' + k^4\,W - k^2\,\Theta = 0, \tag{27a}$$

$$\Theta'' - \left[k^2 - i\omega + ik\,\mathrm{Pe}\,F(z)\cos\varphi\right]\Theta + \frac{2i\,\mathrm{Ge}\,\mathrm{Pe}\,F'(z)\cos\varphi}{k}\left(W'' + k^2\,W\right) - \frac{i\,\mathrm{Pe}\,A\cos\varphi}{k}\,W' - \mathrm{Pe}^2\,G'(z)\,W = 0, \tag{27b}$$

$$W(0)=0,\quad W'(0)=0,\quad \Theta(0)=1,\quad \Theta'(0)=0, \tag{27c}$$

$$W(1)=0,\quad W'(1)=0. \tag{27d}$$

方程 (18) 与方程(27)的区别在于，在方程 (27)中，我们设定 $\lambda = -i\omega$，不施加齐次边界条件 $\Theta'(1)=0$，而是施加非齐次边界条件 $\Theta(0)=1$，后者在方程 (18) 中并不存在。后一个非齐次条件是合理的，因为方程 (18)是尺度不变的：如果(W,Θ) 是一个解，那么对于任意复常数 C，$(CW, C\Theta)$也是一个解。因此，固定 $\Theta(0)=1$ 意味着从一组可能的解的等价类中选取一个单独的非平凡解 (W,Θ)。常数1 可以替换为任意其他复数，而不会影响特征值问题 (18) 的解。这个论证与第 4.3 节中针对特征值问题 (20) 所给出的论证完全相同。

方程(27)可针对每一组固定的参数(k、φ、Ge、佩克莱数 ω)，使用 $A=A_-$ 或 $A=A_+$ 求解。数值解通过软件工具 Mathematica（© WolframResearch,Inc.）的内置函数NDSolve 获得。最终，方程(27) 中未包含、但定义了特征值问题 (18)的条件 $\Theta'(1)=0$被用于确定每组输入数据 (k、φ、Ge) 对应的特征值（佩克莱数 ω）。事实上，这一齐次条件给出了两个约束条件，即$\mathrm{Re}[\Theta'(1)]=0$ 和$\mathrm{Im}[\Theta'(1)]=0$，其中Re和Im 分别表示实部和虚部。因此，该条件导致两个实参数（佩克莱数 ω）的确定。目标约束$\mathrm{Re}[\Theta'(1)]=0$ 和 $\mathrm{Im}[\Theta'(1)]=0$ 的求解通过Mathematica的函数 FindRoot 完成。利用第 4.3节中得到的解析解，可以通过从 $k\to 0$开始，对所有定义了佩克莱数$_0$ 的情况逐步增大 k，来初始化用于计算（佩克莱数 ω）的求根算法。方程(21) 和 (22) 表明，在极限 $k\to 0$ 下， ω 为零。

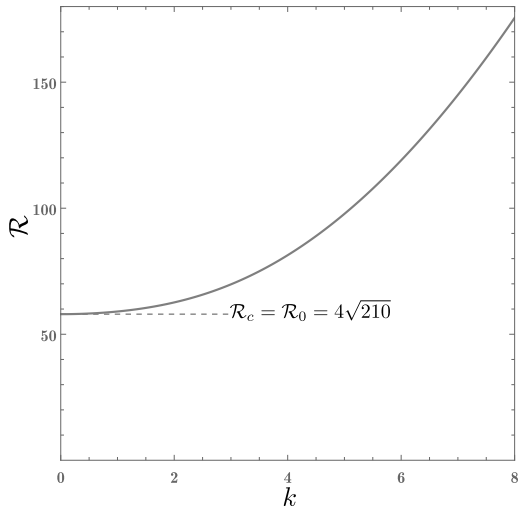


图 7：纵向模态在 $(k, \mathcal{R})$ 平面上的中性稳定性曲线，其中 $A = A_-$ and $\mathrm{Ge} \to 0$

通过探索所有可能输入参数（k、φ、Ge），可以进行稳定性分析。结果的一种便捷表示是在二维空间（k、佩克莱数）中绘制相对于给定参数对（φ、Ge）的中性稳定性曲线。图中，该曲线给出了线性失稳的条件，即佩克莱数超过沿中性稳定性曲线求得的最小值。该佩克莱数最小值条件定义了失稳起始时的临界值（k_c、佩克莱数$_c$、ω_c）[3, 28–30]。

数值求解器的验证结果见表 1 ，其中将由解析表达式（26）得到的 Pe 数据与采用射击法对 $k = 0.1$进行数值计算所得的数据进行了比较。考虑到数值计算得到的 Pe_0 值与 Pe 的中性稳定性值对应的波数略有不同（$k = 0$ 和 $k = 0.1$），两者吻合得非常好。$\mathrm{Ge} \leq 4$ 时横向模态的数据未列于表 1 中，因为当 Ge_0 时 $\mathrm{Pe} < 5.47464$ 未定义，正如第 4.3节所述。

5.2 小格布哈特数区域

可以研究 Ge 取小值极限时特征值问题（18）的渐近解。令 $A = A_-$，即可由式（12）得到 Ge 最低阶下的行为。因此，当格布哈特数非常小时，式（18）可近似为

$$W'''' - 2\,k^2\,W'' + k^4\,W - k^2\,\Theta = 0, \tag{28a}$$

$$\Theta'' - \left[k^2 - i\omega + ik\,\mathrm{Pe}\,z\cos\varphi\right]\Theta + \frac{2i\,\mathrm{Ge}\,\mathrm{Pe}\cos\varphi}{k}\left(W'' + k^2\,W\right) - \frac{2i\,\mathrm{Ge}\,\mathrm{Pe}\cos\varphi}{k}\,W' + \mathrm{Ge}\,\mathrm{Pe}^2\,z(1-z)\,W = 0, \tag{28b}$$

$$W = 0, \quad W' = 0, \quad \Theta' = 0 \quad \text{for} \quad z = 0, 1. \tag{28c}$$

首先需要考虑的是，极限 $\mathrm{Ge} \to 0$ 可以通过相应地同时取 $\mathrm{Pe} \to \infty$ 的极限来实现（关于这一点的讨论，参见 Barletta 等人 [18]）。这个双重极限是良定义的

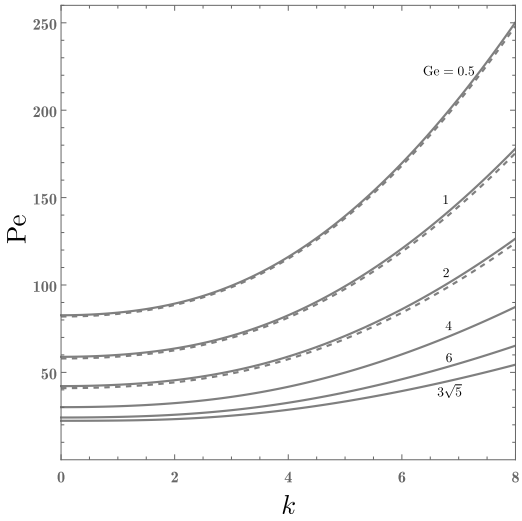


图8：纵向模态在 (k,佩克莱数) 平面上的中性稳定性曲线（实线），其中$A = A_-$，且 Ge 的范围从 0.5 到其最大值 $3\sqrt{5}$。虚线表示 Ge $= 0.5$,1 和 2 时，采用 Ge $\ll 1$ 的渐近解计算得到的中性稳定性数据

只要考虑

$$\mathcal{R} = \mathrm{Pe}\sqrt{\mathrm{Ge}} \sim \mathcal{O}(1). \tag{29}$$

因此，方程（28）可改写为

$$W'''' - 2\,k^2\,W'' + k^4\,W - k^2\,\Theta = 0, \tag{30a}$$

$$\Theta'' - \left[k^2 - i\omega + ik\,\frac{\mathcal{R}}{\sqrt{\mathrm{Ge}}}\,z\cos\varphi\right]\Theta + \frac{2i\,\sqrt{\mathrm{Ge}}\,\mathcal{R}\cos\varphi}{k}\left(W'' + k^2\,W\right) - \frac{2i\,\sqrt{\mathrm{Ge}}\,\mathcal{R}\cos\varphi}{k}\,W' + \mathcal{R}^2\,z(1-z)\,W = 0, \tag{30b}$$

$$W = 0, \quad W' = 0, \quad \Theta' = 0 \quad \text{for} \quad z = 0, 1. \tag{30c}$$

Ge 极限有两种可能的结果 $\to 0$，具体取决于倾角 φ。如果 $\cos\varphi \neq 0$，或者等价地，如果 $\varphi \neq \pi/2$，则 Ge 极限 $\to 0$ 取 $\mathcal{R} \sim \mathcal{O}$式（30b）中会产生一个阶为 $\mathrm{Ge}^{-1/2}$的主导项，因此该方程只有在 $\Theta = 0$时才能成立。将$\Theta = 0$ 代入式（30a），式（30a）和（30c）的唯一解为 $W = 0$。换言之，不存在能导出中性稳定条件且满足 $\varphi \neq \pi/2$的扰动模态。另一方面，若 $\varphi = \pi/2$，则当 Ge $\to 0$时，式（30）存在极限形式。,</final>

$$W'''' - 2\,k^2\,W'' + k^4\,W - k^2\,\Theta = 0, \tag{31a}$$

$$\Theta'' - \left(k^2 - i\omega\right)\Theta + \mathcal{R}^2\,z(1-z)\,W = 0, \tag{31b}$$

$$W = 0, \quad W' = 0, \quad \Theta' = 0 \quad \text{for} \quad z = 0, 1, \tag{31c}$$

其允许存在非平凡解。

可通过数值求解特征值问题（31），以确定（$\varphi = \pi/2$）纵向模态在（k, $\mathcal{R}$）平面上的中性稳定性曲线。图7展示了该曲线。

首先要说明的是，中性稳定性曲线表示 $\mathcal{R}$ 是 k 的单调递增函数，因此 $\mathcal{R}$ 的临界值是

$$\mathcal{R}_c = \mathcal{R}_0 = \lim_{\mathrm{Ge}\to 0} \mathrm{Pe}_0 \sqrt{\mathrm{Ge}} = 4\sqrt{210} \approx 57.9655, \tag{32}$$

其中，式（32）中的极限通过使用式（26）求得。式（32）的作用十分重要，因为它提供了一个可用于近似最不稳定模态的佩克莱数临界值的解析表达式，即在格布哈特数取较小值时的纵向模态，

$$\mathrm{Pe}_c = \mathrm{Pe}_0 \approx 4\sqrt{\frac{210}{\mathrm{Ge}}}. \tag{33}$$

方程（31）数值解的另一个重要特征是，沿着中性稳定性曲线， $\omega = 0$。事实上，这一结果是小格布哈特数和大格布哈特数下纵向模态的典型特征。

5.3 最不稳定的扰动模态

最不稳定模态的确定，或者等价地，能够得到最小佩克莱数值的角度的确定 φ是稳定性分析中的首要步骤，对于给定的格布哈特数$_c$ 。在第5.2节中，我们得出结论：对于渐近条件Ge $\ll$ 1，纵向模态通过佩克莱数$_c$ （通过公式（33）进行解析评估）引发向线性失稳的转变。具有 $\varphi \neq \pi/2$的斜向或横向模态，在这种渐近情形下不会给出任何中性稳定性的渐近条件。实际上，这种行为意味着，当Ge $\to$ 0时，斜向或横向模态的佩克莱数比纵向模态的佩克莱数增长到无穷大的速度快得多。因此，我们得出这样一种情形：对于较小的格布哈特数，在线性失稳初始阶段所选定的模态是纵向模态。具体而言，该转变由具有无限波长的纵向模态触发，即佩克莱数$_c$ =佩克莱数$_0$。

如图 8所示，对于纵向模态，相对于 $A = A_-$ 的临界佩克莱数与佩克莱数$_0$ 相同，与所指定的格布哈特数无关。事实上，所有中性稳定性曲线均显示，佩克莱数是 k的单调递增函数。考察图 8可知，图 7 中报告的极限情形 Ge $\ll$ 1 的中性稳定性数据，通过标度关系 Pe= $\mathcal{R}/\sqrt{\mathrm{Ge}}$，能够以较粗略的精度确定 Ge = 2 下的中性稳定条件（最大相对偏差为 2.8%）；对于 Ge = 1，精度尚可（最大相对偏差为 1.6%）；而对于 Ge = 0.5，精度更高（最大相对偏差为 0.86%）。因此，出于实际考虑，对于所有 Ge $\ll$ 1 的情形，均可放心采用 Ge $\leq$ 0.5下的渐近解。

如第 4.3 节所述，对于无限波长（$k \to 0$），在考虑极大的格布哈特数时，尤其是当 Ge $>$ 5.99306 时，纵向模态并非最不稳定模态。图 9 对比了超出特定条件 $k \to 0$ 的纵向模态和横向模态。该图表明，对于无限波长模态得出的结论确实普遍成立。事实上，图9 显示，对于给定的格布哈特数，无论是纵向模态还是横向模态，其中性稳定性曲线的最低极小值始终出现在 $k \to 0$。这意味着，线性失稳发生时的主导临界条件正如第 4.3 节所讨论的那样。当 5.99306 $<$ Ge $\leq 3\sqrt{5}$ 时，横向模态触发线性失稳；而当 0 $<$ Ge $<$ 5.99306 时，则由纵向模态触发。考察低于 Ge = 0.5 的格布哈特数，只会扩大中性稳定性曲线之间的间距

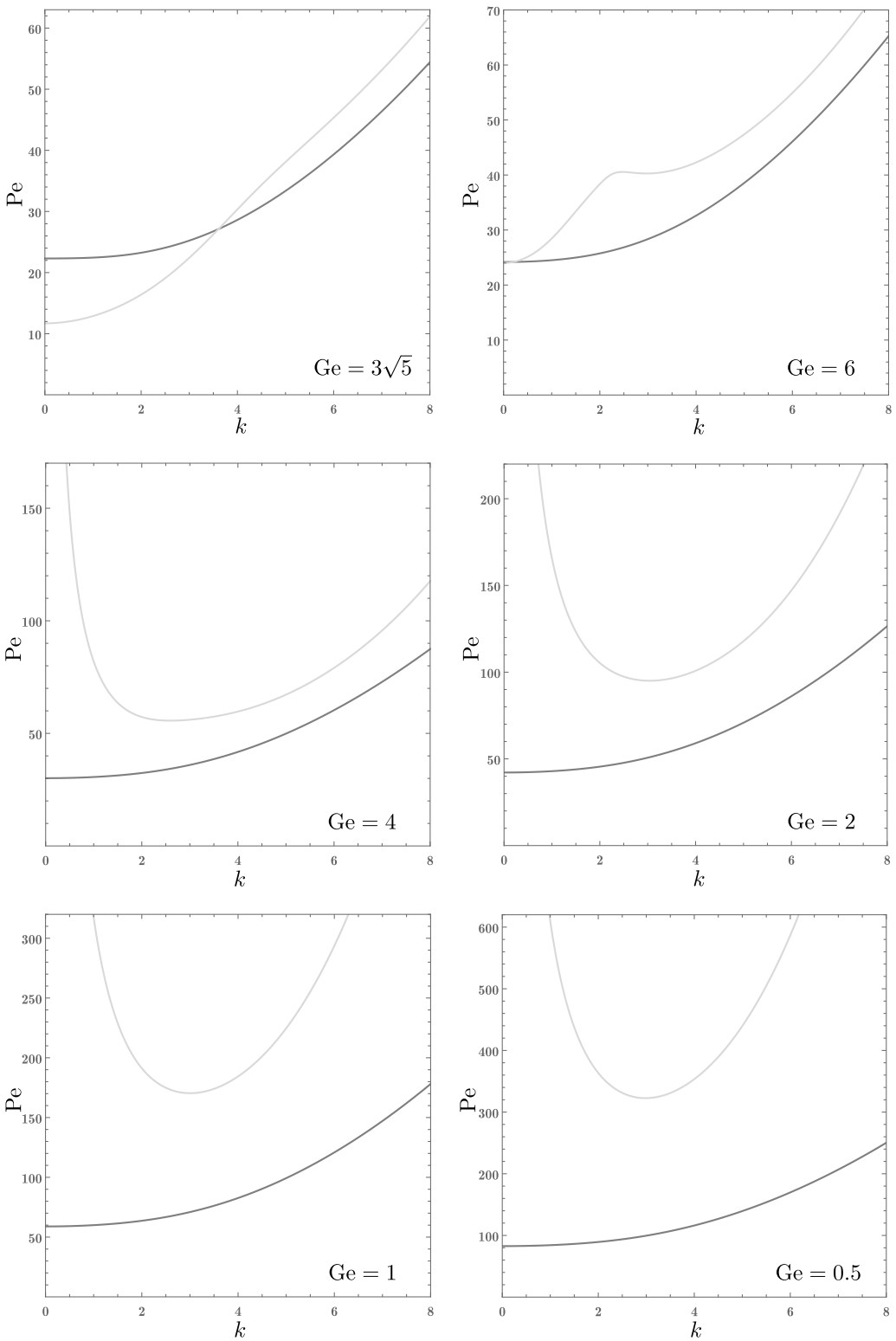


图 9：(k，佩克莱数)平面中的中性稳定性曲线，其中 $A = A_-$ 表示纵向模态（深灰色线）和横向模态（浅灰色线）

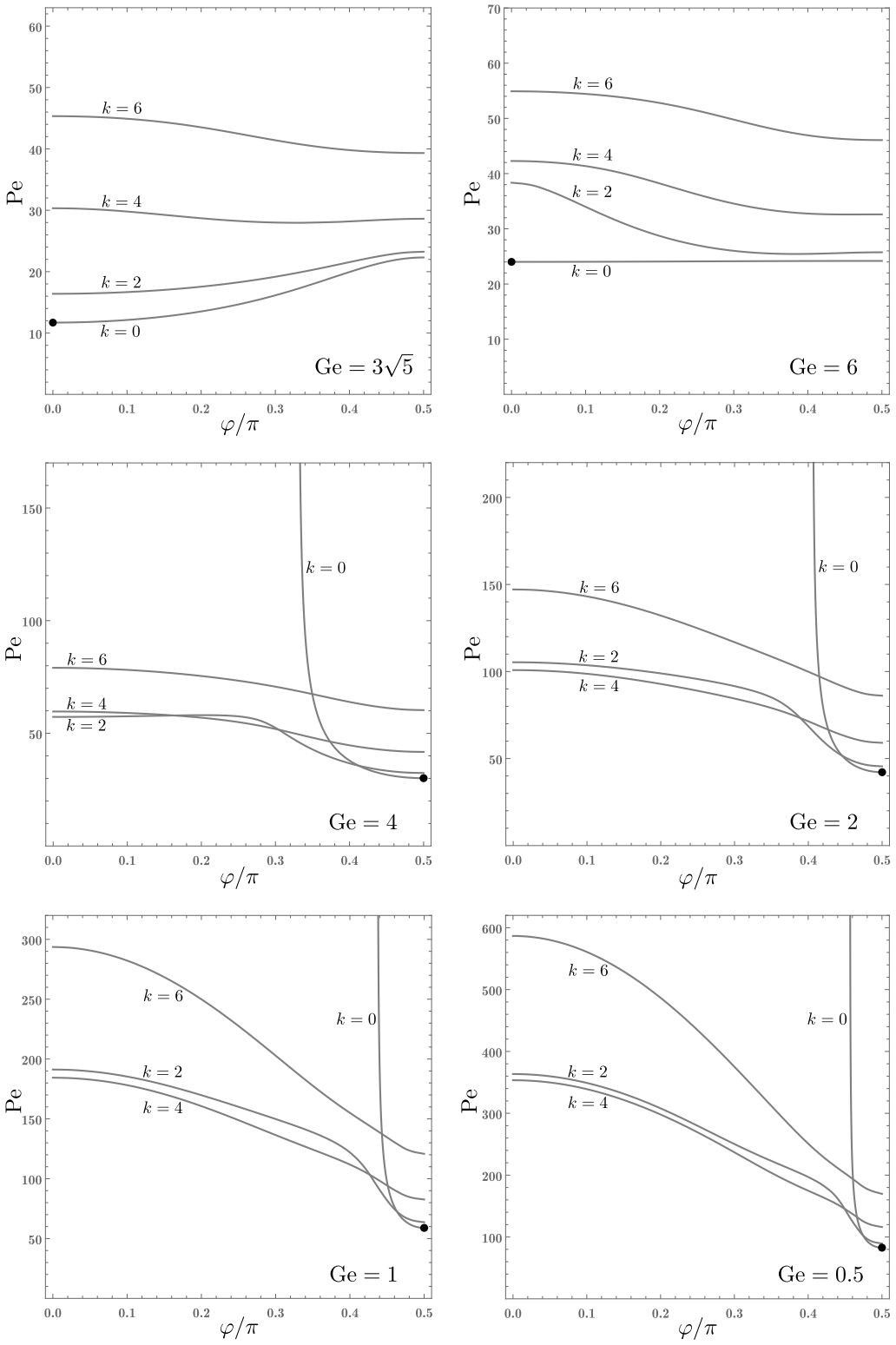


图10：不同波数下斜向模态的佩克莱数中性稳定性值随 φ 变化，其中 $A = A_-$ 。黑点表示转变为线性不稳定时佩克莱数的最小值

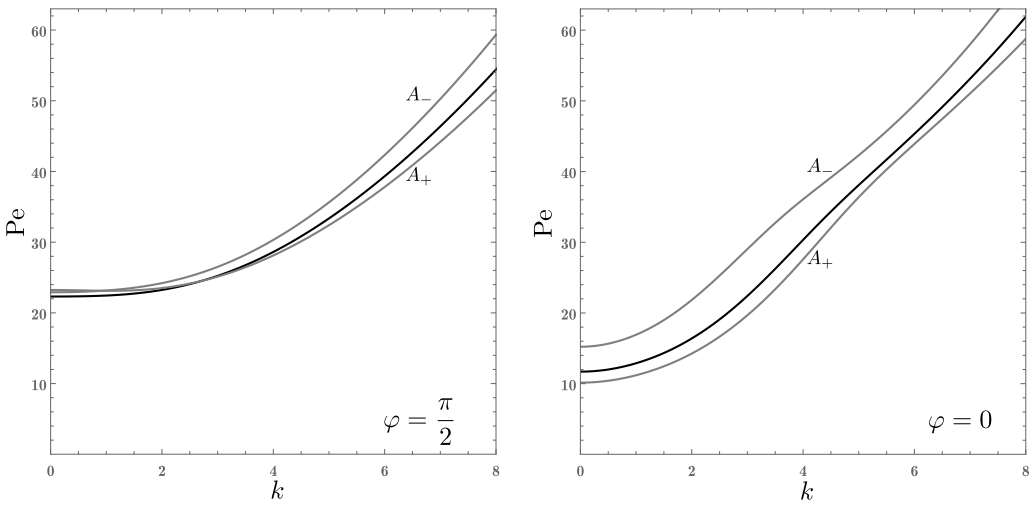


图11：在 (k,佩克莱数) 平面中，针对纵向模态（$\varphi = \pi/2$）和横向模态（$\varphi = 0$），Ge $= 6.5$（灰线）和 Ge $= 3\sqrt{5}$（黑线）的中性稳定性曲线，分别对应$A = A_-$ 或 $A = A_+$

纵向模态的稳定性曲线以及横向模态的稳定性曲线。因此，可以恢复预期的趋势：当 Ge比$1/\sqrt{}$ Ge更迅速地 $\to 0$ 5.2。

其中的中间条件可以通过跟踪 Pe 相对于 $0 < \varphi < \pi/2$ 的变化，并结合给定的格布哈特数和波数，以高效方式进行检查。图10 展示了一个重要结果，因为它表明向线性失稳的转变始终由 $k = 0$模式驱动：在接近最大值的极大格布哈特数下为横向模式，Ge$= 3\sqrt{5}$；而当格布哈特数小于第4.3节检测到的阈值时，即Ge < 5.99306，则为纵向模式。事实上，我们回顾一下，Ge $= 5.99306$ 给出了 Pe_0与 φ无关的特殊情况，因此，无论其在水平面中的方向如何，任何无限波长模式都能触发失稳起始。于是，我们可以将其作为一个一般性结果：用于启动失稳的临界佩克莱数，Pe´，始终与 Pe_c一致，对于$_0$或 $\varphi = 0$ ，具体取决于格布哈特数。图10 还显示，Pe 的中性稳定值可能随 φ 呈非单调变化，例如在 $k = 2$ 且Ge $= 4$ 或 6 时。

5.4 Close to the maximumGebhart number

我们强调过，对于大多数常见应用而言，可能也包括涉及地球物理系统等大空间尺度的情形，格布哈特数的最大可能值 $3\sqrt{5}$都极其大。尽管如此，为使稳定性分析更加完整，也可以比较图 A_- 4 A_+ 中所示的 分支与 $= 3\sqrt{5}$ 分支。接近 Ge时向线性失稳转变的示意见图 11。除 与 的中性稳定性曲线如预期般相似外，一个重要结果是，不稳定性的出现由无限波长的横向模态驱动。此外，分支表现得比 分支更不稳定。纵向模态并未参与不稳定性的初始形成，而且在比较两个分支时表现出不一致的

运动黏度， ν [m^2/s]	5.50×10^{-4}
热扩散率， α [m^2/s]	8.53×10^{-8}
比热容， c [J/(kg K)]	1 910
热膨胀系数， β [1/K]	7×10^{-4}
普朗特数	6 450

表2：平均温度为300 K时未使用发动机油的热物理性质 [31]

行为 $A = A_-$ 。事实上，纵向模态的 $A = A_+$分支在佩克莱数 Pe $A = A_+$方面出现一个最小值条件，且′。图 $_c = 23.1290$ 11所示的各个情形中，只有后一种情况下，中性稳定性曲线所对应的佩克莱数并非随单调递增。

5.5 一个思想实验

迄今为止所进行的分析完全基于无量纲量，但检验这些结果在某些具体情形下可能的应用，甚至设想中的实验验证，或许会很有意义。

从稳定性分析一开始，我们就假设流体具有极高的黏度和较低的热扩散率，因此其普朗特数可以合理地视为非常大，这与爬行流假设一致。一个例子是未使用过的发动机油，其在平均温度为 300 K 时的性质列于表 2。假设设计了一个库埃特实验装置，两相对运动的壁面之间的距离为 $H = 1$厘米。那么，利用表 2所列数据，可知格布哈特数极小，

$$\mathrm{Ge} = 3.60 \times 10^{-8}. \tag{34}$$

由于格布哈特数如此之小，库埃特流的基本速度分布实际上与等温线性分布无法区分。此外，我们可以一致地采用式（33），该式针对Ge $\ll 1$推导而得，以便计算导致基本流发生线性失稳的临界佩克莱数，′。

$$\mathrm{Pe}_c = \mathrm{Pe}_0 \approx 4\sqrt{\frac{210}{\mathrm{Ge}}} = 306\,000. \tag{35}$$

由于本研究预测的不稳定性转变是通过叠加于基本流之上的无限波长纵向扰动模态发生的，因此，整体流动模式从基本流的直线平行流线变为扰动流的相互倾斜直线流线。我们还应记得，由于不稳定性转变是通过纵向模态（$\varphi = \pi/2$）发生的，基本流的流向是 y 轴。

最后，通过使用表 2，可以确定库埃特流线性失稳的临界雷诺数，

$$\mathrm{Re}_c = \frac{\mathrm{Pe}_c}{\mathrm{Pr}} = 47.4. \tag{36}$$

有趣的是，这个较小的临界雷诺数或许可以与等温库埃特流的临界雷诺数相比较，后者是通过能量法评估非线性流体动力学稳定性的阈值而得出的 [32–34].

采用温度有量纲尺度的定义，即式（4），以及由式（8）-（10）给出的基本状态下的无量纲温度分布表达式。于是可以估计，当Ge $= 3.60 \times 10^{-8}$，佩克莱数 $=$ 佩克莱数$_c = 306\,000$ 以及 $A = A_-$时，在给定流向截面上，下壁面与上壁面之间的温差$y =$为常数，等于 3。8 K。此外，沿流向的基本温度梯度 $1.5 \times 10^{-4}\,\mathrm{K/m}$，显然可以忽略。在如此温度范围内，基于奥伯贝克–布oussinesq近似的标准问题表述可以认为是一致的。

6 结论

已研究水平面通道中具有绝热刚性壁面的稳态平行流。在局部能量平衡中，考虑了由边界壁面之间施加的相对速度引起的黏性耗散效应。所采用的流动描述，尤其是局部动量平衡中的温度耦合，是根据奥伯贝克–布oussinesq近似建立的。因此，基本流呈现为非等温流动，并显示出类库埃特速度分布。研究表明，对于给定的佩克莱数 P´e 和格布哈特数 Ge，存在双流分支。当 Ge $= 3\sqrt{5}$ 时，这两支流动重合。当 Ge $> 3\sqrt{5}$ 时，不存在稳态平行流。研究指出，在这些双流分支中，只有标记为 A_- branch 的一支与适用于实际情况，即$i.e.$ 格布哈特数足够小的奥伯贝克–布oussinesq近似相容。

针对 A_- 分支，在普朗特数取无限大时的爬行流状态下进行了线性稳定性分析。研究考虑了任意方向传播的波状扰动，范围从传播方向垂直于基本流方向的纵向模态，到传播方向平行于基本流方向的横向模态。所有中间倾角的斜向模态也一并纳入考虑。分析得出的主要结论如下：

- 基于射击法，得到了稳定性特征值问题的数值解。研究旨在确定（k，Pe）平面上的中性稳定性曲线。因此，结果表明，在所有情况下，最小中性稳定佩´克莱数，即临界 Pe 值，都对应于 $k \to 0$ （无限波长）极限。

- 当佩´克莱数超过其临界值时，不稳定性便开始出现，而该临界值取决于格布哈特数。最不稳定的扰动模态具有无限波长。对于 Ge < 5.99306，它们是纵向模态；对于 $5.99306 <$ Ge $\leq 3\sqrt{5}$，则是横向模态。Ge $= 5.99306$ 的情况较为特殊，因为转变为不稳定状态与模态方向无关，即也就是说，纵向、斜向和横向模态等效。

- 针对波数 k 趋近于零的渐近情形，已获得该稳定性特征值问题的解析解，因此波长。

趋于无穷大。因此，在所有情况下，临界 P´eclet 数的确定都是解析的。

- 小格布哈特数区域已通过渐近解进行了研究。该区域是实验室尺度流动的典型情况，而格布哈特数为数量级一的情形则仅与地球物理或天体物理系统的研究相关[35, 36]。对于类似的泊肃叶类流动情形 [18], , Ge $\ll 1$ 渐近解表明，纵向模态的中性稳定性佩´克莱数随Ge $^{-1/2}$呈标度变化。正如 Romanov 所证明的那样 [2], , 基本流在任意佩´克莱数下均稳定，当 Ge $\to 0$。

- 基于 Ge $\ll 1$ 渐近解，提出了一种实验装置，可用于验证适用于垂直宽度与实验室设备尺寸相当的流动的相关结果。

本文所得结果在未来有若干值得进一步拓展的方向。将经典的奥伯贝克–布oussinesq近似从对流流动推广至流体黏度随温度发生显著变化的情形，可能具有重要意义。对所采用模型的另一种可能改进，是放宽扰动动力学中的爬行流假设，或者等价地，将研究拓展至普朗特数有限的情形。失稳转变的非线性也是一个重要问题。对其进行分析或可揭示亚临界失稳的出现，并能与能量法所得的流体动力学稳定性阈值进行有效比较。

致谢
作者感谢意大利教育、大学与研究部（MIUR）项目编号 PRIN2017F7KZWS 提供的经费支持。

参考文献

[1] 瑞利勋爵，关于黏性流体运动稳定性的进一步论述，《伦敦、爱丁堡和都柏林哲学杂志与科学杂志》28 (1914) 609–619。[2] V. A. Romanov，平行平面库埃特流的稳定性，《泛函分析及其应用》7 (1973) 137–146。[3] P. G. Drazin，W. H. Reid，《流体动力学稳定性》，第2版，剑桥大学出版社，2004。[4] P. J. Schmid，D. S. Henningson，《剪切流中的稳定性与转捩》，施普林格，2001。[5] S. Bottin，O. Dauchot，F. Daviaud，P. Manneville，关于转捩平面库埃特流中流向涡旋作为有限振幅解的实验证据，《流体物理学》10 (1998) 2597–2607。[6] N. Tillmark，P. H. Alfredsson，平面库埃特流转捩实验，《流体力学杂志》235 (1992) 89–102。

[7] A. P. Ingersoll，平面库埃特流中的对流不稳定性，《流体物理学》9 (4) (1966) 682–689。[8] R. Kimura，H. Tsu，A. Yagihashi，平面库埃特流中的对流模式，《日本气象学会学报》第二辑 49 (1971) 249–260。[9] R. E. Kelly，充分发展剪切流中热对流的起始与发展，载于：J. W. Hutchinson，T. Y. Wu（编），《应用力学进展》第31卷，爱思唯尔，1994，第35–112页。[10] D. D. Joseph，变黏度对通道和管道中流动及稳定性的影响，《流体物理学》7 (1964) 1761–1771。[11] D. D. Joseph，摩擦加热流的稳定性，《流体物理学》8 (1965) 2195–2200。[12] A. Barletta，D. A. Nield，变黏度对具有水平贯流的多孔层中耗散失稳的影响，《流体物理学》24 (2012) 104102。[13] J. M. White，S. J. Muller，黏性加热条件下牛顿流体泰勒-库埃特流稳定性的实验研究，《流体力学杂志》462 (2002) 133–159。[14] A. Barletta，D. A. Nield，高黏度流体水平平面库埃特流中的对流-耗散失稳，《流体力学杂志》662 (2010) 475–492。[15] A. Barletta，M. Celli，D. A. Nield，水平通道中高黏度流体泊肃叶流耗散热失稳的起始，《流体力学杂志》681 (2011) 499–514。[16] A. Barletta，黏性耗散诱发的热失稳，《国际热科学杂志》88 (2015) 238–247。[17] Y. Requil´e，S. C. Hirata，M. N. Ouarzazi，黏性耗散对瑞利-贝´纳德-泊肃叶/库埃特对流线性稳定性的影响，《国际传热与传质杂志》146 (2020) 118834。[18] A. Barletta，M. Celli，D. A. S. Rees，水平通道中绝热浮力流的黏性加热与不稳定性，《流体物理学》35 (2023) 033111。[19] F. Capone，M. Gentile，指数型温度依赖黏度流体对流的非线性稳定性分析，《力学学报》107 (1994) 53–64。[20] F. Capone，M. Gentile，具有凸且非递增温度依赖黏度流体的贝´纳德问题非线性稳定性分析，《连续介质力学与热力学》7 (1995) 297–309。[21] L. Fusi，L. Vergori，压力和温度依赖材料性质流体的瑞利-贝´纳德问题，《应用数学与物理学杂志》74 (2023) 8。¨M. Singh，R. Ragoju，G. Shiva Kumar Reddy，C. Subramani，利用机器学习技术预测惯性、旋转和磁场对双分散多孔介质中对流起始的影响，《流体物理学》35 (2023) 034103。

[23] M. T. Horsch, S. Chiacchiera, Y. Bami, G. J. Schmitz, G. Mogni, G. Goldbeck, E. Ghe-dini，可靠且可互操作的计算分子工程：2. 基于欧洲材料与建模本体的语义互操作性，arXiv预印本（2020）arXiv:2001.04175.[24] K. R. Rajagopal, M. Ruzicka, A. R. Srinivasa，关于奥伯贝克–布oussinesq近似，《应用科学中的数学模型与方法》6（1996）1157–1167.[25] A. Barletta，浮力流的布oussinesq近似，《力学研究通讯》124（2022）103939.[26] A. Barletta, M. Celli, D. A. S. Rees，奥伯贝克–布oussinesq近似的使用与误用，《Physics》5（2023）298–309.[27] A. Barletta, M. Celli, P. V. Brand˜ao，水平通道中的混合对流、黏性耗散与流动二重性，《Fluids》7（5）（2022）170.[28] B. Straughan，《能量法、稳定性与非线性对流》，施普林格，2013.[29] A. Barletta，《多孔介质中的绝对不稳定性路径》，施普林格，2019.[30] P. K. Kundu, I. M. Cohen, D. R. Dowling，《流体力学》，第6版，Academic Press，2016.[31] A. Bejan，《对流传热》，第3版，John Wiley & Sons，2004.[32] P. Falsaperla, A. Giacobbe, G. Mulone，平面库埃特流和泊肃叶流的非线性稳定性结果，《Physical Review E》100（2019）013113.[33] P. Falsaperla, G. Mulone, C. Perrone，平面库埃特流和泊肃叶流的能量稳定性：一个猜想，《European Journal of Mechanics-B/Fluids》93（2022）93–100.[34] A. Giacobbe, G. Mulone, C. Perrone，倾斜层流的单调能量稳定性，《力学研究通讯》125（2022）103987.[35] C. Kincaid, P. Silver，黏性耗散在造山过程中的作用，《地球与行星科学快报》142（1996）271–288.[36] T. Miyagoshi, C. Tachinami, M. Kameyama, M. Ogawa，超级地球中地幔对流的强度，《天体物理学杂志快报》780（2013）L8。