arXiv:2304.05245v1 [math.DG] 11 Apr 2023

Hermite–Yang–Mills联络的半稳定性与局部墙穿越

Andrew Clarke 和 Carl Tipler

Abstract. 我们研究紧致 K¨ahler 流形上的一个足够光滑的半稳定全纯向量丛。假设其分次对象的自同构群为阿贝尔群，我们给出极化在 K¨ahler 锥中的一个邻域的半代数分解，将其划分为刻画稳定性与不稳定性的若干腔室。对于一条位于稳定腔室内、并收敛到初始极化的路径，我们证明相应的 HYM联络收敛到分次对象上的一个 HYM联络。

1. 引言

斜率稳定性由 Mumford 针对曲线提出，并由 Take- moto 推广至高维情形（[17, 21]），是一种可用于构造和研究向量丛模空间的稳定性概念。它取决于极化的选择，而极化的变化会导致墙穿越现象（参见[10]，其中综述了稳定丛模空间的构造及其变化）。根据 Hitchin–Kobayashi对应（[13, 16, 22, 6]），紧致 K¨ahler 流形上的全纯向量丛是斜率多稳定的，当且仅当它具有 Hermite–Einstein度量，等价地，具有 Hermitian Yang–Mills 联络。墙穿越现象从代数角度描述模空间的整体变化，而本文受[3]启发，着眼于从解析角度研究其局部变化。稳定丛相对于任何邻近的极化都具有 Hermite–Einstein 度量，而半稳定丛的情形则要微妙得多；本文探讨的正是这一问题。

为陈述我们的结果，我们先引入一些记号。记紧致 K¨ahler 流形 X 的 K¨ahler 锥为 $\mathcal{K}_X \subset H^{1,1}(X,\mathbb{R})$。回顾一下，若半稳定全纯向量丛 $E \to (X,[\omega])$ 的分次对象 $\mathrm{Gr}(E)$ 局部自由，则称其足够光滑。在这种情况下，我们定义

$$\mathfrak{E}_{[\omega]} = \{F \subset E \mid \mu_{[\omega]}(F) = \mu_{[\omega]}(E)\}$$

斜率与 E 相同的子丛集合。这些丛均由分次对象的稳定部分依次扩张而成，因此 $\mathfrak{E}_{[\omega]} = \{F_1, \dots, F_p\}$ 是有限的。对于每个 $F_i \in \mathfrak{E}_{[\omega]}$，映射

$$\begin{array}{rccc} \nu_i : & \mathcal{K}_X & \to & \mathbb{R} \\ & \alpha & \mapsto & \dfrac{c_1(E)\cdot\alpha^{n-1}}{\mathrm{rank}(E)} - \dfrac{c_1(F_i)\cdot\alpha^{n-1}}{\mathrm{rank}(F_i)} \end{array}$$

2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：53C07，次要分类：53C55，14J60。

关于其自变量是多项式（将其视为向量空间 $H^{1,\,1}(X,\mathbb{R})$ 中的元素）。于是我们定义

$$\mathcal{S}_s = \bigcap_{i=1}^{p}\{\nu_i > 0\},\ \mathcal{S}_u = \bigcup_{i=1}^{p}\{\nu_i < 0\} \text{ and } \mathcal{S}_{ss} = \bigcap_{i=1}^{p}\{\nu_i \geq 0\},$$

对于任意球 $B([\omega],R) \subset \mathcal{K}_X$，我们定义 $\mathcal{S}_{s,\,R} = B([\omega],R) \cap \mathcal{S}_s$，类似地定义 $\mathcal{S}_{u,\,R}$ 和 $\mathcal{S}_{ss,\,R}$。按构造，这些集合是半代数的。

命题 1.1. 设 $E \to (X,[\omega])$ 是紧致 K ¨ahler 流形上的一个简单且足够光滑的半稳定全纯向量丛。假设自同构群 Aut(Gr(E)) 是阿贝尔群。则存在 K ¨ahler 锥中的一个球 $B([\omega],R) \subset \mathcal{K}_X$in，以及一个半代数分割 $B([\omega],R) = \mathcal{S}_{s,\,R} \cup \mathcal{S}_{u,\,R} \cup \mathcal{S}_{ss,\,R}$，使得 E 对于任意 $[\omega']$in$\mathcal{S}_{s,\,R}$ 是稳定的（分别为不稳定、严格半稳定）（分别在 $\mathcal{S}_{u,\,R}$、 $\mathcal{S}_{ss,\,R}$ 中）。

这个命题可以通过代数方法轻易得到[1] （与更一般的结果 [11, 定理 6.6]相比较）。然而，我们的证明依赖于规范理论方法，并提供了当极化趋近于 $\mathcal{S}_{s,R}$ 的边界时相关 HYM联络的行为信息。

定理 1.2。 在命题 *1.1* 的设定下，对于 $\mathcal{S}_{s,R}$ 的一个连通分支中的任意路径 $([\omega_t])_{t\in(0,1]}$，若 $\lim_{t\to 0}[\omega_t] = [\omega]$，则存在一条 E 上的 HYM联络路径 $(A_t)_{t\in(0,1]}$，相对于 $(\omega_t)_{t\in(0,1]}$，使得 $\lim_{t\to 0} A_t = A_0$ 是 Gr(E) $\to (X,[\omega])$ 上的一个 HYM联络。

在前述陈述中，提及 E 上（分别是 Gr(E) 上）的 HYM联络 A 时，我们默认 A^0,1 与 E （分别是 Gr(E)）的全纯联络或 Dolbeault 算子规范等价。因此，定理 1.2 的结论可以改述如下。若 $\overline{\partial}_{\mathrm{Gr}(E)}$ （分别是 $\overline{\partial}_E$）表示 Gr(E)（分别是 E）的 Dolbeault 算子，且 h 是关于 ω 的 Gr(E) 上的 Hermite–Einstein度量，则存在规范变换 $(f_t)_{0<t\leq 1}$，使得 $(f_t^*\overline{\partial}_E, h)$ 的 Chern联络是关于 $(\omega_t)_{0<t\leq 1}$ 的 HY M联络，并且在任意索博列夫范数下收敛到 $(\overline{\partial}_{\mathrm{Gr}(E)}, h)$ 的 Chern联络（规范变换及其作用的定义见第 2.1 节）。实际上，我们的构造还提供了关于 $\mathcal{S}_{s,R}$ 的一个连通分支中任意路径所关联的 HYM联络的信息，该路径收敛到 $\mathcal{S}_{ss,R}$ 中的任意类，见注 4.4。

请注意，定理1.2 并非 Hitchin–Kobayashi对应的直接应用，也不是隐函数定理的直接应用，因为对称群 Aut(Gr(E)) 会阻碍线性理论。相反，我们的证明利用了 Atiyah 和 Donaldson（[1, 5]）对方程的矩映射诠释，以及受 [7, 20, 2] 启发的 Kuranishi 切片构造，并运用了 Atiyah 和 Guillemin–Sternberg 关于矩映射像的凸性定理的局部版本。

注记 1.3。 虽然关于 Gr(E) 局部自由的假设是自然的，但要求其自同构群为阿贝尔群纯粹是技术性的。这一点用在第4节，该节依赖于针对 cscK 度量的类似构造 [18]。在 [19], 类似结果

[1]Julius Ross 慷慨地向我们提供了一种直接而简洁的证明，该证明结合了 Greb 和 Toma 的技巧（[11，命题 6.5]）与 Grothendieck 引理（[12，引理 1.7.9]）。

可通过对 K¨ahler 类和半稳定丛的扰动得到。然而，在 [19], Gr(*E*) 上还需要一个额外假设（约当–霍尔德滤子的唯一性，且其商为局部自由的稳定丛）；证明更加技术性，结果也仅适用于沿 Kähler 锥中直线（形如 $t \mapsto [\omega] + t\alpha$）的扰动。

注释 1.4。关于 E 为简单丛的假设可以很容易地去掉。一般而言，人们可能会寻求半稳定丛的多稳定扰动。在这种情况下，应从斜率相同的半稳定丛的直和出发，并分别处理每个直和项。为便于阐述，我们将限于简单情形。

不难看出，定理1.2 对于某些紧致的半稳定全纯向量丛族成立，它们都以 Gr(*E*) 作为分次对象（正如 cscK 度量的类似问题，参见 [18, 第 4 节。5]）。要进一步理解 HYM 联络的局部墙穿越现象，下一步是获得定理 1.2 的一个统一版本，一次涵盖 Gr(*E*) 的所有小变形。

论文结构：首先，在第 2 节中，我们回顾 HYM 联络和斜率稳定性的基础知识。然后，在第 3 节中，我们构造一族 Kuranishi 切片，用以参数化 Gr(*E*) 的小变形，其中每个切片都依赖于一个邻近 $[\omega]$ 的 K¨ahler 类。这一步受到 [20, 2, 3, 18], 的启发，使我们能够将问题归结为研究一族有限维矩映射。第 4 节则致力于证明定理 1.2，并依靠 [18] 的最新技术来控制受扰动的矩映射。

致谢：作者在访问 LMBA 和哥德堡大学期间受益良多；他们谨向这两家热情接待的机构致谢，感谢其提供了富有启发性的工作环境。本项目的构想源自与 Lars Martin Sektnan 的讨论，我们感谢他分享自己的想法与见解。我们还感谢 Julius Ross 友好地解答了我们关于室结构的问题，并向我们指出了参考文献 [11]。AC 部分获得 BRIDGES ANR–FAPESP ANR-21-CE40-0017 和 Projeto CAPES - PrInt UFRJ 88887.311615/2018-00 项目资助。CT 部分获得 MARGE ANR-21-CE40-0011 和 BRIDGES ANR–FAPESP ANR-21-CE40-0017 项目资助。

2. Preliminaries

在第2.1节和2.2节中，我们介绍HYM联络和斜率稳定性的概念，以及一些一般性结果，并请读者参阅 [14] 和 [12]。

2.1. Hermitian–Yang–Mills方程。设 $E \to X$ 是紧致K¨ahler流形 X上的全纯向量丛。若 E 上的Hermitian度量相对于一个K¨ahler度量（其K¨ahler形式为 ω ）满足相应Chern联络的曲率$F_h \in \Omega^2(X, \operatorname{End} E)$满足

$$\Lambda_\omega (iF_h) = c \operatorname{Id}_E \tag{2.1}$$

其中 c 为某个实常数。等价地，若 h 是底层为 E 的光滑复向量丛上的某个厄米度量，则称 (E, h) 上的厄米联络 A 满足

厄米杨–米尔斯条件，当且仅当它满足

$$\begin{cases} F_A^{0,2} &= 0, \\ \Lambda_\omega (iF_A) &= c\,\mathrm{Id}_E\,. \end{cases}$$

该系统的第一个方程意味着， E上的 A 的（0, 1）部分确定了一个全纯结构；而第二个方程意味着， h 对于这一全纯结构是厄米-爱因斯坦的。我们将尝试在复规范群轨道中寻找厄米-杨-米尔斯联络，现定义如下。复规范群是

$$\mathscr{G}^{\mathbb{C}}(E) = \Gamma\left(\mathrm{GL}\left(E, \mathbb{C}\right)\right),$$

其厄米版本为

$$\mathscr{G}^{\mathbb{C}}(E,h) = \Gamma\left(\mathrm{GL}\left(E, \mathbb{C}\right)\right) \cap \Gamma\left(\mathrm{End}_H(E,h)\right),$$

其中， $\mathrm{End}_H(E,h)$表示（E,h）的厄米端omorphism。注意，如果$\bar\partial$是定义 E上全纯结构的Dolbeault算子，那么 $f\circ\bar\partial\circ f^{-1}$定义了 E上的双全纯复结构。令 $d_A = \partial_A + \partial_A$ 为关于原复结构（即 $\partial_A = \partial$）的（E,h）的Chern联络。那么，关于 $f\circ\bar\partial\circ f^{-1}$ 的 h 的Chern联络 A^f 是

$$d_{A^f} = (f^*)^{-1}\circ\partial_A\circ(f^*) + f\circ\bar\partial\circ f^{-1}.$$

求解厄米杨–米尔斯方程等价于求解

$$\Psi(s) = c\,\mathrm{Id}_E$$

其中

$$\begin{array}{rccc} \Psi: & \mathrm{Lie}(\mathscr{G}^{\mathbb{C}}(E,h)) & \longrightarrow & \mathrm{Lie}(\mathscr{G}^{\mathbb{C}}(E,h)) \\ & s & \longmapsto & i\Lambda_\omega(F_{A^{\exp(s)}}), \end{array}$$

并且 $\mathrm{Lie}(\mathscr{G}^{\mathbb{C}}(E,h)) := i\Gamma(\mathrm{End}_H(E,h))$ 是 $\mathscr{G}^{\mathbb{C}}(E,h)$ 在单位元处的切空间。对于 E 上的联络 A ，拉普拉斯算子 Δ_A 为

$$\Delta_A = i\Lambda_\omega\left(\bar\partial_A\partial_A - \partial_A\bar\partial_A\right). \tag{2.2}$$

若 $A_{\mathrm{End}\,E}$ 表示由 A 在 End E 上诱导的联络，则:

引理 2.1。若 A 是 $(E,\overline{\partial},h)$ 的 Chern联络，则 Ψ 在单位元处的微分为

$$d\Psi_{\mathrm{Id}_E} = \Delta_{A_{\mathrm{End}\,E}}.$$

此外，若假设 A 是厄米杨–米尔斯联络，则 $\Delta_{A_{\mathrm{End}\,E}}$ 作用于 $\Gamma(\mathrm{End}(E))$ 上的核由空间 $\mathrm{Aut}(E)$ 的李代数 $\mathfrak{aut}(E)$ 给出，其中 $\mathrm{Aut}(E)$ 是 $(E,\overline{\partial})$ 的自同构群。

关于核的最后一个陈述源于 K¨ahler 恒等式和¯ ¯Akizuki-Nakano恒等式，它们蕴含 $\Delta_{A_{\mathrm{End}\,E}} = \partial_A^*\partial_A + \partial_A^*\partial_A$；如果 A 是厄米-杨-米尔斯联络，则其中两项相等。由于算子 $\Delta_{A_{\mathrm{End}\,E}}$ 是椭圆且自伴的， $\mathfrak{aut}(E)$ 随后将在厄米-杨-米尔斯联络的扰动线性理论中作为余核出现。

2.2. 斜率稳定性。我们回顾一些关于斜率稳定性的基本事实，这些事实由 [17, 21], 引入，并请有兴趣的读者参阅 [12] 以获取详细论述。我们在此记 $L:=[\omega]$ 以下对象： n维 K¨ ähler 流形的极化 X。

定义2.2。对于 $\mathcal{E}$ 上的一个无挠相干层，其斜率 $\mu_L(\mathcal{E}) \in \mathbb{Q}$（关于 L）由交公式给出

$$\mu_L(\mathcal{E}) = \frac{\deg_L(\mathcal{E})}{\operatorname{rank}(\mathcal{E})}, \tag{2.3}$$

其中，$\operatorname{rank}(\mathcal{E})$ 表示 $\mathcal{E}$ 的秩，而 $\deg_L(\mathcal{E}) = c_1(\mathcal{E}) \cdot L^{n-1}$ 表示其次数。于是，如果对于 $\mathcal{E}$ 的任意相干饱和子层 $\mathcal{F}$，且满足 $0 <\operatorname{rank}(\mathcal{F}) < \operatorname{rank}(\mathcal{E})$，都有.....，则称 $\mathcal{E}$ 关于 L 是斜率半稳定的（分别地，斜率稳定的）。

$$\mu_L(\mathcal{F}) \leq \mu_L(\mathcal{E}) \text{ (resp. } \mu_L(\mathcal{F}) < \mu_L(\mathcal{E})).$$

斜率相同的斜率稳定层的直和称为斜率多稳定。

在本文中，我们将经常省略“斜率”，而仅称层的稳定性，极化则默认为既定。我们将全纯向量丛 E 与其截面层作标准识别，因此也将讨论向量丛的斜率稳定性概念。在这种情况下，斜率稳定性通过Hitchin–Kobayashi对应与微分几何很好地联系起来：

定理2.3（[13, 16, 22, 6]）。存在一个定义在 E 上的 Hermite–Einstein度量（相对于 ω），当且仅当 E 相对于 L是多稳定的

我们主要关注半稳定向量丛。对于无挠层 $\mathcal{E}$，Jordan–H ¨older过滤是由相干且饱和的子层构成的过滤：

$$0 = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_\ell = \mathcal{E}, \tag{2.4}$$

使得相应的商

$$\mathcal{G}_i = \frac{\mathcal{F}_i}{\mathcal{F}_{i-1}}, \tag{2.5}$$

对于 $i = 1$, ..., ℓ，都是斜率为 $\mu_L(\mathcal{G}_i) = \mu_L(\mathcal{E})$ 的稳定对象。特别地，该过滤的分次对象

$$\operatorname{Gr}(\mathcal{E}) := \bigoplus_{i=1}^{l} \mathcal{G}_i \tag{2.6}$$

是多稳定的。

3. An adapted family of Kuranishi slices

设 $(X, [\omega])$ 是一个 n 维紧致 K¨ahler 流形，并设 $([\alpha_i])_{1\leq i\leq p}$ 是实向量空间 $H^{1,1}(X, \mathbb{C}) \cap H^2(X, \mathbb{R})$ 的一组基。对于 $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, .., \varepsilon_p) \in \mathbb{R}^p$，我们定义

$$\omega_{\underline{\varepsilon}} := \omega + \sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i \alpha_i \in \Omega^{1,1}(X, \mathbb{R}).$$

我们固定 $\mathbb{R}^p$ 中零点的一个小邻域 U，使得对于任意 $\underline{\varepsilon} \in U$，$[\omega_{\underline{\varepsilon}}]$ 都定义 X 上的一个 K¨ähler 类。在讨论斜率时，我们将使用记号 $L_{\underline{\varepsilon}} := [\omega_{\underline{\varepsilon}}]$。

设 Gr(E) $=\bigoplus_{i=1}^{\ell}\mathcal{G}_i$ 是 $(X,[\omega])$ 上的一个多稳全纯向量丛，其稳定分量为 $\mathcal{G}_i$（稍后它将成为某个半稳定丛的分次对象）。根据 Hitchin–Kobayashi对应，我们可以在 Gr(E) 上固定一个 Hermite–Einstein度量 h_0。我们用 $\overline{\partial}_0$ 表示 (Gr(E) h_0) 上的全纯联络，用 A_0 表示相应的 (HYM) Chern联络。我们将研究在受扰动的极化 $([\omega_{\underline{\varepsilon}}])_{\underline{\varepsilon}\in U}$ 下，Gr(E) 的小变形上的 HYM联络。本节的目标是将寻找规范群轨道中算子 $s\mapsto i\Lambda_{\omega_{\underline{\varepsilon}}}(F_{A_0^{\exp(s)}})-c_{\underline{\varepsilon}}\mathrm{Id}$ 的零点这一问题，归结为一个有限维问题。请注意，本节不需要假设 Aut(Gr(E)) 是阿贝尔的。

3.1.扰动Kuranishi切片。自同构群 $G:=$ Aut(Gr(E)) 是一个约化李群，其李代数 $\mathfrak{g}:=\mathfrak{aut}$(Gr($E$)) 和紧形式 $K\subset G$，其中 $\mathfrak{k}:=$ Lie(K)。

我们的出发点是以下命题，其证明与[15]（另见 [2, 4] 中的详细论述）相同。我们引入如下记号

$$V:=H^{0,1}(X,\mathrm{End}(\mathrm{Gr}(E)))$$

对于取值于Gr(E)的调和(0,1)-形式空间，其中，用于计算伴随算子的度量分别为 X 上的 ω 以及 Gr(E) 上的 h_0。注意，Gr(E) 上的 G- 作用诱导出一个线性表示 $G\to$ GL(V)。

命题 3.1. 存在一个全纯的 K-等变映射

$$\Phi:B\to\Omega^{0,1}(X,\mathrm{End}(\mathrm{Gr}(E)))$$

来自原点周围的一个球 $B\subset V$，使得：

(1) $\Phi(0)=0$；(2) $Z:=\{b\in B\,|\,(\overline{\partial}_0+\Phi(b))^2=0\}$ 是 B的一个复子空间；(3) 如果$(b,b')\in Z^2$属于同一个 G-轨道，那么 $\overline{\partial}_0+\Phi(b)$和 $\overline{\partial}_0+\Phi(b')$诱导出同构的全纯丛结构；(4) 任意对Gr($E$)的小复变形，其 $\mathscr{G}^{\mathbb{C}}$(Gr(E))-轨道都与$\Phi(Z)$相交。

空间 Z 对应于 Φ像中的可积Dolbeault算子空间，而 $\Phi(B)$是Dolbeault算子集合上、$\overline{\partial}_0$附近规范群作用的一个切片。

下一步将对 Φ进行扰动。这里的思想可追溯至 [7, 20], ，我们的框架将采用 [2]。关于参数 $\underline{\varepsilon}$ 进行族扰动的策略受到了 [3, 18]的启发。

给定度量 ω 和 h_0，以及由 A_0 给出的协变导数，我们可以在截面空间上引入 $L^{2,\,l}$ 索博列夫范数。我们将任意截面空间 $\mathcal{E}$ 的 $L^{2,\,l}$ Sobole夫完备化记为 $\mathcal{E}^l$。下文中，假定 $l\in\mathbb{N}^*$ 足够大，使得 $\mathcal{E}^l$ 中的元素具有所需的正则性。

命题 3.2. 在缩小 $U\times B$ 后，存在一个连续可微映射

$$\widetilde{\Phi}:U\times B\to\Omega^{0,1}(X,\mathrm{End}(\mathrm{Gr}(E)))^l$$

使得如果 $A_{\underline{\varepsilon},\,b}$ 是 $(\overline{\partial}_0+\Phi(\underline{\varepsilon},b)$ $h_0)$ 的 Chern联络：

(1) 对所有 $(\underline{\varepsilon},b)\in U\times Z$、$\overline{\partial}_0+\Phi(\underline{\varepsilon},b)$ 和 $\overline{\partial}_0+\Phi(b)$ 都是规范等价的，(2) 对所有 $\underline{\varepsilon}\in U$，映射 $b\mapsto\Lambda_{\omega_{\underline{\varepsilon}}}iF_{A_{\underline{\varepsilon},b}}$ 取值于 $\mathfrak{k}$。

~注记 3.3. 根据椭圆正则性， Φ 的像中的元素实际上是光滑的。然而，映射 $\widetilde{\Phi}$ 的正则性是相对于 $L^{2,\ l}$ 索博列夫范数而言的。

为简化记号，我们将用 $\Lambda_{\underline{\varepsilon}}$ 表示 $\omega_{\underline{\varepsilon}}$ 的 Lefschetz 算子。我们还引入拓扑常数

$$c_{\underline{\varepsilon}} = \frac{2\pi n}{\mathrm{vol}_{\omega_{\underline{\varepsilon}}}(X)} \frac{\left(c_1(\mathrm{Gr}(E)) \cup [\omega_{\underline{\varepsilon}}]^{n-1}\right)[X]}{\mathrm{rank}(\mathrm{Gr}(E))}.$$

证明。对于 $b \in B$，我们将 A_b 记作$(\overline{\partial}_0 + \Phi(b)\ h_0)$的 Chern联络。特别注意， A_0 是 Gr(E) 上的 HYM联络。我们的目标是沿规范轨道对 A_b 进行扰动，从而满足陈述中的第 (2) 点，并应用隐函数定理。对于 $s \in \Gamma(X, \mathrm{End}(\mathrm{Gr}(E)))$ $A_b(s) = A_b^{\exp(s)}$ 。由 Φ的正则性，映射$(b, s) \mapsto A_b(s) - A_0$（分别地，$(b, s) \mapsto F_{A_b(s)}$）从 $B \times \Gamma(X, \mathrm{End}(\mathrm{Gr}(E)))^l$ 到 $\Omega^1(X, \mathrm{End}(\mathrm{Gr}(E)))^{l-1}$ （分别为 $\Omega^2(X, \mathrm{End}(\mathrm{Gr}(E)))^{l-2}$）是光滑的。我们由此得到算子

$$\begin{array}{rccc} \Psi: & U \times B \times \Gamma(X, \mathrm{End}_H(\mathrm{Gr}(E), h_0))^l & \to & \Gamma(X, \mathrm{End}_H(\mathrm{Gr}(E), h_0))^{l-2} \\ & (\underline{\varepsilon}, b, s) & \mapsto & \Lambda_{\underline{\varepsilon}} i F_{A_b(s)} - c_{\underline{\varepsilon}} \mathrm{Id}_{\mathrm{Gr}(E)} \end{array}$$

是一个 $\mathcal{C}^1$ 映射。由于 A_0 是HYM，我们有 $\Psi(0) = 0$。根据引理2.1，它在零点沿 s 方向的微分由 A_0的拉普拉斯算子 Δ_{A_0} 给出，其余核为 $i\mathfrak{k} \subset \Gamma(X$,End$_H$(Gr($E$) h_0))。于是，通过将其投影到 $i\mathfrak{k}$的某个正交补上的标准投影论证，我们可以应用隐函数定理，并得到一个 $\mathcal{C}^1$ 映射 $(\underline{\varepsilon}, b) \mapsto s(\underline{\varepsilon}, b)$，使得 $\Psi(b, \underline{\varepsilon}, s(\underline{\varepsilon}, b))$ 属于 $\mathfrak{k}$，最后令

$$\widetilde{\Phi}(\underline{\varepsilon}, b) = (A_b(\underline{\varepsilon}, s(\underline{\varepsilon}, b)))^{0,1} - A_0^{0,1}.$$

□

3.2. 有限维矩映射。现在我们将说明，对于每个$\underline{\varepsilon} \in U$，映射

$$\begin{array}{rccc} \mu_{\underline{\varepsilon}}: & B & \to & \mathfrak{k} \\ & b & \mapsto & \Lambda_{\underline{\varepsilon}} i F_{A_{\underline{\varepsilon}, b}} - c_{\underline{\varepsilon}} \mathrm{Id}_{\mathrm{Gr}(E)} \end{array} \tag{3.1}$$

是 K-作用在 B上的矩映射，其中采用了适当的辛形式$\Omega_{\underline{\varepsilon}}$ 在 B上。回顾 [1, 5]，对于 $\underline{\varepsilon} \in U$， $\mathscr{G}^{\mathbb{C}}$(Gr(E) h_0) 的规范作用在仿射空间 $\overline{\partial}_0 + \Omega^{0,1}(X$,End(Gr($E$))上，相对于由下式给出的辛形式是哈密顿的，对于 $(a, b) \in \Omega^{0,1}(X, \mathrm{End}(\mathrm{Gr}(E)))^2$, :

$$\Omega^D_{\underline{\varepsilon}}(a, b) = \int_X \mathrm{trace}(a \wedge b^*) \wedge \frac{\omega_{\underline{\varepsilon}}^{n-1}}{(n-1)!}, \tag{3.2}$$

其等变矩映射为 $\overline{\partial} \mapsto \Lambda_{\underline{\varepsilon}} F_{A_{\overline{\partial}}}$，其中 $A_{\overline{\partial}}$ 表示 $(\overline{\partial}, h_0)$ 的 Chern 连接。这里，我们通过不变配对将 $\mathscr{G}^{\mathbb{C}}$(Gr(E) h_0) 的李代数与其对偶空间等同起来。

$$\langle s_1, s_2 \rangle_{\underline{\varepsilon}} := \int_X \mathrm{trace}(s_1 \cdot s_2^*) \frac{\omega_{\underline{\varepsilon}}^n}{n!}. \tag{3.3}$$

注 3.4. 在上文中，对于 h_0 固定的情形，我们使用 Chern 对应在 Dolbeault算子与厄米联络之间建立联系，以表达 Dolbeault算子 空间上的无限维动量映射图景。

~命题 3.5. 在适当缩小 $U \times B$ 后，对于所有 $\underline{\varepsilon} \in U$，映射 $\overline{\partial}_0 + \Phi(\varepsilon, \cdot)$ 是一个从 B 到 $\overline{\partial}_0 + \Omega^{0,1}(X, \mathrm{End}(\mathrm{Gr}(E)))$ 的 K-等变映射，其像对于 $\Omega^D_{\underline{\varepsilon}}$ 是一个辛子流形。

证明。等变性可直接由命题 3.1 以及命题 3.2 的证明中 Φ 的构造得出。映射 Φ 是通过扰动 Φ 得到的。但 Φ 是复解析的，且按构造在原点处的微分是单射（参见例如原始证明 [15] 或 [4]）。因此， $\Phi(B)$ 是 $\Omega^{0,1}(X, \mathrm{End}(\mathrm{Gr}(E)))$ 的一个复子空间。我们推得，缩小 B 后， Φ 会诱导出 B 的一个嵌入，使得 Ω^D_0 在 $\Phi(B)$ 上的限制是非退化的（回想一下， Ω^D_0 是 X 上 Dolbeault算子空间的一个 K¨ahler 形式）。由于 $\Phi(\underline{\varepsilon}, \cdot)$ 是对 Φ 的小幅连续扰动得到的，并且成为辛嵌入是一个开条件，结论得证。□

由此结果，我们推得映射 $\mu_{\underline{\varepsilon}}$ 定义于（3.1）是关于拉回辛形式的 K-作用于 B 的矩映射。

$$\Omega_{\underline{\varepsilon}} := \widetilde{\Phi}(\varepsilon, \cdot)^* \Omega^D_{\underline{\varepsilon}},$$

并且我们使用配对 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\underline{\varepsilon}}$ 定义于（3.3）以将 $\mathfrak{k}$ 与其对偶对应。

我们现在假设Gr(E)是一个简单、半稳定且足够光滑的全纯向量丛 E on $(X, [\omega])$ 的分次对象。由于 E 是由Gr(E) 的稳定分量 $\mathcal{G}_i$'s的连续扩张构成的， E 上的 Dolbeault 算子 $\overline{\partial}_E$ 由

$$\overline{\partial}_E = \overline{\partial}_0 + \gamma$$

其中 $\gamma \in \Omega^{0,1}(X, \mathrm{Gr}(E)^* \otimes \mathrm{Gr}(E))$ 可写为

$$\gamma = \sum_{i<j} \gamma_{ij}$$

对于（可能为零的） $\gamma_{ij} \in \Omega^{0,1}(X, \mathcal{G}_j^* \otimes \mathcal{G}_i)$。元素

$$g := g_1 \,\mathrm{Id}_{\mathcal{G}_1} + \ldots, + g_\ell \,\mathrm{Id}_{\mathcal{G}_\ell} \in G,$$

对于 $(g_i) \in (\mathbb{C}^*)^\ell$，作用于 $\overline{\partial}_E$，并按以下方式得到同构的全纯向量丛：

$$g \cdot \overline{\partial}_E = \overline{\partial}_0 + \sum_{i<j} g_i g_j^{-1} \gamma_{ij}. \tag{3.4}$$

特别地，对于 $g = (t^\ell, t^{\ell-1}, \ldots, t)$，令 $t \mapsto 0$，我们可以将 E 视为 Gr(E) 的一个小复变形。由命题 3.1，全纯联络 $\overline{\partial}_E$ 规范等价于某个 $b \in B$ 对应的元素 $\overline{\partial}_b$: $= \overline{\partial}_0 + \Phi(b)$。于是，由 ~ 的性质以及映射 Φ 和 Φ，对于所有 $\underline{\varepsilon} \in U$ 和所有 $g \in G$，只要 $g \cdot b \in B$， $\overline{\partial}_E$ 都将规范等价于 $\sim \overline{\partial}_0 + \Phi(\underline{\varepsilon}, g \cdot b)$。由于 $\mu_{\underline{\varepsilon}}$ 的一个零点对应于 $(X, \omega_{\underline{\varepsilon}})$ 上的 HYM 联络，我们剩下的问题是刻画 $\mu_{\underline{\varepsilon}}$ 在 b 的 G-轨道中存在零点的条件。

4. Proof of the main results

我们沿用上一节的记号，现在的目标是证明命题1.1 和定理 1.2。这时我们需要假设

$G = \mathrm{Aut}(\mathrm{Gr}(E))$是阿贝尔的。由于 $\mathrm{Gr}(E) = \bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathcal{G}_i$ 这等价于所有稳定分量 $\mathcal{G}_i$ 两两不同构，而这给出了明确的描述

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{aut}(\mathrm{Gr}(E)) = \bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathbb{C} \cdot \mathrm{Id}_{\mathcal{G}_i}.$$

通过缩小 U，我们假设集合 $\{[\omega_{\underline{\varepsilon}}],\ \underline{\varepsilon} \in U\}$ 是一个球 $B([\omega], R) \subset \mathcal{K}_X$。根据第 1 节中集合 $\mathcal{S}_u$ 的定义，显然，对于任意 $[\omega'] \in \mathcal{S}_u$，$R$，$E$ 相对于 $[\omega']$ 都是不稳定的。接下来，我们首先证明，通过缩小 R，E 对于 $\mathcal{S}_s$，R 中的所有类都存在 HYM联络。结合 E 的简单性，这将推出对于 $\mathcal{S}_s$，R 中的任意类，E 都是稳定的。然后，我们将探讨所构造的 HYM联络的收敛性质，从而完成定理 1.1 的证明。最后，我们将处理 $\mathcal{S}_{ss}$，R 中各类对应的半稳定情形，由此完成命题 1.1 的证明。

4.1. 与 K-作用相关的局部凸锥。我们的首要目标是证明，对于任意满足 $[\omega_{\underline{\varepsilon}}] \in \mathcal{S}_s,\ R$ 的 $\underline{\varepsilon} \in U$，在

$$\mathcal{Z} := G \cdot b \cap B.$$

为此，我们首先至少在局部描述映射 $\mathcal{Z}$ $(\mu_{\underline{\varepsilon}})_{\underline{\varepsilon} \in U}$的像。在本节中，借助[18], 我们将看到，这些像都包含同一个凸锥（顶点附近一个邻域）的平移。

由 E 的简单性可知，b 在 K 作用下的稳定子缩减为 S^1 作用；该作用由形如 $e^{i\theta}\mathrm{Id}_E$ 的规范变换诱导。由于这些元素固定 B 中的所有点，后续论证中不会涉及 $S^1 \cdot \mathrm{Id}_E$ 中的元素。因此，我们改用商环面 $K_0 := K/S^1 \cdot \mathrm{Id}_E$。注意，映射 μ_ε （见 (3.1) ）中出现的常数 $c_{\underline{\varepsilon}}$ 经过选取，使得 $\langle \mu_{\underline{\varepsilon}}, \mathrm{Id}_E \rangle_{\underline{\varepsilon}} = 0$。由于 $\mu_{\underline{\varepsilon}}$ 的取值属于 $\mathfrak{k}$，这等价于说 $\mathrm{trace}(\mu_{\underline{\varepsilon}}) = 0$。因此，令 $\mathfrak{k}_0 \subset \mathfrak{k}$ 表示 $\bigoplus_{i=1}^{\ell} i\mathbb{R} \cdot \mathrm{Id}_{\mathcal{G}_i}$ 中迹为零的元素所成的集合，我们将考虑 K_0 作用下的矩映射族 $\mu_{\underline{\varepsilon}}:\ B \to \mathfrak{k}_0$，并且可以且将假设 b 的稳定子是平凡的。利用内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\underline{\varepsilon}}$ 识别 $\mathfrak{k}_0 \simeq \mathfrak{k}_0^*$，可将映射 $\mu_{\underline{\varepsilon}}$ 视为取值于 $\mathfrak{k}_0^*$：

$$\mu_{\underline{\varepsilon}}^* : B \to \mathfrak{k}_0^*.$$

存在 V 在阿贝尔 K 作用下的权分解

$$V := \bigoplus_{m \in M} V_m \tag{4.1}$$

对于 $M \subset \mathfrak{k}_0^*$ K_0 的特征格。在由 $\mathrm{Gr}(E) = \bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathcal{G}_i$ 诱导的 $V = H^{0,1}(X, \mathrm{End}(\mathrm{Gr}(E)))$ 的矩阵块分解中，使用乘积厄米度量 h_0，我们有

$$V = \bigoplus_{1 \le i,j \le \ell} H^{0,1}(X, \mathcal{G}_i^* \otimes \mathcal{G}_j).$$

$g = (g_1, \ldots, g_\ell) \in K_0 \simeq (\mathbb{C}^*)^\ell$ 在 $\gamma_{ij} \in V_{ij} := H^{0,\ 1}(X, \mathcal{G}_i^* \otimes \mathcal{G}_j)$上的作用为：

$$g \cdot \gamma_{ij} = g_i g_j^{-1} \gamma_{ij}. \tag{4.2}$$

因此，在权空间分解（4.1）中，V_{ij} 是权为.....的特征空间

$$m_{ij} := (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, -1, 0, \ldots, 0) \tag{4.3}$$

其中 $+1$ 位于第 i 个位置， -1 位于第 j 个位置。若相应地将 b 分解为

$$b = \sum_{ij} b_{ij}, \tag{4.4}$$

其中 $b_{ij} \in V_{ij}$ 非零，因为 $\overline{\partial}_E = \overline{\partial}_0 + \gamma$ 具有 γ 上三角形式，或者等价地，由于 E 是由稳定分量 $\mathcal{G}_i$'s 逐次扩张得到的，只有满足 i, j 的指标（ $i < j$ 才会出现在（4.4）中。从现在起，我们将把讨论限制在

$$B \cap \bigoplus_{b_{ij} \neq 0} V_{ij},$$

我们仍将其记为 B。也就是说，我们只考虑出现在 b 分解中的权空间。类似地，我们用记号 V 表示 $\bigoplus_{b_{ij} \neq 0} V_{ij}$。

综上，我们处于以下情形：

(R_1) 紧环面 K_0 在复向量空间 V 上有效且全纯地作用；**(R_2)** 在原点附近的 $B \subset V$ 上存在一族连续的辛形式 $(\Omega_{\underline{\varepsilon}})_{\underline{\varepsilon} \in U}$ ，相对于这些辛形式， K_0 作用是哈密顿的；**(R_3)** 点 $b \in B$ 的稳定子群平凡，**0** 属于其 $K_0^{\mathbb{C}}$ 的轨道闭包，并且对于出现在 V 的权空间分解中的所有权 $m_{ij} \in M$ ， $b_{ij} \neq 0$。**(R_4)** 辛形式 Ω_0 在 b 的 $K_0^{\mathbb{C}}$ 轨道上的限制是非退化的。

最后一点可由命题的证明得出3.5。我们设

$$\overline{\mathcal{Z}} := B \cap (\overline{K_0^{\mathbb{C}} \cdot b}).$$

我们还引入了

$$\sigma := \sum_{b_{ij} \neq 0} \mathbb{R}_+ \cdot m_{ij} \subset \mathfrak{k}_0^*$$

其中 $\{m_{ij},\, b_{ij} \neq 0\}$ 是出现在 $b \in V$ 的分解中的权集，并且对于 $\eta > 0$

$$\sigma_\eta := \sum_{b_{ij} \neq 0} [0, \eta) \cdot m_{ij} \subset \mathfrak{k}_0^*.$$

注意，根据 Atiyah 和 Guillemin–Sternberg 凸性定理的局部版本，存在 $\eta > 0$ 使得 $\mu^*_{\underline{\varepsilon}}(0) + \sigma_\eta \subset \mu^*_{\underline{\varepsilon}}(B)$ 对所有 $\underline{\varepsilon}$ 充分小的值都成立（参见等变 Darboux 定理 [8, 定理 3。2] 结合线性哈密顿环面作用的局部描述 [8, 第 7 节。1]）。根据 [18, 命题 4。6], 上面列出的性质（R_1） $-(R_4)$ 实际上蕴含：

命题4.1。将 $U \times B$ 缩小后，存在 $\eta > 0$，使得对所有 $\underline{\varepsilon} \in U$,

$$\mu^*_{\underline{\varepsilon}}(0) + \mathrm{Int}(\sigma_\eta) \subset \mu^*_{\underline{\varepsilon}}(\mathcal{Z})$$

and

$$\mu^*_{\underline{\varepsilon}}(0) + \sigma_\eta \subset \mu^*_{\underline{\varepsilon}}(\overline{\mathcal{Z}}).$$

注释 4.2。 $\mu^*_{\underline{\varepsilon}}$ 下的 $K_0^{\mathbb{C}}$ 轨道 b 的像包含 $\mu^*_{\underline{\varepsilon}}(0) + \sigma_\eta$ 的内部这一事实，并未在 [18], 中明确陈述，但可由 [18, 命题 4.6]证明开头的讨论推出。

4.2. 求 $\mu_{\underline{\varepsilon}}$ 的零点，当$[\omega_{\underline{\varepsilon}}] \in \mathcal{S}_{s,R_0}$。现在我们假设$[\omega_{\underline{\varepsilon}}] \in \mathcal{S}_{s,R_0}$。注意，根据$\mathcal{S}_{s,R}$的定义，这等价于对于任意$\mathcal{F} \in \mathfrak{E}_{[\omega]}$,

$$\mu_{L_{\underline{\varepsilon}}}(\mathcal{F}) < \mu_{L_{\underline{\varepsilon}}}(E),$$

这里我们回顾 $L_{\underline{\varepsilon}} = [\omega_{\underline{\varepsilon}}]$。由命题4.1，要在 $\mathcal{Z}$ 中找到 $\mu_{\underline{\varepsilon}}$ 的零点，只需证明 $-\mu^*_{\underline{\varepsilon}}(0) \in \mathrm{Int}(\sigma_\eta)$，这可归结为 $-\mu^*_{\underline{\varepsilon}}(0) \in \mathrm{Int}(\sigma)$，其中 $\underline{\varepsilon}$ 充分小。仿照 [18, 引理 4.8]，σ 及其对偶

$$\sigma^\vee := \{v \in \mathfrak{t}_0 \mid \langle m, v\rangle \geq 0 \ \forall m \in \sigma\}$$

是维数为 $\ell - 1$ 的强凸有理多面锥。注意，此处的配对 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是自然的对偶配对。由对偶性，$\sigma = (\sigma^\vee)^\vee$，因此剩下的条件是

$$-\mu^*_{\underline{\varepsilon}}(0) \in \mathrm{Int}((\sigma^\vee)^\vee).$$

锥 $\sigma^\vee$ 可写为

$$\sigma^\vee = \sum_{\underline{a} \in \mathcal{A}} \mathbb{R}_+ \cdot v_{\underline{a}}$$

对于一组有限生成元 $\{v_{\underline{a}}\}_{\underline{a}\in\mathcal{A}} \subset \mathfrak{t}_0$。因此，我们现在的目标是证明，对所有 $\underline{a} \in \mathcal{A}$，$\langle \mu^*_{\underline{\varepsilon}}(0)\ v_{\underline{a}}\rangle < 0$；根据构造，这等价于

$$\langle \mu_{\underline{\varepsilon}}(0), v_{\underline{a}}\rangle_{\underline{\varepsilon}} < 0, \tag{4.5}$$

在假设对任意 $\mathcal{F} \in \mathfrak{E}_{[\omega]}$,

$$\mu_{L_{\underline{\varepsilon}}}(\mathcal{F}) < \mu_{L_{\underline{\varepsilon}}}(E). \tag{4.6}$$

接下来我们将更详细地研究方程（4.5）和（4.6）。为简化记号，下文假设 $\mathrm{Gr}(E)$ 的所有稳定分量的秩均为一，因此 $\mathrm{trace}(\mathrm{Id}_{\mathcal{G}_i}) = 1$ 对于 $1 \leq i \leq \ell$成立。一般情形很容易推广，留给读者完成。

4.2.1. 条件（4.5）：对偶锥的生成元。这里我们将给出 $\{v_{\underline{a}}\}_{\underline{a}\in\mathcal{A}}$ 的生成元 $\sigma^\vee$的更精确形式。回顾[9, 第 1 节2] 中寻找这类生成元的方法：由于 σ 是 $\ell - 1$维的，其每个面由其生成元中的 $\ell - 2$ 个元素生成（m_{ij}）。于是，生成元 $v_{\underline{a}}$对于$\sigma^\vee$ 将是该面的一个“指向内侧的法向量”。因此，若

$$v_{\underline{a}} = \sum_{i=1}^{\ell} a_i \,\mathrm{Id}_{\mathcal{G}_i}$$

是 $\sigma^\vee$的一个生成元，存在一组 $\mathcal{S}:= \{m_{ij}\}$ $\ell - 2$ 的生成元 σ，使得

$$\forall\, m_{ij} \in \mathcal{S},\ \langle m_{ij}, v_{\underline{a}}\rangle = 0.$$

此外，$v_{\underline{a}} \in \mathfrak{t}_0$ 应当是无迹的；由于我们在此假设所有稳定分量的秩$(\mathcal{G}_i) = 1$，因此可得

$$\sum_{i=1}^{\ell} a_i = 0.$$

引理 4.3. 除了缩放 $v_{\underline{a}}$之外，存在一个划分 $\{1, \dots, \ell\} = I^- \cup I^+$，使得对于所有 $i \in I^-$、$a_i = -\frac{1}{\sharp I^-}$ 以及所有 $i \in I^+$、$a_i = \frac{1}{\sharp I^+}$，其中 $\sharp$ 表示集合的基数。

证明。关键在于注意到，如果 m_{ij}、$m_{jk} \in \mathcal{S}^2$，那么 $m_{ik} \notin \mathcal{S}$。事实上，根据（4.3），$m_{ij} + m_{jk} = m_{ik}$，而它们正是该锥的生成元。等价地，如果 m_{ij}、$m_{ik} \in \mathcal{S}^2$，那么 $m_{jk} \notin \mathcal{S}$。接着，我们为 $v_{\underline{a}}$赋予一个有向图 $G_{\underline{a}}$。顶点标记为 a_1 至 a_ℓ；当且仅当 $a_i = a_j$且 $i < j$时，我们从 a_i 向 a_j 画一条有向边。对于每个 $m_{ij} \in \mathcal{S}$，$\langle m_{ij}, v_{\underline{a}} \rangle = 0$ 给出 $a_i = a_j$。因此，$G_{\underline{a}}$至少有$\ell - 2$ 条边。要证明该结论，只需证明 $G_{\underline{a}}$ 有 2 个连通分支。事实上，此时我们可以设 $I^- = \{i \,|\, a_i < 0\}$ 和 $I^+ = \{i \,|\, a_i > 0\}$。对于 $i \in I^-$ 的所有元素 a_i，它们都对应于同一个连通分支，因而彼此相等；$i \in I^+$的情形类似。由于 $\sum_{i=1}^{\ell} a_i = 0$，通过重新缩放即可得到结论。

证明 $G_{\underline{a}}$ 有两个连通分支是显而易见的。它有 ℓ 个顶点和 $\ell - 2$ 条有向边，并且满足如下规则：如果存在一条从 a_i 到 a_j 的边，以及一条从 a_i 到 a_k的边，那么就不存在从 a_j 到 a_k的边。我们考察从 a_1出发的边的数量。如果这样的边有 $\ell - 2$ 条，那么 a_1 所在的连通分支至少有 $\ell - 1$ 个顶点，因此另一个分支至多只剩下一个孤立顶点。由于 $v_{\underline{a}}$ 是无迹的，因此至少有两个连通分支，这种情况下结论成立。接下来，如果从 a_1出发的边有 $\ell - 2 - k$条，那么它所在的连通分支至少有 $\ell - 1 - k$ 个元素，因此其他分支总共至多剩下 $k + 1$ 个顶点和 k 条边。不过很容易通过对 k归纳证明，上述规则意味着，对于有 $k + 1$ 个顶点和 k 条边的这种图，至多只有一个连通分支，因此结论成立。□

现在我们可以将条件（4.5）改写。根据引理 4.3，它等价于

$$\frac{\sum_{i \in I^+} \langle \mu_{\underline{\varepsilon}}(0), \mathrm{Id}_{\mathcal{G}_i} \rangle_{\underline{\varepsilon}}}{\sharp I^+} < \frac{\sum_{i \in I^-} \langle \mu_{\underline{\varepsilon}}(0), \mathrm{Id}_{\mathcal{G}_i} \rangle_{\underline{\varepsilon}}}{\sharp I^-}. \tag{4.7}$$

4.2.2. 条件（4.6）：单参数退化。我们将为每个生成元 $v_{\underline{a}}$ 对应 $\sigma^\vee$ 的一个子层 $\mathcal{F} \in \mathfrak{E}_{[\omega]}$。从几何上看，其思路是，$v_{\underline{a}} \in \mathfrak{k}_0$生成 K_0 的一个单参数子群，以及从 E 到 $\mathcal{F} \oplus E/\mathcal{F}$的一个退化，并为其赋予希尔伯特–穆姆福德权 $\mu_{L_{\underline{\varepsilon}}}(\mathcal{F}) - \mu_{L_{\underline{\varepsilon}}}(E) < 0$。令$v_{\underline{a}} = \sum_{i=1}^{\ell} a_i \mathrm{Id}_{\mathcal{G}_i} \in \sigma^\vee$ 为上述生成元，并定义

$$\mathcal{F}_{\underline{a}} = \bigoplus_{i \in I^+} \mathcal{G}_i,$$

作为一个光滑复向量丛，并将证明 $\overline{\partial}_E(\mathcal{F}_{\underline{a}}) \subset \Omega^{0,1}(X, \mathcal{F}_{\underline{a}})$。这意味着 $\mathcal{F}_{\underline{a}} \in \mathfrak{E}_{[\omega]}$ 是一个全纯向量丛，其多洛波算子为 $\overline{\partial}_E$的限制。回忆一下，$\overline{\partial}_E = \overline{\partial}_0 + \gamma = \overline{\partial}_0 + \sum_{b_{ij} \neq 0} \gamma_{ij}$，也就是说，由于选择了$b$，$\gamma$ 的权分解中出现的权与 b的分解中出现的权相同。在 $\bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathcal{G}_i$给出的矩阵分块分解中，算子 $\overline{\partial}_0$ 是对角的，因此将 $\mathcal{F}_{\underline{a}}$ 映到 $\Omega^{0,1}(X, \mathcal{F}_{\underline{a}})$。我们需要证明，对每个 $j \in I^+$，$\gamma(\mathcal{G}_j) \subset \Omega^{0,1}(X, \mathcal{F}_{\underline{a}})$。由于 $v_{\underline{a}} \in \sigma^\vee$，它对 σ 的任意生成元 m_{ij} 均满足：

$$\langle m_{ij}, v_{\underline{a}} \rangle \geq 0,$$

也就是说，对于所有满足 $i < j$ 和 $b_{ij} \neq 0$ 的 (i, j)，

$$a_i - a_j \geq 0.$$

由 $j \in I^+$可知，这意味着 $a_i \geq a_j > 0$。因此，如果 $i < j$ 使得 $b_{ij} \neq 0$，那么$i \in I^+$。等价地，对于 $i < j$，$i \in I^-$ 意味着 $\gamma_{ij} = 0$，从而我们看到$\gamma(\mathcal{G}_j) \subset \Omega^{0,1}(X, \mathcal{F}_{\underline{a}})$，因此 $\overline{\partial}_E(\mathcal{F}_{\underline{a}}) \subset \Omega^{0,1}(X, \mathcal{F}_{\underline{a}})$。

于是有 $\mathcal{F}_{\underline{a}} \in \mathfrak{E}_{[\omega]}$ 且条件（4.6）给出

$$\mu_{L_{\underline{\varepsilon}}}(\mathcal{F}_{\underline{a}}) < \mu_{L_{\underline{\varepsilon}}}(E),$$

根据斜率的跷跷板性质（例如参见 [19, 推论 3。5] ），这等价于

$$\mu_{L_{\underline{\varepsilon}}}(\mathcal{F}_{\underline{a}}) < \mu_{L_{\underline{\varepsilon}}}(E/\mathcal{F}_{\underline{a}})$$

因此（回忆一下，我们假设秩$(\mathcal{G}_i) = 1$）：

$$\frac{\sum_{i\in I^+} \mu_{L_{\underline{\varepsilon}}}(\mathcal{G}_i)}{\sharp I^+} < \frac{\sum_{i\in I^-} \mu_{L_{\underline{\varepsilon}}}(\mathcal{G}_i)}{\sharp I^-}. \tag{4.8}$$

4.3.结论。 根据陈–韦伊理论，利用 A_0 以及 $A_{\varepsilon,\,0}$ 根据命题 3.2的第（2）点规范等价，我们有

$$\begin{aligned} \mu_{L_{\underline{\varepsilon}}}(\mathcal{G}_i) &= c_1(\mathcal{G}_i)\cdot[\omega_{\underline{\varepsilon}}]^{n-1} \\ &= \frac{1}{2\pi}\langle \mu_{\underline{\varepsilon}}(0), \mathrm{Id}_{\mathcal{G}_i}\rangle_{\underline{\varepsilon}} + \frac{c_{\underline{\varepsilon}}}{2\pi}\langle \mathrm{Id}_E, \mathrm{Id}_{\mathcal{G}_i}\rangle_{\underline{\varepsilon}}. \end{aligned}$$

我们对于所有的 i 也有，

$$\langle \mathrm{Id}_E, \mathrm{Id}_{\mathcal{G}_i}\rangle_{\underline{\varepsilon}} = \frac{[\omega_{\underline{\varepsilon}}]^n}{n!}.$$

不等式(4.8) 蕴含不等式 (4.7)，由此得出存在 $b_{\underline{\varepsilon}} \in \mathcal{Z}$，使得 $\mu_{\underline{\varepsilon}}(b_{\underline{\varepsilon}}) = 0$。随后，根据构造，相关联络 $A_{\underline{\varepsilon},b_{\underline{\varepsilon}}}$ pro-vide 关于 $\omega_{\underline{\varepsilon}}$ 的HYM联络，其所在丛与 E 规范等价，其中规范等价由有限维李群 Aut(Gr(E)) 中的元素给出。为证明定理 1.2 中所述的联络的收敛性质，考虑 $t \mapsto [\omega_t]$ 在 $\mathcal{S}_{s,R}$的一个连通分支中的路径，当 $t \mapsto 0$ 时收敛到 $[\omega]$。这对应于路径 $t \mapsto \underline{\varepsilon}(t) \in U$。因此，只需证明联络$A_{\underline{\varepsilon}(t),b_{\underline{\varepsilon}(t)}}$ 在任意 L^2, ^{l} 索博列夫范数下收敛到 $A_0 = A_{0,0}$。根据命题 3.2中 $A_{\underline{\varepsilon},b}$ 的构造，只需证明当$\underline{\varepsilon}(t) \to 0$ 时， $b_{\underline{\varepsilon}(t)}$ 收敛到0。回顾定理3.2和第7节.1] ， B 可以选取为使得 $\mu^*_{\underline{\varepsilon}}$ 由下式给出

$$\mu^*_{\underline{\varepsilon}}(b') = \mu^*_{\underline{\varepsilon}}(0) + \sum_{ij} ||b'_{ij}||^2_{\underline{\varepsilon}} \cdot m_{ij}, \tag{4.9}$$

对于某个依赖于 $\underline{\varepsilon}$ 且连续变化的范数 $||\cdot||_{\underline{\varepsilon}}$。由于 $\mu_{\underline{\varepsilon}}(0) \overset{\to}{\underline{\varepsilon}\to 0} \mu_0(0) = 0$，方程 $\mu^*_{\underline{\varepsilon}}(b_{\underline{\varepsilon}}) = 0$ 意味着，对所有 (i,j)，都有 $||(b_{\underline{\varepsilon}})_{ij}||_{\underline{\varepsilon}} \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0$。由于这些范数$||\cdot||_{\underline{\varepsilon}}$ 连续变化，它们彼此有界，因此 $b_{\underline{\varepsilon}(t)} \underset{t\to 0}{\to} 0$，这就完成了定理 1.2 中收敛性质的证明。剩下的就是半稳定情形。我们需要证明，如果 $[\omega_{\underline{\varepsilon}}] \in \mathcal{S}_{ss,R}$, E 对于$[\omega_{\underline{\varepsilon}}]$是半稳定的。唯一尚待研究的情形是：对所有 $\mathcal{F} \in \mathfrak{E}_{[\omega]}$，都有 $\mu_{L_{\underline{\varepsilon}}}(\mathcal{F}) \le \mu_{L_{\underline{\varepsilon}}}(E)$，且至少有一个等号成立。在这种情况下，前两节的讨论表明， $-\mu_{\underline{\varepsilon}}(0) \in \sigma$ 将位于 σ的边界上。因此，由命题4.1可知， b 的轨道闭包中存在一个边界点 $b' \in \overline{\mathcal{Z}}$，满足 $\mu_{\underline{\varepsilon}}(b') = 0$。该点对应于一个向量丛上的 HYM联络；相对于由 $A^0_{,\underline{\varepsilon}}{}^1_{b'}$, , 给出的全纯结构，该向量丛是多稳定的，并且是相对于 $L_{\underline{\varepsilon}}$而言的。由于这个向量丛对应于 b复轨道中的一个边界点，它可以通过小的复变形变为 E。由于半稳定性是一个开条件，我们可以推得 E 本身对于 $L_{\underline{\varepsilon}}$ 是半稳定的。

注 4.4. 对前述论证稍作调整即可得到以下结果。假设 $t \mapsto [\omega_{\underline{\varepsilon}(t)}]$ 是$\mathcal{S}_{s,R}$ 某个连通分支中的一条路径，并且收敛到$[\omega_{\underline{\varepsilon}(0)}] \in \mathcal{S}_{ss,R}$。那么，我们可以找到一个滤过

$$0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_l = E$$

由子丛 $\mathcal{F} \in \mathfrak{E}_{[\omega]}$构成的 E，使得对于 $i \in \{1, \ldots, l\}$,

$$\mu_{L_{\underline{\varepsilon}(0)}}(\mathcal{F}_i) = \mu_{L_{\underline{\varepsilon}(0)}}(E) \tag{4.10}$$

且秩$(\mathcal{F}_{i-1})$ 在满足以下条件的元素 $\mathcal{F} \in \mathfrak{E}_{[\omega]}$ 的秩中最大（4.10）以及 $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_i$。于是我们定义

$$\mathcal{G} := \bigoplus_{i=1}^{l} \mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1}.$$

于是，存在一条路径 $(A_t)_{t\in(0,1]}$ ，其上是关于 K¨ahler度量 $(\omega_{\underline{\varepsilon}(t)})_{t\in(0,1]}$ 的一族 HYM联络，满足 $\lim_{t\to 0} A_t = A_0$ 是 $\mathcal{G} \to (X, [\omega_{\underline{\varepsilon}(0)}])$ 上的 HYM联络，也就是说，A_0 的全纯联络等价于 $\mathcal{G}$ 上的全纯联络。

References

[1] M.F.Atiyah 和R.Bott。黎曼曲面上的杨–米尔斯方程。 *Philos. Trans.*，（）：–。 *Roy. Soc. London Ser. A* 308 1505 523 615, 1983 2, 7

[2] NicholasBuchdahl和Georg Schumacher。多稳定丛及其自同构的表示。 *Complex Manifolds* 9 1 78 113, 2022 2, 3, 6，（）：–。Ruadhaı Dervan、John BenjaminMcCarthy 和 Lars Martin Sektnan。Z-临界联络与 Bridgeland 稳定性条件。ArXiv预印本arXiv:2012.10426，2020。1，3，6[4] A.-K. Doan。全纯向量丛局部模空间上的群作用。ArXiv预印本 arXiv:2201.10851，2022。6，8[5] S.K.Donaldson。复代数曲面上的反自对偶杨–米尔斯联络与稳定向量丛。 *Proc. London Math. Soc. (3)*, 50 1 1 26, 1985 2, 7

[6] （）：–。S. K.Donaldson，无穷行列式、稳定丛与曲率。 *Duke Math. J.*，54 1231 247，1987（）：–。

[7] ¨Simon K.Donaldson。环面流形上的Kähler几何，以及一些具有大对称性的其他流形。在 *Handbook of geometric analysis. No. 1* 7 *Adv. Lect. Math.*，卷，页–。Int. Press，Somerville，*(ALM)* 29 75 2008 2, 6 MA，。[8] Shubham Dwivedi、Jonathan Herman、LisaC. Jeffrey 和 Theo van den Hurk。*group actions and equivariant cohomology* *Hamiltonian* 。《数学中的 SpringerBriefs》。Springer，Cham，2019。10，13[9] William Fulton。 *Introduction to toric varieties* 131 *Annals of Mathematics Studies*，卷。Princeton University Press，Princeton，NJ，。《William H.Roever 几何学讲座》。[10] 1993 11 DanielGreb、Julius Ross 和MateiToma。高维基流形上的向量丛模空间——构造与变化。 *Int. J. Math.*, 27 7 27, 2016 1650054 1 （）：。编号/序号。

[11] DanielGreb 和 MateiToma。斜率半稳定层的紧致模空间。 *Algebr.*，（）：–。 *Geom.* 4 1 40 78, 2017 2, 3

[12] Daniel Huybrechts 和 Manfred Lehn。 *The geometry of moduli spaces of sheaves*。《剑桥数学文库》。CambridgeUniversity Press，Cambridge，第二版，2010 2, 3, 5。ShoshichiKobayashi。向量丛的曲率与稳定性。 *Proc. Japan Acad. Ser. A*，（）：– *Math. Sci.* 58 4 158 162, 1982 1, 5。Shoshichi Kobayashi。 *Differential geometry of complex vector bundles*。《普林斯顿遗产文库》。PrincetonUniversity Press，Princeton，NJ，[2014]。1987年版本的重印本 [MR 0909698] 3。M. Kuranishi。在 *Proc. Conf. Complex Analysis (Minneapolis, 1964)*，页142–154。Springer，Berlin，1965。6，8

[13] [14] [15]

[16] Martin L¨ubke.爱因斯坦-厄米向量丛的稳定性。 *Manuscripta Math.*，42(2-3 245 257, 1983 1, 5)：–。DavidMumford。射影结构的射影不变量及其应用。载于[17] *Proc.*，第–*Internat. Congr. Mathematicians (Stockholm, 1962)* 526 530 页。米塔-莱夫勒研究所，于尔斯霍尔姆，1963年。1，5[18] Lars MartinSektnan 和Carl Tipler。解析 K-半稳定性和墙穿越。ArXiv预印本 arXiv: 2212 08383 2, 3, 6, 9, 10, 11 。。[19] LarsMartinSektnan 和 Carl Tipler。拉回丛上的厄米-杨-米尔斯联络。ArXiv预印本 arXiv:2006.06453，2020年。2，3，13[20] G´abor Sz´ekelyhidi。K¨ähler-Ricci 流和 K-多稳定性。 *Amer. J. Math.*，132(4)：1077–1090，2010年。2，3，6[21] Fumio Takemoto。代数曲面上的稳定向量丛。 *Nagoya Math. J.*，47 48，1972 29：–。[22] K.Uhlenbeck 和S.-T. Yau。关于稳定向量丛中厄米-杨-米尔斯联络的存在性。第39卷，第S257–S293页。1986年。数学科学前沿：1985（纽约，1985年）。1，5

Andrew Clarke, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Av. Athos da Silveira Ramos 149, Rio de Janeiro, RJ, 21941-909, Brazil*Email address*: andrew@im.ufrj.br

Carl Tipler, Univ Brest, UMR CNRS 6205, Laboratoire de Mathématiques de Bretagne Atlantique, France*Email address*: Carl.Tipler@univ-brest.fr