arXiv:2304.05247v1 [math.AP] 11 Apr 2023

¨Strichartz估计：负曲率紧流形上的薛定谔方程

MATTHEW D. BLAIR、XIAOQI HUANG 和 CHRISTOPHER D. SOGGE

Abstract. 我们为负曲率紧流形上的 Schr¨odinger 方程解推导出了改进的 Strichartz 估计，在这种几何结构下优于 Burq、G´erard 和 Tzvetkov [11] 的经典普适结果。在空间流形为双曲曲面的情况下，我们能够为频率与 λ可比的初始数据，在长度为 $\log \lambda \cdot \lambda^{-1}$ 的区间上得到无损$L^{q_c}_t,_x$估计。鉴于 Ehrenfest 时间的作用，这是 [11]中普适结果的自然类比。我们还为非正曲率流形得到了改进的端点 Strichartz 估计，而这类估计在球面上并不成立。

1. **引言**。

自 Burq、G´erard 和 Tzvetkov [11]为紧流形上的 Schr¨odinger 方程得出如今已成为经典的普适 Strichartz估计以来，近二十年过去了。除 Bourgain 和 Demeter [10], 在一般环面上得到的近乎无损估计这一显著例外，以及 Deng、Ger- main 和 Guth [13]以及 Deng、Germain、Guth 和 Meyerson [14], 在这一设定下近期开展的相关工作外，据我们所知，在其他几何情形下， [11], 中的结果并未得到显著改进。

本文旨在在 [11]负曲率假设下改进普适界，并且更一般地，在非正曲率情形下也进行改进。

现在我们来回顾 Burq、G´erard 和 Tzvetkov [11] 的通用估计。若 (M^d, g) 是一个维数为 $d \geq 2$ 的紧黎曼流形，那么 [11] 中的主要估计是：若 Δ_g 是相应的拉普拉斯-贝尔特拉米算子，且

$$u(x,t) = \big(e^{-it\Delta_g} f\big)(x) \tag{1.1}$$

是 $M^d \times \mathbb{R}$ 上 Schr¨odinger 方程的解,

$$i\partial_t u(x,t) = \Delta_g u(x,t), \quad u(x,0) = f(x), \tag{1.2}$$

则有混合范数Strichartz估计

$$\|u\|_{L^p_t L^q_x(M^d\times[0,1])} \lesssim \|f\|_{H^{1/p}(M^d)} \tag{1.3}$$

对于所有可容许的 对 (p, q)。我们所说的后者，正如 Keel 和 Tao [21], 中所指

$$d(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{q}) = \tfrac{2}{p} \text{ and } 2 < q \leq \tfrac{2d}{d-2} \text{ if } d \geq 3, \text{ or } 2 < q < \infty \text{ if } d = 2. \tag{1.4}$$

此外，在 (1.3) 中， H^μ 表示标准索伯列夫空间

$$\|f\|_{H^\mu(M^d)} = \big\| (I+P)^\mu f \big\|_{L^2(M^d)}, \quad \text{with } P = \sqrt{-\Delta_g}, \tag{1.5}$$

2010 *Mathematics Subject Classification.* 58J50, 35P15.*Key words and phrases.* 薛定谔方程、曲率、薛定谔曲线。第二作者的部分经费来自 AMS-Simons 差旅资助。第三作者的部分经费来自美国国家科学基金会（DMS-1665373）。

而在 (1.3) 中以及下文中，“$\lesssim$”表示一个带有隐含但未明确说明的常数 C 的不等式，该常数在每次出现时都可能不同。

注意，若 e_λ 是 P 的一个特征函数，其特征值为 λ，即

$$-\Delta_g e_\lambda = \lambda^2 e_\lambda, \tag{1.6}$$

then

$$u(x,t) = e^{it\lambda^2} e_\lambda(x) \tag{1.7}$$

满足以 $f = e_\lambda$为初始数据的方程 (1.2)。由此可立即看出，与 Strichartz 最初研究的欧几里得情形不同 [34]，，我们无法获得任何形式的全局类比 (1.3)，即将其中的 $[0,1]$ 替换为 R。另一方面， [11] 中的 (1.3) 的证明表明，可以将 $[0,1]$ 替换为更大的区间 I，代价是在 (1.3) 右侧的隐式常数中增加因子 $|I|^{1/p}$ 。此外，在某些情况下，涉及特征函数的特殊解 (1.7) 会使 (1.3) 达到饱和。具体而言，对于端点 Strichartz 估计，其中 $p = 2$ 且 $q = \frac{2d}{d-2}$，并且 $d \geq 3$，满足 $e_\lambda = Z_\lambda$ 的解是在 S^d 上、特征值为 $\lambda = (k(k + \frac{n-1}{2}))^{1/2}$的带状特征函数$k = 1$，2，.....，它们使 (1.3) 达到饱和，因为 (1.3) 如

$$\|Z_\lambda\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(S^d)} / \|Z_\lambda\|_{L^2(S^d)} \approx \lambda^{1/2} \tag{1.8}$$

（例如，参见 [26]）。下文将进一步讨论由特征函数产生的解。

为了与此前涉及特征函数和谱投影估计以及抛物型傅里叶限制问题的相关结果中的数值关系保持一致，下文中我们始终取 $d = n-1$。因此，我们关注 $M^{n-1} \times [0,1]$ 这一 n 维空间上薛定谔方程 (1.2) 的解的估计。正如前面所提到的，这里我们着重研究当 M^{n-1} 具有非正曲率时，对 [11] 的普适界 (1.3) 的改进。我们取 $d = n-1 \geq 2$，因为 $d = 1$ 的情形归结为底空间流形为圆 S^1 的情况，而 Bourgain [9] 已在该情形下得到了最优结果。下文（与 [9] 和 [10] 中一样）我们主要关注 (1.4) 中唯一的可容许对 (p, q)，其中 $p = q$，即

$$q = q_c = \tfrac{2(n+1)}{n-1}. \tag{1.9}$$

我们的一个主要结果是，在曲率假设下，我们在 [11] 中得到了普适界的对数改进。

定理 1.1。设 M^{n-1} 是一个 $d = n-1 \geq 2$ 维紧流形，且其所有截面曲率均非正。则

$$\|u\|_{L^{q_c}(M^{n-1}\times[0,1])} \lesssim \big\| (I+P)^{1/q_c} \left(\log(2I+P)\right)^{-\frac{n-1}{(n+1)^2}} f \big\|_{L^2(M^{n-1})}. \tag{1.10}$$

为证明这一估计，我们将采用与 [11], 中相似的策略，现回顾如下。首先注意到，根据 Littlewood-Paley 理论，我们可以将问题归结为证明某些二进估计。

为此，取一个 Littlewood-Paley 鼓包函数 β，使其满足

$$\beta \in C_0^\infty((1/2,2)) \quad \text{and} \quad 1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta(2^{-k}s), \ s > 0. \tag{1.11}$$

那么，若我们令 $\beta_0(s) = 1 - \sum_{k=1}^\infty \beta(2^{-k}s) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ 和 $\beta_k(s) = \beta(2^{-k}s)$，$k = 1, 2, \dots$，则有（例如参见 [29]）

$$\|h\|_{L^q(M^{n-1})} \approx \big\| \big(\sum_{k=0}^{\infty} |\beta_k(P)h|^2 \big)^{1/2} \big\|_{L^q(M^{n-1})}, \ 1 < q < \infty. \tag{1.12}$$

显然， $\|\beta_0(P)e^{-it\Delta_g}\|_{L^2(M^{n-1})\to L^q(M^{n-1}\times[0,1])} = O(1)$，同样地，将$k = 0$ 替换为一个小的固定 $k \in \mathbb{N}$的此类结果也是标准结论。因此，正如 [11], 中所指出的，可以使用(1.12)和闵可夫斯基不等式看出，(1.3)中$p = q = q_c$ 的特殊情形可由一致界推出

$$\|e^{-it\Delta_g}\beta(P/\lambda)f\|_{L^{q_c}(M^{n-1}\times[0,1])} \le C\lambda^{\frac{1}{q_c}}\|f\|_{L^2(M^{n-1})}, \quad \lambda \gg 1. \tag{1.3′}$$

Burq、G´erard和Tzvetkov 在 [11] 中证明了这一估计，他们表明在极短区间上始终有以下一致的二进估计：

$$\|e^{-it\Delta_g}\beta(P/\lambda)f\|_{L^{q_c}(M^{n-1}\times[0,\lambda^{-1}])} \le C\|f\|_{L^2(M^{n-1})}, \quad \lambda \gg 1. \tag{1.3″}$$

事实上，由于可以将 $[0,1]$ 写成 $\approx \lambda$个长度为 λ^{-1} 的区间的并，因此对这些子区间分别累加 (1.3″) 给出的统一估计，即可由 (1.3″) 直接推出 (1.3′)。正如 [11], 中所指出的，也可以利用 Staffilani 和 Tataru 的局部平滑估计 [32]，得到 Burq、G´erard 和 Tzvetkov 的普适 Strichartz估计；然而，看来很难通过这种方法获得定理 1.1 中那样的改进。

这里的时间尺度 $|t| \le \lambda^{-1}$ 是自然的，因为(1.3″) 中的二进算子在某种程度上类似于速度为 $c = \lambda$的标准半波算子 e^{itcP}，尽管这是一种略显粗略的简化。更具体地说，可以为处于如此小时间尺度内的二进算子构造参数子，从而能够利用Keel-Tao[21] 定理推出(1.3″)。类似的论证表明，(1.3) 中的其他情形也可由这一时间尺度上的一致二进估计推出。

很容易看出，在任意流形上，(1.3″) 中的界即使时间区间非常小也无法得到改进。例如，如果 $\beta(P/\lambda)(x,y)$ 是 Littlewood–Paley 算子 $\beta(P/\lambda)$ 和 $f(x) = f_\lambda(x) = \beta(P/\lambda)(x,x_0)$ 的核，其中 $x_0 \in M^{n-1}$为任意固定值，那么 (1.3″)中范数之比对于$\lambda \gg 1$而言与一相当。因此，为了获得诸如 (1.10) 中的改进，就必须使用更大的时间区间。

由于我们研究的是非正曲率流形，鉴于预计 Ehrenfest 时间将在分析中发挥作用，考虑长度为$\approx \log\lambda\cdot\lambda^{-1}$的时间区间是自然的。这正是我们将要做的。具体而言，我们将证明，如果 M^{n-1} 如定理 1.1 中所述，那么我们有一致界

$$\|e^{-it\Delta_g}\beta(P/\lambda)f\|_{L^{q_c}(M^{n-1}\times[0,\log\lambda\cdot\lambda^{-1}])} \le C(\log\lambda)^{\frac{2}{(q_c)^2}}\|f\|_{L^2(M^{n-1})}, \quad \lambda \gg 1. \tag{1.10′}$$

由于在 (1.10) 中相较于 (1.3)，$\frac{n-1}{(n+1)^2}$的对数增益仅为 $\frac{1}{q_c}(1-\frac{2}{q_c})$，由上述计数论证可知，由 (1.10′) 可得 (1.10)，因为 $[0,1]$ 可由$\approx \lambda$/个长度为 $\log\lambda\cdot\lambda^{-1}$ 的区间覆盖。此外，通用界 (1.3″) 蕴含了这一不等式的类似形式，其中 $2/(q_c)^2$ 被更大的指数 $1/q_c$ 所取代（因为 $q_c > 2$）；这也是理解 (1.10′) 相较于 (1.3″) 有所改进的另一种方式。

我们还将证明，若通过假设流形具有负曲率来加强上述定理的条件，就能得到更强的结果，其中包括估计式 (1.3″) 在双曲曲面上的自然类比：

定理 1.2。假设 $d = n-1 \ge 2$，且 M^{n-1} 的所有截面曲率均为负。于是，若 $d = n-1 \ge 3$

$$\|u\|_{L^{q_c}(M^{n-1}\times[0,1])} \lesssim \left\|(I+P)^{1/q_c}(\log(2I+P))^{-\frac{1}{(n+1)}}f\right\|_{L^2(M^{n-1})}. \tag{1.13}$$

此外，若 $d = n-1 = 2$，此时 $q_c = 4$，我们有

$$\|e^{-it\Delta_g}\beta(P/\lambda)f\|_{L^4(M^2\times[0,\log\lambda\cdot\lambda^{-1}])} \le C\|f\|_{L^2(M^2)}, \quad \lambda \gg 1, \tag{1.14}$$

and

$$\|u\|_{L^4(M^2\times[0,1])} \lesssim \left\|(I+P)^{1/4}\left(\log(2I+P)\right)^{-1/4} f\right\|_{L^2(M^2)}. \tag{1.14′}$$

由上述讨论可知，（1.14）当然推出（1.14′）。此外，我们指出，（1.14）是 Burq、G´erard 和 Tzvetkov 的一致小时间尺度估计（1.3′′）的自然推广，将其扩展到时间区间；对于我们关注的几何结构，借助现有技术，这些估计或许已是所能获得的最长时间区间，这与 Ehrenfest 时间的作用有关。

我们将看到，与定理 1.1 相比，定理 1.2 中的改进源于波动方程解算子的核具有强得多的色散性质。另一方面，在证明定理 1.2 时，我们必须像一些早期研究那样，权衡严格负曲率流形的指数体积增长。我们通过运用涉及微局部伪微分截断的论证来实现这一点。

通过与 Burq、G´erard 和 Tzvetkov[11]，的端点 Strichartz 估计进行插值，也可以对 (1.4) 中除端点情形（其中 $p = 2$ 和 $d = n - 1 \geq 3$）之外的所有其他指数对 (p, q) 获得对数—幂次改进。尽管这些技巧在重要的端点情形下会失效，我们仍能借鉴我们其中一人的论证 [30]，为这一情形得到以下较温和的改进。

定理 1.3。设 M^d 是一个 $d \geq 3$ 维紧流形，其所有截面曲率均非正。那么

$$\|u\|_{L^2_t L^{\frac{2d}{d-2}}_x (M^d\times[0,1])} \lesssim \left\|(I+P)^{1/2}\left(\log(\log(2I+P))\right)^{-1/2} f\right\|_{L^2(M^d)}. \tag{1.15}$$

我们的混合范数记号与其他一些文献中的写法略有不同，定义如下：

$$\|u\|_{L^p_t L^q_x(M^d\times[0,1])} = \Big(\int_0^1 \|u(\cdot,t)\|^p_{L^q_x(M^d)}\, dt \Big)^{1/p}.$$

在（1.15）及后续公式的范数中，我们选择写作 $M^d \times [0,1]$，而不是 $[0,1] \times M^d$，因为大部分关键的局部分析以及所使用的伪微分截断都涉及空间变量。我们希望这种记号选择不会令读者感到困惑。

一个非常有趣、但也许颇具难度的问题是：能否像在（1.14′）中那样，将（1.15）中的 $(\log(\log(2I+P)))^{1/p}$ 增益替换为 $(\log(2I+P))^{1/p}$ 增益，同时令（1.15）中的 p 取 2，而非（1.14）中的 4？这将为 $(\log\lambda)^{-1/2}$ 特征函数增益的一个重要特殊情形提供一种可能颇具难度的推广

$$\|e_\lambda\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(M^d)} \lesssim \lambda^{1/2}\left(\log\lambda\right)^{-1/2}\|e_\lambda\|_{L^2(M^d)}$$

Hassell 和 Tacy [17]关于非正曲率流形的结果，相较于我们其中一人 [27] 关于 $q > \frac{2(d+1)}{d-1}$ 的普适特征函数估计。

正如我们将要证明的，对于 $d \geq 3$ 维环面，我们可以改进 (1.15) 中的端点估计：在此情形下，用 $P^{\frac{2}{d+2}-\frac{1}{2}+\varepsilon}$ 替换 $(\log(\log(2+P)))^{-1/2}$。这直接源于结合使用 $L^{q_c}_t L^{\ }_x$ Bourgain 和 Demeter 的环面估计 [10] 以及索 об 列夫估计。我们确信应该存在更强的估计；然而，我们尚未发现任何此类结果。这似乎值得进一步研究。Bourgain 和 Demeter [10] 的解耦方法在 $p = q = q_c$ 情形下效果出色，但可能不太适用于端点情形（p, q）=（2, $\frac{2d}{d-2}$）。为了证明一般非正曲率流形上的界 (1.15)，我们不得不采用一种迂回的方法（从而导致

只有对数-对数幂增益，这是因为我们所采用的相关双线性技术在这一端点情形下失效。

定理 1.1 和 1.2 中的估计当然改进了Burq、G´erard和Tzvetkov [11] 在我们此处所关注的几何结构——非正曲率流形——中的统一估计。另一方面，它们弱于Bourgain 和 Demeter [10], 关于环面的（近乎）最优结果，也弱于 Burq、G´erard和Tzvetkov [11]关于球面的非端点斯特里茨估计。 [10] 中的估计是通过解耦得到的，部分利用了这样一个事实：我们将采用的微局部截断函数类型与环面上的Schr¨odinger传播子具有良好的交换性；此外，在环面上，这些截断函数还适用于在比我们能够处理一般非正曲率流形时大得多的时间尺度上进行分析。球面的改进估计则简单地源于拉普拉斯算子的不同特征值所具有的特定算术性质 S^d。

尽管对于 (1.4) 中的非端点指数，我们无法得到与球面情形同样强的估计，但定理 1.3 中的端点 Strichartz 估计优于球面情形的相应估计；根据 (1.8)，Burq、G´erard 和 Tzvetkov [11] 的 $H^{1/2}(S^d)$ 端点估计不可能得到改进。

本文安排如下。下一节将介绍证明上述定理所需的主要论证。证明需要调和分析中的局部双线性论证，并需详细分析局部和整体论证中出现的核。我们将在第 3 节和第 4 节分别进行这些工作。

我们所用的局部调和分析论证依赖于 Lee [23] 的双线性振荡积分估计，是 Tao、Vargas 和 Vega [35] 用于研究傅里叶变换的抛物限制问题的论证的变系数类比；当然，这类问题与薛定谔方程的 Strichartz 估计有关。正如我们将看到的，局部算子的核沿着形如 $s \to (x(\kappa s) - (s - s_0)) \in M^{n-1} \times \mathbb{R}$ 的曲线振荡最为迅速，其中 $x(s) \in M^{n-1}$ 是一条单位速度测地线。我们将这类时空曲线称为具有可变速度 κ 的“薛定谔曲线”，并且可以令其速度与 1 可比。它们是与薛定谔算子 $P = D_t + \Delta_g$ 相关的哈密顿向量场 H_P 的积分曲线。这类曲线自然出现在我们的分析以及相关的既有研究中（参见 [1], [11] 和 [15]）。不过，这里的一个新颖之处或许在于，为了应用 Lee [23], 的双线性振荡积分估计，采用我们所称的这些曲线周围的“薛定谔坐标”非常方便。

这些坐标类似于相对论和黎曼几何中自然出现的费米正规坐标（例如参见 [16], [22] 和 [24]）。在相对论中，对于处于任意时空中的自由落体（测地线）路径上的观察者，人们选择费米正规坐标，使几何结构看起来“平坦”，直至更高阶项。我们将采用的薛定¨谔坐标对于沿着我们所谓的薛定¨谔曲线运动的量子“观察者”也具有类似性质。使用这些“薛定¨谔坐标”是能够将欧几里得调和分析技术 [23] 和 [35] 应用于我们的变系数框架的关键。

为了应用 Lee 的结果，我们还需要对由此产生的局部算子的核进行详细估计。受最后两位作者早期局部准模态分析的启发 [20], ，我们能够构造出这样的局部算子：其核基本上可以利用第一位和最后一位作者的技术计算出来 [7], ；与此同时，这些算子也有助于研究上述定理的证明中必然出现的“全局算子”。为了应用双线性调和分析技术，我们需要将“全局”算子与“局部”算子复合。受最后两位作者此前工作的启发 [20], ，这些算子可以构造得使原始全局算子与其和局部算子复合所得算子之间的差具有较小的范数。此外

除了需要相对复杂地应用调和分析技术之外，我们还需要证明，对 Schr¨odinger 方程 (1.2) 的解算子进行微局部化时，我们的几何假设意味着所得核满足有利的界。利用傅里叶变换，这归结为一个经典论证，其中涉及可追溯至 B´erard [2], 的 Hadamard 初始解；其微局部变体见第一位和第三位作者较近期的工作 [6], ，以及三位作者共同完成的工作 [3] 。

作者感谢 W. Minicozzi 耐心解答了有关费米正规坐标的诸多问题，并向我们推荐了经典参考文献 Manasse and Misner [24]。

2. 主要论证。

我们先证明定理 1.1 和 1.2，它们涉及非端点斯特里茨估计。然后在本节末尾，我们将说明证明定理 1.3 中端点估计所需的修改。证明过程中，我们需要一些双线性估计，以及对论证中出现的核的点态估计；这些内容将在接下来的两节中讨论。

首先，设 β 为 (1.11) 中的 Littlewood-Paley bump 函数，并且还固定

$$\eta \in C_0^\infty((-1,1)) \quad \text{with} \quad \eta(t)=1,\ |t|\le 1/2. \tag{2.1}$$

接下来我们考虑按二进时间局部化的膨胀 Schr¨odinger 算子

$$S_\lambda = \eta(t/T)e^{-it\lambda^{-1}\Delta_g}\beta(P/\lambda), \tag{2.2}$$

a并声称定理 1.1 和 1.2 中的估计是以下结果的推论 .

命题 2.1。设 M^d, $d=n-1\ge 2$ 为一个固定的紧流形，其所有截面曲率均非正。那么我们可以选取 $c_0>0$，使得对于足够大的 $\lambda\gg 1$，有一致界

$$\|S_\lambda f\|_{L^{q_c}(M^{n-1}\times\mathbb{R})} \le C\lambda^{\frac{1}{q_c}} T^{\frac{1}{q_c}\cdot\frac{2}{q_c}} \|f\|_{L^2(M^{n-1})}, \quad \textit{if}\ \ T=c_0\log\lambda. \tag{2.3}$$

此外，若 M^{n-1} 的所有截面曲率均为负，则可选取 $c_0>0$，使得对于所有 $\lambda\gg 1$，都有

$$\|S_\lambda f\|_{L^{q_c}(M^{n-1}\times\mathbb{R})} \le C\lambda^{\frac{1}{q_c}} T^{\frac{4-q_c}{2q_c}} \|f\|_{L^2(M^{n-1})}, \quad \textit{if}\ \ T=c_0\log\lambda. \tag{2.4}$$

我们声称 (2.3) 和 (2.4) 分别蕴含定理 1.1 和 1.2。对于前者，只需改变尺度，便可由 (2.1) 和 (2.3) 得出：当 λ 足够大时，有 (1.10′) 的类似结果，其中左侧的区间 $[0,\log\lambda\cdot\lambda^{-1}]$ 替换为 $[0,\frac{1}{2}c_0\log\lambda\cdot\lambda^{-1}]$；当然，只要在右侧常数中额外加入因子 $(c_0/2)^{-1/q_c}$，这便蕴含 (1.10′)，条件是 $c_0<2$。如前所述，当 λ 足够大时，估计 (1.10′) 与 Littlewood-Paley 理论可推出定理 1.1，从而证实了我们关于 (2.3) 的断言。重复这一论证可知，(2.4) 蕴含：当 λ 足够大时，有

$$\|e^{-it\Delta_g}\beta(P/\lambda)f\|_{L^{q_c}(M^{n-1}\times[0,\log\lambda\cdot\lambda^{-1}])} \le C\,(\log\lambda)^{\frac{4-q_c}{2q_c}} \|f\|_{L^2(M^{n-1})}, \tag{2.4′}$$

这给出了定理 1.2 中的第一个估计，即

$$\tfrac{1}{n+1}=\tfrac{1}{q_c}-\tfrac{4-q_c}{2q_c}, \quad \text{if}\ \ d=n-1\ge 3,$$

以及 (1.14)，因此当 $d=n-1=2$ 时，也有 (1.14′)，因为 $q_c=4$。

为证明命题 2.1，和以往的研究一样，我们将使用双线性技术，将“全局算子” S_λ 与相关的局部算子复合。受

最近两位作者的工作 [20], 启发，我们的“局部”辅助算子将采用以下适用于缩放后的 Schr¨odinger 算子的“准模态”算子 $\lambda D_t + \Delta_g$,

$$\sigma_\lambda = \sigma\big(\lambda^{1/2}|D_t|^{1/2} - P\big)\,\tilde\beta(D_t/\lambda), \tag{2.5}$$

其中

$$\sigma \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \text{ 满足 } \sigma(0) = 1 \text{ 且 } \operatorname{supp}\hat\sigma \subset \delta\cdot[1-\delta_0, 1+\delta_0] = [\delta-\delta_0\delta, \delta+\delta_0\delta], \tag{2.6}$$

其中 $0<\delta$， $\delta_0 < 1/8$ 稍后指定，而且此处也

$$\tilde\beta \in C_0^\infty((1/8,8)) \quad \text{satisfies } \tilde\beta = 1 \text{ on } [1/6, 6]. \tag{2.7}$$

我们希望 (2.6) 中的 δ 小于 (M^{n-1}, g) 的单射半径，并且 δ_0 足够小，以便我们能够验证下一节将要使用的双线性振荡积分估计的假设。

为处理双线性论证，引入初始微局部化会很方便。因此，我们写作

$$I = \sum_{j=1}^{N} B_j(x, D), \tag{2.8}$$

其中，每个 $B_j \in S^0_{1,0}(M^{n-1})$ 都是一个标准的伪微分算子，其符号支撑在某个 $(x_j, \xi_j) \in S^*M$ 的小锥形邻域内。支撑集的大小将在后文说明；不过，这些算子不依赖于参数 $\lambda \gg 1$。˜接下来，若 β 如 (2.7) 中所示，则二进算子

$$B = B_{j,\lambda} = B_j \circ \tilde\beta(P/\lambda) \tag{2.9}$$

在 L^p 上一致有界，即

$$\|B\|_{L^p(M^{n-1})\to L^p(M^{n-1})} = O(1) \quad \text{for } 1 \le p \le \infty. \tag{2.10}$$

Al因此，注意到由于 $\sigma \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$，简单计算可知，若 λ_k 是 P 的一个特征值

$$(1-\tilde\beta(\lambda_k/\lambda))\,\sigma(\lambda^{1/2}|\tau|^{1/2} - P)\,\tilde\beta(\tau/\lambda) = O(\lambda^{-N}(1+\lambda_k+|\tau|)^{-N})\ \forall N.$$

因此，

$$\|\sigma_\lambda - \tilde\beta(P/\lambda)\circ\sigma_\lambda\|_{L^2(M^{n-1}\times[0,T])\to L^{q_c}(M^{n-1}\times[0,T])} = O(\lambda^{-N}) \quad \forall N.$$

因此，如果 B_j 如(2.8)中所示，并且$B_{j,\lambda}$ 是(2.9)中相应的二进算子

$$\|B_j\sigma_\lambda - B_{j,\lambda}\sigma_\lambda\|_{L^2(M^{n-1}\times[0,T])\to L^{q_c}(M^{n-1}\times[0,T])} = O(\lambda^{-N}) \quad \forall N, \tag{2.11}$$

由于 S^0_1 中的算子,$_0(M^{n-1})$ 在 L^p 上对 $1<p<\infty$ 有界。

目前，关于这些局部算子，我们还需要一个结果:

引理 2.2。 如果 S_λ 如(2.2)中所示，且 σ_λ 如(2.5) 中所示，则

$$\|(I-\sigma_\lambda)\circ S_\lambda f\|_{L^{q_c}(M^{n-1}\times[0,T])} \le CT^{\frac{1}{q_c}-\frac12}\lambda^{\frac{1}{q_c}}\|f\|_2. \tag{2.12}$$

对于给定的 $B = B_{j,\lambda}$ （如式 (2.9) 所示），我们将 σ_λ 的微局部化变体定义如下。

$$\tilde\sigma_\lambda = B\circ\sigma_\lambda, \quad B = B_{j,\lambda}, \tag{2.13}$$

以及相关的“半全局”算子

$$\tilde S_\lambda = \tilde\sigma_\lambda \circ S_\lambda. \tag{2.14}$$

根据 (2.8)、(2.11) 和 (2.12)，为了证明命题 2.1，只需证明：如果$T = c_0 \log\ \lambda$ with $c_0 > 0$ 足够小（取决于 M^{n-1}），那么，如果 M^{n-1} 的所有截面曲率都非正，

$$\|\tilde S_\lambda f\|_{L^{q_c}(M^{n-1}\times\mathbb{R})} \le C\lambda^{\frac{1}{q_c}}T^{\frac{1}{q_c}\cdot\frac{2}{q_c}}\|f\|_{L^2(M^{n-1})}, \tag{2.3′}$$

并且，如果 M^{n-1} 的所有截面曲率都为负，

$$\|\tilde{S}_\lambda f\|_{L^{q_c}(M^{n-1}\times\mathbb{R})} \le C\lambda^{\frac{1}{q_c}} T^{\frac{4-q_c}{2q_c}} \|f\|_{L^2(M^{n-1})}. \tag{2.4''}$$

正如我们将会看到的，为了证明 (2.3′) 和 (2.4″)，对于每个 j，我们需要令 (2.6) 和 (2.7) 中的 δ 和 δ_0 足够小；然而，由于 M^{n-1} 的紧致性以及下文将要给出的论证，(2.8) 中的和可以取为有限和，因此我们可以将这两个参数取为满足 $j = 1$、.....、N 所需条件的最小值。

引理 *2.2* 的证明。我们将采用 [20] 中的策略。在证明 (2.12) 时，我们可以假设（以下也始终如此）：

$$\|f\|_2 = 1. \tag{2.15}$$

此外，我们注意到，若 $E_k f$ 表示从 f 到 $P = \sqrt{-\Delta_g}$ 的特征子空间（其特征值为 λ_k）的投影，则有

$$\begin{aligned} S_\lambda f(x,t) &= \sum_k \eta(t/T) e^{-it\lambda^{-1}\lambda_k^2} \beta(\lambda_k/\lambda) E_k f(x) \\ &= (2\pi)^{-1} \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\tau} T\hat{\eta}(T(\tau - \lambda^{-1}\lambda_k^2))\, \beta(\lambda_k/\lambda) E_k f(x)\, d\tau. \end{aligned}$$

由于根据 (1.11)，当 $s \notin [1/2, 2]$ 时，$\beta(s) = 0$，$\hat{\ }\eta \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$，且对于 $s \in [1/6, 6]$，$\beta(s) = 1$，不难验证

$$(1 - \tilde{\beta}(\tau/\lambda))\, T\hat{\eta}(T(\tau - \lambda^{-1}\lambda_k^2))\, \beta(\lambda_k/\lambda) = O(\lambda^{-N}(1 + |\tau|)^{-N}) \ \forall N,$$

因此显然有

$$\|(I - \tilde{\beta}(D_t/\lambda)) S_\lambda f\|_{L^{q_c}(M^{n-1}\times[0,T])} = O(\lambda^{-N}) \ \forall N.$$

因此，为了证明 (2.12)，只需证明

$$\left\| (I - \sigma(\lambda^{1/2}|D_t|^{1/2} - P)) \circ \tilde{\beta}(D_t/\lambda) S_\lambda f \right\|_{L^{q_c}(M^{n-1}\times[0,T])} \le C T^{\frac{1}{q_c} - \frac{1}{2}} \lambda^{\frac{1}{q_c}}. \tag{2.16}$$

为证明这一点，令

$$\alpha \in C_0^\infty((-1,1)) \quad \text{satisfy} \quad 1 \equiv \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m(t), \tag{2.17}$$

if

$$\alpha_m(t) = \alpha(t - m). \tag{2.18}$$

那么，为了证明 (2.16)，只需注意到

$$\begin{aligned} \left\| \alpha_m(t) \big(I - \sigma(\lambda^{1/2}|D_t|^{1/2} - P)\big)\, \tilde{\beta}(D_t/\lambda)\big) \circ \big(\eta(t/T) e^{-it\lambda^{-1}\Delta_g} \beta(P/\lambda) f\big) \right\|_{L^{q_c}_{t,x}} \\ \lesssim T^{-1/2} \lambda^{1/q_c}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

将左侧范数中的函数记为 w，即

$$w = \alpha_m(t)\big(I - \sigma(\lambda^{1/2}|D_t|^{1/2} - P))\tilde{\beta}(D_t/\lambda)\big) \circ \big(\eta(t/T) e^{-it\lambda^{-1}\Delta_g} \beta(P/\lambda) f\big). \tag{2.20}$$

它的支撑集位于 $[m-1, m+1]$ 中，.....也是

$$F = (i\lambda\partial_t - \Delta_g) w. \tag{2.21}$$

为后文使用，注意到，根据 (1.11) 和 (2.7)

$$(I - \tilde{\beta}(P/\lambda)) F = 0. \tag{2.22}$$

此外，根据缩放后的薛定¨谔方程的 Duhamel 公式以及上述支撑集性质

$$w(x,t)=(i\lambda)^{-1}\int_{m-1}^{t}\big(e^{-i\lambda^{-1}(t-s)\Delta_g}F(s,\,\cdot\,)\big)(x)\,ds.$$

因此，根据闵可夫斯基不等式，对于每个固定的 t,

$$\begin{aligned}\|w(\,\cdot\,,t)\|_{L_x^{q_c}(M^{n-1})}&\le\lambda^{-1}\int_{m-1}^{t}\big\|e^{-i\lambda^{-1}t\Delta_g}\big(e^{i\lambda^{-1}s\Delta_g}F(s,\,\cdot\,)\big)\,\big\|_{L^{q_c}(M^{n-1})}\,ds\\&\le\lambda^{-1}\int_{-1}^{1}\big\|e^{-i\lambda^{-1}t\Delta_g}\big(e^{i\lambda^{-1}(s+m)\Delta_g}F(s+m,\,\cdot\,)\big)\,\big\|_{L^{q_c}(M^{n-1})}\,ds,\end{aligned}$$

因为 $F(s,\ \cdot\,)=0$ 当 $s\notin[m-1,m+1]$ 时。因此，根据闵可夫斯基不等式，我们有

$$\|w\|_{L_{x,t}^{q_c}}\le\lambda^{-1}\int_{-1}^{1}\big\|e^{-i\lambda^{-1}t\Delta_g}\big(e^{i\lambda^{-1}(s+m)\Delta_g}F(s+m,\,\cdot\,)\big)\,\big\|_{L_{t,x}^{q_c}}\,ds.$$

此外，根据 (2.22)，我们可以结合 Burq、G´erard 和 Tzvetkov 的局部二进估计 (1.3′′) 与施瓦茨不等式，得到

$$\begin{aligned}\|w\|_{L_{t,x}^{q_c}}&\lesssim\lambda^{\frac{1}{q_c}-1}\int_{-1}^{1}\big\|e^{i\lambda^{-1}(s+m)\Delta_g}F(s+m,\,\cdot\,)\big\|_{L_x^2}\,ds\\&\le\lambda^{\frac{1}{q_c}-1}\int_{-1}^{1}\|F(s+m,\,\cdot\,)\|_{L_x^2}\,ds\\&\lesssim\lambda^{\frac{1}{q_c}-1}\|F\|_{L_{t,x}^2}.\end{aligned}$$

如果我们令

$$I=\lambda\,\big\|\alpha_m'(t)\big(I-\sigma(\lambda^{1/2}|D_t|^{1/2}-P)\big)\tilde\beta(D_t/\lambda)\circ(\eta(t/T)e^{-it\lambda^{-1}\Delta_g}\beta(P/\lambda)f)\,\big\|_{L_{t,x}^2},$$

and

$$II=\|\alpha_m(t)(i\lambda\partial_t+P^2)\big(I-\sigma(\lambda^{1/2}|D_t|^{1/2}-P)\big)\tilde\beta(D_t/\lambda)\circ(\eta(t/T)e^{-it\lambda^{-1}\Delta_g}\beta(P/\lambda)f)\,\big\|_{L_{t,x}^2},$$

我们由 (2.21) 和 (2.22) 得出

$$\|w\|_{L_{t,x}^{q_c}}\lesssim\lambda^{\frac{1}{q_c}-1}\big(I+II\big).\tag{2.23}$$

为处理 I，我们注意到范数中的函数可以写成

$$(2\pi)^{-1}\alpha_m'(t)\sum_k\int e^{it\tau}(1-\sigma(\lambda^{1/2}\tau^{1/2}-\lambda_k))\,\tilde\beta(\tau/\lambda)\,T\hat\eta(T(\tau-\lambda^{-1}\lambda_k^2))\beta(\lambda_k/\lambda)E_kf\,d\tau,$$

˜因此，根据正交性以及（2.7）中 β 的支撑集性质，由于我们假设 $\|f\|_2=1$，可得

$$I\le\lambda T\sup_{\lambda_k\approx\lambda}\Big(\int_{\lambda/8}^{8\lambda}|1-\sigma(\lambda^{1/2}\tau^{1/2}-\lambda_k))|^2\,|\hat\eta(T\,(\tau-\lambda^{-1}\lambda_k^2)|^2\,d\tau\Big)^{1/2},$$

若作变量替换 $s=\lambda^{1/2}\tau^{1/2}$，则被积函数的支撑集上有 $ds\approx d\tau$，因此由上文可知

$$\begin{aligned} I &\lesssim \lambda T \sup_{\lambda_k\approx\lambda}\Big(\int_0^\infty |1-\sigma(s-\lambda_k)|^2\,|\hat\eta(T\lambda^{-1}(s+\lambda_k)(s-\lambda_k))|^2\,ds\Big)^{1/2}\\ &= \lambda T \sup_{\lambda_k\approx\lambda}\Big(\int_0^\infty |1-\sigma(s)|^2\,|\hat\eta(T\lambda^{-1}(s+2\lambda_k)\cdot s)|^2\,ds\Big)^{1/2}\\ &\lesssim \lambda T\Big(\int_0^\infty s^2(1+|Ts|)^{-N}\,ds\Big)^{1/2}\approx \lambda T^{-1/2}, \end{aligned}$$

在最后一步中，使用我们在 (2.6) 中关于 $\sigma(0)=0$ 的假设。

如果我们重复这些论证，就会发现 мундақ

$$\begin{aligned} II &\lesssim T \sup_{\lambda_k\approx\lambda}\Big(\int_{\lambda/8}^{8\lambda} |(1-\sigma(\lambda^{1/2}\tau^{1/2}-\lambda_k))|^2\,|-\lambda\tau+\lambda_k^2|^2\,|\hat\eta(T(\tau-\lambda^{-1}\lambda_k^2))|^2\,d\tau)^{1/2}\\ &\le \lambda \sup_{\lambda_k\approx\lambda}\Big(\int_0^\infty \big|T(\tau-\lambda^{-1}\lambda_k^2)\cdot\hat\eta(T(\tau-\lambda^{-1}\lambda_k^2))\big|^2\,d\tau\Big)^{1/2}\\ &\lesssim \lambda\Big(\int_{-\infty}^\infty (1+T|\tau|)^{-N}\,d\tau\Big)^{1/2}=O(\lambda T^{-1/2}). \end{aligned}$$

如果我们结合这两个估计并利用 (2.23)，即可得出结论：

$$\|w\|_{L^{q_c}_{t,x}}\lesssim T^{-1/2}\lambda^{\frac{1}{q_c}},$$

正如（2.19）中所假设的，这就完成了证明。 □

为了后续使用，我们还来看一下这个论证如何得出以下结果；在使用局部变系数双线性调和分析技术时，我们将需要用到该结果。

引理 2.3. 若 α_m 如(2.18) 中所述，则对于 $m\in\mathbb{Z}$，有

$$\big\|\alpha_m(t)\sigma_\lambda H\big\|_{L^{q_c}_{t,x}}\le C\lambda^{\frac{1}{q_c}}\|H\|_{L^2(M^{n-1}\times[m-10,m+10])}+C_N\lambda^{-N}\|H\|_{L^2(M^{n-1}\times\mathbb{R})}, \tag{2.24}$$

对每个 $N=1$、2，.....

证明。若 $\{e_k\}$ 是 M^{n-1} 上 P 的特征函数的一组标准正交基，对应特征值为$\{\lambda_k\}$，则 σ_λ 的核 $\sigma_\lambda(x,t;\,y,s)$为

$$\begin{aligned} &(2\pi)^{-1}\sum_k\int e^{i(t-s)\tau}\sigma(\lambda^{1/2}\tau^{1/2}-\lambda_k)\,\tilde\beta(\tau/\lambda)\,e_k(x)\overline{e_k(y)}\,d\tau\\ &\qquad=(2\pi)^{-2}\iint e^{i(t-s)\tau}e^{i\lambda^{1/2}\tau^{1/2}r}\,\tilde\beta(\tau/\lambda)\,\hat\sigma(r)\sum_k e^{-ir\lambda_k}e_k(x)\overline{e_k(y)}\,dr d\tau. \end{aligned}$$

回顾一下，根据 (2.6)，若 $r\notin[0,1]$，则 $\hat\sigma(r)=0$。因此，由 (2.7) 以及一个简单的分部积分论证可得

$$\iint e^{i(t-s)\tau}e^{i\lambda^{1/2}\tau^{1/2}r}\,\tilde\beta(\tau/\lambda)\,\hat\sigma(r)e^{-ir\lambda_k}\,dr d\tau=O\big((\lambda+\lambda_k+|t-s|)^{-N}\big),$$

若 $|t-s|\ge 5$.

若 $\lambda_k\le 100\lambda$，只需对 τ 分部积分即可得到这些界；而若 $\lambda_k>100\lambda$，则需分别对变量 r 和 τ 分部积分，才能得到此界。由于根据逐点 Weyl 公式（例如参见 [29]），

$$\sum_k(1+\lambda_k)^{-n}|e_k(x)e_k(y)|=O(1),$$

我们得出

$$\sigma_\lambda(x,t;y,s) = O((|t-s|+\lambda)^{-N})\,\forall\, N, \quad \text{if } |t-s| \geq 5.$$

因此，若 $H(t,\ x) = 0$ 对 $t \in [m-10, m+10]$成立，则（2.24）左侧由右侧的第二项控制。因此，为证明（2.24），我们可以假设

$$H(t,x) = 0 \quad \text{if } t \notin [m-10, m+10].$$

若接下来令

$$w(x,t) = \alpha_m(t)\big(\sigma_\lambda H\big)(x,t), \quad \text{and } F = (i\lambda\partial_t - \Delta_g)w$$

并按照引理 2.2 的证明进行论证，只需证明

$$\|F\|_{L^2_{t,x}} \lesssim \lambda \|H\|_{L^2_{t,x}},$$

这将由.....推出

$$\| \sigma(\lambda^{1/2}|D_t|^{1/2} - P)\, \tilde\beta(D_t/\lambda)\, H \|_{L^2_{t,x}} \lesssim \|H\|_{L^2_{t,x}}, \tag{2.25}$$

and

$$\| (i\lambda\partial_t - \Delta_g)\, [\sigma(\lambda^{1/2}|D_t|^{1/2} - P)\, \tilde\beta(D_t/\lambda)\, H] \|_{L^2_{t,x}} \lesssim \lambda \|H\|_{L^2_{t,x}}. \tag{2.26}$$

由正交性以及引理 2.2 证明中的论证，(2.25) 直接源于这样一个事实:

$$\sigma(\lambda^{1/2}\tau^{1/2} - \mu)\, \tilde\beta(\tau/\lambda) = O(1),$$

并且，(2.26) 是由该界推出的

$$\begin{aligned} &-(\lambda\tau - \mu^2)\, \sigma(\lambda^{1/2}\tau^{1/2} - \mu)\, \tilde\beta(\tau/\lambda) \\ &\qquad = -(\lambda^{1/2}\tau^{1/2} + \mu)\, \tilde\beta(\tau/\lambda) \cdot \big[\, (\lambda^{1/2}\tau^{1/2} - \mu)\, \sigma(\lambda^{1/2}\tau^{1/2} - \mu)\, \big] = O(\lambda), \end{aligned}$$

这由（2.7）以及 $\sigma \in \mathcal{S}$(R) 这一事实推出。 □

2.1. 高度分解。

接下来，我们建立 Bourgain [8] 最初用于研究傅里叶变换限制问题、近期又用于研究 [3], [7] 和 [30] 中特征函数问题的一种论证变体。这涉及将命题 2.1 中的估计拆分为两个˜高度，分别涉及 $|S_\lambda f$ 的相对较大值和较小值（x,t）|。

为描述这一点，在此处以及下文中，我们将像刚才一样假设， f 已按照（2.15）进行L^2归一化。然后，我们将通过估计两个区域上的 L^{q_c} 界，使用非常不同的技术证明命题 2.1中的估计。

$$\begin{aligned} A_+ &= \{(x,t) \in M^{n-1} \times [0,T] : |\tilde S_\lambda f(t,x)| \geq \lambda^{\frac{n-1}{4}+\delta}\}, \\ &\text{and } \ A_- = \{(x,t) \in M^{n-1} \times [0,T] : |\tilde S_\lambda f(x,t)| < \lambda^{\frac{n-1}{4}+\delta}\}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

由于 λ 的幂次所呈现出的数值关系，分解发生在高度 $\lambda^{\frac{n-1}{4}+\delta}$、$\delta = 1/8$处；不过,一我们本可以将 δ 的这一特定值替换为任意充分小的正数 δ。基本上，在 $\lambda^{\frac{n-1}{4}}$ 处发生的转变是自然的，它源于 Knapp 型现象——无论是在欧几里得问题中，还是在我们此处所考虑的几何问题中，都是如此。我们选择 $\delta = 1/8$ 的这一特定值，是为了简化接下来的某些计算。

接下来注意到，命题 2.1（因此也包括定理 1.1 和 1.2）是以下两个命题的推论，它们分别对应于 (2.27) 中的两个区域。

命题 2.4. 设(M^{n-1}, g)，$n \geq 3$ 具有非正曲率。于是，我们可以选取$c_0 > 0$，使得对于 $\lambda \gg 1$ 和 $T = c_0 \log \lambda$，有如下的一致界

$$\|\tilde{S}_\lambda f\|_{L^{q_c}(A_+)} \leq C\lambda^{\frac{1}{q_c}}, \tag{2.28}$$

假设 f 如 (2.15) 中所述经过 L^2 归一化。

命题 2.5. 设 (M^{n-1}, g)， $n \geq 3$，具有非正曲率。那么我们可以像上面那样取$T = c_0$ 对数 λ，使得若 f 经过 L^2 归一化，

$$\|\tilde{S}_\lambda f\|_{L^{q_c}(A_-)} \leq C\lambda^{\frac{1}{q_c}} T^{\frac{1}{q_c}\cdot\frac{2}{q_c}}. \tag{2.29}$$

此外，若 (M^{n-1}, g) 的所有截面曲率均为负，

$$\|\tilde{S}_\lambda f\|_{L^{q_c}(A_-)} \leq C\lambda^{\frac{1}{q_c}} T^{\frac{4-q_c}{2q_c}}. \tag{2.30}$$

我们将在接下来的两个小节中给出这些命题的证明。

2.2. 相对较大取值的估计：命题 2.4 的证明。

首先注意到，由引理 2.2 和 (2.10)，我们有

$$\|\tilde{S}_\lambda f\|_{L^{q_c}(A_+)} \leq \|BS_\lambda f\|_{L^{q_c}(A_+)} + CT^{\frac{1}{q_c}-\frac{1}{2}}\lambda^{\frac{1}{q_c}},$$

并且，由于 $q_c > 2$，(2.28) 可由下式推出

$$\|BS_\lambda f\|_{L^{q_c}(A_+)} \leq C\lambda^{\frac{1}{q_c}} + \tfrac{1}{2}\|\tilde{S}_\lambda f\|_{L^{q_c}(A_+)}. \tag{2.31}$$

为证明这一点，我们将改编 Bourgain [8] 的一个论证，以及近期在[3] 和 [30] 中提出的变体。具体而言，选取 $g(x,\ t)$，使得

$$\|g\|_{L^{q_c'}(A_+)} = 1 \quad \text{and} \quad \|BS_\lambda f\|_{L^{q_c}(A_+)} = \iint BS_\lambda f \cdot \overline{\big(\mathbb{1}_{A_+}\cdot g\big)}\, dxdt.$$

那么，由于我们假设 $\|f\|_2 = 1$，根据施瓦茨不等式

$$\begin{aligned}
\|BS_\lambda f\|^2_{L^{q_c}(A_+)} &= \Big(\int f(x)\cdot \overline{\big(S^*B^*\big)(\mathbb{1}_{A_+}\cdot g)(x)}\, dx\Big)^2 \\
&\leq \int |S_\lambda^* B^*(\mathbb{1}_{A_+}\cdot g)(x)|^2\, dx \\
&= \iint \big(BS_\lambda S_\lambda^* B^*\big)(\mathbb{1}_{A_+}\cdot g)(x,t)\,\overline{(\mathbb{1}_{A_+}\cdot g)(x,t)}\, dxdt \\
&= \iint \big(B\circ L_\lambda \circ B^*\big)(\mathbb{1}_{A_+}\cdot g)(x,t)\,\overline{(\mathbb{1}_{A_+}\cdot g)(x,t)}\, dxdt \\
&\quad + \iint \big(B\circ G_\lambda \circ B^*\big)(\mathbb{1}_{A_+}\cdot g)(x,t)\,\overline{(\mathbb{1}_{A_+}\cdot g)(x,t)}\, dxdt \\
&= I + II,
\end{aligned} \tag{2.32}$$

其中 L_λ 是一个积分算子，其核在 $|t-s| \leq 1$ 时等于 $S_\lambda S_\lambda^*$ 的核，否则为 0，即

$$L_\lambda(x,t;y,s) = \begin{cases} \big(S_\lambda S_\lambda^*\big)(x,t;y,s) = \eta(t/T)\eta(s/T)\big(\beta^2(P/\lambda)e^{-i(t-s)\lambda^{-1}\Delta_g}\big)(x,y), \text{ if } |t-s|\leq 1, \\ 0 \text{ otherwise.}\end{cases} \tag{2.33}$$

在最后一节（见命题 4.1）中，我们将证明，对于上述的 T，有

$$|(S_\lambda S_\lambda^*)(x,t;y,s)| \leq C\lambda^{\frac{n-1}{2}}\,|t-s|^{-\frac{n-1}{2}}\exp(C_M|t-s|), \quad \text{if } |t-s|\leq 2T. \tag{2.34}$$

因此，若令 $L_{\lambda,t,s}$ 为“冻结”的算子

$$\big(L_{\lambda,t,s}f\big)(x)=\int L_\lambda(x,t;y,s)\,f(y)\,dy,$$

我们有

$$\|L_{\lambda,t,s}f\|_{L^\infty(M^{n-1})}\le C\lambda^{\frac{n-1}{2}}\,|t-s|^{-\frac{n-1}{2}}\,\|f\|_{L^1(M^{n-1})},$$

并且，由于 $e^{-i(t-s)\lambda^{-1}\Delta_g}$ 是酉的，我们自然有

$$\|L_{\lambda,t,s}f\|_{L^2(M^{n-1})}\le C\|f\|_{L^2(M^{n-1})}.$$

因此，通过插值

$$\|L_{\lambda,t,s}f\|_{L^{q_c}(M^{n-1})}\le C\lambda^{\frac{2}{q_c}}\,|t-s|^{-\frac{2}{q_c}}\|f\|_{L^{q_c'}(M^{n-1})}.$$

因此，根据 Strichartz 的 [34] 原始论证（或者，例如参见 [29]中的定理 0.3.6），我们可以利用经典的 Hardy-Littlewood 分数积分估计，得出

$$\|L_\lambda\|_{L^{q_c'}(M^{n-1}\times\mathbb{R})\to L^{q_c}(M^{n-1}\times\mathbb{R})}=O(\lambda^{\frac{2}{q_c}}).$$

利用这一点，再结合 H¨older 不等式和 (2.10)，我们得到 (2.32) 中的项 I

$$\begin{aligned}(2.35)\qquad |I|&\le\|BL_\lambda B^*(\mathbb{1}_{A_+}\cdot g)\|_{L^{q_c}(M^{n-1}\times\mathbb{R})}\cdot\|\mathbb{1}_{A_+}\cdot g\|_{L^{q_c'}(M^{n-1}\times\mathbb{R})}\\&\lesssim\|L_\lambda B^*(\mathbb{1}_{A_+}\cdot g)\|_{L^{q_c}(M^{n-1}\times\mathbb{R})}\cdot\|\mathbb{1}_{A_+}\cdot g\|_{L^{q_c'}(M^{n-1}\times\mathbb{R})}\\&\lesssim\lambda^{\frac{2}{q_c}}\|B^*(\mathbb{1}_{A_+}\cdot g)\|_{L^{q_c'}(M^{n-1}\times\mathbb{R})}\cdot\|\mathbb{1}_{A_+}\cdot g\|_{L^{q_c'}(M^{n-1}\times\mathbb{R})}\\&\lesssim\lambda^{\frac{2}{q_c}}\|g\|^2_{L^{q_c'}(A_+)}=\lambda^{\frac{2}{q_c}}.\end{aligned}$$

为了估计 (2.32) 中的另一项 II，我们将 c_0 取足够小，使得若 C_M 是 (2.34) 中的常数

$$\exp(2C_MT)\le\lambda^{1/8},\quad\text{if } T=c_0\log\lambda\text{ and }\lambda\gg1.$$

于是，由于对于 $|t|\ge1$，$\eta(t)=0$，由 (2.33) 和 (2.34) 可得

$$\|G_\lambda\|_{L^1(M^{n-1}\times\mathbb{R})\to L^\infty(M^{n-1}\times\mathbb{R})}\le C\lambda^{\frac{n-1}{2}+\frac18}.$$

因此，由于根据 (2.10)，二进算子 B 在 L^1 和 L^∞ 上有界，我们可以重复上述论证来估计 I，并利用 H¨older 不等式得到

$$|II|\le C\lambda^{\frac{n-1}{2}}\lambda^{\frac18}\|\mathbb{1}_{A_+}\cdot g\|_1^2\le C\lambda^{\frac{n-1}{2}}\lambda^{\frac18}\|g\|^2_{L^{q_c'}(A_+)}\cdot\|\mathbb{1}_{A_+}\|^2_{L^{q_c}}=C\lambda^{\frac{n-1}{2}}\lambda^{\frac18}\|\mathbb{1}_{A_+}\|^2_{L^{q_c}}.$$

回顾 (2.27) 中 A_+ 的定义，我们可以估计最后一个因子：

$$\|\mathbb{1}_{A_+}\|^2_{L^{q_c}}\le\big(\lambda^{\frac{n-1}{4}+\frac18}\big)^{-2}\|\tilde S_\lambda f\|^2_{L^{q_c}(A_+)}.$$

因此，

$$|II|\lesssim\lambda^{-\frac18}\|\tilde S_\lambda f\|^2_{L^{q_c}(A_+)}\le\big(\tfrac12\|\tilde S_\lambda f\|_{L^{q_c}(A_+)}\big)^2,$$

假设 λ 足够大（我们可以这样假设）。

将此界与先前针对 I 的界 (2.35) 结合起来，我们得出 (2.31) 成立，由此完成命题 2.4 的证明。□

2.3. 相对较小取值的估计：命题 2.4 的证明。

现在我们着手证明命题 2.4。为此，我们需要借鉴并改编 [23] 和 [35] 中双线性调和分析的结果。

我们将使用一种微局部分解，下面对其进行描述。首先回顾一下，（2.9）中 B 的符号 $B(x,\xi)$ 支撑在某个 $(x_0,\xi_0)\in S^*M^{n-1}$ 的一个小锥形邻域内。我们可以假设其符号的支撑集足够小，以至于

我们可以在一个坐标图Ω 中工作，并且 $x_0 = 0$、 $\xi_0 = (0, \dots, 0, 1)$以及 $g_{jk}(0) = \delta_k^j$在局部坐标中。因此，当 x 位于原点的一个小的相对紧邻域之外，或 ξ 位于 $(0, \dots, 0, 1)$ 的一个小的锥形邻域之外时，我们将假设 $B(x, \xi) = 0$ 。这些约化以及接下来的约化将影响 (2.8) 中项的数量；然而，很明显，其中的 N 将与 $\lambda \gg 1$ 无关。类似地，(2.7) 中的正数 δ 和 δ_0 可能依赖于 N，但最后，我们只需将每个数取为对于每个 $j = 1, \dots, N$ 所需数值的最小值。

接下来，我们定义将要使用的微局部截断。我们固定一个函数 $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2(n-2)})$，其支撑集包含于 $\{z : \ |z_j| \le 1, \ 1 \le j \le 2(n-2)\}$，满足

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}^{2(n-2)}} a(z - j) \equiv 1. \tag{2.36}$$

我们将使用这个函数来构造我们的微局部截断。根据上述内容，我们将重点为 $(y, \eta) \in S^*\Omega$ 定义它们，其中 y 在原点附近，且 η 位于 $(0, \dots, 0, 1)$ 的一个小锥形邻域内。我们将令

$$\Pi = \{y : \ y_{n-1} = 0\}$$

是 Ω 中最后一个坐标为零的点。分别用 $y' = (y_1, \dots, y_{n-2})$ 和 $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_{n-2})$ 表示 y 和 η 的前 $n-2$ 个坐标。对于靠近 0 的 $y \in \Pi$ 和靠近 $(0, \dots, 0, 1)$ 的 η，我们只需使用函数 $a(\theta^{-1}(y', \eta') - j)$、 $j \in \mathbb{Z}^{2(n-2)}$，即可得到尺度为 θ 的截断函数。我们总会有满足 $\delta = 1/8$ 的 $\theta \in [\lambda^{-\delta}, 1]$ 。

随后，我们可以通过在该邻域内对 $(x, \xi) \in S^*\Omega$ 进行设定，将定义延拓到 $(0, (0, \dots, 0, 1))$ 的一个邻域

$$a_j^\theta(x, \xi) = a(\theta^{-1}(y', \eta') - j) \quad \text{if} \ \ \chi_s(x, \xi) = (y', 0, \eta', \eta_{n-1}) \ \text{ with } \ \ s = d_g(x, \Pi). \tag{2.37}$$

此处， χ_s 表示 $S^*\Omega$中的测地流。因此， $a_j^\theta(x, \xi)$在所有测地线（$x(s)$ $\xi(s)$）$\in S^*\Omega$上均为常数，其中 $x(0) \in \Pi$ 接近0，且 $\xi(0)$接近$(0, \dots, 0, 1)$。因此，

$$a_j^\theta(\chi_s(x, \xi)) = a_j^\theta(x, \xi) \tag{2.38}$$

当 s 趋近于 0且 $(x, \xi) \in S^*\Omega$趋近于 $(0, (0, \dots, 0, 1))$ 时。

然后，我们通过如下设定，将截断函数的定义延拓到 $T^*\Omega \setminus 0$ 中 $(0, (0, \dots, 0, 1))$ 的一个锥形邻域。

$$a_j^\theta(x, \xi) = a_j^\theta(x, \xi / p(x, \xi)). \tag{2.39}$$

注意，如果 $(y_j', \eta_j') = \theta j$ 和 γ_j 是经过 $(y_j', 0, \eta_j) \in S^*\Omega$ 的 Ω 中的测地线，且 $\eta_j \in S^*_{(y_j', 0)}\Omega$ 的前 η_j' 个 $(n-2)$ 坐标为 Ω，那么

$$a_j^\theta(x, \xi) = 0 \quad \text{if} \ \ \operatorname{dist}\big((x, \xi), \gamma_j\big) \ge C_0 \theta, \tag{2.40}$$

对于某个固定常数 $C_0 > 0$。此外， a_j^θ 满足这些估计

$$\big|\partial_x^\sigma \partial_\xi^\gamma a_j^\theta(x, \xi)\big| \lesssim \theta^{-|\alpha| - |\gamma|}, \ \ (x, \xi) \in S^*\Omega \tag{2.41}$$

与这一支撑集性质相关。

a_j^θ 提供“方向性”微局部化。由于我们缩放后的薛定谔算子的符号的特征集位于抛物面上，因此我们还需要进行“高度”局部化。当然，我们将使用的变系数算子是针对我们的算子构造的，也是研究涉及抛物面的傅里叶限制问题时所使用算子的类似物。

为构造这些，选取一个支撑集在 $|s| \le 1$ 中的 $b \in C_0^\infty(\mathbb{R})$，使其满足 $\sum_{-\infty}^{\infty} b(s - \ell) \equiv 1$。然后我们只需将“高度算子”定义如下。

$$A_\ell^\theta(P) = b(\theta^{-1}\lambda^{-1}(P - \lambda\kappa_\ell^\theta))\, \Upsilon(P/\lambda), \quad \kappa_\ell^\theta = 1 + \theta\ell, \quad |\ell| \lesssim \theta^{-1}, \tag{2.42}$$

˜其中，若 β 如式（2.7）所示

$$\Upsilon \in C_0^\infty((1/10,10)) \text{ satisfies } \Upsilon(r)=1 \text{ in a neighborhood of supp } \tilde{\beta}. \tag{2.43}$$

因此，这些算子将 P 微局部化到以“高度” $\lambda\kappa_\ell^\theta \approx\lambda$为中心、大小为 $\approx \theta\lambda$ 的区间上。正如我们将在下文看到的，不同的“高度”会产生不同的“薛定谔管”，而我们的算子 $\tilde{\sigma}_\lambda$ 微局部化所得的核会高度集中在这些管附近。此外，按照 [29] 中的标准论证可知，若 $A_\ell^\theta(x, y)$是该算子的核，则

$$A_\ell^\theta(x,y)=O(\lambda^{-N})\,\forall\, N, \quad \text{if } d_g(x,y)\geq C_0\theta, \tag{2.44}$$

对于某个固定常数，若 $\theta\in[\lambda^{-\delta_0},1]$，且如我们所假设的那样 $\delta_0<1/2$。

若 $\psi(x)\in C_0^\infty(\Omega)$在 $B(x,\ \xi)$的 x-支撑集的某个邻域内等于1，且$A_j^\theta(x,\ D_x)$是符号为

$$A_j^\theta(x,\xi)=\psi(x)a_j^\theta(x,\xi), \tag{2.45}$$

那么对于 $\nu=(\theta j,\theta\ell)\in\theta\mathbb{Z}^{2(n-2)+1}$，我们终于可以定义将要使用的截断函数:

$$A_\nu^\theta = A_j^\theta(x,D_x)\circ A_\ell^\theta(P). \tag{2.46}$$

供后文使用，我们注意到，若 $A_\nu^\theta(x,\xi)$ 和 $A_{\tilde{\nu}}^\theta(x,\xi)$ 分别是 A_ν^θ 和 $A_{\tilde{\nu}}^\theta$的符号，则

$$A_\nu^\theta(x,\xi)A_{\tilde{\nu}}^\theta(x,\xi)\equiv 0, \quad \text{if } |\nu-\tilde{\nu}|\geq C_0\theta, \tag{2.47}$$

对于某个一致常数 C_0。此外，由于 $p(x,\xi)$ 在测地流下不变，根据 (2.38)，A_ν^θ 的主符号 $a_\nu^\theta(x,\xi)$ 满足

$$a_\nu^\theta(\chi_r(x,\xi))=a_\nu^\theta(x,\xi), \text{ on supp } B(x,\xi) \text{ if } |r|\leq 2\delta, \tag{2.48}$$

假设 $\delta>0$ 足够小，并且如我们可以假设的那样，符号 $B(x,\xi)$ 支撑在 $(0,(0,\dots,0,1))$ 的一个小锥形邻域内。

另请注意，若 $\theta\in[\lambda^{-\delta_0},1]$，则 A_ν^θ 属于 $S^0_{1-\delta_0,\delta_0}$ 的一个有界子集（零阶、类型为 $(1-\delta_0,\delta_0)$ (M) 的伪微分算子）。

此外，作为任意 $L^p\to L^q, 1\leq p,q\leq\infty$ 空间之间的算子，我们有

$$\tilde{\sigma}_\lambda=\sum_\nu \tilde{\sigma}_\lambda A_\nu^\theta + O(\lambda^{-N})\ \forall N, \tag{2.49}$$

并且 A_ν^θ 几乎正交，具体而言我们有

$$\sum_\nu \|A_\nu^\theta G\|^2_{L^2_{t,x}} \lesssim \|G\|^2_{L^2_{t,x}}, \tag{2.50}$$

其常数与 $\theta\in[\lambda^{-\delta_0},1]$ 无关，其中 $\delta_0<1/2$ 如上所述。第二个估计式 (2.50)是标准的，因为 A_ν^θ 属于$S^0_{1-\delta_0,\ \delta_0}$ 且 (2.47) 有效。另一个估计式 (2.50) 源于以下事实：根据 (2.36) 和(2.43)，$Q(x,\ D)=I-\sum_\nu A_\nu^\theta\in S^0_{1-\delta_0,\ \delta_0}$的符号支撑在supp $B(x,\ \xi)$的某个邻域之外；如果像我们可以假设的那样，后者足够小，那么由下文引理2.7 的证明，当 (2.6)中的 δ 足够小时，这就得到(2.49)。此外，对于每个 x，这些符号在边长为 $\theta\lambda$ 的立方体之外消失，并且 $|\partial_\xi^\gamma A_\nu^\theta(x,\ \xi)|=O((\lambda\theta)^{-|\gamma|})$，我们还有它们的核为$O((\theta\lambda)^{n-1}(1+\theta\lambda d_g(x,\ y))^{-N})$，对所有 N 都成立，因此

$$\|A_\nu^\theta\|_{L^p(M)\to L^p(M)}=O(1) \quad \forall\, 1\leq p\leq\infty. \tag{2.51}$$

鉴于 (2.49)，对于 $\theta_0=\lambda^{-1/8}$

$$\big(\alpha_m(t)\tilde{\sigma}_\lambda H\big)^2=\sum_{\nu,\tilde{\nu}}\big(\alpha_m(t)\tilde{\sigma}_\lambda A_\nu^{\theta_0}H\big)\cdot\big(\alpha_m(t)\tilde{\sigma}_\lambda A_{\tilde{\nu}}^{\theta_0}H\big)+O(\lambda^{-N}\|H\|_2^2), \tag{2.52}$$

对于 α_m，如式 (2.18) 所示。回顾一下，在 $A_\nu^{\theta_0}$ 中，$\nu \in \theta\mathbf{Z}^{2(n-2)+1}$ 表示 $\mathbf{R}^{2n-3}$ 中的一个 $\lambda^{-1/8}$-分离集。

我们需要按照许多早期著作中的做法（见[23] 和 [35]），对式（2.52）中的指标对 ν、$\tilde{\nu}$ 进行归类。为此，考虑 $\mathbf{R}^{2n-3}$ 中边长为 $\theta = 2^k\theta_0$ =$2^k\lambda^{-1/8}$的二进立方体 τ_μ^θ，其中 τ_μ^θ表示将立方体 $[0,\theta)^{2n-3}$沿 $\mu \in \theta\mathbf{Z}^{2n-3}$平移所得的立方体。若两个边长为 θ 的二进立方体不相邻，但它们的边长为 2θ的父立方体相邻，则称这两个立方体互相接近；此时记作 $\tau_\mu^\theta \sim \tau_{\tilde{\mu}}^\theta$。注意，接近的立方体满足 $\operatorname{dist}(\tau_\mu^\theta, \tau_{\tilde{\mu}}^\theta) \approx \theta$，因此每个固定立方体都有 $O(1)$个与之“接近”的立方体。此外，正如 [35, 第 971], 页所述，$\mathbf{R}^{2n-3}$ 中任意两个不同的点 ν、$\tilde{\nu} \in$ 必定位于此惠特尼分解中的唯一一对接近立方体中。因此，必存在唯一的三元组（$\theta = \theta_0 2^k$、μ、$\tilde{\mu}$），使得（ν、$\tilde{\nu}$）$\in \tau_\mu^\theta \times \tau_{\tilde{\mu}}^\theta$且 $\tau_\mu^\theta \sim \tau_{\tilde{\mu}}^\theta$。我们指出，选择支撑集较小的 B后，只需考虑 $\theta = 2^k\theta_0 \ll 1$。

综合考虑这些观察可知，双线性和 (2.52) 可以整理如下：

(2.53)
$$\sum_{\{k\in\mathbb{N}:\, k\geq 10 \text{ and } \theta=2^k\theta_0\ll 1\}} \sum_{\{(\mu,\tilde{\mu}):\, \tau_\mu^\theta\sim\tau_{\tilde{\mu}}^\theta\}} \sum_{\{(\nu,\tilde{\nu})\in\tau_\mu^\theta\times\tau_{\tilde{\mu}}^\theta\}} \big(\alpha_m(t)\tilde{\sigma}_\lambda A_\nu^{\theta_0} H\big)\cdot\big(\alpha_m(t)\tilde{\sigma}_\lambda A_{\tilde{\nu}}^{\theta_0} H\big) + \sum_{(\tau,\tilde{\tau})\in\Xi_{\theta_0}} \big(\alpha_m(t)\tilde{\sigma}_\lambda A_\nu^{\theta_0} H\big)\cdot\big(\alpha_m(t)\tilde{\sigma}_\lambda A_{\tilde{\nu}}^{\theta_0} H\big),$$

其中，Ξ_{θ_0} 对剩余的满足 $|\nu-\tilde{\nu}| \lesssim \theta_0 = \lambda^{-1/8}$ 的配对进行索引，包括满足 $\nu = \tilde{\nu}$ 的对角配对。

由双线性调和分析论证可得我们所需的关键估计，具体如下。

命题 2.6. 若 $H = S_\lambda f$ 如 (2.2) 中所示，则对 $m \in \mathbb{Z}$，有以下一致界

(2.54)
$$\|\alpha_m(t)\tilde{\sigma}_\lambda H\|_{L^{q_c}(A_-)} \lesssim \Big(\sum_\nu \big\|\alpha_m(t)\tilde{\sigma}_\lambda A_\nu^{\theta_0} H\big\|_{L^{q_c}_{t,x}(M^{n-1}\times\mathbb{R})}^{q_c}\Big)^{1/q_c} + \lambda^{\frac{1}{q_c}-}\|H\|_{L^2_{t,x}(M^{n-1}\times\mathbb{R})}.$$

我们对 (2.54) 中最后一项采用的 $\lambda^{\frac{1}{q_c}-}$ 记号表示某个未指定的 $\varepsilon_0 > 0$ 所对应的 $\lambda^{\frac{1}{q_c}-\varepsilon_0}$。注意，由于$\|H\|_{L^2_{t,\ x}} \approx T^{1/2}$ 对于 $H = S_\lambda f$，且 $T \approx \log\lambda$，最后一项涉及该范数所带来的对数损失，远不及 λ 的幂次增益 $1/q_c-$。同样，对 m 求和并使用这一估计时，额外的对数损失也会被这一增益充分抵消。

我们将把命题 2.6 的证明推迟到下一节。现在让我们看看如何利用它来证明命题 2.5。

我们首先注意到，如果 $\alpha_m(t) = \alpha(t-m)$ 如（2.18）所示，且 α 如（2.17）所示，那么当然有

$$\|\tilde{S}_\lambda f\|_{L^{q_c}(A_-)}^{q_c} \lesssim \sum_m \|\alpha_m(t)\tilde{S}_\lambda f\|_{L^{q_c}(A_-)}^{q_c}.$$

回忆一下 $\tilde{S}_\lambda = \tilde{\sigma}_\lambda S_\lambda$。因此，由 (2.54) 和 (2.15) 可得，其中 $\theta_0 = \lambda^{-1/8}$

$$\|\tilde{S}_\lambda f\|_{L^{q_c}(A_-)}^{q_c} \lesssim \sum_m\sum_\nu \|\alpha_m(t)\tilde{\sigma}_\lambda A_\nu^{\theta_0} S_\lambda f\|_{L^{q_c}(A_-)}^{q_c} + \lambda^{1-}\|S_\lambda f\|_{L^{q_c}(M^{n-1}\times\mathbb{R})}^{q_c}.$$

由于最后一项为 $O(\lambda^{1-}\log\lambda)$，要证明命题 2.5，只需说明当 M^{n-1} 具有非正曲率时

$$\sum_m\sum_\nu \|\alpha_m(t)\tilde\sigma_\lambda A_\nu^{\theta_0}S_\lambda f\|^{q_c}_{L^{q_c}(M^{n-1}\times[0,T])}\le C\lambda T^{\frac{2}{q_c}}, \tag{2.55}$$

与命题中一样，$T=c_0\log\lambda$ 对充分小的 $c_0>0$ 成立，而另一个估计 (2.30) 则由下式得到:

$$\sum_m\sum_\nu \|\alpha_m(t)\tilde\sigma_\lambda A_\nu^{\theta_0}S_\lambda f\|^{q_c}_{L^{q_c}(M^{n-1}\times[0,T])}\le C\lambda T^{\frac{4-q_c}{2}}. \tag{2.56}$$

若将引理 2.3 与 (2.10) 和 (2.50) 结合使用，则可得到以下一致界，其中每个固定的 m

$$\begin{aligned}\sum_\nu \|\alpha_m(t)\tilde\sigma_\lambda A_\nu^{\theta_0}S_\lambda f\|^2_{L^{q_c}(M^{n-1}\times[0,T])}&\\ \lesssim \sum_\nu \|\alpha_m(t)\sigma_\lambda A_\nu^{\theta_0}S_\lambda f\|^2_{L^{q_c}(M^{n-1}\times[0,T])}&\\ \lesssim \lambda^{\frac{2}{q_c}}\sum_\nu \|A_\nu^{\theta_0}S_\lambda f\|^2_{L^2(M^{n-1}\times[m-10,m+10])}+O(\lambda^{-N})&\\ \lesssim \lambda^{\frac{2}{q_c}}\|S_\lambda f\|_{L^2(M^{n-1}\times[m-10,m+10])}+O(\lambda^{-N})&\\ \lesssim \lambda^{\frac{2}{q_c}}.&\end{aligned} \tag{2.57}$$

这里我们再次使用了平凡界 $\|S_\lambda f\|_{L^2\ (M^{n-1}\times I)}\lesssim |I|^{1/2}$，其中 $I\subset\mathbf{R}$ 是一个区间。为使用这一点，对每个 m，选择 $\nu(m)$ 使得

$$\max_\nu \|\alpha_m(t)\tilde\sigma_\lambda A_\nu^{\theta_0}S_\lambda f\|_{L^{q_c}(M^{n-1}\times[0,T])}=\|\alpha_m(t)\tilde\sigma_\lambda A_{\nu(m)}^{\theta_0}S_\lambda f\|_{L^{q_c}(M^{n-1}\times[0,T])}. \tag{2.58}$$

然后，由（2.57）可得

$$\begin{aligned}&\sum_m\sum_\nu \|\alpha_m(t)\tilde\sigma_\lambda A_\nu^{\theta_0}S_\lambda f\|^{q_c}_{L^{q_c}(M^{n-1}\times\mathbb{R})}\\ &\le\sum_m\Big(\sum_\nu \|\alpha_m(t)\tilde\sigma_\lambda A_\nu^{\theta_0}S_\lambda f\|^2_{L^{q_c}(M^{n-1}\times[0,T])}\Big)\cdot\|\alpha_m(t)\tilde\sigma_\lambda A_{\nu(m)}^{\theta_0}S_\lambda f\|^{q_c-2}_{L^{q_c}(M^{n-1}\times[0,T])}\\ &\lesssim\lambda^{\frac{2}{q_c}}\sum_m\|\alpha_m(t)\tilde\sigma_\lambda A_{\nu(m)}^{\theta_0}S_\lambda f\|^{q_c-2}_{L^{q_c}(M^{n-1}\times[0,T])}.\end{aligned} \tag{2.59}$$

由于最后一个求和中有 $O(T)$ 个非零项，根据 H¨older 不等式，我们有 e

$$\sum_m\|\alpha_m(t)\tilde\sigma_\lambda A_{\nu(m)}^{\theta_0}S_\lambda f\|^{q_c-2}_{L^{q_c}(M^{n-1}\times[0,T])}\lesssim T^{\frac{2}{q_c}}\|\alpha_m(t)\tilde\sigma_\lambda A_{\nu(m)}^{\theta_0}S_\lambda f\|^{q_c-2}_{\ell^{q_c}_m L^{q_c}(M^{n-1}\times[0,T])},$$

并且，如 $q_c\le 4$,

$$\sum_m\|\alpha_m(t)\tilde\sigma_\lambda A_{\nu(m)}^{\theta_0}S_\lambda f\|^{q_c-2}_{L^{q_c}(M^{n-1}\times[0,T])}\lesssim T^{\frac{4-q_c}{2}}\|\alpha_m(t)\tilde\sigma_\lambda A_{\nu(m)}^{\theta_0}S_\lambda f\|^{q_c-2}_{\ell^2_m L^{q_c}(M^{n-1}\times[0,T])}.$$

因此，根据 (2.57)，如果我们能够证明当 M^{n-1} 的所有截面曲率均非正时，对于足够小的 $c_0>0$，$T=c_0\log\ \lambda$，那么我们就能得到 (2.55)。

$$\|\alpha_m(t)B\sigma_\lambda A_{\nu(m)}^{\theta_0}S_\lambda f\|_{\ell^{q_c}_m L^{q_c}_{t,x}(M^{n-1}\times\mathbb{R})}\lesssim\lambda^{\frac{1}{q_c}}, \tag{2.60}$$

如果我们能够证明，当所有的截面曲率均为负且 T 如上所述时，我们就会得到 (2.56)

$$\|\alpha_m(t)B\sigma_\lambda A_{\nu(m)}^{\theta_0}S_\lambda f\|_{\ell^2_m L^{q_c}_{t,x}(M^{n-1}\times\mathbb{R})}\lesssim\lambda^{\frac{1}{q_c}}, \tag{2.61}$$

由于 $\tilde{\sigma}_\lambda = B\sigma_\lambda$。

为了证明这些不等式，我们将使用以下简单引理，其证明推迟到本小节末尾。

引理 2.7。若 $\delta > 0$ *in* (2.6) 足够小，且 $\theta_0 = \lambda^{-1/8}$，则对于(2.9)中的 B，我们有

$$\big\| B\sigma_\lambda A^{\theta_0}_\nu - BA^{\theta_0}_\nu \sigma_\lambda \big\|_{L^2_{t,x}\to L^{q_c}_{t,x}} = O(\lambda^{\frac{1}{q_c}-\frac{1}{4}}). \tag{2.62}$$

如果我们使用 (2.62)，随后使用 (2.10) 和 (2.51)，就会看到，对于每个 m，我们有

(2.63)

$$\begin{aligned}
&\|\alpha_m(t) B\sigma_\lambda A^{\theta_0}_{\nu(m)} S_\lambda f\|_{L^{q_c}_{t,x}} \\
&\quad\lesssim \|\alpha_m(t) BA^{\theta_0}_{\nu(m)}\sigma_\lambda S_\lambda f\|_{L^{q_c}_{t,x}} + \lambda^{\frac{1}{q_c}-\frac{1}{4}}\|S_\lambda f\|_{L^2_{t,x}} \\
&\quad\lesssim \|\alpha_m(t) BA^{\theta_0}_{\nu(m)} S_\lambda f\|_{L^{q_c}_{t,x}} + \|\alpha_m(t) BA^{\theta_0}_{\nu(m)}(I-\sigma_\lambda) S_\lambda f\|_{L^{q_c}_{t,x}} + \lambda^{\frac{1}{q_c}-\frac{1}{4}}(\log\lambda)^{1/2} \\
&\quad\lesssim \|\alpha_m(t) A^{\theta_0}_{\nu(m)} S_\lambda f\|_{L^{q_c}_{t,x}} + \|\alpha_m(t)(I-\sigma_\lambda) S_\lambda f\|_{L^{q_c}_{t,x}} + \lambda^{\frac{1}{q_c}-\frac{1}{4}}(\log\lambda)^{1/2}.
\end{aligned}$$

由 (2.17)–(2.18) 和引理 2.2 可得

$$\|\alpha_m(t)(I-\sigma_\lambda) S_\lambda f\|_{\ell^{q_c}_m L^{q_c}_{t,x}} \le \lambda^{\frac{1}{q_c}}\, T^{\frac{1}{q_c}-\frac{1}{2}}, \tag{2.64}$$

因此，由（2.63），若.....，我们便有（2.60）

$$\|\alpha_m(t) A^{\theta_0}_{\nu(m)} S_\lambda f\|_{\ell^{q_c}_m L^{q_c}_{t,x}(M^{n-1}\times\mathbb{R})} \lesssim \lambda^{\frac{1}{q_c}}. \tag{2.65}$$

此外，由 m 中的 H´older 不等式和 (2.64)，我们有

$$\|\alpha_m(t)(I-\sigma_\lambda) S_\lambda f\|_{\ell^2_m L^{q_c}_{t,x}(M^{n-1}\times\mathbb{R})} \lesssim T^{\frac{q_c-2}{2q_c}} \|\alpha_m(t)(I-\sigma_\lambda) S_\lambda f\|_{\ell^{q_c}_m L^{q_c}_{t,x}(M^{n-1}\times\mathbb{R})} \lesssim \lambda^{\frac{1}{q_c}},$$

由 (2.63) 可知，如果 M^{n-1} 的所有截面曲率均为负，我们也有 (2.61)。

$$\|\alpha_m(t) A^{\theta_0}_{\nu(m)} S_\lambda f\|_{\ell^2_m L^{q_c}_{t,x}(M^{n-1}\times\mathbb{R})} \lesssim \lambda^{\frac{1}{q_c}}. \tag{2.66}$$

在 (2.65) 和 (2.66) 中，我们考虑映射

$$f \to \big(Wf\big)(x,t,m) = \eta(t/T)\alpha_m(t)\big(A^{\theta_0}_{\nu(m)} \circ e^{-it\lambda^{-1}\Delta_g} f\big)(x).$$

重复命题 2.4 证明中使用的标准 TT^* 论证，我们可在以下条件成立时得到 (2.65)：

$$\|WW^*G\|_{\ell^{q_c}_m L^{q_c}_{t,x}(M^{n-1}\times\mathbb{R})} \le C\lambda^{\frac{2}{q_c}} \|G\|_{\ell^{q_c'}_{m'} L^{q_c'}_{t,x}(M^{n-1}\times\mathbb{R})}, \tag{2.65$'$}$$

且当 (2.66)

$$\|WW^*G\|_{\ell^2_m L^{q_c}_{t,x}(M^{n-1}\times\mathbb{R})} \le C\lambda^{\frac{2}{q_c}} \|G\|_{\ell^2_{m'} L^{q_c'}_{t,x}(M^{n-1}\times\mathbb{R})}, \tag{2.66$'$}$$

with

(2.67)

$$\begin{aligned}
&WW^*G(x,t,m) = \\
&= \alpha_m(t)\eta(t/T)\sum_{m'}\int_{-\infty}^{\infty} \alpha_{m'}(s)\eta(s/T)\Big[\big(A^{\theta_0}_{\nu(m)} e^{-i(t-s)\lambda^{-1}\Delta_g}(A^{\theta_0}_{\nu(m')})^*\big) G(\,\cdot\,,s,m')\Big](x)\,ds \\
&= \sum_{m'}\iint K(x,t,m;y,s,m')\,G(y,s,m')\,dyds,
\end{aligned}$$

with

(2.68)
$$K(x,t,m;\,y,s,m')\;=\alpha_m(t)\eta(t/T)\big(A^{\theta_0}_{\nu\,(m)}e^{-i(t-s)\lambda^{-1}\Delta_g}(A^{\theta_0}_{\nu\,(m')})^*\big)(x,y)\;\alpha_{m'}(s)\eta(s/T).$$

在§4中我们将证明（见命题 4.2），当 $T=c_0\log\lambda$ 足够小时，对于 M^{n-1} 非正曲率

$$|K(x,t,m;y,s,m')|\le C\lambda^{\frac{n-1}{2}}\,|t-s|^{-\frac{n-1}{2}}, \tag{2.69}$$

而且，如果 M^{n-1} 的所有截面曲率均为负数。

$$|K(x,t,m;y,s,m')|\le C\lambda^{\frac{n-1}{2}}\,|t-s|^{-N}\quad\text{if }\;|t-s|\ge 1. \tag{2.70}$$

正如我们将看到的，正是对于这两个估计，我们需要假设 c_0 足够小，且其大小取决于 (M^{n-1},g)。此外，由于 (2.17) 中 α 的支撑集性质，我们还可以得到

$$K(x,t,m;y,s,m')=0\quad\text{if }\;|t-m|\ge 3\text{ or }\;|s-m'|\ge 3. \tag{2.71}$$

因此，如果我们定义冻结算子

$$\big(W_{t,m;s,m'}h\big)(x)=\int_{M^{n-1}}K(x,t,m;y,s,m')\,h(y)\,dy,$$

我们有

$$W_{t,m;s,m'}\equiv 0\quad\text{if }\;|t-m|\ge 3\text{ or }\;|s-m'|\ge 3, \tag{2.72}$$

并且，如果 M^{n-1} 具有非正曲率，则由（2.69），

$$\|W_{t,m;s,m'}h\|_{L^\infty_x(M^{n-1})}\le C\lambda^{\frac{n-1}{2}}\,|t-s|^{-\frac{n-1}{2}}\|h\|_{L^1(M^{n-1})}, \tag{2.73}$$

而且，如果 M^{n-1} 的截面曲率为负，由 (2.70) 和 (2.71) 可得，

(2.74)
$$\|W_{t,m;s,m'}h\|_{L^\infty_x(M^{n-1})}\lesssim\begin{cases}\lambda^{\frac{n-1}{2}}|t-s|^{-\frac{n-1}{2}}\|h\|_{L^1(M^{n-1})}\text{ if }\;|m-m'|\le 10\\ \lambda^{\frac{n-1}{2}}|m-m'|^{-N}\|h\|_{L^1(M^{n-1})}\;\forall N\text{ if }\;|m-m'|>10.\end{cases}$$

此外，根据 (2.51) 以及 $e^{-it\lambda^{-1}\Delta_g}$ 是酉的这一事实，我们当然总是有

$$\|W_{t,m;s,m'}\|_{L^2(M^{n-1})\to L^2(M^{n-1})}=O(1). \tag{2.75}$$

由插值 (2.73)、(2.75) 以及 (2.72) 可得，若 M^{n-1} 具有非正曲率

(2.76)
$$\|W_{t,m;s,m'}h\|_{L^{q_c}_x(M^{n-1})}=\begin{cases}O(\lambda^{\frac{2}{q_c}}|t-s|^{-\frac{2}{q_c}}\|h\|_{L^{q_c'}(M^{n-1})})\text{ if }\;|t-m|\le 3\text{ and }\;|s-m'|\le 3\\ 0\quad\text{if }\;|t-m|>3\text{ or }\;|s-m'|>3.\end{cases}$$

而如果我们还使用 (2.74)，那么这一论证意味着，如果M^{n-1} 的截面曲率都为负

(2.77)
$$\|W_{t,m;s,m'}h\|_{L^{q_c}_x(M^{n-1})}=$$
$$\begin{cases}O(\lambda^{\frac{2}{q_c}}|t-s|^{-\frac{2}{q_c}}\|h\|_{L^{q_c'}(M^{n-1})})\text{ if }|m-m'|\le 10,\,|t-m|\le 3\text{ and }|s-m'|\le 3\\ O(\lambda^{\frac{2}{q_c}}|m-m'|^{-2}\|h\|_{L^{q_c'}(M^{n-1})})\text{ if }\;|m-m'|>10,\,|t-m|\le 3\,\text{and }\;|s-m'|\le 3\\ 0\quad\text{if }\;|t-m|>3\text{ or }\;|s-m'|>3.\end{cases}$$

注意，对于固定的 t, m ，由闵可夫斯基不等式和（2.67）可得

$$\|WW^*G(\,\cdot\,,t,m)\|_{L^{q_c}_x} \le \sum_{m'} \int \Big\| \int K(x,t,m;y,s,m')\, G(y,s,m')\, dy \Big\|_{L^{q_c}_x} ds \tag{2.78}$$
$$= \sum_{m'} \int \big\| (W_{t,m;s,m'} G(\,\cdot\,,s,m))(x) \big\|_{L^{q_c}_x} ds.$$

Set

$$H(t,m;s,m') = \begin{cases} \lambda^{\frac{2}{q_c}} |t-s|^{-\frac{2}{q_c}}, \text{ if } |t-m| \le 3 \text{ and } |s-m'| \le 3 \\ 0 \quad \text{if } |t-m| > 3 \text{ or } |s-m'| > 3. \end{cases} \tag{2.79}$$

然后，由 (2.76) 和 (2.78) 可得

$$\|WW^*G\|_{\ell^{q_c}_m L^{q_c}_{t,x}} \lesssim \Big(\sum_m \int \big| \sum_{m'} \int H(t,m;s,m')\, \|G(\,\cdot\,,s,m')\|_{L^{q_c'}_x}\, ds \big|^{q_c} dt \Big)^{1/q_c}$$
$$\lesssim \lambda^{\frac{2}{q_c}} \Big(\sum_{m'} \int \|G(\,\cdot\,,s,m')\|^{q_c'}_{L^{q_c'}_x}\, ds \Big)^{1/q_c'}$$
$$= \lambda^{\frac{2}{q_c}} \|G\|_{\ell^{q_c'}_{m'} L^{q_c'}_{t,x}(M^{n-1}\times\mathbb{R})},$$

因为如果

$$Uf(t,m) = \sum_{m'} \int H(t,m;s,m')\, f(s,m')\, ds, \tag{2.80}$$

我们有

$$\|U\|_{\ell^{q_c'}_{m'} L^{q_c'}_s \to \ell^{q_c}_m L^{q_c}_t} = O(\lambda^{\frac{2}{q_c}})$$

由 [29] 中定理 0.3.6 的一个简单变体可得。因此，我们得到了 (2.65′)。

如果 M^{n-1} 的所有截面曲率均为负，并且我们设

$$H(t,m;s,m') = \begin{cases} \lambda^{\frac{2}{q_c}} |t-s|^{-\frac{2}{q_c}} \text{ if } |m-m'| \le 10,\, |t-m| \le 3 \text{ and } |s-m'| \le 3 \\ \lambda^{\frac{2}{q_c}} |m-m'|^{-2} \text{ if } |m-m'| > 10,\, |t-m| \le 3 \text{ and } |s-m'| \le 3 \\ 0 \quad \text{if } |t-m| > 3 \text{ or } |s-m'| > 3, \end{cases}$$

并且，如果 U 如 (2.80) 所示，那么 [29] 中定理 0.3.6 的证明给出

$$\|U\|_{\ell^2_{m'} L^{q_c'}_s \to \ell^2_m L^{q_c}_t} = O(\lambda^{\frac{2}{q_c}}),$$

从而由上述论证得到 (2.66′)。 □

至此，命题 2.5 的证明完成，也就证明了定理 1.1 和 1.2，但还需证明命题 2.6 中关键的局部估计，以及所用到的全局核估计 (2.34)、(2.69) 和 (2.70)。我们将在下一节运用双线性调和分析技术证明前者，并在最后一节证明核估计。

证明定理 1.1 和定理 1.2 所需完成的另一项任务，是证明我们所用的交换子估计：

引理*2.7* 的证明。根据(2.42) 和 (2.43)，回顾一下，符号 $B(x,\xi) = B_\lambda(x,\xi) \in S^0_{1,0}$ 在 $|\xi|$ 不与 λ可比时为零。特别地，当 $|\xi|$ 大于 λ的某个固定倍数时，它为零，并且属于 $S^0_{1,0}$ 的一个有界子集。此外，如果 $a^{\theta_0}_\nu(x,\xi)$ 是我们的零阶二进微局部算子的主符号，我们回顾由 (2.48) 可知，当 $\delta > 0$ 足够小时

$$a^{\theta_0}_\nu(x,\xi) = a^{\theta_0}_\nu(\chi_r(x,\xi)) \quad \text{on supp } B_\lambda \text{ if } |r| \le 2\delta, \tag{2.81}$$

其中 χ_r： $T^*M^{n-1}\setminus 0 \to T^*M^{n-1}\setminus 0$表示余切丛中的测地流。根据关于 $M^{n-1}\times \mathbf{R}$ 的索об列夫估计，为了证明 (2.62)，只需证明

$$\left\| \left(\sqrt{I+P^2+D_t^2}\right)^{n\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q_c}\right)} \left[B_\lambda \sigma_\lambda A_\nu^{\theta_0} - B_\lambda A_\nu^{\theta_0}\sigma_\lambda\right] \right\|_{L^2_{t,x}\to L^2_{t,x}} = O(\lambda^{\frac{1}{q_c}-\frac{1}{4}}). \tag{2.82}$$

为证明这一点，我们回顾一下：

$$\sigma_\lambda = (2\pi)^{-1}\tilde\beta(D_t/\lambda)\int \hat\sigma(r) e^{ir\lambda^{1/2}|D_t|^{1/2}} e^{-irP}\, dr,$$

并且，因此，由于 $e^{ir\lambda^{1/2}|D_t|^{1/2}}$ 的 $L^2\to L^2$ 范数为一且与 B_λ、 $A_\nu^{\theta_0}$以及 $(\sqrt{I+P^2+D_t^2})^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{q_c})}$可交换，并且由于$\hat\sigma(r)=0$、 $|r|\geq 2\delta$，根据闵可夫斯基积分不等式，如果

(2.83)

$$\sup_{|r|\leq 2\delta} \left\| \left(\sqrt{I+P^2+D_t^2}\right)^{n\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q_c}\right)} \tilde\beta(D_t/\lambda)\left[B_\lambda e^{-irP}A_\nu^{\theta_0} - B_\lambda A_\nu^{\theta_0} e^{-irP}\right] \right\|_{L^2_{t,x}\to L^2_{t,x}} = O(\lambda^{\frac{1}{q_c}-\frac{1}{4}}).$$

接下来，为了能够使用埃戈罗夫定理，我们写出

$$\left[B_\lambda e^{-irP}A_\nu^{\theta_0} - B_\lambda A_\nu^{\theta_0} e^{-irP}\right] = B_\lambda\left[(e^{-irP}A_\nu^{\theta_0}e^{irP}) - B_\lambda A_\nu^{\theta_0}\right]\circ e^{-irP}.$$

由于 e^{-irP} 也具有为 1 的 L^2-算子范数，我们将由此得到 (2.83)

$$\left\| \left(\sqrt{I+P^2+D_t^2}\right)^{n\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q_c}\right)} \tilde\beta(D_t/\lambda)\, B_\lambda\left[(e^{-irP}A_\nu^{\theta_0}e^{irP}) - A_\nu^{\theta_0}\right] \right\|_{L^2_{t,x}\to L^2_{t,x}} = O(\lambda^{\frac{1}{q_c}-\frac{1}{4}}). \tag{2.84}$$

根据埃戈罗夫定理（例如参见 Taylor [36, §VIII.1]）

$$A^{\theta_0}_{\nu,r}(x,D) = e^{-irP}A_\nu^{\theta_0}e^{irP}$$

是一个以参数 r 为参数的一参数零阶伪微分算子族，其主符号为 $a_\nu^{\theta_0}(\chi_{-r},x)(\xi,B_\lambda A_\nu^{\theta_0})$。根据（2.81）以及伪微分算子的复合演算，$r$、 $B_\lambda A_\nu^{\theta_0}$ 和 B_λ 的主符号均等于 $x(\xi,a_\nu^{\theta_0})x(\xi,|r|\leq 2\delta)$，若 $\theta=1$。如果 $A_\nu^\theta\in S_1^0$，则 B_λ=0，因此在这种情况下，我们将有 $e^{-irP}A_\nu^\theta e^{irP}(-B_\lambda A_\nu^\theta)$ -1 是一个阶为 $|\xi|$ 的伪微分算子，其符号在 λ 大于某个固定倍数的 [28, 时消失（例如参见 6] 定理 4.3. $\theta_0=\lambda^{-1/8}$）。由于我们假设 $A_\nu^{\theta_0}$，根据它们的构造方式，符号 $S^0_{7/8}$ 属于 $1/8$、 [36, 的有界子集。因此，根据 147], 第 $|r|\leq 2\delta$ 页，对于 B_λ，$e^{-irP}A_\nu^{\theta_0}e^{irP}(-B_\lambda A_\nu^{\theta_0})$ $S^{-3/4}_{7/8}$ 属于 $1/8$、 $|\xi|$ 的有界子集，其符号在 λ 大于某个固定倍数的 B_λ 时消失，这是因为符号 $x(\xi,$ [36,) 具有这一性质（例如参见 46] 第 页）。

我们还需要考虑(2.84)中范数内的其他算子。由于 $\tilde\beta(D_t/\lambda)$ 是一个零阶二进算子，根据上述结果，(2.84) 左侧的算子属于 $S^{n\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q_c}\right)-\frac{3}{4}}_{7/8,1/8}$，$(M^{n-1}\times\mathbf{R})$ 的一个有界子集，其符号在 $|(\xi,\tau)|$ 大于 λ 的某个固定倍数时为零。因此，(2.84) 的左侧为$O(\lambda^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{q_c})-\frac{3}{4}})$ $=O(\lambda^{\frac{1}{q_c}-\frac{1}{4}})$。因为， $q_e=2(n+1)/n-1$所以 $\frac{1}{q_c}=n(\frac{1}{2}-\frac{1}{q_c})-\frac{1}{2}$。□

2.3. 端点 Strichartz 估计：定理 1.3 的证明。

我们现在证明最后一个定理：如果 M^{n-1} 的所有截面曲率均非正，并且如同必要条件所要求的那样， $d=n-1\geq 3$我们有端点 Strichartz 估计

(1.15)。正如我们之前指出的，这类改进在球面 S^d 上不可能成立，因为只需在 (1.1) 中取初始数据为带状特征函数，就能使这些估计达到饱和。

为证明在我们的几何假设下得到的改进，我们将采用 Burq、G´erard 和 Tzvetkov 的普适局部估计，以及我们在定理 1.1 中针对非端点指数得到的改进、我们使用过的一些核估计，以及我们其中一位作者 [30] 提出的一个论证；该论证是对 Bourgain [8]早先方法的一种变体。

为此，我们回顾 Burq、G´erard 和 Tzvetkov 的普适端点 Strichartz 估计。该估计表明，对于 $\lambda \gg 1$，有一致的二进小区间界：

$$\|e^{-it\Delta_g}\beta(P/\lambda)f\|_{L^2_tL^{q_e}_x(M^{n-1}\times[0,\lambda^{-1}])} \le C\|f\|_2, \text{ if } \ q_e = \tfrac{2d}{d-2} = \tfrac{2(n-1)}{n-3}, \ d = n-1 \ge 3.$$

当然，这等价于以下关于缩放后的 Schr¨odinger 算子的估计：

$$\|e^{-it\lambda^{-1}\Delta_g}\beta(P/\lambda)f\|_{L^2_tL^{q_e}_x(M^{n-1}\times[0,1])} \le C\lambda^{\frac12}\|f\|_2, \ q_e = \tfrac{2(n-1)}{n-3}, \ n \ge 4. \tag{2.85}$$

我们还指出，利用引言中描述的 Littlewood-Paley 方法，可以通过证明当 M^{n-1} 的所有截面曲率均非正时，对于上述 q_e 和 n，有以下估计，从而得到定理 1.3 中的界 (1.15)。

$$\left\|e^{-it\lambda^{-1}\Delta_g}\beta(P/\lambda)f\right\|_{L^2_tL^{q_e}_x(M^{n-1}\times[0,\log\lambda])} \le C\lambda^{\frac12}\,(\log\lambda)^{\frac12}\,(\log(\log\lambda))^{-\frac12}\|f\|_2. \tag{2.86}$$

为了使用我们先前的论证，结果发现我们需要修改高度 s分解 (2.27)，如下所示

$$A_+ = \{(x,t)\in M^{n-1}\times[0,\log\lambda] : |U_\lambda f(x,t)| \ge \lambda^{\frac{n-1}{4}}(\log\lambda)^{\varepsilon_0}\}, \tag{2.87}$$
$$\text{and } \ A_- = \{(x,t)\in M^{n-1}\times[0,\log\lambda] : |U_\lambda f(x,t)| < \lambda^{\frac{n-1}{4}}(\log\lambda)^{\varepsilon_0}\},$$

假设（正如我们所假设的）$\|f\|_2 = 1$，其中 $\varepsilon_0 > 0$ 将在下文中指定，并且

$$U_\lambda f = e^{-it\lambda^{-1}\Delta_g}\beta(P/\lambda)f.$$

现在来看看如何调整命题 2.4 的证明，以得到以下结果 .

命题 2.8。假设 M^{n-1} 的所有曲率均非正，并固定 $\varepsilon_0 > 0$，且令 A_+ 如 (2.87) 所示。那么，若与前文一样，$\|f\|_2 = 1$ 和 $\lambda \gg 1$ 满足以下一致界

$$\|U_\lambda f\|_{L^2_tL^{q_e}_x(A_+\cap(M^{n-1}\times I_T))} \le C\lambda^{\frac12}, \tag{2.88}$$

若 $I_T \subset [0, \text{对数 } \lambda]$ 是一个长度为 $|I_T| \le T$ 的区间，其中

$$T = c_0\log(\log\lambda),$$

其中 $c_0 > 0$ 足够小（取决于 $\varepsilon_0 > 0$ 和 M^{n-1}）。

证明。若 I_T 如上所述，取 g 使得

$$\|g\|_{L^2_tL^{q_e'}_x(A_+\cap(M^{n-1}\times I_T))} = 1, \text{ and} \tag{2.89}$$
$$\|U_\lambda f\|_{L^2_tL^{q_e}_x(A_+\cap(M^{n-1}\times I_T))} = \iint U_\lambda f\cdot\overline{\mathbb{1}_{A_+\cap(M^{n-1}\times I_T)}\cdot g}\,dxdt.$$

注意到 $U_\lambda U_\lambda^* = e^{-i(t-s)\lambda^{-1}\Delta_g}\beta^2(P/\lambda)$。令我们分解

$$U_\lambda U_\lambda^* = L_\lambda + G_\lambda,$$

其中，若 α_m 如式 (2.18) 所示

$$L_\lambda = \sum_{\{(j,k):\,|j-k|\le 10\}} \alpha_j(t)e^{-i(t-s)\lambda^{-1}\Delta_g}\beta^2(P/\lambda)\alpha_k(s).$$

然后，很容易看出 (2.85) 得出的是

$$\|L_\lambda\|_{L^2_t L^{q_e'}_x \to L^2_t L^{q_e}_x} = O(\lambda), \tag{2.90}$$

并且再次利用 (2.34)，我们得到 G_λ 的核满足

$$|G_\lambda(x,t;y,s)| \le C\lambda^{\frac{n-1}{2}} \exp(C_M|t-s|) \quad \text{if } |t-s| \lesssim \log\lambda, \tag{2.91}$$

对于某个依赖于 M^{n-1} 的常数 C_M。

因此，如果我们重复命题 2.4 证明的第一部分，就会发现 менам

$$\|U_\lambda f\|^2_{L^2_t L^{q_e}_x(A_+\cap(M^{n-1}\times I_T))} \le |I| + |II|,$$

其中

$$I = \iint L_\lambda\big(\mathbb{1}_{A_+\cap(M^{n-1}\times I_T)}\cdot g\big)\,\overline{\mathbb{1}_{A_+\cap(M^{n-1}\times I_T)}\cdot g}\,dxdt$$

$$II = \iint G_\lambda\big(\mathbb{1}_{A_+\cap(M^{n-1}\times I_T)}\cdot g\big)\,\overline{\mathbb{1}_{A_+\cap(M^{n-1}\times I_T)}\cdot g}\,dxdt.$$

由（2.89）和（2.90）

$$|I| \le \big\|L_\lambda(\mathbb{1}_{A_+\cap(M^{n-1}\times I_T)}\cdot g)\big\|_{L^2_t L^{q_e}_x(A_+\cap(M^{n-1}\times I_T))} \le C\lambda. \tag{2.92}$$

另外，由（2.91），若 $T = c_0(\log(\log\lambda))$ 且 $c_0>0$ 充分小，则有

$$|G_\lambda(x,t;y,s)| \le C\lambda^{\frac{n-1}{2}}(\log\lambda)^{\varepsilon_0}, \text{ if } t,s\in I_T.$$

因此，对于此 T 的取值，由（2.89）和 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}|II| &\le C\lambda^{\frac{n-1}{2}}(\log\lambda)^{\varepsilon_0}\big\|\,\mathbb{1}_{A_+\cap(M^{n-1}\times I_T)}\cdot g\,\big\|^2_{L^1_{t,x}(A_+\cap(M^{n-1}\times I_T)}\\ &\le C\lambda^{\frac{n-1}{2}}(\log\lambda)^{\varepsilon_0}\,\|\mathbb{1}_{A_+\cap(M^{n-1}\times I_T)}\|^2_{L^2_t L^{q_e}_x}.\end{aligned}$$

由于 $1\le |U_\lambda f(x,t)|\cdot(\lambda^{\frac{n-1}{4}}(\log\lambda)^{\varepsilon_0})^{-1}$ 在 A_+ 上成立，我们有

$$\|\mathbb{1}_{A_+\cap(M^{n-1}\times I_T)}\|^2_{L^2_t L^{q_e}_x} \le \lambda^{-\frac{n-1}{2}}(\log\lambda)^{-2\varepsilon_0}\|U_\lambda f\|^2_{L^2_t L^{q_e}_x(A_+\cap(M^{n-1}\times I_T))},$$

因此，对于 $\lambda\gg 1$

$$|II| \le \tfrac12\|U_\lambda f\|^2_{L^2_t L^{q_e}_x(A_+\cap(M^{n-1}\times I_T))}. \tag{2.93}$$

由于 (2.92) 和 (2.93) 蕴含 (2.88)，证明完成。 □

接下来，请注意，根据命题 2.8

$$\|U_\lambda f\|_{L^2_t L^{q_e}_x(A_+)} \le C\lambda^{\frac12}(\log\lambda/\log(\log\lambda))^{\frac12}.$$

因此，如果我们能够证明当 (2.87) 中的 $\varepsilon_0>0$ 足够小时，对于 $\lambda\gg1$，则有 (2.86)，进而有 (1.15)。

$$\|U_\lambda f\|_{L^2_t L^{q_e}_x(A_-)} \le C\lambda^{\frac12}(\log\lambda)^{\frac12-\delta_1}, \quad \text{some } \delta_1>0. \tag{2.94}$$

我们可以利用针对 L^{q_c} 的对数幂增益来证明这一点，因为根据 (2.85)，

$$\tfrac12 = \tfrac{n-1}{2}(\tfrac12-\tfrac{1}{q_e}) \quad \text{and} \quad \tfrac{1}{q_c} = \tfrac{n-1}{2}(\tfrac12-\tfrac{1}{q_c}). \tag{2.95}$$

我们还注意到，根据 Hölder 不等式，由于 $A_-\subset M^{n-1}\times[0,\log\lambda]$，$L^{q_c}_{t,x}$ 估计（1.10′）给出

$$\|U_\lambda f\|_{L^r_t L^{q_c}_x(A_-)} \le C\lambda^{\frac{1}{q_c}}(\log\lambda)^{\frac1r-\delta_0}, \text{ if } 1\le r<q_c, \text{ and } \delta_0 = \tfrac{1}{q_c}(1-\tfrac{2}{q_c})>0. \tag{2.96}$$

注意 $q_e>q_c$，并令

$$\tilde\varepsilon_0 = \tfrac{q_e-q_c}{q_e}\varepsilon_0 < \varepsilon_0 \quad \text{and} \quad \tilde\delta_0 = \tfrac{q_c}{q_e}\delta_0 < \delta_0. \tag{2.97}$$

然后由（2.87）和（2.97）得出

$$\begin{aligned}(2.98)\qquad \|U_\lambda f\|_{L^2_t L^{q_e}_x(A_-)} &\le \|S_\lambda f\|^{\frac{q_e-q_c}{q_e}}_{L^\infty(A_-)} \cdot \|U_\lambda f\|^{\frac{q_c}{q_e}}_{L_t^{\frac{2q_c}{q_e}} L^{q_c}_x(A_-)} \\ &\lesssim (\log\lambda)^{\tilde\varepsilon_0}\lambda^{\frac{n-1}{4}(\frac{q_e-q_c}{q_e})}\|U_\lambda f\|^{\frac{q_c}{q_e}}_{L_t^{\frac{2q_c}{q_e}} L^{q_c}_x(A_-)} \\ &= (\log\lambda)^{\tilde\varepsilon_0}\lambda^{\frac{n-1}{4}}\,\lambda^{-\frac{n-1}{4}\frac{q_c}{q_e}}\|U_\lambda f\|^{\frac{q_c}{q_e}}_{L_t^{\frac{2q_c}{q_e}} L^{q_c}_x(A_-)}.\end{aligned}$$

如果我们令 $r = \frac{2q_c}{q_e}$，那么，由于 $n \ge 4$，我们有 $r \in [1, q_c)$。因此，若应用 (2.96) 并回顾 (2.97)，由于 $\|f\|_2 = 1$，我们可以如下估计最后一个因子。

$$\begin{aligned}(2.99)\qquad \|U_\lambda f\|^{\frac{q_c}{q_e}}_{L_t^{\frac{2q_c}{q_e}} L^{q_c}_x(A_-)} &\le C\lambda^{\frac{n-1}{2}(\frac12-\frac{1}{q_c})\cdot\frac{q_c}{q_e}}\left[(\log\lambda)^{\frac{q_e}{2q_c}-\delta_0}\right]^{\frac{q_c}{q_e}} \\ &= C\lambda^{\frac{n-1}{4}\cdot\frac{q_c}{q_e}-\frac{n-1}{2}\cdot\frac{1}{q_e}}(\log\lambda)^{\frac12-\tilde\delta_0}.\end{aligned}$$

如果我们结合（2.98）和（2.99），并再次使用（2.95），便可得出

$$\|S_\lambda f\|_{L^2_t L^{q_e}_x(A_-)} \le C\lambda^{\frac{n-1}{4}-\frac{n-1}{2}\frac{1}{q_e}}(\log\lambda)^{\frac12-(\tilde\delta_0-\tilde\varepsilon_0)} = C\lambda^{\frac12}(\log\lambda)^{\frac12-(\tilde\delta_0-\tilde\varepsilon_0)}.$$

这便得到了 (2.94)，其中 $\delta_1 = \delta_0 - \tilde\varepsilon_0$，只要 $\varepsilon_0 > 0$ 足够小，使得 $\tilde\varepsilon_0 < \delta_0$，从而完成了定理 1.3 的证明。□

注记。我们注意到，如果 M^{n-1}是一个维数为 $d = n-1 \ge 3$的环面 $\mathbf{T}^{n-1}$，那么我们可以使用 Bourgain和Demeter [10] 的环面估计，从而得到比我们针对一般非正曲率流形所得结果强得多的结果。事实上，我们回顾在 [10] 中已经证明了 $\|\beta(P/\lambda)e^{-it\Delta_{\mathbb{T}^{n-1}}}\|_{L^2(\mathbb{T}^{n-1})\to L^{q_c}(\mathbb{T}^{n-1}\times[0,1])} = O(\lambda^\varepsilon)\forall\varepsilon>0$。因此，根据索об列夫估计和 H¨older 不等式，我们有

$$\begin{aligned}\|\beta(P/\lambda)e^{-it\Delta_{\mathbb{T}^{n-1}}}\|_{L^2_t L^{q_e}_x(\mathbb{T}^{n-1}\times[0,1])} &\lesssim \lambda^{(n-1)(\frac{1}{q_c}-\frac{1}{q_e})}\|\beta(P/\lambda)e^{-it\Delta_{\mathbb{T}^{n-1}}}\|_{L^2_t L^{q_c}_x(\mathbb{T}^{n-1}\times[0,1])} \\ &\le \lambda^{(n-1)(\frac{1}{q_c}-\frac{1}{q_e})}\|\beta(P/\lambda)e^{-it\Delta_{\mathbb{T}^{n-1}}}\|_{L^{q_c}_t L^{q_c}_x(\mathbb{T}^{n-1}\times[0,1])} \\ &\lesssim \lambda^{(n-1)(\frac{1}{q_c}-\frac{1}{q_e})+\varepsilon}\|f\|_2 = \lambda^{\frac{2}{n+1}+\varepsilon}\|f\|_2.\end{aligned}$$

如果 $d = n-1 \ge 3$，这比 Burq、G´erard 和 Tzvetkov [11], 的通用界 $\lambda^{\frac{2}{n+1}-\frac12+\varepsilon} \le \lambda^{-\frac{1}{10}+\varepsilon}$要好得多，远胜于我们在定理 1.3 中取得的 $(\log\log\lambda)^{-1/2}$ 改进。

另一方面，对于环面$\mathbf{T}^n$，在长度为 $\lambda^{-1+\delta_n}$ 的区间上，我们似乎很可能能够在二进估计中实现无损失，其中某个 $\delta_n > 0$，这将是这一情形下 (1.14)的自然类比。我们希望在后续工作中研究这一问题，以及球面[1] 上可能得到的改进版 Strichartz估计。

3. 局部变系数调和分析：命题 2.6 的证明。

我们在处理 A_λ 时，是在尺度$\theta_0 = \lambda^{-1/8}$上的伪微分截断。为了获得（2.54）右侧最后一项中涉及的增益，我们还必须使用尺度为 $\theta_\ell = 2^\ell\theta_0$ 且满足 $\ell < 0$的截断函数。

为证明这一点，我们将采用 Blair 和 Sogge [7] 以及更早期研究中的策略，尤其是 Tao、Vargas 和 Vega [35] 以及 Lee [23]的工作。

[1]我们应当指出，在一项近期工作中，S´anchez 和 Esquivel [25] 陈述了比 [11] 中更强的结果。然而，[25] 中的论证存在漏洞，原因是对索об列夫估计的使用不当；而简单的例子（例如引言中讨论的函数 $f_\lambda = \beta(P/\lambda)(x,\ x_0)$）表明，[25] 中的一些结果并不成立。

我们首先指出，若 δ 如式 (2.6) 中所示足够小，则有

$$\alpha_m(t)\tilde{\sigma}_\lambda - \sum_\nu \alpha_m(t)\tilde{\sigma}_\lambda A_\nu^{\theta_0} = R_\lambda, \text{ where } \|R_\lambda H\|_{L^\infty_{t,x}} \lesssim \lambda^{-N}\|H\|_{L^2_{t,x}} \ \forall N. \tag{3.1}$$

因此，我们有

$$\big(\alpha_m(t)\tilde{\sigma}_\lambda H\big)^2 = \sum_{\nu,\tilde{\nu}} \big(\alpha_m(t)\tilde{\sigma}_\lambda A_\nu^{\theta_0} H\big)\cdot\big(\alpha_m(t)\tilde{\sigma}_\lambda A_{\tilde{\nu}}^{\theta_0} H\big) + O(\lambda^{-N}\|H\|^2_{L^2_{t,x}})\ \forall N. \tag{3.2}$$

与之前的工作一样，令

$$\Upsilon^{\mathrm{diag}}(H) = \sum_{(\nu,\tilde{\nu})\in\Xi_{\theta_0}} \big(\alpha_m(t)\tilde{\sigma}_\lambda A_\nu^{\theta_0} H\big)\cdot\big(\alpha_m(t)\tilde{\sigma}_\lambda A_{\tilde{\nu}}^{\theta_0} H\big), \tag{3.3}$$

and

$$\Upsilon^{\mathrm{far}}(H) = \sum_{(\nu,\tilde{\nu})\notin\Xi_{\theta_0}} \big(\alpha_m(t)\tilde{\sigma}_\lambda A_\nu^{\theta_0} H\big)\cdot\big(\alpha_m(t)\tilde{\sigma}_\lambda A_{\tilde{\nu}}^{\theta_0} H\big) + O(\lambda^{-N}\|H\|^2_{L^2_{t,x}}), \tag{3.4}$$

其中最后一项表示（3.2）中的误差项。因此，

$$\big(\alpha_m(t)\tilde{\sigma}_\lambda H\big)^2 = \Upsilon^{\mathrm{diag}}(H) + \Upsilon^{\mathrm{far}}(H). \tag{3.5}$$

因此， $\Upsilon^{\mathrm{diag}}(H)$中的求和是对近对角线对 $(\nu,\tilde{\nu})$ 进行的。特别地，我们有 $|\nu-\tilde{\nu}|\le C\theta_0$ ，对于某个一致常数，当 $\nu,\tilde{\nu}$ 遍历 $\theta_0\mathbb{Z}^{(2n-3)}$时。另一项 $\Upsilon^{\mathrm{far}}(H)$ 是其余的对，其中许多对远离对角线。该和将提供 (2.54) 中最后一项的贡献。

这里的两类项处理方式不同，与分析抛物限制问题或谱投影估计时一样。

我们可以通过使用 [35] 中的引理6.1的变系数变体（另见 [7]中的引理4.2）来处理(3.5)右侧的第一项：

引理 3.1。若 $\Upsilon^{diag}(H)$ 如（3.5） 中所述且 $n\ge 3$，则我们有一致界 s

$$\|\Upsilon^{diag}(H)\|_{L^{q_c/2}_{t,x}} \lesssim \Big(\sum_\nu \|\alpha_m(t)\tilde{\sigma}_\lambda A_\nu^{\theta_0} H\|^{q_c}_{L^{q_c}_{t,x}}\Big)^{2/q_c} + O(\lambda^{\frac{2}{q_c}-}\|H\|^2_{L^2_{t,x}}). \tag{3.6}$$

我们还需要关于 $\Upsilon^{\mathrm{far}}(H)$ 的以下估计，该估计将利用 Lee [23] 的双线性振荡积分估计以及我们两人在 [4], [5] 和 [7] 中的论证来证明。

引理 3.2. 若 $\Upsilon^{far}(H)$ 如 (3.4) 中所述，且如上所述 $\theta_0=\lambda^{-1/8}$，则对于所有 $\varepsilon>0$ ，我们有 $H=S_\lambda f$

$$\iint |\Upsilon^{far}(H)|^{q/2}\,dxdt \lesssim_\varepsilon \lambda^{1+\varepsilon}\left(\lambda^{7/8}\right)^{\frac{n-1}{2}(q-q_c)}\|H\|^q_{L^2_{t,x}}, \quad \text{if } q=\tfrac{2(n+2)}{n}. \tag{3.7}$$

我们暂且推迟这两个引理的证明，先说明如何利用它们得到命题 2.6。

若令 $q=\,^{2}{}_{(n+2)\ n}$ 如引理 3.2 中所述，我们注意到 $q<q_c$ ，并且

$$\begin{aligned}&|\alpha_m(t)\tilde{\sigma}_\lambda H\cdot\alpha_m(t)\tilde{\sigma}_\lambda H|\\ &\qquad\le 2^{q/2}\,|\alpha_m(t)\tilde{\sigma}_\lambda H\cdot\alpha_m(t)\tilde{\sigma}_\lambda H|^{\frac{q_c-q}{2}}\cdot\big(|\Upsilon^{\mathrm{diag}}(H)|^{q/2}+|\Upsilon^{\mathrm{far}}(H)|^{q/2}\big).\end{aligned}$$

因此，

$$\|\alpha_m(t)\tilde{\sigma}_\lambda H\|^{q_c}_{L^{q_c}(A_-)} = \int_{A_-} \left|\alpha_m(t)\tilde{\sigma}_\lambda H \cdot \alpha_m(t)\tilde{\sigma}_\lambda H\right|^{q_c/2} dxdt \tag{3.8}$$

$$\lesssim \int_{A_-} |\alpha_m(t)\tilde{\sigma}_\lambda H \cdot \alpha_m(t)\tilde{\sigma}_\lambda H|^{\frac{q_c-q}{2}} \, |\Upsilon^{\mathrm{diag}}(H)|^{q/2} \, dxdt$$

$$+ \int_{A_-} |\alpha_m(t)\tilde{\sigma}_\lambda H \cdot \alpha_m(t)\tilde{\sigma}_\lambda H|^{\frac{q_c-q}{2}} \, |\Upsilon^{\mathrm{far}}(H)|^{q/2} \, dxdt \quad = I + II.$$

~为了估计 II，我们使用 (3.7)、 A_-的上界，以及如下事实：若$H = S_\lambda f$，则 $\tilde{\sigma}_\lambda H = S_\lambda f$。

$$II \lesssim \|\alpha_m(t)\tilde{S}_\lambda f\|^{q_c-q}_{L^\infty(A_-)} \cdot \lambda^{1+\varepsilon} \left(\lambda^{7/8}\right)^{\frac{n-1}{2}(q-q_c)} \|H\|^q_{L^2_{t,x}} \leq \lambda^{(\frac{n-1}{4}+\frac{1}{8})(q_c-q)} \cdot \lambda^{-(q_c-q)(\frac{7}{8}\cdot\frac{n-1}{2})} \cdot \lambda^{1+\varepsilon}\|H\|^q_{L^2_{t,x}} = O(\lambda^{1-\delta_n+\varepsilon}\|H\|^{q_c}_{L^2_{t,x}}), \text{一些 } \delta_n > 0.$$

我们有 $\delta_n > 0$因为 $(q_c - q)(\frac{3}{16} - \frac{1}{8}) > 0$，并且$\|H\|^{q_c}_{L^2_{t,x}}$支配$\|H\|^q_{L^2_{t,x}}$因为$q_c > q$并且$\|H\|_{L^2_{t,x}} \approx T$因为 $H = S_\lambda f$, $\|f\|_2 = 1$ 并且 $e^{-it\lambda^{-1}\Delta_g}$ 是作用于 L^2_x上的一个酉算子。

由于我们可以取 $\varepsilon < \delta_n$， II^{1/q_c} 被（2.54）中的最后一项控制。因此，我们只需证明 I^{1/q_c} 被该不等式右侧的另一项控制。为估计这一项，我们先使用 H¨older 不等式，再结合 Young 不等式和引理 3.1，可得

$$\begin{aligned} I &\leq \|\alpha_m(t)\tilde{\sigma}_\lambda H \cdot \alpha_m(t)\tilde{\sigma}_\lambda H\|^{\frac{q_c-q}{2}}_{L^{q_c/2}(A_-)} \cdot \|\Upsilon^{\mathrm{diag}}(H)\|^{q/2}_{L^{q_c/2}_{t,x}} \\ &\leq \tfrac{q_c-q}{q_c}\|\alpha_m(t)\tilde{\sigma}_\lambda H \cdot \alpha_m(t)\tilde{\sigma}_\lambda H\|^{q_c/2}_{L^{q_c/2}(A_-)} + \tfrac{q}{q_c}\|\Upsilon^{\mathrm{diag}}(H)\|^{q_c/2}_{L^{q_c/2}_{t,x}} \\ &\leq \tfrac{q_c-q}{q_c}\|\alpha_m(t)\tilde{\sigma}_\lambda H\|^{q_c}_{L^{q_c}(A_-)} + C\sum_\nu \|\alpha_m(t)\tilde{\sigma} A^{\theta_0}_\nu H\|^{q_c}_{L^{q_c}_{t,x}} + O(\lambda^{1-}\|H\|^{q_c}_{L^2_{t,x}}). \end{aligned}$$

由于 $\frac{q_c-q}{q_c} < 1$，右侧的第一项可以吸收到（3.8）的左侧中，再结合上述关于 II 的估计即可得到（2.54）。

因此，如果我们能够证明引理 3.1 和引理 3.2，命题 2.6 的证明就完成了。

引理 3.1 的证明。

我们先通过如下设定来定义稍宽的微局部截断函数

$$\tilde{A}^{\theta_0}_\nu = \sum_{|\mu-\nu|\leq C_0\theta_0} A^{\theta_0}_\mu.$$

我们可以将 C_0 固定得足够大，使得

$$\|A^{\theta_0}_\nu - A^{\theta_0}_\nu \tilde{A}^{\theta_0}_\nu\|_{L^p_x \to L^p_x} = O(\lambda^{-N}) \ \forall N \text{ if } \ 1 \leq p \leq \infty. \tag{3.9}$$

此外，与原始 $A^{\theta_0}_\nu$算子一样， $\tilde{A}^{\theta_0}_\nu$算子几乎彼此正交

$$\sum_\nu \|\tilde{A}^{\theta_0}_\nu h\|^2_{L^2_x} \lesssim \|h\|^2_{L^2_x}. \tag{3.10}$$

由于

$$\|\alpha_m(t)\tilde{\sigma}_\lambda F\|_{L^{q_c}_{t,x}} \leq C\lambda^{\frac{1}{q_c}}\|F\|_{L^2_{t,x}},$$

我们得出结论，为了证明 (3.6)，我们可以用 $\tilde{\Upsilon}^{\mathrm{diag}}(H)$ 替换 $\Upsilon^{\mathrm{diag}}(H)$，其中后者由 (3.3) 的类似定义给出，只需分别将 $A_\nu^{\theta_0}$ 和 $A_{\tilde\nu}^{\theta_0}$ 替换为 $A_\nu^{\theta_0}\tilde{A}_\nu^{\theta_0}$ 和 $A_{\tilde\nu}^{\theta_0}\tilde{A}_{\tilde\nu}^{\theta_0}$。

因此，只需证明

$$\Big\| \sum_{(\nu,\tilde\nu)\in\Xi_{\theta_0}} (\alpha_m(t)\tilde\sigma_\lambda A_\nu^{\theta_0}\tilde{A}_\nu^{\theta_0}H)\cdot(\alpha_m(t)\tilde\sigma_\lambda A_{\tilde\nu}^{\theta_0}\tilde{A}_{\tilde\nu}^{\theta_0}H)\Big\|_{L^{q_c/2}_{t,x}} \le C\Big(\sum_\nu \|\alpha_m(t)\tilde\sigma_\lambda A_\nu^{\theta_0}H\|^{q_c}_{L^{q_c}_{t,x}}\Big)^{2/q_c} + O(\lambda^{\frac{2}{q_c}-}\|H\|^2_{L^2_{t,x}}). \tag{3.11}$$

我们需要以下 (2.62) 的变体，

$$\|\alpha_m(t)[\,\tilde\sigma_\lambda A_\nu^{\theta_0} - A_\nu^{\theta_0}\tilde\sigma_\lambda\,]F\|_{L^{q_c}_{t,x}} \lesssim \lambda^{\frac{1}{q_c}-\frac14}\|F\|_{L^2_{t,x}}. \tag{3.12}$$

这可由引理 2.7 的证明推出；或者，也可由引理 2.3、(2.62) 以及交换子 $[B, A_\nu^{\theta_0}]$ 在 $L^{q_c}_x(M^{n-1})$ 上范数为 $O(\lambda^{-7/8})$ 的有界性推出。由于 $A_\nu^{\theta_0}$与 $\alpha_m(t)$ 时间局部化算子可交换，根据 (3.10) 和 (3.12)，若能证明

$$\Big\| \sum_{(\nu,\tilde\nu)\in\Xi_{\theta_0}} (A_\nu^{\theta_0}(\alpha_m(t)\tilde\sigma_\lambda\tilde{A}_\nu^{\theta_0}H)\cdot A_{\tilde\nu}^{\theta_0}(\alpha_m(t)\tilde\sigma_\lambda\tilde{A}_{\tilde\nu}^{\theta_0}H)\Big\|_{L^{q_c/2}_{t,x}} \le C\Big(\sum_\nu \|\alpha_m(t)\tilde\sigma_\lambda A_\nu^{\theta_0}H\|^{q_c}_{L^{q_c}_{t,x}}\Big)^{2/q_c} + O(\lambda^{\frac{2}{q_c}-}\|H\|^2_{L^2_{t,x}}). \tag{3.13}$$

注意到，若 $t\notin[m-1,m+1]$，则(3.13)左侧范数中的函数均为零。因此，若取 $r=(q_c/2)'$，使得 r 是 $q_c/2$的共轭指数，则只需证明

$$\Big|\sum_{(\nu,\tilde\nu)\in\Xi_{\theta_0}} \iint A_\nu^{\theta_0}(\alpha_m(t)\tilde\sigma_\lambda\tilde{A}_\nu^{\theta_0}H)\cdot A_{\tilde\nu}^{\theta_0}(\alpha_m(t)\tilde\sigma_\lambda\tilde{A}_{\tilde\nu}^{\theta_0}H)\cdot G\,dtdx\Big| \le C\Big(\sum_\nu \|\alpha_m(t)\tilde\sigma_\lambda A_\nu^{\theta_0}H\|^{q_c}_{L^{q_c}_{t,x}}\Big)^{2/q_c} + O(\lambda^{\frac{2}{q_c}-}\|H\|^2_{L^2_{t,x}}), \quad \text{if } \|G\|_{L^r_{t,x}}=1 \text{ and } G(t,x)=0 \text{ if } t\notin[m-1,m+1]. \tag{3.14}$$

注意，若 x 和 ν 固定，且 $\xi\to A_\nu^{\theta_0}(x,\xi)$ 不恒为零，则该关于 ξ 的函数的支撑集包含于一个立方体 $Q_\nu^{\theta_0}(x)\subset \mathbb{R}^{n-1}_\xi$ 中，其边长为 $\approx\lambda^{7/8}$。可以选择这些立方体，使得若 $\eta_\nu(x)$ 是其中心，则对所有多重指标 γ，都有 $\partial_x^\gamma\eta_\nu(x)=O(\lambda)$。牢记这一点，对于每一对 $(\nu,\tilde\nu)$，构造属于 $S^0_{7/8,1/8}$ 的有界子集的 $\in\Xi_{\theta_0}$ 符号 $b_{\nu,\tilde\nu}(x,\xi)$ 是直接的，它们满足

$$b_{\nu,\tilde\nu}(x,\eta)=1 \text{ if } \operatorname{dist}\big(\eta,\operatorname{supp}_\xi A_\nu^{\theta_0}(x,\xi)+\operatorname{supp}_\xi A_{\tilde\nu}^{\theta_0}(x,\xi)\big)\le\lambda^{7/8}, \tag{3.15}$$

其中“+”表示代数和。利用这一点并通过一个简单的分部积分论证可得，对于每一对 $(\nu,\ \tilde\nu)\in\Xi_{\theta_0}$

$$\big\|(I-b_{\nu,\tilde\nu}(x,D))\big[A_\nu^{\theta_0}h\cdot A_{\tilde\nu}^{\theta_0}h\big]\big\|_{L^\infty_x}\le C_N\lambda^{-N}\|h\|^2_{L^1_x},\quad \forall N. \tag{3.16}$$

还可以选择这些符号，使得当 $(\nu_j,\tilde\nu_j)\in\Xi_{\theta_0}$, $j=1,2$ 且 $\min(|(\nu_1-\nu_2,\tilde\nu_1-\tilde\nu_2)|,\ |(\nu_1-\tilde\nu_2,\tilde\nu_1-\nu_2)|)\ge C_2\theta_0$ 时，$b_{\nu_1,\tilde\nu_1}(x,\xi)$ 和 $b_{\nu_2,\tilde\nu_2}(x,\xi)$ 的支撑集不相交，其中 C_2 是与 λ 无关的固定常数，因为 Ξ_{θ_0} 中的所有点对都近似对角。由于

这些，即伴随算子，$b^*_{\nu,\tilde\nu}(x,D)$ 几乎正交，因为我们有一致界

$$\sum_{(\nu,\tilde\nu)\in\Xi_{\theta_0}} \|b^*_{\nu,\tilde\nu}(x,D)h\|^2_{L^2_x} \lesssim \|h\|^2_{L^2_x}. \tag{3.17}$$

由于 $\mathrm{supp}_\xi A^{\theta_0}_\nu(x,\xi) + \mathrm{supp}_\xi A^{\theta_0}_{\tilde\nu}(x,\xi)$ 包含在边长为 $\approx \lambda^{7/8}$ 的立方体中，并且可以选择其中心为 $\eta_{\nu,\tilde\nu}(x)$，满足 $\partial^\gamma_x \eta_{\nu,\tilde\nu}(x) = O(\lambda)$，我们还可以进一步假设具有一致界

$$\sup_{(\nu,\tilde\nu)\in\Xi_{\theta_0}} \|b^*_{\nu,\tilde\nu}(x,D)h\|_{L^\infty_x} \lesssim \|h\|_{L^\infty_x}. \tag{3.18}$$

我们现在已经建立了简单论证的变系数版本，在 [35] 中该论证将使我们能够得到 (3.14)。首先，由 (3.16) 可知，模去 $O(\lambda^{-N}\|H\|^2_{L^2_{t,x}})$ 误差项后，(3.14) 的左侧被以下项控制

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{(\nu,\tilde\nu)\in\Xi_{\theta_0}} \iint (A^{\theta_0}_\nu(\alpha_m(t)\tilde\sigma_\lambda \tilde A^{\theta_0}_\nu H)\cdot A^{\theta_0}_{\tilde\nu}(\alpha_m(t)\tilde\sigma_\lambda \tilde A^{\theta_0}_{\tilde\nu} H)\cdot \big(b^*_{\nu,\tilde\nu}(x,D)G\big)\,dtdx\Big| \\ \le \Big(\sum_{(\nu,\tilde\nu)\in\Xi_{\theta_0}} \|A^{\theta_0}_\nu(\alpha_m(t)\tilde\sigma_\lambda \tilde A^{\theta_0}_\nu H)\cdot A^{\theta_0}_{\tilde\nu}(\alpha_m(t)\tilde\sigma_\lambda \tilde A^{\theta_0}_{\tilde\nu} H)\|^{q_c/2}_{L^{q_c/2}_{t,x}}\Big)^{2/q_c} \\ \cdot \Big(\sum_{(\nu,\tilde\nu)\in\Xi_{\theta_0}} \|b^*_{\nu,\tilde\nu}(x,D)G\|^r_{L^r_{t,x}}\Big)^{1/r},\end{aligned} \tag{3.19}$$

由于 $r = (q_c/2)'$。

注意，由于 $q_c \in (2,4]$，所以 $r\in[2,\infty)$。因此，如果我们使用 (3.17)、(3.18) 和插值论证，就可以得出结论：

$$\Big(\sum_{(\nu,\tilde\nu)\in\Xi_{\theta_0}} \|b^*_{\nu,\tilde\nu}(x,D)G\|^r_{L^r_{t,x}}\Big)^{1/r} = O(1),$$

对于如 (3.14) 中的 G。因此，我们得出结论：除去 $O(\lambda^{\frac{2}{q_c}-}\|H\|_{L^{2,\ x}_t})$ 误差后，(3.13) 的左侧可由以下量控制

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{(\nu,\tilde\nu)\in\Xi_{\theta_0}} \|A^{\theta_0}_\nu(\alpha_m(t)\tilde\sigma_\lambda \tilde A^{\theta_0}_\nu H)\cdot A^{\theta_0}_{\tilde\nu}(\alpha_m(t)\tilde\sigma_\lambda \tilde A^{\theta_0}_{\tilde\nu} H)\|^{q_c/2}_{L^{q_c/2}_{t,x}}\Big)^{2/q_c} \\ \lesssim \Big(\sum_\nu \|\alpha_m(t)A^{\theta_0}_\nu \tilde\sigma_\lambda \tilde A^{\theta_0}_\nu H\|^{q_c}_{L^{q_c}_{t,x}}\Big)^{2/q_c}.\end{aligned}$$

如果重复前面的论证，并再次使用 (3.9)，我们便可得出结论：前述不等式右侧可由 (3.6) 的右侧控制，从而完成引理 3.1 的证明。

双线性振荡积分估计：引理 3.2 的证明

为了证明 (3.7) 我们注意到，对于给定的 $\theta = 2^k\theta_0$, $k\ge 10$ 对每个固定的 $c_0>$，我们有 0

$$\alpha_m(t)\tilde\sigma_\lambda A^{\theta_0}_\nu H = \sum_{\mu'\in c_0\theta\,\mathbb{Z}^{2n-3}} \tilde\sigma_\lambda A^{c_0\theta}_{\mu'} A^{\theta_0}_\nu H + O(\lambda^{-N}\|H\|_2). \tag{3.20}$$

如同在 [4] 中，为了便于确保具有足够的分离以应用双线性振荡积分估计，我们选择 $c_0 = 2^{-m_0} < 1$，使得我们处理的是尺度$c_0\theta$，而非 θ。

考虑到这一点，我们注意到，若在 (2.53) 的第一个求和中固定 $k \geq 10$ ，那么对于给定的固定 $c_0 = 2^{-m_0}$、 $m_0 \in \mathbb{N}$，以及一对二进立方体 τ_μ^θ、 $\tau_{\tilde{\mu}}^\theta$ ，满足 $\tau_\mu^\theta \sim \tau_{\tilde{\mu}}^\theta$ 和 $\theta = 2^k\theta_0$

$$\begin{aligned}(3.21)\qquad &\sum_{(\nu,\tilde{\nu})\in\tau_\mu^\theta\times\tau_{\tilde{\mu}}^\theta} (\alpha_m(t)\tilde{\sigma}_\lambda A_\nu^{\theta_0}H)(\alpha_m(t)\tilde{\sigma}_\lambda A_{\tilde{\nu}}^{\theta_0}H)\\ &= \sum_{(\nu,\tilde{\nu})\in\tau_\mu^\theta\times\tau_{\tilde{\mu}}^\theta} \sum_{\substack{\tau_{\mu'}^{c_0\theta}\cap\overline{\tau}_\mu^\theta\neq\emptyset\\ \tau_{\tilde{\mu}'}^{c_0\theta}\cap\overline{\tau}_{\tilde{\mu}}^\theta\neq\emptyset}} (\alpha_m(t)\tilde{\sigma}_\lambda A_{\mu'}^{c_0\theta}A_\nu^{\theta_0}H)(\alpha_m(t)\tilde{\sigma}_\lambda A_{\tilde{\mu}'}^{c_0\theta}A_{\tilde{\nu}}^{\theta_0}H) + O(\lambda^{-N}\|H\|_2^2),\end{aligned}$$

若$\overline{\tau}_\mu^\theta$和 $\overline{\tau}_{\tilde{\mu}}^\theta$是中心相同、但边长分别为 $11/10$倍的 τ_μ^θ和 $\tau_{\tilde{\mu}}^\theta$的立方体，使得当 $\tau_\mu^\theta \sim \tau_{\tilde{\mu}}^\theta$ 时，$\mathrm{dist}(\tau_\mu^\theta, \tau_{\tilde{\mu}}^\theta) \geq \theta/2$。这是因为当$\overline{c}_0$ 足够小时，如果 $\tau_{\mu'}^{c_0\theta}\cap\tau_\mu^\theta = \emptyset$ 和 $\nu \in \tau_\mu^\theta$，则 $A_{\mu'}^{c_0\theta}$ 的符号与 $A_\nu^{\theta_0}$ 的乘积恒等于零，因为 $\theta = 2^k\theta_0$ 且 $k \geq 10$。还要注意，对于足够小的固定$\overline{c}_0 = 2^{-m_0}$ ，我们有

$$(3.22)\qquad \mathrm{dist}(\tau_{\mu'}^{c_0\theta}, \tau_{\tilde{\mu}'}^{c_0\theta}) \in [4^{-1}\theta, 4^n\theta], \quad \text{if } \tau_{\mu'}^{c_0\theta}\cap\overline{\tau}_\mu^\theta \neq \emptyset, \text{ and } \tau_{\tilde{\mu}'}^{c_0\theta}\cap\overline{\tau}_{\tilde{\mu}}^\theta \neq \emptyset.$$

当然，对于每个 μ，如果固定 c_0，则有 $O(1)$ 个项 μ' 满足 $\tau_{\mu'}^{c_0\theta}\cap\tau_\mu^\theta \neq \emptyset$。

另请注意，如果我们固定 c_0，那么对于固定的 θ 立方体对 $\tau_\mu^\theta \sim \tau_{\tilde{\mu}}^\theta$，(3.21) 右侧至多只有 $O(1)$ 个求和项涉及 μ' 和 $\tilde{\mu}'$。

鉴于这一点，我们声称，如果能够证明下述结论，那么对于(2.53)中第一项的 $L_{t\,x}^{q/2}$,-范数 $q = {}^{2}\!/_{(n+2)\,n}$ ，以及 $\Upsilon^{\mathrm{far}}(H)$，我们将得到有利的估计：

命题 3.3。令 $\theta = 2^k\theta_0 = 2^k\lambda^{-1/8} \ll 1$ 满足 $k \in \mathbb{N}$。那么我们可以将 $c_0 = 2^{-m_0}$ 取得充分小，使得只要

$$(3.23)\qquad dist(\tau_\nu^{c_0\theta}, \tau_{\tilde{\nu}}^{c_0\theta}) \in [4^{-1}\theta, 4^n\theta],$$

对于 $0 \leq m \leq C$ 对数 λ，有一致界

$$\begin{aligned}(3.24)\qquad &\iint \left|(\alpha_m(t)\tilde{\sigma}_\lambda A_\nu^{c_0\theta}H_1)\,(\alpha_m(t)\tilde{\sigma}_\lambda A_{\tilde{\nu}}^{c_0\theta}H_2)\right|^{q/2} dtdx\\ &\qquad\qquad \lesssim_\varepsilon \lambda^{1+\varepsilon}\left(2^k\lambda^{7/8}\right)^{\frac{n-1}{2}(q-q_c)} \|H_1\|_{L^2_{t,x}}^{q/2}\,\|H_2\|_{L^2_{t,x}}^{q/2},\end{aligned}$$

其中，如 (3.6) 中所示，$q = {}^{2}\!/_{(n+2)\,n}$，假设 $H_k(y,s) = 0$, $k = 1, 2$，对于 $|s| \geq C\log\lambda$。

在使用 Lee 的 [23] 振荡积分估计证明本命题之前，让我们先验证上述断言。

我们首先注意到，如果

$$H_1 = \sum_{\nu\in\tau_\mu^\theta} A_\nu^{\theta_0}H \quad \text{and} \quad H_2 = \sum_{\tilde{\nu}\in\tau_{\tilde{\mu}}^\theta} A_{\tilde{\nu}}^{\theta_0}H,$$

于是，由A_ν^θ 算子的近似正交性，存在一个固定常数 C，使得

$$\|H_1\|_{L^2_{t,x}} \leq C\Big(\sum_{\nu\in\tau_\mu^\theta} \|A_\nu^{\theta_0}H\|_{L^2_{t,x}}^2\Big)^{1/2} \quad \text{and} \quad \|H_2\|_{L^2_{t,x}} \leq C\Big(\sum_{\tilde{\nu}\in\tau_{\tilde{\mu}}^\theta} \|A_\nu^{\theta_0}H\|_{L^2_{t,x}}^2\Big)^{1/2}.$$

因此，由（3.20）、（3.22）、（3.24）以及闵可夫斯基不等式，可得到（2.53）中第一项关于 $k \geq 10$、$\theta = 2^k\theta_0$ 和 $q = {}^{2}{}_{(n+2)}\ {}_{n}$ 的如下估计：

(3.25)

$$
\begin{aligned}
&\Big\| \sum_{(\mu,\tilde{\mu})\colon \tau_\mu^\theta \sim \tau_{\tilde{\mu}}^\theta} \ \sum_{(\nu,\tilde{\nu}) \in \tau_\mu^\theta \times \tau_{\tilde{\mu}}^\theta} (\alpha_m(t)\tilde{\sigma}_\lambda A_\nu^{\theta_0} H)\, (\alpha_m(t)\tilde{\sigma}_\lambda A_{\tilde{\nu}}^{\theta_0} H) \Big\|_{L^{q/2}_{t,x}} \\
&\leq \sum_{(\mu,\tilde{\mu})\colon \tau_\mu^\theta \sim \tau_{\tilde{\mu}}^\theta} \Big\| \sum_{\substack{\tau_{\mu'}^{c_0\theta} \cap \overline{\tau}_\mu^\theta \neq \emptyset \\ \tau_{\tilde{\mu}'}^{c_0\theta} \cap \overline{\tau}_{\tilde{\mu}}^\theta \neq \emptyset}} \big(\alpha_m(t)\tilde{\sigma}_\lambda A_{\mu'}^{c_0\theta}\big(\sum_{\nu \in \tau_\mu^\theta} A_\nu^{\theta_0} H\big)\big) \cdot \big(\alpha_m(t)\tilde{\sigma}_\lambda A_{\tilde{\mu}'}^{c_0\theta}\big(\sum_{\tilde{\nu} \in \tau_{\tilde{\mu}}^\theta} A_\nu^{\theta_0} H\big)\big) \Big\|_{L^{q/2}_{t,x}} \\
&\qquad\qquad + O(\lambda^{-N}\|H\|^2_{L^2_{t,x}}) \\
&\lesssim_\varepsilon \lambda^{(1+\varepsilon)\frac{2}{q}} \big(2^k\lambda^{7/8}\big)^{\frac{n-1}{q}(q-q_c)} \sum_{(\mu,\tilde{\mu})\colon \tau_\mu^\theta \sim \tau_{\tilde{\mu}}^\theta} \big(\sum_{\nu \in \tau_\mu^\theta} \|A_\nu^{\theta_0} H\|^2_{L^2_{t,x}}\big)^{1/2} \big(\sum_{\tilde{\nu} \in \tau_{\tilde{\mu}}^\theta} \|A_\nu^{\theta_0} H\|^2_{L^2_{t,x}}\big)^{1/2} \\
&\qquad\qquad + O(\lambda^{-N}\|H\|^2_{L^2_{t,x}}) \\
&\lesssim_\varepsilon \lambda^{(1+\varepsilon)\frac{2}{q}} \big(2^k\lambda^{7/8}\big)^{\frac{n-1}{q}(q-q_c)} \sum_{\nu} \sum_{\nu \in \tau_\nu^\theta} \|A_\nu^{\theta_0} H\|^2_{L^2_{t,x}} + O(\lambda^{-N}\|H\|^2_{L^2_{t,x}}) \\
&\lesssim_\varepsilon \lambda^{(1+\varepsilon)\frac{2}{q}} \big(2^k\lambda^{7/8}\big)^{\frac{n-1}{q}(q-q_c)} \|H\|^2_{L^2_{t,x}} + O(\lambda^{-N}\|H\|^2_{L^2_{t,x}}).
\end{aligned}
$$

在上述推导中，我们用到了以下事实：对于每个 τ_μ^θ，存在 O 个 (1) $\tau_{\mu'}^{c_0\theta}$ 满足 $\tau_{\mu'}^{c_0\theta} \cap \tau_\mu^\theta \neq \emptyset$，且存在 O 个 (1) $\tau_{\tilde{\mu}}^\theta$ 满足 $\tau_\mu^\theta \sim \tau_{\tilde{\mu}}^\theta$，以及 (2.50)。

由于 $q - q_c < 0$，我们显然可以证明，若将 $\Upsilon^{\mathrm{far}}(H)$ 替换为 (2.53) 中的第一项，则所得表达式满足 (3.7) 中的界。由于根据 (3.4)，$\Upsilon^{\mathrm{far}}(H)$ 的附加部分逐点有界于 $O(\lambda^{-N}\|H\|^2_{L^2_{t,\ x}})$，因此我们将问题归结为证明命题 3.3。

命题 3.3 的证明：薛定谔曲线与坐标，以及双线性振荡积分估计

首先，我们需要收集一些关于（3.24）中算子 $\tilde{\sigma}_\lambda A_\nu^{c_0\theta}$的核的事实。正如我们马上将看到的，它们高度集中在某些“薛定¨谔曲线”附近。

为描述这些内容，我们回顾一下 (2.46)，其中指出 $A_\nu^{c_0\theta} = A_j^{c_0\theta}(x, D_x) \circ A_\ell^{c_0\theta}(P, c_0\theta\ell) \in c_0\theta\mathbf{Z}^{2(n-2)} \times c_0\theta\mathbf{Z}$。我们还回顾，根据 (2.40)，“方向”算子 $A_j^{c_0\theta}$ 的符号都高度集中在一条单位速测地线附近

$$
\gamma_j(s) = (x_j(s), \xi_j(s)) \in S^*\Omega, \quad \text{with } (x_j(s), \xi_j(s)) \in \operatorname{supp} A_j^{c_0\theta}(x,\xi). \tag{3.26}
$$

由于 γ_j 是单位速度的，因此对于 Ω 中测地线上的点，我们有 $d_g(x_j(s_1)\ x_j(s_2)) = |s_1 - s_2|$。另一方面，如 [20], 所述，由于“高度算子”$A_\ell^{c_0\theta}$ (P)所起的作用，与 (3.24) 中算子相关的时空薛定谔曲线必然涉及与 (2.42) 中定义算子 $A_\ell^{c_0\theta}$ (P) 的高度 $\kappa_\ell^{c_0\theta}$ 相关的速度（另见 [1] 和 [15]）。

更具体地说，我们声称，如果我们定义与 ν 对应的“薛 ¨丁格曲线”，

$$
\iota_{s_0,\nu}(s) = (x_j(2\kappa s), -(s - s_0)) \in \Omega \times \mathbb{R}, \quad \nu = (c_0\theta j, c_0\theta\ell),\ \kappa = \kappa_\ell^{c_0\theta}, \tag{3.27}
$$

那么，算子$\tilde{\sigma}_\lambda A_\nu^{c_0\theta}$的核 $K_\nu^{c_0\theta}(x,t;\ y,s)$必须高度集中在半径为 $\approx \theta$、围绕(3.27)中的曲线 ι_ν 的“薛定¨谔管”内。注意，$s \to x_j(2\kappa_\ell^{c_0\theta} s)$ 是速度为 $2\kappa_\ell^{c_0\theta}$ 的测地线，这意味着 $d_g(x_j(2\kappa_\ell^{c_0\theta} s_1)\ x_j(2\kappa_\ell^{c_0\theta} s_2)) = 2\kappa_\ell^{c_0\theta}|s_1 - s_2|$。

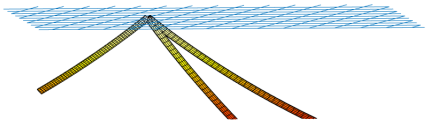


FIGURE 1. Schr¨odinger 管状邻域

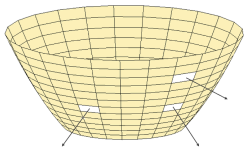


FIGURE 2. 欧几里得情形

此外，(3.27) 中时间变量前的负号只是基于(2.5)中的负号，正如我们将看到的，我们选择这一负号是为了能够使用 [7], [27],等中的局部分析，而不会造成不必要的符号混淆。当然，这个负号也是由于我们在(1.1)中所采用的符号约定而出现的。

注3.4。 图*1*描绘了三条经过同一点（x_0、 t_0）的薛定谔管。右侧的两条具有相同的空间方向，这意味着它们各自都来自同一条测地线 $\gamma = \gamma_j$ ，如（3.26）所示；然而，它们的速度来自不同的高度，因此并不重合，这解释了右侧两条薛定谔管为何在（x_0、 t_0）处之外逐渐分离。图中的左侧管和右侧管具有相同的速度，但空间分量不同，这解释了它们的分离。我们还指出，在抛物限制问题中，由于*Knapp*现象，分析中必然会出现（3.27）形式的曲线。在平移不变的情形下，这些薛定谔曲线就是沿着指向抛物面相关部分法向方向的直线，如图*2*所示。对于变系数薛定谔问题，类似的*Knapp*现象已在 [20,§4], 中讨论，我们所采用的其他变系数局部分析也在那里得到了发展。

现在陈述我们所需的核 $K_\nu^{c_0\theta}(x,\ t;y,\ s)$ 的性质。为简化表述，也为了最方便地应用 Lee 的 [23]结果，我们在 (3.26) 中测地线 $x_j(s)$ 周围的费米正规坐标下进行讨论（见 [16]）。在这些坐标中，测地线成为最后一个坐标轴的一部分，即 $\mathbf{R}^{n-1}$ 中的 $(0,\ \ldots,\ 0,\ s)$；与符号的构造一样， $A_\nu^{c_0\theta}$, s 在原点附近。以下本节中，为简便起见，记 $x = (x_1,\ \ldots,\ x_{n-1})$ 为这些费米正规坐标。于是有

$$d_g((0,\ldots,0,x_{n-1}),(0,\ldots,0,y_{n-1})) = |x_{n-1} - y_{n-1}|, \tag{3.28}$$

此外，在 (3.26) 的空间测地线上，度量也简化为 $g_{jk}(x) = \delta_j^k$，当 $x = (0,\ \ldots,\ x_{n-1})$ 时，所有克里斯托费尔符号均为零。因此， g_{jk} 沿这条测地线在二阶意义下与标准平直矩形度量一致。见[22], [24]。注意，在这些坐标中有 $(0,\ (0,\ \ldots,\ 0,\ 1)) \in \operatorname{supp} A_j^{c_0\theta}(x,\ \xi)$, 因此当 θ 足够小时，我们有

$$A_j^{c_0\theta}(0,\xi/|\xi|) = 0 \ \text{ when } \ |\xi/|\xi| - (0,\ldots,0,1)| \geq Cc_0\theta, \tag{3.29}$$
$$\text{and } \ \chi_t(0,(0,\ldots,0,1)) = (t,(0,\ldots,0,1)),$$

其中，和之前一样， χ_t 表示测地流，而这里的 C 表示一个一致常数。

现在我们可以表述这些核所需满足的性质。

引理 3.5。固定 $0 < \delta \ll \frac{1}{2}$*Inj* M。进一步假设 $\mu = \nu, \nu'$ 如（3.23）所示，并令 $K_\lambda^{c_0\theta}$，μ 为 $\tilde{\sigma}_\lambda A_\mu^{c_0\theta}$的核。在上述坐标下，如果 $c_0 \ll 1$ 我们有

$$K_{\lambda,\mu}^{c_0\theta}(x,t;y,s) = \lambda^{\frac{n-1}{2}} e^{-i\lambda(d_g(x,y))^2/4(t-s)} a_{\lambda,\mu}(x,t;y,s) + O(\lambda^{-N}), \quad \mu = \nu, \nu', \tag{3.30}$$

其中，若 $\nu = (c_0\theta j, c_0\theta\ell)$，且 $\kappa_\ell^{c_0\theta}$ 如（3.27）中所述，

$$\big| \big(2\kappa_\ell^{c_0\theta} \tfrac{\partial}{\partial x_{n-1}} - \tfrac{\partial}{\partial t}\big)^{m_1} \big(2\kappa_\ell^{c_0\theta} \tfrac{\partial}{\partial y_{n-1}} - \tfrac{\partial}{\partial s}\big)^{m_2} D_{x,t,y,s}^{\beta} a_{\lambda,\mu} \big| \leq C_{m_1,m_2,\beta} \theta^{-|\beta|}, \quad \mu = \nu, \nu'. \tag{3.31}$$

此外，对于足够小的 θ 和 c_0，存在一个常数 C_0，使得上述 $O(\lambda^{-N})$ 误差可以选择为使振幅具有以下支撑集性质：如果 γ_j 表示测地线在(2.40) 中投影到 M^{n-1} 上的投影，并且当 j 被 j'替换时，

$$a_{\lambda,\mu}(x,t;y,s) = 0, \quad \text{if } d_g(x,\overline{\gamma}_k) + d_g(y,\overline{\gamma}_k) \geq C_1 c_0 \theta, \\ \text{if } k = j \text{ when } \nu = (c_0\theta j, c_0\theta\ell) \text{ and if } k = j' \text{ when } \nu' = (c_0\theta j', c_0\theta\ell'), \tag{3.32}$$

$$a_{\lambda,\mu}(x,t;y,s) = 0 \quad \text{if } |d_g(x,y) + 2\kappa(t-s)| \geq C_0 c_0 \theta, \\ \text{when } \mu = \nu \text{ with } \kappa = \kappa_\ell^{c_0\theta}, \text{ or } \nu = \nu' \text{ with } \kappa = \kappa_{\ell'}^{c_0\theta}, \tag{3.33}$$

以及

$$a_{\lambda,\mu}(x,t;y,s) = 0, \ \mu = \nu, \nu', \\ \text{if } |(x_1,\dots,x_{n-2})| + |(y_1,\dots,y_{n-2})| + |(x_{n-1}-y_{n-1}) + 2\kappa_\ell^{c_0\theta}(t-s)| \geq C_0\theta. \tag{3.34}$$

最后，对于(2.6)中的较小 $\delta_0 > 0$，可以选择 $O(\lambda^{-N})$ 误差，使得我们还有(3.35) $a_{\mu,\lambda}(x,t;y,s) = 0$，若 $\big| d_g(x,y) - \delta \big| \geq 2\delta_0\delta$；或者若 $x_{n-1} - y_{n-1} < 0$，$\mu = \nu, \nu'$满足 δ，且 δ_0 如(2.6)中所述。

该引理只是 [7] 中引理4.3 的一个小变体（另见 [4]中的引理 3.2），我们将使用 [7] 中上述结果以及 σ_λ 算子的性质来获得上述估计。我们将把证明推迟到最后一节，在该节中我们将证明所使用的全部核估计。

现在我们来说明如何结合引理 3.5 以及 Lee [23] 的结果来获得命题 3.3。

命题 *3.3* 的证明。为了利用 Lee 的双线性估计证明 (3.24)，我们还需要再进行一次变量替换，从而分离出引理 3.5 中相位函数的某种“线性方向”。在我们早期关于改进谱投影估计的工作中，只需围绕 (3.26) 中的空间测地线选取费米正规坐标即可完成这一步。由于引理 3.5 中的核还涉及时间变量，我们必须通过采用适配于此前所描述的薛定谔管的、可视为“费米-薛定谔”坐标的坐标系，来处理时间变量的问题。正如我们将看到的，使用这些坐标时，我们会运用一个简单的抛物缩放论证，从而能够应用 [23] 中的主要估计。还应指出，我们即将描述的坐标系对应于 (3.27) 中的管 ι_ν，该管与核 $K_{\lambda\,\nu}^{c_0\theta}$ 的振幅 ν 相关，而并非引理中另一个核 $K_{\lambda\,\nu'}^{c_0\theta}$ 的振幅。

为描述这些坐标，我们首先回顾一下，根据 (3.28)，最后一个空间坐标x_{n-1} 表示沿着部分定义 ι_ν 的空间测地线的距离。“费米-薛定谔”坐标将保留前面的（$n-2$）个空间坐标，但会涉及一个

最后两个坐标 (x_{n-1}, t) 的线性变量变换，该变换考虑了 (3.27) 中空间测地线的速度，即 $2\kappa_\ell^{c_0\theta}$，其中 $\nu = (c_0\theta j, c_0\theta\ell)$ 同前，且$\kappa_\ell^{c_0\theta}$ 如 (2.42) 中所示。我们采用的“薛定谔坐标”是“相对论”中自由落体坐标的量子类比，相关描述见 Manasse 和 Misner [24]。

我们注意到，如果

$$\varphi(x,t;y,s) = \frac{-(d_g(x,y))^2}{4(t-s)}, \tag{3.36}$$

是式 (3.30) 中各核的相位函数，那么由于我们使用的是费米正规坐标，沿着空间测地线有

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi,\ \frac{\partial}{\partial y_j}\varphi = 0 \ \text{ if } \ x = (0,\dots,0,x_{n-1}),\ y = (0,\dots,0,y_{n-1}) \ \text{ and } \ j = 1,\dots,n-2. \tag{3.37}$$

不过，这对于我们目前使用的另外两个坐标 x_{n-1} 和 t 都不成立。我们需要进行坐标变换，使得在新变量中，对于第 $(n-1)$ 个变量有式 (3.37) 的类似结论，同时相位函数限制在 ι_ν 上时关于另一个剩余变量是线性的。

幸运的是，这很容易做到。我们只需通过以下方式定义新变量 $(\tilde{x}_{n-1},\ \tilde{t})$

$$(x_{n-1}, t) = \tilde{t}(2\kappa_\ell^{c_0\theta}, -1) + \tilde{x}_{n-1}(\kappa_\ell^{c_0\theta}, -1) = (2\kappa_\ell^{c_0\theta}\tilde{t} + \kappa_\ell^{c_0\theta}\tilde{x}_{n-1}, -\tilde{t} - \tilde{x}_{n-1}). \tag{3.38}$$

请注意，供后文使用，

$$(\tilde{x}_{n-1}, \tilde{t}) = -(\kappa_\ell^{c_0\theta})^{-1}\cdot\big(x_{n-1} + 2\kappa_\ell^{c_0\theta}t, -x_{n-1} - \kappa_\ell^{c_0\theta}t\big), \tag{3.39}$$

这意味着 $\tilde{x}_{n-1}$ 与 (3.33) 中的集中现象有关，其中 $\kappa = \kappa_\ell^{c_0\theta}$。如前所述，我们不会改变前面的 $(n-2)$ 个变量，因此为与我们的记号保持一致，令

$$\tilde{x}_j = x_j, \quad 1 \le j \le n-2. \tag{3.40}$$

注意，当且仅当 $\tilde{x} = 0$ 时，$(\tilde{x}, \tilde{t})$ 位于 (3.28) 中的 Schr¨odinger 曲线 ι_ν 上。此外，我们声称，新坐标满足关于 (3.36) 中相位函数 φ 在 ι_ν 上的行为的两个额外目标。

因此，我们需要验证对于所有 $j = 1,\dots,n-1$，都有 (3.37) 的类似结论，即

$$\nabla_{\tilde{x}}\varphi,\ \nabla_{\tilde{y}}\varphi = 0 \quad \text{if } \ \tilde{x} = \tilde{y} = 0, \tag{3.41}$$

以及

$$\varphi(0,\tilde{t},0,\tilde{s}) = (\kappa_\ell^{c_0\theta})^2\cdot(\tilde{t}-\tilde{s}). \tag{3.42}$$

为验证 (3.41)，注意到由于 $\tilde{x}_j = x_j$, $1 \le j \le n-2$，由 (3.37) 可得，当 $\tilde{x} = \tilde{y} = 0$ 且 $1 \le j \le n-2$ 时，$\partial\varphi/\partial x_j = 0$ 和 $\partial\varphi/\partial y_j = 0$。要说明对于 $j = n-1$ 这仍然成立（这就给出了 (3.41) 的其余部分），注意到由 (3.28) 和 (3.38),

$$\varphi(0,\dots,\tilde{x}_{n-1},\tilde{t},0,\dots,0,\tilde{y}_{n-1},\tilde{s}) = \frac{(\kappa_\ell^{c_0\theta})^2}{4}\cdot\frac{(2(\tilde{t}-\tilde{s}) + (\tilde{x}_{n-1}-\tilde{y}_{n-1}))^2}{\tilde{t}-\tilde{s}+(\tilde{x}_{n-1}-\tilde{y}_{n-1})}, \tag{3.43}$$

因此，通过微积分，我们也得到 $\partial\varphi/\partial\tilde{x}_{n-1},\ \partial\varphi/\partial\tilde{y}_{n-1} = 0$ 当 $\tilde{x} = \tilde{y} = 0$。最后，当然，(3.43) 也推出 (3.42)，这意味着我们的目标已经实现。

接下来，我们还需要进行几处小的修改来证明 (3.24)。用引理 3.5 中的记号表示，经过简单的运算后，它可以改写如下:

$$\big\|(T_1H_1)(T_2H_2)\big\|_{L^{q/2}_{t,x}} \lesssim_\varepsilon \lambda^{-\frac{2n}{q}+\varepsilon}\,\theta^{-\frac{2}{n+2}}\,\|H_1\|_{L^2_{t,x}}\|H_2\|_{L^2_{t,x}},\ q = \tfrac{2(n+2)}{n}, \tag{3.44}$$

假设 $H_k(y,\ s)\ =0,\ k=1,\ 2,$ 若 $|s|\geq C\log\ \lambda,$ 其中

$$(T_1H_1)(\tilde{x},\tilde{t})=\alpha_m(t)\iint e^{i\lambda\varphi(\tilde{x},\tilde{t},\tilde{y},\tilde{s})}a_{\lambda,\nu}(\tilde{x},\tilde{t};\tilde{y},\tilde{s})\,H_1(\tilde{y},\tilde{s})\,d\tilde{y}d\tilde{s} \tag{3.45}$$

and

$$(T_2H_2)(\tilde{x},\tilde{t})=\alpha_m(t)\iint e^{i\lambda\varphi(\tilde{x},\tilde{t},\tilde{y},\tilde{s})}a_{\lambda,\nu'}(\tilde{x},\tilde{t};\tilde{y},\tilde{s})\,H_2(\tilde{y},\tilde{s})\,d\tilde{y}d\tilde{s}. \tag{3.46}$$

我们可以忽略引理 3.5 中的 $O(\lambda^{-N})$ 误差，因为在 (3.24) 中，我们假设$H_j(s,\cdot)\ =0$当 $|s|\geq C$ log λ时。

当然，我们还可以得到

$$(T_1H_1\cdot T_2H_2)(\tilde{x},\tilde{t})=\big(\alpha_m(t)\big)^2\times \tag{3.47}$$
$$\int e^{i\lambda(\varphi(\tilde{x},\tilde{t},\tilde{y},\tilde{s})+\varphi(\tilde{x},\tilde{t},\tilde{y}',\tilde{s}'))}a_{\lambda,\nu}(\tilde{x},\tilde{t},\tilde{y},\tilde{s})a_{\lambda,\nu'}(\tilde{x},\tilde{t},\tilde{y}',\tilde{s}')\,H_1(\tilde{y},\tilde{s})\,H_2(\tilde{y}',\tilde{s}')\,d\tilde{y}d\tilde{s}d\tilde{y}'d\tilde{s}'.$$

注意，由 (3.32)、(3.34) 和 (3.39) 可知 $a_{\lambda,\mu}(\tilde{x},\tilde{t},\tilde{y},\tilde{s})\ =0,\ \mu=\nu,\nu'$ 若$|(\tilde{x}_1,..,\tilde{x}_{n-2})|\geq C_1\theta,\ |(\tilde{y}_1,..,\tilde{y}_{n-2})|\geq C_1\theta$或 $|\tilde{x}_{n-1}-\tilde{y}_{n-1}|\geq C_1\theta$。因此，为了证明 (3.44)，只需在对满足 $|\tilde{x}-(0,..,0,r)|\leq C_2\theta$ 的集合取范数时控制左侧，其中 C_2 固定。于是，由于可以令 r 为 0，我们只需证明：对于充分小的 θ，当 $C_3\approx C_2$ 时，

$$\big\|(T_1H_1)(T_2H_2)\big\|_{L^{q/2}_{t,x}(\{|\tilde{x}|\leq C_3\theta\}\times[-1,1])} \tag{3.48}$$
$$\lesssim_\varepsilon \lambda^{-\frac{2n}{q}+\varepsilon}\,\theta^{-\frac{2}{n+2}}\,\|H_1\|_{L^2_{\tilde{t},\tilde{x}}}\|H_2\|_{L^2_{\tilde{t},\tilde{x}}},\ q=\tfrac{2(n+2)}{n},$$

假设如上，$H_k(y,s)\ =0,\ k=1,2,$ 若 $|s|\geq C\log\ \lambda$。

接下来，我们注意到，根据 (3.31)、(3.38) 和 (3.39)，若采用抛物缩放 $(\tilde{x},\tilde{t})\ \to(\theta\tilde{x},\tilde{t})$，则

$$D^\beta_{\tilde{x},\tilde{t},\tilde{y},\tilde{s}}a_{\lambda,\mu}(\theta\tilde{x},\tilde{t},\theta\tilde{y},\tilde{s})=O_\beta(1). \tag{3.49}$$

对于 $\mu=\nu$ 这是显然的，因为此时 $2\kappa_\ell^{c_0\theta}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}_{n-1}}-\frac{\partial}{\partial\tilde{t}}$对应于 $\frac{\partial}{\partial\tilde{t}}$，并且对于 $\mu=\nu'$ 这些界也同样成立，因为 $\kappa_\ell^{c_0\theta}-\kappa_{\ell'}^{c_0\theta}=O\ (\theta)$。还要注意，当 $|\tilde{x}|$ 或 $|\tilde{y}|$ 大于某个固定常数时，(3.49) 中的膨胀振幅为 $O\ (\lambda^{-N})$。

相位函数 $\varphi(\tilde{x},\tilde{t},\tilde{y},\tilde{s})$并不完全满足 (3.49) 中的界；不过，只要我们回想起我们构造 Fermi-Schr¨odinger坐标时确保了 (3.41) 和 (3.42) 成立，就可以轻松补救这一点。因此

$$\tilde{\varphi}(\tilde{x},\tilde{t},\tilde{y},\tilde{s})=\varphi(\tilde{x},\tilde{t},\tilde{y},\tilde{s})-\big(\kappa_\ell^{c_0\theta}\big)^2\,(\tilde{t}-\tilde{s}) \tag{3.50}$$

当 $\tilde{x}\ =\ 0$ 和 $\tilde{y}\ =\ 0$时为二阶消失。这意味着，在上述抛物线缩放之后，我们实际上有

$$D^\beta_{\tilde{x},\tilde{t},\tilde{y},\tilde{s}}\big(\theta^{-2}\tilde{\varphi}(\theta\tilde{x},\tilde{t},\theta\tilde{y},\tilde{s})\big)=O_\beta(1)\quad\text{if}\ \ |\tilde{x}|,|\tilde{y}|=O(1). \tag{3.51}$$

显然，为了证明 (3.48)，我们可以用 $\tilde{\varphi}$ 替换 φ。此外，根据闵可夫斯基不等式和施瓦茨不等式，如果我们定义“冻结”的双线性振荡积分算子

$$B^{\tilde{s},\tilde{s}'}_{\lambda,\nu,\nu'}(h_1,h_2)(x,t)=(\alpha_m(t))^2\times \tag{3.52}$$
$$\iint e^{i\lambda(\tilde{\varphi}(\tilde{x},\tilde{t},\tilde{y},\tilde{s})+\tilde{\varphi}(\tilde{x},\tilde{t},\tilde{y}',\tilde{s}'))}a_{\lambda,\nu}(\tilde{x},\tilde{t},\tilde{y},\tilde{s})a_{\lambda,\nu'}(\tilde{x},\tilde{t},\tilde{y}',\tilde{s}')\,h_1(\tilde{y})\,h_2(\tilde{y}')\,d\tilde{y}d\tilde{y}',$$

那么只需证明

$$\big\|B^{\tilde{s},\tilde{s}'}_{\lambda,\nu,\nu'}(h_1,h_2)\big\|_{L^{q/2}_{\tilde{t},x}(\{|\tilde{x}|\le C_3\theta\}\times[-1,1])} \lesssim_\varepsilon \lambda^{-\frac{2n}{q}+\varepsilon}\,\theta^{-\frac{2}{n+2}}\,\|h_1\|_{L^2_{\tilde{x}}}\|h_2\|_{L^2_{\tilde{x}}},\ q=\tfrac{2(n+2)}{n}. \tag{3.53}$$

注意， $B^{\tilde{s},\tilde{s}'}_{\lambda,\nu,\nu'}(h_1,h_2)$可分解为两个涉及（$\tilde{x},\tilde{t},\tilde{y}$）变量的振荡积分算子的乘积。这两个相位函数为

$$\phi_{\tilde{s}}(\tilde{x},\tilde{t};\tilde{y})=\tilde{\varphi}(\tilde{x},\tilde{t},\tilde{y},\tilde{s}) \text{ and } \phi_{\tilde{s}'}(\tilde{x},\tilde{t};\tilde{y})=\tilde{\varphi}(\tilde{x},\tilde{t},\tilde{y},\tilde{s}'). \tag{3.54}$$

为了应用 [23]中的双线性结果，我们需要汇总一些关于式 (3.52)中双线性振荡积分的振幅的支撑集性质的事实，这些事实是引理 3.5 的直接推论。

引理 3.6。给定如 (2.6) 中的 $\delta<1/8$ 。那么我们可以在 (3.21) 中固定 $c_0>0$，使得存在常数 c_δ、$C_\delta\in(0、\infty)$，从而当 θ 和 $|\tilde{x}|\le C_0\theta$ 足够小时，在 C_0 固定的情况下，我们有

$$\text{if } a_{\lambda,\nu}(\tilde{x},\tilde{t};\tilde{y},\tilde{s})\cdot a_{\lambda,\nu'}(\tilde{x},\tilde{t};\tilde{y}',\tilde{s}')\neq 0, \text{then } |\tilde{y}|,|\tilde{y}'|\le C_\delta\theta, \text{ and } |\tilde{y}-\tilde{y}'|\ge c_\delta\theta. \tag{3.55}$$

此外，如果 $\delta_0<1/8$ 如 （2.6）中所述足够小，那么当 θ 充分小时，我们有

$$\text{如果 } a_{\lambda,\nu}(\tilde{x},\tilde{t};\tilde{y},\tilde{s})\neq 0 \text{ 那么 } |\delta-2\kappa_\ell^{c_0\theta}(\tilde{t}-\tilde{s})|\le 4\delta_0\delta, \tag{3.56}$$

$$\text{and if } a_{\lambda,\nu'}(\tilde{x},\tilde{t};\tilde{y},\tilde{s}')\neq 0 \text{ then } |\delta-2\kappa_\ell^{c_0\theta}(\tilde{t}-\tilde{s}')|\le 4\delta_0\delta,$$

证明。关于 $\tilde{y}$ 和 $\tilde{y}'$ 大小的（3.55）中的第一个断言，可由（3.34）、（3.39）和（3.40）直接推出。为说明关于 $\tilde{y}$变量之间重要分离的断言，回想 ν，$\nu'\in c_0\theta\cdot\mathbb{Z}^{2n-3}$，且由（3.23），$|\nu-\nu'|\in[\frac14\theta,4^n\theta]$。因此，若记 $\nu=(c_0\theta j,\ c_0\theta\ell)$ 和 $\nu'=(c_0\theta j',\ c_0\theta\ell')$，则可分为以下两种情形:

(i)$|j-j'|\ge\frac18$。在这种情况下，薛定谔曲线ι_ν 和 $\iota_{\nu'}$ 的空间部分之间的夹角为 $\approx\theta$。根据(3.32)，如果 (3.55)中振幅的乘积非零，那么在我们原来的费米正规坐标中，对于某个固定常数 C_1'，必须有 $x\in\mathcal{T}_{C_1'c_0\theta}(\gamma_j)\cap\mathcal{T}_{C_1'c_0\theta}(\gamma_{j'})$，$y\in\mathcal{T}_{C_1'c_0\theta}(\gamma_j)$ 以及 $y'=\mathcal{T}_{C_1'c_0\theta}(\gamma_{j'})$。当然，这里 $\mathcal{T}_r(\gamma)$表示在 M^{n-1} 中围绕 γ 的一个 r-管。根据 (3.35)，如果该乘积非零，对于我们足够小的 $\delta_0>0$，还必须有$d_g(x,y)$ $d_g(x,y')\in[\delta-\delta_0\delta,\delta+\delta_0\delta]$。由于我们假设 (3.23) 成立，宽度为 $\approx c_0\theta$ 的两个管在 (x,t) 处以角度 $\approx\theta$ 相交，这意味着，如果上述乘积非零且 c_0 和 θ 足够小，那么在我们原来的费米正规坐标中，$|(y_1,\dots,y_{n-2})-(y_1',\dots,y_{n-2}')|\approx\theta$。根据(3.40)，在 $j\neq j'$的假设下，这就得到了(3.55) 中关于 $\tilde{y}$ 和 $\tilde{y}'$ 之间分离的断言。注意，δ 越小，我们就必须相应地选择更小的 c_0，但这里我们假设 δ 是固定的（正如我们稍后将要做的那样）。

(ii) $|\ell-\ell'|\ge\frac18$。在这种情况下，我们有 $|\ell-\ell'|\approx 1$。回想一下，在我们的费米正规坐标中，我们有

$$d_g(x,y)=|x_{n-1}-y_{n-1}|,\ \frac{\partial}{\partial x_j}d_g(x,y),\ \frac{\partial}{\partial y_j}d_g(x,y)=0, \tag{3.57}$$
$$\text{if } x=(0,\dots,0,x_{n-1}),\ y=(0,\dots,0,y_{n-1}), \text{and } \ j=1,\dots,n-2.$$

此外，我们还知道，根据 (3.34)

$$|(x_1,\dots,x_{n-2})|+|(y_1,\dots,y_{n-2})|\le C_0\theta, \quad \text{if } a_{\lambda,\nu}a_{\lambda,\nu'}\neq 0. \tag{3.58}$$

由于函数 $d_g(x,y)$ 在 $d_g(x,y)\approx\delta$ 时是光滑的，由 (3.57)、(3.58) 和 Taylor 展开可得

$$|d_g(x,y)-(x_{n-1}-y_{n-1})|,\ |d_g(x,y')-(x_{n-1}-y_{n-1}')|\le C_\delta\theta^2, \quad \text{if } a_{\lambda,\nu}a_{\lambda,\nu'}\neq 0,$$

因为根据 (3.35)，当 $x_{n-1}-y_{n-1}<0$ 时两个振幅都为零。若令 θ 足够小，则 $C_\delta\theta^2$ 远小于 $c_0\theta$。因此，若 $|(x_{n-1}-y_{n-1})+2\kappa_\ell^{c_0\theta}(t-s)|\ge C_0'c_0\theta$，且 C_0' 足够大，则必有 $|d_g(x,y)+2\kappa_\ell^{c_0\theta}(t-s)|\ge C_0c_0\theta$，其中 C_0 如 (3.33) 中所示。这意味着，若 $|(x_{n-1}-y_{n-1})+2\kappa_\ell^{c_0\theta}(t-s)|\ge C_0'c_0\theta$，则 $a_\nu=0$，这里所取的 C_0' 与 c_0 无关。类似地，若 $|(x_{n-1}-y'_{n-1})+2\kappa_{\ell'}^{c_0\theta}(t-s)|\ge C_0'c_0\theta$，则 $a_{\nu'}=0$。由 (3.39) 可知，对于某个一致常数 C_1，若 $a_\nu\neq0$，则必有 $|\tilde x_{n-1}-\tilde y_{n-1}|\le C_1c_0\theta$；若 $a_{\nu'}\neq0$，则必有$|(\tilde x_{n-1}-\tilde y'_{n-1})-2(\kappa_\ell^{c_0\theta})^{-1}(\kappa_{\ell'}^{c_0\theta}-\kappa_\ell^{c_0})(t-s)|\le C_1c_0\theta$。由于 (3.33) 和 (3.35) 意味着，在振幅的支集上有$-(t-s)\sim\delta$，因此 $|2(\kappa_\ell^{c_0\theta})^{-1}(\kappa_\ell^{c_0\theta}-\kappa_{\ell'}^{c_0\theta})(t-s)|$ 必须大于 θ 的某个固定倍数，其中 $|\ell-\ell'|\approx1$、a_λ、$\nu\cdot a_\lambda$、$\nu'\neq0$。所以，在这种情况下，若 c_0 足够小，则必有 $|\tilde y_{n-1}-\tilde y'_{n-1}|\approx\theta$，其中 a_λ、$\nu\cdot a_\lambda$、$\nu'\neq0$。至此，关于 (3.55) 中 $\tilde y$ 与 $\tilde y'$ 分离的第一项断言得证。

还需证明 (3.56)。由于我们假设了 $|\tilde x|\le C_0\theta$，由 (3.55) 的第一部分可知，如果不满足$|\tilde y|$，$|\tilde y'|=O(\theta)$，那么 (3.56) 中的两个振幅都会消失，因此

$$a_{\lambda,\nu}(\tilde x,\tilde t;\tilde y,\tilde s)=a_{\lambda,\nu'}(\tilde x,\tilde t;\tilde y,\tilde s)=0\quad\text{if}\quad|\tilde x_{n-1}-\tilde y_{n-1}|\ge C'\theta, \tag{3.59}$$

对于某个常数 C'。由 (3.39)

$$(\tilde x_{n-1}-\tilde y_{n-1},\tilde t-\tilde s)=-(\kappa_\ell^{c_0\theta})^{-1}\big(x_{n-1}-y_{n-1}+2\kappa_\ell^{c_0\theta}(t-s),\,-(x_{n-1}-y_{n-1})-\kappa_\ell^{c_0\theta}(t-s)\big)\big),$$

因此 $(\tilde x_{n-1}-\tilde y_{n-1})+(\tilde t-\tilde s)=-(t-s)$。由于 $|\ell-\ell'|\approx1$ 蕴含 $\kappa_\ell^{c_0\theta}-\kappa_{\ell'}^{c_0\theta}=O(\theta)$，由 (3.33) 和 (3.59) 可得，如果不满足

$$|d_g(x,y)-2\kappa_\ell^{c_0\theta}(\tilde t-\tilde s)|\le C'\theta,$$

对于某个一致常数 C'。由 (3.35) 的第一部分可知，若 θ 足够小，则得到 (3.56)。□

现在我们来证明双线性振荡积分估计 (3.53)，由此完成命题 3.3 的证明。

为证明(3.53)，除了遵循 [23, 定理 1.3], 的证明外，我们还将遵循我们两人中的两位 [4] 的相关论证；他们在 $1+2$ 维情形下（比本文低一维）使用H¨ormander [19]中隐含的更简单的经典双线性振荡积分估计，证明了类似的双线性估计。这两位作者在论文 [5] 中也采用了类似的论证。

正如在 [23] 中，我们首先按照 (3.49) 和(3.51)进行抛物缩放，以便能够应用Lee [23] 中的主要估计，即定理 1.1。因此，对于足够小的 $\lambda^{-1/8}\le\theta\ll1$，我们令

$$\phi^\theta_{\tilde s}(\tilde x,\tilde t;\tilde y)=\theta^{-2}\tilde\varphi(\theta\tilde x,\tilde t;\theta\tilde y,\tilde s),\quad\text{and}\quad\phi^\theta_{\tilde s'}(\tilde x,\tilde t;\tilde y')=\theta^{-2}\tilde\varphi(\theta\tilde x,\tilde t;\theta\tilde y',\tilde s'). \tag{3.60}$$

以及相应的振幅

$$a^\theta_{\lambda,\nu}(\tilde x,\tilde t;\tilde y,\tilde s)=a_{\lambda,\nu}(\theta x,\tilde t;\theta\tilde y,\tilde s)\quad\text{and}\quad a^\theta_{\lambda,\nu'}(\tilde x,\tilde t;\tilde y,\tilde s)=a_{\lambda,\nu}(\theta x,\tilde t;\theta\tilde y',\tilde s'). \tag{3.61}$$

那么，正如我们之前指出的

$$D^\beta_{\tilde x,\tilde t,\tilde y}a^\theta_{\lambda,\mu}=O_\beta(1),\ \mu=\nu,\nu'\quad\text{and}\quad D^\beta_{\tilde x,\tilde t,\tilde y}\phi_j=O_\beta(1),\ \phi_1=\phi^\theta\tilde s,\ \phi_2=\phi^\theta_{\tilde s'}.$$

由 (3.55) 和 (3.56)，当 θ 足够小时，我们还得到关键的分离性质

$$\text{if}\quad a^\theta_{\lambda,\nu}(\tilde x,\tilde t;\tilde y,\tilde s)a^\theta_{\lambda,\nu'}(\tilde x,\tilde t;\tilde y',\tilde s')\neq0 \tag{3.62}$$
$$\text{then}\ |\tilde y|,|\tilde y'|=O(1),\ |\tilde y-\tilde y'|\ge c_\delta\ \text{and}\ |\tilde s-\tilde s'|\le8\delta_0\delta,$$

其中 δ 和 δ_0 如 (2.6) 所示。

此外，通过一个简单的缩放论证，本节剩余的任务 (3.53) 等价于以下命题，其中 θ 足够小：

$$\left\|B^{\theta,\tilde{s},\tilde{s}'}_{\lambda,\nu,\nu'}(h_1,h_2)\right\|_{L^{q/2}_{t,x}(\{|\tilde{x}_0|\le C_1\}\times[-1,1])} \lesssim_\varepsilon \left(\lambda\theta^2\right)^{-\frac{2n}{q}+\varepsilon}\|h_1\|_{L^2_x}\|h_2\|_{L^2_x},\ q=\tfrac{2(n+2)}{n}, \tag{3.63}$$

其中我们有（3.52）的缩放版本，即，

$$B^{\mu,\tilde{s},\tilde{s}'}_{\lambda,\nu,\nu'}(h_1,h_2)(x,t)=(\alpha_m(t))^2\times \iint e^{i(\lambda\theta^2)[\phi^\theta_{\tilde{s}}(\tilde{x},\tilde{t};\tilde{y})+\phi^\theta_{\tilde{s}'}(\tilde{x},\tilde{t};\tilde{y}')]}a^\theta_{\lambda,\nu}(\tilde{x},\tilde{t};\tilde{y},\tilde{s})a^\theta_{\lambda,\nu'}(\tilde{x},\tilde{t};\tilde{y}',\tilde{s}')\,h_1(\tilde{y})h_2(\tilde{y}')\,d\tilde{y}d\tilde{y}'. \tag{3.64}$$

为证明这一点，我们来看看如何利用先前的观察：由 (3.41) 和 (3.50) 可知，当 $(\tilde{x},\tilde{y})=(0,0)$ 时，$\tilde{\varphi}$ 二阶消失；据此可以看出，若 θ 足够小，则 (3.60) 中缩放后的相位函数与欧氏情形非常相似，从而使我们能够验证 Lee 的双线性振荡积分定理 [23, 定理 13] 的假设，前提是 (2.6) 中的 δ，$\delta_0>0$ 固定为足够小。

更具体地说，令

$$A(\tilde{t},\tilde{s})=\frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial\tilde{y}_j\partial\tilde{y}_k}(0,\tilde{t};0,\tilde{s}),\ B(\tilde{t},\tilde{s})=\frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial\tilde{x}_j\partial\tilde{y}_k}(0,\tilde{t};0,\tilde{s}), \text{ and } C(\tilde{t},\tilde{s})=\frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial\tilde{x}_j\partial\tilde{x}_k}(0,\tilde{t};0,\tilde{s}). \tag{3.65}$$

然后，关于 $(\tilde{x},\tilde{y})=(0,0)$ 的 $\tilde{\varphi}$ 泰勒展开是

$$\tilde{\varphi}(\tilde{x},\tilde{t};\tilde{y},\tilde{s})=\tfrac{1}{2}\tilde{y}^TA(\tilde{t},\tilde{s})\tilde{y}+\tilde{x}^TB(\tilde{t},\tilde{s})\tilde{y}+\tfrac{1}{2}\tilde{x}^TC(\tilde{t},\tilde{s})\tilde{x}+r(\tilde{x},\tilde{t};\tilde{y},\tilde{s}), \tag{3.66}$$

其中 $r(\tilde{x},\tilde{t};\tilde{y},\tilde{s})$ 在 $(\tilde{x},\tilde{y})=(0,0)$ 处三阶消失。因此，

$$D^\beta_{\tilde{x},\tilde{y},\tilde{t},\tilde{s}}r^\theta(\tilde{x},\tilde{t};\tilde{y},\tilde{s})=O(\theta), \quad \text{if } r^\theta(\tilde{x},\tilde{t};\tilde{y},\tilde{s})=\theta^{-2}r(\theta\tilde{x},\tilde{t};\theta\tilde{y},\tilde{s}), \tag{3.67}$$

这意味着，当 $\theta\to0$ 时，$r^\theta\to0$ 在 C^∞ 拓扑中。

为了使用(3.66)，我们将使用抛物缩放以及以下引理。该引理的证明将推迟到本小节末尾；它指出，如果 (2.6)中的 $\delta,\delta_0>0$ 足够小，那么 (3.54) 中的相位函数 $\phi_{\tilde{s}}$ 和 $\phi_{\tilde{s}'}$ 满足Carleson-Sj¨olin 条件（见 [29, §2.2.2] 和 [33]）。

引理3.7。令 $A(\tilde{t},\tilde{s})$ 和 $B(\tilde{t},\tilde{s})$ 如(3.65)中所示。则若(2.6) 中的 δ、$\delta_0>0$ 足够小

$$\det B(\tilde{t},\tilde{s})=\det\frac{\partial^2\tilde{\varphi}(0,\tilde{t};0,\tilde{s})}{\partial\tilde{x}_j\partial\tilde{y}_k}\neq0, \quad \textit{if } a^\theta_{\lambda,\nu}\cdot a^\theta_{\lambda,\nu'}\neq0. \tag{3.68}$$

此外，在 $a^\theta_{\lambda,\nu}\cdot a^\theta_{\lambda,\nu'}$，$-(\frac{\partial}{\partial\tilde{t}}A(\tilde{t},\tilde{s}))^{-1}=-(\frac{\partial}{\partial\tilde{t}}\frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial\tilde{y}_j\partial\tilde{y}_k}(0,\tilde{t};0,\tilde{s}))^{-1}$ 的支撑集上是正定的，即，

$$\xi^t\Big(-\frac{\partial}{\partial\tilde{t}}A(\tilde{t},\tilde{s})\Big)^{-1}\xi,\ \xi^t\Big(-\frac{\partial}{\partial\tilde{t}}A(\tilde{t},\tilde{s}')\Big)^{-1}\xi\geq c_\delta|\xi|^2, \quad \textit{if } a^\theta_{\lambda,\nu}\cdot a^\theta_{\lambda,\nu'}\neq0, \tag{3.69}$$

此外

$$\Big|\frac{\partial}{\partial\tilde{t}}A(\tilde{t},\tilde{s})\xi\Big|\geq c_\delta|\xi|,\ \Big|\frac{\partial}{\partial\tilde{t}}A(\tilde{t},\tilde{s}')\xi\Big|\geq c_\delta|\xi| \ \textit{if } a^\theta_{\lambda,\nu}\cdot a^\theta_{\lambda,\nu'}\neq0, \tag{3.70}$$

利用（3.66）和（3.67）以及这个引理，我们可以看到，通过 Lee 的 [23, 定理 1.1] 可以得到剩余的估计（3.63）。正如我们将看到的，对我们而言，$-\frac{\partial}{\partial\tilde{t}}A(\tilde{t},\tilde{s})$ 是正定的这一点至关重要。

—

注意，除了 θ 参数之外，$(\tilde{s},\tilde{s}')$ 参数也涉及 $(\tilde{s},\tilde{s}')$ 参数。为简单起见，我们首先看看 Lee 的结果如何在这两个

参数一致，即 $\tilde{s} = \tilde{s}'$。然后我们将论证，如果 δ_0 在(2.6)中，因此 (3.55) 足够小，我们也可以处理 $\tilde{s} \neq \tilde{s}'$ 的情形。

为此，我们首先注意到，(3.67)中的抛物缩放与 (3.60)中的缩放一致，并且由于右侧的前三项是二次的，它保持 (3.66) 右侧的前三项不变。此外，在证明(3.64) 时，我们可以从 $\phi^\theta_{\tilde{s}}$ 中减去 $\frac{1}{2}\tilde{x}^t C(\tilde{t},\tilde{s})\tilde{x}$，并从 $\phi^\theta_{\tilde{s}'}$中减去 $\frac{1}{2}\tilde{x}^t C(\tilde{t},\tilde{s}')\tilde{x}$，因为这些二次项不涉及 $\tilde{y}$。我们指出，如果 $\tilde{s} \neq \tilde{s}'$，这一平凡的约化同样适用。

接下来，我们注意到，根据 (3.68) 以及我们的临时假设 $\tilde{s} = \tilde{s}'$，在对 $\tilde{x}$ 进行线性变量变换（取决于 $\tilde{t}$，$\tilde{s}$）之后，我们可以将问题化简为 $B(\tilde{t},\ \tilde{s}) = I_{n-1}$的情形，其中 $(n-1) \times (n-1)$ 为单位矩阵。这意味着，对于 $\tilde{s} = \tilde{s}'$ 的情形，我们已将问题化简为证明 (3.63) 在以下情形下成立，即

$$\phi^\theta_{\tilde{s}}(\tilde{x},\tilde{t};\tilde{y}) = \langle \tilde{x},\tilde{y}\rangle + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n-1} \frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial\tilde{y}_j\partial\tilde{y}_k}(0,\tilde{t};0,\tilde{s})\tilde{y}_j\tilde{y}_k + \tilde{r}^\theta(\tilde{x},\tilde{t};\tilde{y},\tilde{s}) \\ = \langle \tilde{x},\tilde{y}\rangle + \tilde{y}^t A(\tilde{t},\tilde{s})\tilde{y} + \tilde{r}^\theta(\tilde{x},\tilde{t};\tilde{y},\tilde{s}), \tag{3.71}$$

其中 $\tilde{r}^\theta$ 表示由 $B(\tilde{t},\tilde{s})$ 得到的新 $\tilde{x}$ 变量下重写的 r^θ。鉴于 (3.68)，(3.67) 对 $\tilde{r}^\theta$ 仍然成立。为便于后续使用，我们注意到，若按照上文所述根据 $\tilde{s}$ 进行变量替换，那么对于靠近 $\tilde{s}$ 的 $\tilde{s}'$，有

$$B(\tilde{t},\tilde{s},\tilde{s}') = (B(\tilde{t},\tilde{s}'))^t\,((B(\tilde{t},\tilde{s})^{-1})^t = I_{n-1} + O(|\tilde{s}-\tilde{s}'|), \tag{3.72}$$

$$\phi^\theta_{\tilde{s}'}(\tilde{x},\tilde{t},\tilde{y}) = \langle x, B(\tilde{t},\tilde{s},\tilde{s}')\tilde{y}\rangle + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n-1} \frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial\tilde{y}_j\partial\tilde{y}_k}(0,\tilde{t};0,\tilde{s}')\tilde{y}_j\tilde{y}_k + \tilde{r}^\theta(\tilde{x},\tilde{t};\tilde{y},\tilde{s}) \\ = \phi^\theta_{\tilde{s}}(\tilde{x},\tilde{t};\tilde{y}) + O(|\tilde{s}-\tilde{s}'|). \tag{3.73}$$

我们固定 (2.6) 中的 δ 和 δ_0，使引理 3.5 和 3.7 的结论成立。现在我们也可以最终固定 c_0，使引理 3.5 和引理 3.6 的结果成立。如果我们只需处理 (3.63) 中 $\tilde{s} = \tilde{s}'$ 的情形，那么上述对 δ_0的选择就足够了；然而，正如我们很快将看到的，为了处理 $\tilde{s} \neq \tilde{s}'$ 的情形，我们需要将 δ_0 选得足够小，以便利用 (3.62) 的最后一部分。

现在我们验证可以应用 [23, 定理1.3]，从而在 θ足够小时得到 (3.63)。这将完成命题3.3的证明。我们暂时回顾一下，我们假设 $\tilde{s} = \tilde{s}'$，并且已将情形化简为 $B(\tilde{t},\tilde{s}) = I_{n-1}$ 以及$C(\tilde{t},\tilde{s}) = 0$ 在 (3.66) 中的情形，因此

$$\phi^\theta_{\tilde{s}}(\tilde{x},\tilde{t};\tilde{y}) = \langle \tilde{x},\tilde{y}\rangle + \tfrac{1}{2}\tilde{y}^t A(\tilde{t},\tilde{s})\tilde{y} + \tilde{r}^\theta(\tilde{x},\tilde{t};\tilde{y},\tilde{s}), \tag{3.74}$$

其中 $\tilde{r}^\theta$ 满足 (3.67) 中的界。

由（3.67）和（3.74）可得

$$\frac{\partial\phi^\theta_{\tilde{s}}}{\partial\tilde{x}}(\tilde{x},\tilde{t};\tilde{y}) = \tilde{y} + \frac{\partial\tilde{r}^\theta}{\partial\tilde{x}}(\tilde{x},\tilde{t};\tilde{y},\tilde{s}) = \tilde{y} + \varepsilon(\theta,\tilde{x},\tilde{t},\tilde{s};\tilde{y}), \tag{3.75}$$

其中 $\tilde{y} \to \varepsilon(\cdot;\tilde{y})$及其导数是 $O(\theta)$。因此，当 θ 足够小时，逆函数也满足

$$\tilde{y} \to \big(\frac{\partial\phi^\theta_{\tilde{s}}}{\partial\tilde{x}}(\tilde{x},\tilde{t};\cdot)\big)^{-1}(\tilde{y}) = \tilde{y} + \tilde{\varepsilon}(\theta,\tilde{x},\tilde{s};\tilde{y}), \tag{3.76}$$

其中

$$D^\beta_{\tilde{y}}\tilde{\varepsilon}(\theta,\tilde{x},\tilde{t},\tilde{s};\tilde{y}) = O_\beta(\theta). \tag{3.77}$$

在 [23], 的记号下定义

$$q_s^\theta(\tilde{x},\tilde{t};\tilde{y}) = \tfrac{\partial}{\partial \tilde{t}}\phi_s^\theta\big(\tilde{x},\tilde{t};\big(\tfrac{\partial \phi_s^\theta}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x},\tilde{t};\cdot)\big)^{-1}(\tilde{y})\big) \\ = \big(\tfrac{\partial}{\partial \tilde{t}}\phi_s^\theta\big)\big(\tilde{x},\tilde{t};\tilde{y}+\tilde{\varepsilon}(\theta,\tilde{x},\tilde{t},s;\tilde{y})\big), \quad s=\tilde{s},\tilde{s}', \tag{3.78}$$

以及

$$\delta^\theta_{\tilde{s},\tilde{s}'}(\tilde{x},\tilde{t};\tilde{y},\tilde{y}') = \partial_{\tilde{y}} q_{\tilde{s}}^\theta(\tilde{x},\tilde{t};\partial_{\tilde{x}}\phi_{\tilde{s}}^\theta(\tilde{x},\tilde{t};\tilde{y})) - \partial_{\tilde{y}} q_{\tilde{s}'}^\theta(\tilde{x},\tilde{t};\partial_{\tilde{x}}\phi_{\tilde{s}'}^\theta(\tilde{x},\tilde{t};\tilde{y}')). \tag{3.79}$$

尽管目前我们假设 $\tilde{s}=\tilde{s}'$ 这两个量对于 $\tilde{s}\neq\tilde{s}'$ 同样是必需的，以便使用 [23, 定理 1。1] 来得到（3.63）。

然后， [23, （1.4）],确保（3.63）中的界的条件为

$$\big|\big\langle \partial^2_{\tilde{x}\tilde{y}}\phi^\theta_{\tilde{s}}(\tilde{x},\tilde{t};\tilde{y})\delta^\theta_{\tilde{s},\tilde{s}'},\, \big[\partial^2_{\tilde{x},\tilde{y}}\phi^\theta_{\tilde{s}}(\tilde{x},\tilde{t};\tilde{y})\big]^{-1}\big[\partial^2_{\tilde{y}\tilde{y}} q^\theta_{\tilde{s}}(\tilde{x},\tilde{t};\partial_{\tilde{x}}\phi^\theta_{\tilde{s}}(\tilde{x},\tilde{t};\tilde{y}))\big]^{-1}\delta^\theta_{\tilde{s},\tilde{s}'}\big\rangle\big| > 0, \\ \delta^\theta_{\tilde{s},\tilde{s}'} = \delta^\theta_{\tilde{s},\tilde{s}'}(\tilde{x},\tilde{t};\tilde{y},\tilde{y}'), \quad \text{on} \quad \operatorname{supp}(a_{\lambda,\nu}\cdot a_{\lambda,\nu'}), \tag{3.80}$$

以及

$$\big|\big\langle \partial^2_{\tilde{x}\tilde{y}}\phi^\theta_{\tilde{s}'}(\tilde{x},\tilde{t};\tilde{y}')\delta^\theta_{\tilde{s},\tilde{s}'},\, \big[\partial^2_{\tilde{x},\tilde{y}}\phi^\theta_{\tilde{s}'}(\tilde{x},\tilde{t};\tilde{y}')\big]^{-1}\big[\partial^2_{\tilde{y}\tilde{y}} q^\theta_{\tilde{s}'}(\tilde{x},\tilde{t};\partial_{\tilde{x}}\phi^\theta_{\tilde{s}'}(\tilde{x},\tilde{t};\tilde{y}'))\big]^{-1}\delta^\theta_{\tilde{s},\tilde{s}'}\big\rangle\big| > 0, \\ \delta^\theta_{\tilde{s},\tilde{s}'} = \delta^\theta_{\tilde{s},\tilde{s}'}(\tilde{x},\tilde{t};\tilde{y},\tilde{y}'), \quad \text{on} \quad \operatorname{supp}(a_{\lambda,\nu}\cdot a_{\lambda,\nu'}). \tag{3.81}$$

注意，由(3.67)、(3.71)、(3.93)、(3.77) 和 (3.78) 可知，当 θ 足够小时，我们有

$$\big(q^\theta_{\tilde{s}}(\tilde{x},\tilde{t};\tilde{y})\big)^{-1} = \big(\tfrac{\partial A}{\partial t}(\tilde{t},\tilde{s})\big)^{-1} + O(\theta), \tag{3.82}$$

并且，由 (3.75) 和 (3.76),

$$\partial^2_{\tilde{x},\tilde{y}}\phi^\theta_{\tilde{s}}(\tilde{x},\tilde{t};\tilde{y}) = I_{n-1} + O(\theta), \tag{3.83}$$

以及

$$\big(\partial^2_{\tilde{x},\tilde{y}}\phi^\theta_{\tilde{s}}(\tilde{x},\tilde{t};\tilde{y})\big)^{-1} = I_{n-1} + O(\theta). \tag{3.84}$$

由 (3.71)、(3.70)、(3.78) 以及 (3.55) 中的分离条件可知，若 $\tilde{s}=\tilde{s}'$ 我们有

$$|\delta^\theta_{\tilde{s},\tilde{s}}(\tilde{x},\tilde{t};\tilde{y},\tilde{y}')| > 0 \quad \text{on} \quad \operatorname{supp}(a_{\lambda,\nu}\cdot a_{\lambda,\nu'}), \tag{3.85}$$

如果 θ 足够小。那么在这种情况下，(3.80)和(3.81)中绝对值内的量等于

$$\big\langle \delta^\theta_{\tilde{s},\tilde{s}}(\tilde{x},\tilde{t};\tilde{y},\tilde{y}'),\, \big(\tfrac{\partial A}{\partial t}(\tilde{t},s)\big)^{-1}\delta^\theta_{\tilde{s},\tilde{s}}(\tilde{x},\tilde{t};\tilde{y},\tilde{y}')\big\rangle + O(\theta) \ \text{ on } \ \operatorname{supp}(a_{\lambda,\nu}\cdot a_{\lambda,\nu'}), \tag{3.86}$$

因此，由 (3.69) 和 (3.85)，当 $\tilde{s}=\tilde{s}'$ 时，对于足够小的 θ ，条件 (3.80) 和 (3.81) 成立。因此，根据 [23, 定理 1.1], ，我们得到 (3.63)；在这种情况下，我们得到 (3.63)。

如果 $\tilde{s}\neq\tilde{s}'$ 出现在 (3.63) 中，我们必须将 $\delta^\theta_{\tilde{s},\tilde{s}}$ 替换为$\delta^\theta_{\tilde{s},\tilde{s}'}$。为了适应这一点，我们首先需要利用以下事实：根据 (3.55) 的最后一部分，

$$\delta^\theta_{\tilde{s},\tilde{s}'}(\tilde{x},\tilde{t};\tilde{y},\tilde{y}') = \delta^\theta_{\tilde{s},\tilde{s}}(\tilde{x},\tilde{t};\tilde{y},\tilde{y}') + O(|\tilde{s}-\tilde{s}'|) \quad \text{on } \operatorname{supp}(a_{\lambda,\nu}\cdot a_{\lambda,\nu'}).$$

因此，由（3.62）的最后一部分可得，

$$\delta^\theta_{\tilde{s},\tilde{s}'}(\tilde{x},\tilde{t};\tilde{y},\tilde{y}') = \delta^\theta_{\tilde{s},\tilde{s}}(\tilde{x},\tilde{t};\tilde{y},\tilde{y}') + O(\delta_0) \quad \text{on } \operatorname{supp}(a_{\lambda,\nu}\cdot a_{\lambda,\nu'}).$$

这意味着，如果我们在 (3.86) 中用 $O(\theta+\delta_0)$ 替换 $O(\theta)$，那么 (3.80) 中的量就具有这种形式。

另一个条件 (3.81) 涉及相位函数 $\phi^\theta_{\tilde{s}'}$ 及其对应的 $q^\theta_{\tilde{s}'}$。然而，如果 $B=B(\tilde{t},\ \tilde{s},\ \tilde{s}')$ 如 (3.72) 中所示，那么我们有 (3.75) 的类似结论，只需将 (3.75) 右侧的第一项替换为 $B\tilde{y}$ ，并将 (3.76) 右侧的第一项替换为 $B^{-1}\tilde{y}$。当然， $\frac{\partial A}{\partial \tilde{t}}(\tilde{t},\ \tilde{s}') = \frac{\partial A}{\partial \tilde{t}}(\tilde{t},\ \tilde{s}) + O(|\tilde{s}-\tilde{s}'|)$。因此，

$q^\theta_{\tilde{s}'}$ 将在 $a_{\lambda,\ \nu}\cdot a_{\lambda,\ \nu'}\neq 0$ 时与 $q^\theta_{\tilde{s}}$ 一致，误差为 $O(|s-s'|)\ =O(\delta_0)$ 阶；根据 (3.72)，如果将 $O(\theta)$ 替换为 $O(\theta+\delta_0)$，则 (3.83) 和 (3.84) 的类似结论仍然成立，其中 $\tilde{s}$ 被替换为 $\tilde{s}'$。因此，与 (3.80) 一样，如果在 (3.86) 中将 $O(\theta)$ 替换为 $O(\theta+\delta_0)$，那么 (3.81) 中的量也具有这种形式。

因此，若 δ_0 in (2.6) 最终固定得足够小，并且如上所述，θ 足够小，我们便可得出条件 (1.4) 在 [23] 中成立，从而得到 (3.63)，并完成命题 3.3 的证明。□

引理 *3.7* 的证明。我们先证明 (3.69) 和 (3.70)，因为它们比引理中的另一条估计 (3.68) 稍难一些。

回顾 (3.50)，可知

$$A(\tilde{t},\tilde{s})=\frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial\tilde{y}_j\partial\tilde{y}_k}(0,\tilde{t};0,\tilde{s})=\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tilde{y}_j\partial\tilde{y}_k}(0,\tilde{t};0,\tilde{s}), \tag{3.87}$$

其中 φ 与 (3.36) 中相同。

由 (3.43) 可得

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tilde{y}_{n-1}^2}(0,\tilde{t};0,\tilde{s})=\frac{(\kappa_\ell^{c_0\theta})^2}{2(\tilde{t}-\tilde{s})}. \tag{3.88}$$

此外，由 (3.38) 和 (3.39) 可得

$$\varphi(0,\tilde{t};\tilde{y},\tilde{s})=\frac{\big[d_g\big((0,\dots,0,2\kappa_\ell^{c_0\theta}\tilde{t}),\,(\tilde{y}_1,\dots,\tilde{y}_{n-2},2\kappa_\ell^{c_0\theta}\tilde{s}+\kappa_\ell^{c_0\theta}\tilde{y}_{n-1})\big)\big]^2}{4(\tilde{t}-\tilde{s}-\tilde{y}_{n-1})}. \tag{3.89}$$

由 (3.89) 可得

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tilde{y}_j\partial\tilde{y}_{n-1}}(0,\tilde{t};0,\tilde{s})\equiv 0,\quad \text{if}\ \ j=1,\dots,n-2. \tag{3.90}$$

(3.87) 中海森矩阵的剩余部分为

$$\frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial\tilde{y}_j\partial\tilde{y}_k}(0,\tilde{t};0,\tilde{s})=\frac{\partial^2}{\partial\tilde{y}_j\partial\tilde{y}_k}\frac{\big[d_g\big((0,\dots,0,,2\kappa_\ell^{c_0\theta}\tilde{t}),(\tilde{y}_1,\dots,2\kappa_\ell^{c_0\theta}\tilde{s})\big]^2}{4(\tilde{t}-\tilde{s})}, \tag{3.91}$$
$$\text{when}\ \ \tilde{y}_1=\cdots=\tilde{y}_{n-2}=0\ \text{ and }\ 1\le j,k\le n-2.$$

为计算此式，我们回忆一下，(3.39) 和 (3.40) 中的 Schr¨odinger 坐标 $(\tilde{x},\tilde{t})$ 来自空间测地线 γ_j 周围的费米正规坐标 $(x_1,\dots,x_{n-1})$；在这些坐标中，$\gamma_j=(0,\dots,0,t)$ 处以及沿¯该测地线，度量是 $\delta_{j,k}$（矩形的），并且 Christoffel 符号也在那里消失

因此，在费米正规坐标中，距离函数平方的完整海森矩阵必满足

$$\frac{\partial^2}{\partial y_j\partial y_k}\big[d_g\big((0,\dots,0,2\kappa_\ell^{c_0\theta}\tilde{t}),y\big)\big]^2=2I_{n-1},\quad \text{if}\ \ y=(0,\dots,0,2\kappa_\ell^{c_0\theta}\tilde{t}).$$

结合式 (3.40)，这意味着式 (3.91)（即式 (3.87) 中海森矩阵的剩余部分）必须具有如下形式

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tilde{y}_j\partial\tilde{y}_k}=\frac{1}{2(\tilde{t}-\tilde{s})}\delta_{j,k}+O(1),\quad \text{if}\ \ 1\le j,k\le n-2.$$

注意，由于

$$(\tilde{t},\tilde{y}_1,\dots,\tilde{y}_{n-2})\to d_g((0,\dots,0,2\kappa_\ell^{c_0\theta}\tilde{t}),(\tilde{y}_1,\dots,\tilde{y}_{n-2},2\kappa_\ell^{c_0\theta}\tilde{s}'))$$

是光滑的，我们还可以得到

$$\frac{\partial}{\partial\tilde{t}}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tilde{y}_j\partial\tilde{y}_k}(0,\tilde{t};0,\tilde{s})=\frac{-1}{2(\tilde{t}-\tilde{s})^2}\delta_{j,k}+O((\tilde{t}-\tilde{s})^{-1}),\ 1\le j,k\le n-2. \tag{3.92}$$

因此，由 (3.65)、(3.87)、(3.88)、(3.90) 和 (3.92)，可得

$$-2(\tilde{t}-\tilde{s})^2\frac{\partial}{\partial\tilde{t}}A(\tilde{t},\tilde{s})=-2(\tilde{t}-\tilde{s})^2\frac{\partial}{\partial\tilde{t}}\frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial\tilde{y}_j\partial\tilde{y}_k}(0,\tilde{t};0,\tilde{s})=J_{\kappa_\ell^{c_0\theta}}+O(|\tilde{t}-\tilde{s}|), \tag{3.93}$$
$$\text{if}\quad J_{\kappa_\ell^{c_0\theta}}=\operatorname{diag}\,(1,\dots,1,(\kappa_\ell^{c_0\theta})^2).$$

注意到 $\kappa_\ell^{c_0\theta}\in[1/10,10]$。因此，根据（3.56），如果在（2.6）中将 δ 固定得足够小，并且如果δ_0 小于 $1/8$，根据（3.56），我们有 $-(\partial A(\tilde{t},\tilde{s})/\partial\tilde{t})^{-1}$ 在（3.64）中振幅的支撑集上是正定的。因此，对于某个$c_\delta>0$，我们得到（3.69）和（3.70）。事实上，可以取 $c_\delta\sim\delta^{-2}$，

另一个(3.68)的证明非常相似。利用(3.36)可知，由于根据(3.35)和(3.56)，在 $\operatorname{supp}a^\theta_{\lambda,j}\cdot a^\theta_{\lambda,\nu'}$上有 $d_g(x,y)\approx|t-s|\approx\delta$，我们可以假设 $|x|,|y|\le C\delta$。于是有

$$(d_g(x,y))^2=|x-y|^2+r(x,y),\quad\text{where } r(x,y)=O\big((|x|+|y|)|x-y|^2\big)\text{ and } r\in C^\infty.$$

T因此，根据 (3.38)、(3.50) 和 (3.39)，如果 $\bar{x}=(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\dots,\tilde{x}_{n-2})$ 和 $\bar{y}=(\tilde{y}_1,\tilde{y}_2,\dots,\tilde{y}_{n-2})$

$$\tilde{\varphi}(\tilde{x},\tilde{t};\tilde{y},\tilde{s})=\frac{(\kappa_\ell^{c_0\theta})^2(\tilde{x}_{n-1}-\tilde{y}_{n-1})^2+|\bar{x}-\bar{y}|^2+r(x,y)}{4\big(\tilde{t}-\tilde{s}+(\tilde{x}_{n-1}-\tilde{y}_{n-1})\big)}-(\kappa_\ell^{c_0\theta})^2(\tilde{t}-\tilde{s}). \tag{3.94}$$

因此，由（3.69）和（3.70）的证明可知，对于如上所述的$J_{\kappa_\ell^{c_0\theta}}$

$$B(\tilde{t},\tilde{s})=\frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial\tilde{x}_j\partial\tilde{y}_k}(0,\tilde{t};0,\tilde{s})=-\frac{1}{2(\tilde{t}-\tilde{s})}J_{\kappa_\ell^{c_0\theta}}+O(1),$$

当 δ 足够小时，即可得到 (3.68)。 □

4. **核估计**。

本节中，我们将通过证明此前使用的各种核估计来收尾。

4.1. 非正曲率流形上的基本核估计

我们来证明在 A_+ 上用到的核估计。

命题 4.1. 令 $S_\lambda(x,t;\ y,s)$ 表示核

$$\eta(t/T)\eta(s/T)\beta^2(P/\lambda)\big(e^{-i(t-s)\lambda^{-1}\Delta_g}\big)(x,y).$$

那么，如果 $M=M^{n-1}$ 的截面曲率非正，并且 $T=c_0$ 对数 λ 满足 $c_0=c_0(M)>0$ 充分小，则对于 $\lambda\gg1$

$$|S_\lambda(x,t;y,s)|\le C\lambda^{\frac{n-1}{2}}|t-s|^{-\frac{n-1}{2}}\exp(C_M|t-s|). \tag{4.1}$$

为证明这一点，我们注意到，对于固定的 t 和 s，$\beta^2(P/\lambda)e^{-i(t-s)\lambda^{-1}\Delta_g}=\beta^2(P/\lambda)e^{i(t-s)\lambda^{-1}P^2}$ 是作用于 M^{n-1} 上的傅里叶乘子算子，且满足

$$m(\lambda,t-s;\tau)=\beta^2(|\tau|/\lambda)e^{i(t-s)\lambda^{-1}\tau^2}. \tag{4.2}$$

我们将 m 延拓为关于 τ 的偶函数，以便可以写成

$$\beta^2(P/\lambda)e^{-i(t-s)\lambda^{-1}\Delta_g}=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{m}(\lambda,t-s;r)\,\cos r\sqrt{-\Delta_g}\,dr, \tag{4.3}$$

其中

$$\hat{m}(\lambda, t-s; r) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau r}\beta^2(|\tau|/\lambda)\, e^{i(t-s)\lambda^{-1}\tau^2}\, d\tau. \tag{4.4}$$

我们注意到，通过一个简单的分部积分论证，

$$\partial_r^k \hat{m}(\lambda, t-s; r) = O(\lambda^{-N}(1+|r|)^{-N})\,\forall\, N, \text{ if } |t-s| \le 1 \text{ and } \ |r| \ge C_0, \tag{4.5}$$

当 C_0 充分大时。同理

$$\partial_r^k \hat{m}(\lambda, t-s; r) = O(\lambda^{-N}(1+|r|)^{-N})\,\forall\, N, \\ \text{if } |t-s| \in [2^{j-1}, 2^j], \text{ and } \ |r| \ge C_0 2^j, \ j = 1, 2, \dots, \tag{4.6}$$

当 C_0 固定且足够大时。由于 $\beta(|\tau|/\lambda) = 0$ 若 $|\tau| \notin [\lambda/4, 2\lambda]$，可以取 $C_0 = 100$，我们将如此处理。

为此，取一个满足以下条件的偶函数$a \in C_0^\infty$(R)

$$a(r) = 1, \ |r| \le 100 \quad \text{and} \quad a(r) = 0 \text{ if } \ |r| \ge 200.$$

于是，根据粗略的特征函数估计和 Weyl 公式，如果令

$$\tilde{S}_{\lambda,0}(x,t;y,s) = (2\pi)^{-1} \int a(r)\hat{m}(\lambda, t-s, r)\cos rP\, dr \tag{4.7}$$

则有

$$\tilde{S}_{\lambda,0}(x,t;y,s) - \big(\beta^2(P/\lambda)e^{-i(t-s)\lambda^{-1}\Delta_g}\big)(x,y) = O(\lambda^{-N})\,\forall\, N \quad \text{if } |t-s| \le 1, \tag{4.8}$$

并且如果

$$\tilde{S}_{\lambda,j}(x,t;y,s) = (2\pi)^{-1} \int a(2^{-j}r)\hat{m}(\lambda, t-s, r)\cos rP\, dr \tag{4.9}$$

则有

$$\tilde{S}_{\lambda,j}(x,t;y,s) - \big(\beta^2(P/\lambda)e^{-i(t-s)\lambda^{-1}\Delta_g}\big)(x,y) = O(\lambda^{-N})\,\forall\, N \\ \text{if } |t-s| \in [2^{j-1}, 2^j], \ j = 1, 2, \dots. \tag{4.10}$$

因此，如果我们能够证明……，那么就有 (4.1)。

$$|\tilde{S}_{\lambda,0}(x,t;y,s)| \le \lambda^{\frac{n-1}{2}} |t-s|^{-\frac{n-1}{2}} \quad \text{when } \ |t-s| \le 1, \tag{4.11}$$

以及

$$|\tilde{S}_{\lambda,j}(x,t;y,s)| \le \lambda^{\frac{n-1}{2}} \exp(C2^j), \quad \text{if } |t-s| \in [2^{j-1}, 2^j] \\ \text{with } \ j = 1, 2, \dots \text{ and } \ 2^j \le c_0 \log\lambda \tag{4.12}$$

其中 $c_0 = c_0(M)$ 固定得足够小。

为证明 (4.11) 和 (4.12)，我们将采用 B´erard [2] 中的论证方法（另见 [28, §3.6]）。与 [2], [6], [31] 及其他相关工作一样，我们将使用 Hadamard 初始解和 Cartan–Hadamard 定理，将所需的计算提升到 (M^{n-1}, g) 的万有覆盖 $(\mathbb{R}^{n-1}, \tilde{g})$ 上。

因此，我们令 $\{\alpha\} = \Gamma$ 表示保持相关覆盖映射 κ 的甲板变换群：该覆盖映射来自上文第 §4 节中 M^{n-1} 内坐标为 0 的点处的指数映射 $\mathbb{R}^{n-1} \to M^{n-1}$。$\mathbb{R}^{n-1}$ 上的度量 $\tilde{g}$ 是通过 κ 从 M^{n-1} 上的度量 g 拉回的。选择一个以坐标为 0 的点的提升为中心、属于 M^{n-1} 的 Dirichlet 域 $D \simeq M^{n-1}$。

与早期工作一样（见 [28]），我们回顾如下：若 $\tilde{x}$ 表示将 $x \in M^{n-1}$ 提升到 D，则有以下公式

$$(\cos tP)(x,y) = (\cos t\sqrt{-\Delta_g})(x,y) = \sum_{\alpha\in\Gamma} \big(\cos t\sqrt{-\Delta_{\tilde{g}}}\big)(\tilde{x}, \alpha(\tilde{y})). \tag{4.13}$$

因此，如果我们令

$$K_{\lambda,0}(\tilde{x},t;\tilde{y},s) = (2\pi)^{-1} \int a(r)\hat{m}(\lambda, t-s; r) \big(\cos r\sqrt{-\Delta_{\tilde{g}}}\big)(\tilde{x},\tilde{y})\, dr, \tag{4.14}$$

我们得到公式

$$\tilde{S}_{\lambda,0}(x,t;y,s) = \sum_{\alpha\in\Gamma} K_{\lambda,0}(\tilde{x},t;\alpha(\tilde{y}),s)). \tag{4.15}$$

同样地，如果我们令

$$K_{\lambda,j}(\tilde{x},t;\tilde{y},s) = (2\pi)^{-1} \int a(2^{-j}r)\hat{m}(\lambda, t-s; r) \big(\cos r\sqrt{-\Delta_{\tilde{g}}}\big)(\tilde{x},\tilde{y})\, dr, \tag{4.16}$$

我们有

$$\tilde{S}_{\lambda,j}(x,t;y,s) = \sum_{\alpha\in\Gamma} K_{\lambda,j}(\tilde{x},t;\alpha(\tilde{y}),s). \tag{4.17}$$

此外，根据惠更斯原理和 a 的支撑集性质，我们有

$$K_{\lambda,0}(\tilde{x},\tilde{y}) = 0 \quad \text{if} \quad d_{\tilde{g}}(\tilde{x},\tilde{y}) \geq C_1, \quad \text{and} \quad K_{\lambda,j}(\tilde{x},\tilde{y}) = 0 \text{ if } d_{\tilde{g}}(\tilde{x},\tilde{y}) \geq C_1 2^j \tag{4.18}$$

对于一致常数 C_1。基于此，我们得出结论，(4.15) 右侧非零项的数量为 $O(1)$，因为当 $\alpha \neq \alpha'$ 时，$\alpha(D) \cap \alpha'(D) = \emptyset$。此外，根据简单的体积估计，对于一致常数 C，当 $\mu = 2^j$, $j = 1, 2, \ldots$ 时，满足 $d_{\tilde{g}}(D, \alpha(D)) \leq \mu$ 的 $\alpha \in \Gamma$ 的数量为 $O(\exp(C\mu))$，因此 (4.16) 右侧非零项的数量为 $O(\exp(C2^j))$。因此，如果我们能够证明，那么就可以得到 (4.11)。

$$|K_{\lambda,0}(\tilde{x},t;\tilde{y},s)| \leq C\lambda^{\frac{n-1}{2}} |t-s|^{-\frac{n-1}{2}}, \quad \text{if } |t-s| \leq 1, \tag{4.19}$$

而 (4.12) 将由该估计推出。

$$|K_{\lambda,j}(\tilde{x},t;\tilde{y},s)| \leq C\lambda^{\frac{n-1}{2}} \exp(C2^j), \quad \text{if } |t-s| \in [2^{j-1}, 2^j],\ j = 1, 2, \ldots, 2^j \leq c_0 \log\lambda, \tag{4.20}$$

其中 $c_0 = c_0(M)$ 足够小。

为了证明这两个估计，我们可以对 $\partial_r^2 - \Delta_{\tilde{g}}$ 使用 Hadamard 初始解，因为 $(\mathbb{R}^{n-1}, \tilde{g})$ 是一个没有共轭点的黎曼流形，即它的单射半径为无穷大。因此，我们可以使用 Hadamard 初始解为 $\tilde{x} \in D$, $\tilde{y} \in \mathbb{R}^{n-1}$ 和 $|r| \geq c_0 > 0$ 写出

$$\big(\cos r\sqrt{-\Delta_{\tilde{g}}}\big)(\tilde{x},\tilde{y}) = \sum_{\nu=0}^{N} w_\nu(\tilde{x},\tilde{y}) W_\nu(r,\tilde{x},\tilde{y}) + R_N(r,\tilde{x},\tilde{y}) \tag{4.21}$$

其中 $w_\nu \in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1})$,

$$W_0(r,\tilde{x},\tilde{y}) = (2\pi)^{-(n-1)} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{id_{\tilde{g}}(\tilde{x},\tilde{y})\xi_1} \cos r|\xi|\, d\xi, \tag{4.22}$$

而对于 $\nu = 1, 2, \ldots$, $W_\nu(t,\tilde{x},\tilde{y})$ 是如下形式的傅里叶积分的有限线性组合

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{id_{\tilde{g}}(\tilde{x},\tilde{y})\xi_1} e^{\pm ir|\xi|} \alpha_\nu(|\xi|)\, d\xi, \text{ with } \alpha_\nu(\tau) = 0, \text{ for } \tau \leq 1 \text{ and } \partial_\tau^j \alpha_\nu(\tau) \lesssim \tau^{-\nu-j}, \tag{4.23}$$

并且，若给定 N_0，则当 N 足够大时，

$$|\partial_r^j R_N(r,\tilde{x},\tilde{y})| \le C\exp(Cr), \quad 0 \le j \le N_0 \tag{4.24}$$

对于固定常数 C。此外，首项系数 $w_0(\tilde{x},\tilde{y})$ 反映了 $(\mathbb{R}^{n-1},\tilde{g})$ 的几何结构。具体而言，在关于 $\tilde{x}$ 的测地法坐标中

$$w_0(\tilde{x},\tilde{y}) = \big(\det \tilde{g}_{ij}(\tilde{y})\big)^{-1/4}.$$

因此，如果在测地极坐标中，体积元表示为

$$dV_{\tilde{g}}(\tilde{y}) = \big(\mathcal{A}(r,\omega)\big)^{n-2} dr d\omega,\ r = d_{\tilde{g}}(\tilde{x},\tilde{y}),$$

then

$$w_0(\tilde{x},\tilde{y}) = \big(r/\mathcal{A}(r,\omega)\big)^{\frac{n-2}{2}}.$$

根据黎曼几何中的经典 Günther 比较定理（见 [12, §III.4]）

$$w_0(\tilde{x},\tilde{y}) \le 1, \tag{4.25}$$

此外，为后文使用，若所有截面曲率均为$\le -K^2 < 0$，则 $\mathcal{A}(r,\omega) \ge \frac{1}{K}\sinh(Kr)$，从而

$$w_0(\tilde{x},\tilde{y}) \le C_{K,N}\mu^{-N} \text{若} \quad d_{\tilde{g}}(\tilde{x},\tilde{y}) \approx \mu \text{且 } M^{n-1} \text{的所有截面曲率均为} \le -K^2 < 0. \tag{4.26}$$

(4.21) 中的其他系数表现得并不那么良好；然而，Bérard [2] 证明了，如果 N_0 固定

$$|\partial_x^\beta w_\nu(\tilde{x},\tilde{y})| \le C\exp(Cr),\ |\beta|,\nu \le N_0, \quad r = d_{\tilde{g}}(\tilde{x},\tilde{y}), \tag{4.27}$$

对于某个一致常数 C（取决于 $\tilde{g}$ 和 N_0）。

我们刚才陈述的事实是众所周知的。例如，关于 Hadamard 初始解的背景，可参见 [2] 或 [28,§1.1、§3.6]；关于 w_0 的性质，则可参见 [31]。

接下来，我们使用 Hadamard 初始解来证明 (4.19)。根据 (4.21)，只需注意：如果将 (4.14) 中的 $(\cos r\sqrt{-\Delta_{\tilde{g}}})(\tilde{x},\tilde{y})$ 替换为 (4.21) 右侧的各项，那么每个所得表达式都将满足 (4.19) 中的界。

我们先来考察 Hadamard 初始解中主项的贡献，也就是 (4.21) 中的 $\nu = 0$ 项。根据 (4.22) 和 (4.25)，若满足以下条件，则可得到这些估计：

$$(2\pi)^{-n}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{id_{\tilde{g}}(\tilde{x},\tilde{y})\xi_1}\cos(r|\xi|)\,a(r)\,\hat{m}(\lambda,t-s;r)\,dr d\xi = O(\lambda^{\frac{n-1}{2}}|t-s|^{-\frac{n-1}{2}}) \quad \text{when} \quad |t-s| \le 1. \tag{4.28}$$

然而，根据 (4.2) 和 (4.5)，以及 a 的支撑集性质，若 $|t-s| \le 1$

$$\begin{aligned}(2\pi)^{-1}&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{id_{\tilde{g}}(\tilde{x},\tilde{y})\xi_1}\cos(r|\xi|)\,a(r)\,\hat{m}(\lambda,t-s;r)\,dr d\xi \\ &= (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{id_{\tilde{g}}(\tilde{x},\tilde{y})\xi_1}\cos(r|\xi|)\hat{m}(\lambda,t-s;r)\,dr d\xi + O(\lambda^{-N}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{id_{\tilde{g}}(\tilde{x},\tilde{y})\xi_1}\beta^2(|\xi|/\lambda)e^{i(t-s)\lambda^{-1}|\xi|^2}\,d\xi + O(\lambda^{-N}).\end{aligned} \tag{4.29}$$

通过一个简单的驻相论证可知，最后一个积分为 $O(\lambda^{\frac{n-1}{2}}|t-s|^{-\frac{n-1}{2}})$，因此我们得出结论：Hadamard 初始解中的主项给出了所需的界。

为了估计高阶项 $\nu = 1,\ 2,\ \ldots\ldots$ 的贡献，我们注意到，根据 (4.18) 的第一部分，可以假设 $d_{\tilde{g}}(\tilde{x},\ \tilde{y})$ 有界。因此，由 (4.23) 可知，高阶项将给出所需的界，因为

$$(4.30)\quad (2\pi)^{-1}\iint e^{id_{\tilde{g}}(\tilde{x},\tilde{y})\xi_1}e^{\pm ir|\xi|}\alpha_\nu(|\xi|)\,a(r)\hat{m}(\lambda,t-s;r)\,dr d\xi$$
$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{id_{\tilde{g}}(\tilde{x},\tilde{y})\xi_1}\beta^2(|\xi|/\lambda)e^{i(t-s)\lambda^{-1}|\xi|^2}\,\alpha_\nu(|\xi|)\,d\xi + O(\lambda^{-N}),\ \text{if}\ \ |t-s|\le 1,$$

并且，根据 (4.23)，结合驻相论证，最后一个积分为 $O(\lambda^{\frac{n-1}{2}-\nu}|t-s|^{-\frac{n-1}{2}})$。 ——

我们还需要证明，(4.21) 中的余项会导出以下估计。

$$(4.31)\quad \int_{-\infty}^{\infty} a(r)\hat{m}(\lambda,t-s;r)R(r,\tilde{x},\tilde{y})\,dr$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\beta^2(|\tau|/\lambda)e^{i(t-s)\lambda^{-1}\tau^2}\left[a(\cdot\,)R(\cdot\,,\tilde{x},\tilde{y})\right]\widehat{\ }(\tau)\,d\tau = O(\lambda^{\frac{n-1}{2}}),\ \text{if}\ \ d_{\tilde{g}}(\tilde{x},\tilde{y}) = O(1).$$

根据式（4.24），右侧积分中的最后一个因子，即 $r\to a(r)R(r,\ \tilde{x},\ \tilde{y})$ 的傅里叶变换，在 $d_{\tilde{g}}(\tilde{x},\ \tilde{y}) = O(1)$ 时为 $O(1)$。因此，由于 β 的支撑集性质，式（4.31）中的最后一个积分为 $O(\lambda) = O(\lambda^{\frac{n-1}{2}})$，这正是所需的，因为 $n\ge 3$。

由于 Hadamard初始解中的每一项都给出了所需的贡献，（4.19）的证明即告完成。

类似的论证将得到（4.20）。我们需要证明，若将（4.16）中的 $(\cos r\sqrt{-\Delta_{\tilde{g}}})(\tilde{x},\tilde{y})$ 替换为（4.21）右侧的各项，那么在 $d_{\tilde{g}}(\tilde{x},\tilde{y})\ \le C2^j$ 和 $|t-s|\in[2^{j-1},2^j]$ 满足上述条件，且 $j = 1,2,\ldots$ 和 $2^j\le c_0\log\lambda$ 的情况下，每一项都满足（4.20）中的界。

由 (4.6)、(4.25)以及上述论证可知，Hadamard 初始解中的 $\nu = 0$ 项将产生一项贡献

$$(2\pi)^{-(n-1)}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{id_{\tilde{g}}(\tilde{x},\tilde{y})\xi_1}e^{i(t-s)\lambda^{-1}|\xi|^2}\beta^2(|\xi|/\lambda)\,d\xi + O(\lambda^{-N}) = O(\lambda^{\frac{n-1}{2}}),$$

通过驻相法以及我们假设 $|t-s|\ \ge\ 1$ 这一事实。根据(4.27) 和上述论证，$\nu = 1,\ 2$、.....各项将产生形如 $O(\lambda^{\frac{n-1}{2}-\nu}\cdot\exp(C2^j)) = O(\lambda^{\frac{n-1}{2}})$的贡献，只要 $2^j\ \le\ c_0\log\lambda$ 且 $c_0\ >\ 0$ 足够小。若我们对余项的贡献重复上述论证，就会看到这里的贡献将呈现如下形式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\beta^2(|\tau|/\lambda)e^{i(t-s)\lambda^{-1}\tau^2}\left[a(2^{-j}\cdot)R(\cdot\,,\tilde{x},\tilde{y})\right]\widehat{\ }(\tau)\,d\tau,$$

根据 (4.24) 以及 a 的支撑集性质，这就是 $O(\lambda\exp(C2^j)) = O(\lambda^{\frac{n-1}{2}}\exp(C2^j))$，符合要求。

由于Hadamard 初始解中的每一项都具有所需的贡献，(4.20) 的证明得以完成，从而完成了命题 4.1 的证明。

我们应该指出，小的 $|t-s|$ 估计普遍成立，如同 [11] 中所示。

4.2. 微局部化算子的核估计

下面证明我们在证明$L^{q_c}(A_-)$估计时用到的核估计 (2.69) 和 (2.70)。

命题 4.2. 对每个 $m \in \mathbb{Z}$，选取 $\nu(m) \in \mathbb{Z}^{2n-3}$，如(2.46) 所示，并令

$$K_\lambda(x,\ t,\ m;\ y,\ s,\ m') = \tag{4.32}$$
$$\alpha_m(t)\alpha_{m'}(s)\Big(A^{\theta_0}_{\nu(m)} \circ \big(\beta^2(P/\lambda)e^{-i\lambda^{-1}(t-s)\Delta_g}\big) \circ (A^{\theta_0}_{\nu(m')})^*\Big)(x,y).$$

那么，如果 $M = M^{n-1}$ 具有非正曲率

$$|K_\lambda(x,t,m;y,s,m')| \le C\lambda^{\frac{n-1}{2}}\,|t-s|^{-\frac{n-1}{2}}, \tag{4.33}$$

假设 $|t-s| \le c_0$对数 λ满足 $c_0 = c_0(M) > 0$充分小。此外，对于这样的$|t-s|$，我们有

$$|K_\lambda(x,t,m;y,s,m')| \le C\lambda^{\frac{n-1}{2}}\,|t-s|^{-N}\ \forall N, \tag{4.34}$$
$$\textit{if } |t-s| \ge 1 \textit{ and all the sectional curvatures of } M^{n-1} \textit{ are negative.}$$

一致常数 $C = C(M^{n-1})$ 不依赖于 $\nu(m)$的具体选择 .

证明。 正如我们之前提到的，由于 $A^{\theta_0}_\nu$算子的核满足一致界

$$\int |A^{\theta_0}_\nu(x,y)|\,dx,\ \int |A^{\theta_0}_\nu(x,y)|\,dy \le C, \tag{4.35}$$

根据命题 4.1，当 $|t-s| \le 1$时，我们得到上述界。

此外，由（4.35）可知，若令

$$\tilde{K}_\lambda(x,t,m;y,s,m') = \tag{4.36}$$
$$\alpha_m(t)\alpha_{m'}(s)\Big(A^{\theta_0}_\nu \circ \big(\beta^2(P/\lambda)e^{-i\lambda^{-1}(t-s)\Delta_g}\big)\Big)(x,y), \quad \nu = \nu(m),$$

只需说明，该核不包含右侧的微局部截断，并且在 $|t-s| \ge 1$时满足 (4.33) 和 (4.34) 中的界。

我们首先证明，当 M^{n-1}具有非正曲率时，(4.36)满足(4.34)中的界，其中 $|t-s| \ge 1$

为此，回顾由（2.42）和（2.46）可知，对于 $\theta = \theta_0 = \lambda^{-1/8}$，若 $\nu(m) = (\theta_0 k,\ \theta_0 \ell)$，则

$$A^{\theta_0}_\nu(x,D) = \tilde{A}^{\theta_0}_k(x,D) \circ b(\lambda^{-7/8}(P - \lambda\kappa^{\theta_0}_\ell)), \quad \kappa^{\theta_0}_\ell = 1 + \theta_0\ell,\ |\ell| \lesssim \theta_0^{-1}, \tag{4.37}$$
$$\text{if } \tilde{A}^{\theta_0}_k(x,D) = A^{\theta_0}_k(x,D) \circ \tilde{\Upsilon}(P/\lambda),$$

其中 $b \in C^\infty_0((-1,1))$ 和 Υ 如（2.43）所示。这里，$A^{\theta_0}_k$ 算子由于（2.37）–（2.41）而在尺度$\theta_0 = \lambda^{-1/8}$ 处围绕 Ω 中的一条测地线γ_k 进行局部化。

根据（4.37），我们现在得到（4.3）的以下变体

$$A^{\theta_0}_\nu \circ \big(\beta^2(P/\lambda)e^{-i(t-s)\lambda^{-1}\Delta_g}\big) = \tilde{A}^{\theta_0}_k \circ \big(\beta^2(P/\lambda)\,b(\lambda^{-7/8}(P-\lambda\kappa^{\theta_0}_\ell))\,e^{-i(t-s)\lambda^{-1}\Delta_g}\big) \tag{4.38}$$
$$= \Big((2\pi)^{-1}\int \hat{m}_\ell(\lambda, t-s; r)\,\big(\tilde{A}^{\theta_0}_k \circ \cos r\sqrt{-\Delta_g}\big)\,dr\Big),$$

若现在将 (4.4) 替换为

$$\hat{m}_\ell(\lambda, t-s; r) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau r}\beta^2(|\tau|/\lambda)\,b(\lambda^{-7/8}(|\tau| - \lambda\kappa^{\theta_0}_\ell))e^{i(t-s)\lambda^{-1}\tau^2}\,d\tau. \tag{4.39}$$

通过简单的分部积分论证，我们得到以下与 (4.6) 类似的结果

$$\partial_r^k \hat{m}_\ell(\lambda, t-s; r) = O(\lambda^{-N}(1+|r|)^{-N}) \ \forall N \quad \text{if } \ |t-s| \le c_0 \log\lambda \ \text{ and } \ |r| \ge 100 c_0 \log\lambda. \tag{4.40}$$

因此，若 a 与命题 4.1 的证明中相同，由于二进算子 $\tilde{A}_k^{\theta_0}$具有如 (4.35) 所示的核，若我们在 (4.38) 最后一项的积分中插入因子 $(1-a(r/c_0\log\lambda))$，则所得的核对所有 N 都将是 $O(\lambda^{-N})$。所以，我们已将 (4.33) 的证明归结为证明我们有如下核估计

$$\big(W_{\lambda,\ell,t-s}\big)(x,y) = O(\lambda^{\frac{n-1}{2}}|t-s|^{-\frac{n-1}{2}}), \quad \text{if } \ 1 \le |t-s| \le c_0\log\lambda, \tag{4.41}$$

当 $c_0 > 0$ 足够小时，若

$$W_{\lambda,\ell,t-s} = (2\pi)^{-1}\int a(r/c_0\log\lambda)\,\hat{m}_\ell(\lambda, t-s; r)\,\big(\tilde{A}_k^{\theta_0}\cos r\sqrt{-\Delta_g}\big)\,dr. \tag{4.42}$$

为了估计 (4.41)，我们将采用上一小节中的论证。首先，与之前完全相同，我们通过重写以下表达式，将计算提升到万有覆盖上

$$W_{\lambda,\ell,t-s}(x,y) = \sum_{\alpha\in\Gamma} W^\alpha_{\lambda,\ell,t-s}(\tilde{x},\tilde{y}), \tag{4.43}$$

其中

$$W^\alpha_{\lambda,\ell,t-s}(\tilde{x},\tilde{y}) = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} a(r/c_0\log\lambda)\,\hat{m}_\ell(\lambda,t-s;r)\,\big(\tilde{A}_k^{\theta_0}\cos r\sqrt{-\Delta_{\tilde{g}}}\big)(\tilde{x},\alpha(\tilde{y}))\,dr, \tag{4.44}$$

并且 $\tilde{x}$、 $\tilde{y}$ 分别表示将 x, y提升到万有覆盖（$\mathbf{R}^{n-1}, \tilde{g}$）上的提升。根据 a 的支撑集性质和惠更斯原理

$$W^\alpha_{\lambda,\ell,t-s}(\tilde{x},\alpha(\tilde{y})) = 0 \quad \text{if } \ d_{\tilde{g}}(\tilde{x},\tilde{\alpha}(\tilde{y})) \ge C c_0 \log\lambda, \tag{4.45}$$

其中 C 为一个固定常数。

在上一小节中，我们不得不处理这样一个事实：将计算提升到万有覆盖后出现的和涉及 $O(\exp(Cc_0\log\lambda))$项。这里，由于 $\nu = (k, \ \ell)$局部化，将会发现，给定 $|t-s| \ge 1$, 只有 $O(1)$ 个求和项是非平凡的。

我们先利用 $\tilde{A}_k^{\theta_0}$算子带来的局部化，该算子将局部化在 Ω 中的测地线 γ_k 附近。若我们完全按照 [6], 中的论证，仅使用这一算子以及涉及傅里叶积分算子演算和 Toponogov 三角比较定理的初等论证，就会发现 (4.43) 中绝大多数项都是 $O(\lambda^{-1/2})$, 这比上述给出的界要好得多。

为此，与早期的工作一样，我们首先对 Ω 中的坐标作修改，使得 $0 \in \gamma_k$。然后，如 [6], 中那样，我们令 $\tilde{\gamma}(t)$, $t \in \mathbf{R}$ 表示测地线 γ_k 在万有覆盖上的提升，并且

$$\mathcal{T}_R(\tilde{\gamma}) = \{x : d_{\tilde{g}}(\tilde{\gamma}, \tilde{z}) \le R\}.$$

然后，正如 [6], 中那样，如果 R 足够大且固定，并且 $\alpha(D) \cap \mathcal{T}_R(\tilde{\gamma}) = \emptyset$, 其中与之前一样，$D \simeq M^{n-1}$ 是我们的基本域，那么 (4.43) 中涉及 α 的求和项根据 Toponogov 定理和微局部论证，必为 $O(\lambda^{-1})$。这正是 [6] 中 (3.9) 的证明方法，只需重复那里的论证即可得到此上界。

由于若将 (4.44) 中的 c_0 固定得足够小，则 (4.43) 中有 $O(\lambda^{1/2})$ 个非零项，因此在这种情况下我们得到

$$\sum_{\{\alpha:\,\alpha(D)\cap\mathcal{T}_R(\tilde{\gamma})=\emptyset\}} W^\alpha_{\lambda,\ell,t-s}(\tilde{x},\tilde{y}) = O(\lambda^{-1/2}), \quad \text{if } \ 1 \le |t-s| \le c_0\log\lambda,$$

这比 (4.41) 中的界要好得多。

为了得到 (4.41)，我们仍需处理满足 $\alpha(D)\cap\mathcal{T}_R(\tilde\gamma)\neq\emptyset$ 的项；不过幸运的是，根据 (4.45)，(4.43) 中这样的非零项只有 $O(\log|t-s|)$ 个。将任务缩减为只需考虑这类求和项后，我们便不再需要使用微局部截断 $\tilde A_k^{\theta_0}$。由于它满足 (4.35) 中的界，只要

$$\sum_{\{\alpha:\,\alpha(D)\cap\mathcal{T}_R(\tilde\gamma)\neq\emptyset\}}(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}a(r/c_0\log\lambda)\,\hat m_\ell(\lambda,t-s;r)\,\big(\cos r\sqrt{-\Delta_{\tilde g}}\big)(\tilde x,\alpha(\tilde y))\,dr \\ =O(\lambda^{\frac{n-1}{2}}|t-s|^{-\frac{n-1}{2}}),\quad\text{if }\ 1\le|t-s|\le c_0\log\lambda. \tag{4.46}$$

为此，和之前一样，我们将使用 Hadamard 初始解 (4.21)。我们需要证明每一项的贡献都满足这些界。

如果像之前那样进行论证，并使用 (4.23)，那么高阶项对 (4.44) 的贡献将是以下形式各项的线性组合

$$(2\pi)^{-1}w_\nu(\tilde x,\alpha(\tilde y))\int_{-\infty}^{\infty}\int e^{id_{\tilde g}(\tilde x,\alpha(\tilde y))\xi_1}e^{\pm ir|\xi|}\alpha_\nu(|\xi|)a(r/c_0\log\lambda) \\ \times\hat m_\ell(\lambda t-s;\ r)\,d\xi dr. \tag{4.47}$$

如同我们所假设的，$|t-s|\le c_0\log\lambda$，模去一个 $O(\lambda^{-N})$ 项后，正如 (4.30) 中那样，这等于

$$w_\nu(\tilde x,\alpha(\tilde y))\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\beta^2(|\xi|/\lambda)b(\lambda^{-7/8}(|\xi|-\lambda\kappa_\ell^{\theta_0}))\,e^{id_{\tilde g}(\tilde x,\alpha(\tilde y))\xi_1}\,\alpha_\nu(|\xi|)\,e^{i(t-s)\lambda^{-1}|\xi|^2}\,d\xi. \tag{4.48}$$

根据驻相法的一个简单计算，若 $|t-s|\ge1$，鉴于 (4.23) 的最后一部分，最后一个积分为 $O(\lambda^{\frac{n-1}{2}-\nu})$。由于正如我们之前指出的，(4.46) 中只有 $O(\log\lambda)$ 个被加项，因此我们得出，Hadamard 初始解中高阶项 $\nu=1,\ 2,\ \ldots\ldots$的贡献为 $O(\lambda^{\frac{n-1}{2}-\frac12})$，这远好于 (4.46) 所需的结果。

接下来我们注意到，与 (4.31) 类似，(4.21) 中余项的贡献为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\beta^2(|\tau|/\lambda)e^{i(t-s)\lambda^{-1}\tau^2}b(\lambda^{-7/8}(|\tau|-\lambda\kappa_\ell^{\theta_0}))\big[a((c_0\log\lambda)^{-1}\cdot)R(\cdot,\tilde x,\tilde y)\big]\widehat{\ }(\tau)\,d\tau.$$

根据 (4.24)，若 c_0 足够小，积分中的最后一个因子为 $O(\exp(Cc_0\log\lambda))\ \le\ \lambda^{1/16}$。由于被积函数的其余部分有界，且支撑集位于一个大小为 $\lambda^{7/8}$ 的集合上，我们得出，Hadamard 初始解中的余项对 (4.41) 的贡献不仅满足 (4.46) 中的界，而且与 (4.21) 中 $\nu=1,\ 2,\ \ldots\ldots$的上述各项一样，还满足 (4.34) 中改进后的界。事实上，对于这样的 c_0，其贡献为 $O(\lambda^{15/16}\log\lambda)$。

我们仍需处理 Hadamard 初始解中的主项，即式 (4.21) 中 $\nu=0$ 项对式 (4.47) 的贡献。按照前面的论证，如果我们能够证明

$$\sum_{\{\alpha:\,\alpha(D)\cap\mathcal{T}_R(\tilde\gamma)\neq\emptyset\}}w_0(\tilde x,\alpha(\tilde y))\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\beta^2(|\xi|/\lambda)\,b(\lambda^{-7/8}(|\xi|-\lambda\kappa_\ell^{\theta_0})) \\ \times\cos(r|\xi|)e^{id_{\tilde g}(\tilde x,\alpha(\tilde y)\xi_1}e^{i(t-s)\lambda^{-1}|\xi|^2}\,dr \\ =O(\lambda^{\frac{n-1}{2}}|t-s|^{-\frac{n-1}{2}}),\quad\text{if }\ 1\le|t-s|\le c_0\log\lambda. \tag{4.49}$$

为得到式 (4.49)，我们将利用以下关于 $|t-s|\geq 1$ 的事实：

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \beta^2(|\xi|/\lambda) b(\lambda^{-7/8}(|\xi|-\lambda\kappa)) e^{i d_{\tilde g}(\tilde x,\alpha(\tilde y))\xi_1} e^{i(t-s)\lambda^{-1}|\xi|^2}\, d\xi = O(\lambda^{-N})\ \forall N \tag{4.50}$$
$$\text{if } \ d_{\tilde g}(\tilde x,\alpha(\tilde y)) \notin I_{t,s,\kappa} = \big[2|t-s|(\kappa - C\lambda^{-1/8}),\, 2|t-s|(\kappa + C\lambda^{-1/8})\big],\ \text{if } \ \kappa = \kappa_\ell^{\theta_0}$$

当 C 足够大时，并且

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \beta^2(|\xi|/\lambda) b(\lambda^{-7/8}(|\xi|-\lambda\kappa)) e^{i d_{\tilde g}(\tilde x,\alpha(\tilde y))\xi_1} e^{i(t-s)\lambda^{-1}|\xi|^2}\, d\xi = O(\lambda^{\frac{n-1}{2}}|t-s|^{-\frac{n-1}{2}}), \tag{4.51}$$
$$\text{if } \ d_{\tilde g}(\tilde x,\alpha(\tilde y)) \in I_{t,s,\kappa},\ \ \kappa = \kappa_\ell^{\theta_0}.$$

第一个估计直接由一个简单的分部积分论证得出。事实上，若 $\phi = d_{\tilde g}(\tilde x,\tilde y)\xi_1 + (t-s)\lambda^{-1}|\xi|^2$，那么，如果 C 在 I_t 的定义中，κ 固定且足够大，$|\nabla_\xi \phi| \geq \lambda^{-1/8}$ 若 $d_{\tilde g}(\tilde x,\tilde y) \notin I_{\kappa,t,s}$，并且积分振幅的导数也为 $O(\lambda^{-7/8})$。因此，在这种情况下，每次分部积分都会多得到一个 $\lambda^{-3/4}$ 的幂，从而得到 (4.50)。另一个估计 (4.51) 则直接由驻相法得出。

注意到区间 $I_{t,s,\kappa}$ 的长度为 $O(|t-s|\,\lambda^{-1/8})$，远小于 1；若如上所述假设 $|t-s| \leq c_0 \log\lambda$，则可得出结论：式 (4.49) 中至多只有 $O(1)$ 项不是 $O(\lambda^{-N})$。由 (4.25) 可知 w_0 有界，因此得到 (4.49)。

这就完成了 (4.33) 的证明。

为了证明强得多的估计 (4.34)，它要求 M^{n-1} 具有负截面曲率，我们注意到，Hadamard 初始解中除主项（对应于 $\nu = 0$）以外所有项的贡献，都比证明 (4.33) 所需的结果多出 λ 次幂的改进，因此在假设 $|t-s| = O(\log\lambda)$ 的情况下，可得到形如 (4.34) 的估计。因此，要证明 (4.34)，只需说明在这些曲率假设下，对每个 N，(4.49) 中以 $O(\lambda^{\frac{n-1}{2}}|t-s|^{-N})$ 替换 $O(\lambda^{\frac{n-1}{2}}|t-s|^{-\frac{n-1}{2}})$ 后的对应结论成立。为此，我们还利用一个由分部积分可得的简单事实：当 $d_{\tilde g}(\{\text{v16},\ \alpha(\tilde y)) \notin [C_1^{-1}|t-s|, C_1|t-s|]$ 且 C_1 充分大时，(4.50) 中的 $O(\lambda^{-N})$ 估计成立。根据 (4.26)，(4.49) 左侧求和中的每个 $O(1)$ 个非平凡项，对每个 N 都必为 $O(\lambda^{\frac{n-1}{2}}|t-s|^{-N})$，这正是所需结论。命题 4.2 的证明至此完成。□

4.3. 涉及局部辅助算子的核估计。

现在证明我们在 §3 中用到的核估计。

引理 3.5 的证明。现在来证明引理 3.5。该引理使我们能够运用抛物缩放以及 [23] 中的结果，得到双线性估计 (3.63)。此引理可由用于证明 [29,引理 5.1.2] 的驻相论证稍作改动直接得到。此外，引理 3.5 本质上就是 [5] 中的引理 3.2，或 [7], 中的引理 4.3；事实上，鉴于我们在 (2.5) 中对局部算子的构造，后一个结果几乎可以直接推出我们的结果。

我们首先注意到，我们的局部算子的核如下给出

$$\tilde\sigma_\lambda(x,t;y,s) = \big(B\circ\sigma_\lambda\big)(x,t;y,s) \tag{4.52}$$
$$= (2\pi)^{-2}\iint e^{i(t-s)\tau} e^{ir\lambda^{1/2}\tau^{1/2}} \tilde\beta(\tau/\lambda)\,\hat\sigma(r)\,\big(B\circ e^{-irP}\big)(x,y)\,dr d\tau.$$

由于当 $d_g(x,y) \neq |r|$ 时，$(r,x,y) \to (B \circ e^{-irP})(x,y)$ 是光滑的，且 $\hat{}\sigma$ 如 (2.6) 所示，通过一个简单的分部积分论证，

$$\tilde{\sigma}_\lambda(x,t;y,s) = O(\lambda^{-N}) \, \forall \, N \quad \text{if} \ \ |d_g(x,y) - \delta| \geq \tfrac{3}{2}\delta_0 \delta. \tag{4.53}$$

如果 θ 很小，由于我们的微局部截断的核，这就得到(3.35)的第一部分 ，$A_\nu^{c_0\theta}$，满足

$$A_\nu^{c_0\theta}(x,y) = O(\lambda^{-N}) \, \forall \, N \quad \text{if} \ \ d_g(x,y) \geq C_1 \theta, \tag{4.54}$$

对于一致常数 C_1，因为我们假设 $\lambda^{-1/2} \ll \lambda^{-1/8} \leq \theta$。此外，由于符号 $A_\nu^{c_0\theta}(x,\xi) = 0$ 如果 ξ 不在 $(0,\dots,0,1) \in \mathbf{R}^{n-1}$ 的一个小锥形邻域内，则可知 $(r,x,y) \to \big(B \circ e^{-irP} \circ A_\nu^{c_0\theta}\big)(x,y)$ 在 $x_{n-1} - y_{n-1} < 0$ 和 $\hat{}\sigma \neq 0$ 时是光滑的，这通过再次进行简单的分部积分论证得到 (3.35) 的另一半。

接下来，我们回顾一下，根据 (2.46) $A_\nu^{c_0\theta} = A_j^{c_0\theta}(x,D) \circ A_\ell^{c_0\theta}(P)$，其中 A_j 局部化于一条测地线 $\gamma_j \in \Omega$ 的 $c_0\theta$ 邻域；关于该测地线，我们选取了费米正规坐标，而 $A_\ell^{c_0\theta}$ (P)是由 (2.42)给出的“高度算子”。另一个算子 $A_{\nu'}^{c_0\theta}$ 在尺度 $c_0\theta$ 下局部化于一条测地线 $\gamma_{j'}$ 和高度算子 $A_{\ell'}^{c_0\theta}$，它们与上述对象 θ-接近。

接下来，让我们利用这样一个事实：根据 [4] 中的引理 3.2，或者，如果我们只考虑来自测地线所产生的那些局部化，根据 [7],[2] 中的引理 4.3，我们有，对于 $\omega \approx \lambda$， M^{n-1} 上的以下核满足

$$\big(\tilde{\sigma}(\omega - P) \circ A_\iota^{c_0\theta}\big)(x,y) = \omega^{\frac{n-2}{2}} e^{i\omega d_g(x,y)} a_{\iota,\theta}(\omega;x,y) + O(\lambda^{-N}), \ \iota = j, j', \tag{4.55}$$

其中振幅满足 $a_{\iota,\theta} = 0$ 如果 (3.32) 成立，并且，由于我们是在 γ_j 附近使用费米正规坐标

$$\big|\partial_\omega^i \partial_{x_{n-1}}^k \partial_{y_{n-1}}^{k'} D_{x,y}^\beta a_{\iota,\theta}(\omega;x,y)\big| \leq C_{i,k,k',\beta} \, \omega^{-i} \theta^{-|\beta|}, \quad \iota = j, j'. \tag{4.56}$$

如果 $i = 0$，这直接由 [7, 引理 4.3] 以及我们对坐标的选择得到。为了获得如(3.32)中的$c_0\theta$-尺度集中性（正如我们在上一节中所使用的），我们将 [7, 引理4.3] 应用于其中的 θ 替换为 $c_0\theta$的情形。对于每个ω-导数，我们还会得到一个 ω^{-1} 改善，这仅仅是因为，如果我们使用参数子来表示 e^{-irP}，将$e^{-i\omega d_g(x,y)}$ 乘以(4.55)右侧，并按照标准方式将其表示为振荡积分，例如在 [7], 中，每个 ω-导数都会带来一个相位函数因子（将其归一化为在驻点处为零），从而产生一个 ω^{-1} 改善，正如带参数的标准驻相法所得结果一样（参见例如 [29, 推论 1.1.8]）。

为得到关于我们的核的 (3.32)，我们首先注意到，由 (4.52) 和 (2.46) 可知，

$$\begin{aligned} &\big(\tilde{\sigma}_\lambda \circ A_\nu^{c_0\theta}\big)(x,t;y,s) \\ &\qquad = \Big(\big[\, (2\pi)^{-1} \int e^{i\tau(t-s)} \, \tilde{\sigma}(\lambda^{1/2}\tau^{1/2} - P) \circ A_j^{c_0\theta} \circ \tilde{\beta}(\tau/\lambda) \, d\tau \, \big] \circ A_\ell^{c_0\theta} \Big). \end{aligned} \tag{4.57}$$

如果我们考虑方括号内算子的核，由 (4.55) 可将其写为

$$\begin{aligned} &(2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau(t-s)} (\lambda\tau)^{\frac{n-2}{4}} e^{i\lambda^{1/2}\tau^{1/2} d_g(x,y)} a_{j,\theta}(\lambda^{1/2}\tau^{1/2};x,y) \, \tilde{\beta}(\tau/\lambda) \, d\tau + O(\lambda^{-N}) \\ &\quad = (2\pi)^{-1} \lambda^{n/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda[\tau(t-s) + \tau^{1/2} d_g(x,y)]} a_{j,\theta}(\lambda\tau^{1/2};x,y) \, \tau^{\frac{n-2}{4}} \tilde{\beta}(\tau) d\tau + O(\lambda^{-N}), \\ &\quad = \pi^{-1} \lambda^{n/2} \int_0^{\infty} e^{i\lambda[\tau^2(t-s) + \tau d_g(x,y)]} a_{j,\theta}(\lambda\tau;x,y) \, \tau^{n/2} \, \tilde{\beta}(\tau^2) \, d\tau + O(\lambda^{-N}), \end{aligned} \tag{4.58}$$

[2]在 [7] 中，由于采用了半经典记号，使用了不同的记号来表示伪微分截断 B。

其中 $a_{j,\theta}$ 如 (4.55) 所示，因此当 x 或 y 位于 γ_j 周围的 $O(c_0\theta)$-管之外时，它为零。由于 $A_\ell^{c_0\theta}$ 的核也满足 (4.54)，结合 (4.57) 和 (4.58)，我们得到 $\nu=(c_0\theta j,\ c_0\theta\ell)$ 的 (3.32)。同样的论证也适用于 $\nu'=(c_0\theta j',\ c_0\theta\ell')$。

接下来，我们使用 (4.56)–(4.58) 来证明引理 3.5 的其余部分：在 (3.33) 和 (3.34) 所描述的区域中，核也满足 $O(\lambda^{-N})$；而在这些区域以及 (3.32) 和 (3.35) 所述区域之外（我们已知这些区域中的情形），核的形式如 (3.30) 和 (3.31) 所示。

为此，我们采用 H¨ormander [18] 的论证方式，更具体地说，按照 [29, §4.3] 中的方法，可以看出高度算子 $m=\ell,\ \ell'$ 的核可写为

(4.59)

$$
\begin{aligned}
&A_m^{c_0\theta}(x,y)\\
&=\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i\varphi(x,y;\xi)}b\big((c_0\theta\lambda)^{-1}(p(x,\xi)-\lambda\kappa_m^{c_0\theta})\big)\Upsilon(p(x,\xi)/\lambda)\,q(x,y,\xi)\,d\xi+O(\lambda^{-N})\\
&=\lambda^{n-1}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i\lambda\varphi(x,y;\xi)}b\big((c_0\theta)^{-1}(p(x,\xi)-\kappa_m^{c_0\theta})\big)\Upsilon(p(x,\xi))\,q(x,y,\lambda\xi)\,d\xi+O(\lambda^{-N}),
\end{aligned}
$$

其中，$b\in C_0^\infty((-1,\ 1))$ 如 (2.42) 所示，Υ 如 (2.43) 所示，而 $p(x,\ \xi)$ 是 P, $q\in S^0_{1,\ 0}$, $(2\pi)^{-(n-1)}-q\in S^{-1}_{1,\ 0}$ 的主符号，并且 φ 关于 ξ 是一次齐次的，且满足

$$
\varphi(x,y;\xi)=\langle x-y,\xi\rangle+O(|x-y|^2|\xi|),\quad \text{on supp } q. \tag{4.60}
$$

因此，特别是，

$$
\nabla_\xi\varphi=0\iff x=y,\ \text{and}\ \nabla_x\varphi=\xi\ \text{as well as}\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial\xi}=I_{n-1}\ \text{if}\ x=y. \tag{4.61}
$$

事实上，要看出这一点，只需回顾拉克斯拟构允许我们对于足够小的 $|t|$ 写出

$$
\big(e^{itP}\big)(x,y)=\int e^{i\varphi(x,y;\xi)+itp(x,\xi)}q(x,y,t;\xi)\,d\xi,
$$

对于 $q\in S^0_{1,\ 0}$，求解一个输运方程，从而 $(2\pi)^{-(n-1)}-q(0,\ x,\ y;\ \xi)\in S^{-1}_{1\,0,}$。利用这一点，以及 $\tau\to b\big((c_0\theta\lambda)^{-1}(\tau-\lambda\kappa_m^{c_0\theta})\big)\Upsilon(\tau/\lambda)$ 的傅里叶变换为$O(\lambda^{-N})$且在原点附近某个固定区间之外快速衰减这一事实，可以像 [29, §4.3] 或此处前面的两个小节中那样进行论证，从而得到（4.59）。

在我们尚未知道（3.30）中的核 $K_\lambda^{c_0\theta}{}_{,\ \mu}$ 是 $O(\lambda^{-N})$ 的区域内，由（4.57）、（4.58）和（4.59），我们可以写成

$$
\begin{aligned}
K_{\lambda,\mu}^{c_0\theta}(x,y)=c\lambda^{\frac{n}{2}}\int_0^\infty\Big[\lambda^{n-1}\int_{\mathbb{R}^{2(n-1)}} e^{i\lambda[\tau d_g(x,z)+\varphi(z,y;\xi)]}a_{\iota,\theta}(\lambda\tau;x,z)\,\tau^{\frac{n}{2}}\tilde\beta(\tau^2)\\
\times b((c_0\theta)^{-1}(p(z,\xi)-\kappa_m^{c_0\theta}))\Upsilon(p(z,\xi)/\lambda)q(z,y;\lambda\xi)dzd\xi\Big]\,e^{i\lambda\tau^2(t-s)}d\tau,\\
\mu=\nu,\nu',\ \iota=j,j',\ m=\ell,\ell'.
\end{aligned} \tag{4.62}
$$

如果我们考虑这里方括号中的 $\mathrm{R}^{2(n-1)}$ 上的振荡积分，其相位函数为

$$
\phi(z,\xi)=\phi(x,y,\tau;z,\xi)=\tau d_g(x,z)+\varphi(z,y;\xi).
$$

当.....时，它有唯一的驻点

$$
y=z\quad\text{and}\ \tau\nabla_z d_g(x,z)=-\nabla_z\varphi(z,y;\xi)=-\xi,
$$

最后一个不等式由（4.61）的第二部分得出。由（4.61）的最后一部分可知，这个驻点是非退化的，并且此处有 $\phi=\tau d_g(x,\ y)$。此外，由于

$p(z, \nabla_z d_g(x,z)) = 1$ 和 $p(z,\xi) = p(z,-\xi)$，我们得出结论 that

$$\tau = p(z,\xi) \text{ and } \varphi = 0 \quad \text{when} \quad \nabla_{z,\xi}\phi = 0. \tag{4.63}$$

由于 $\theta \geq \lambda^{-1/8} \gg \lambda^{-1/2}$，我们可以结合使用 (4.61) 和 (4.63)，并运用驻相法来计算 λ^{n-1} 乘以 (4.62) 中方括号内的振荡积分。它必定具有如下形式

$$\begin{aligned} &e^{i\tau d_g(x,y)}\tilde{a}_{\iota,\theta}(\lambda\tau; x, y)\,\tau^{\frac{n}{2}}\tilde{\beta}(\tau^2)\,\tilde{b}\big((c_0\theta)^{-1}(\tau-\kappa_m^{c_0\theta})\big)\tilde{q}(x,y;\lambda\tau) \\ &= e^{i\tau d_g(x,y)}a_{\iota,\theta}(\lambda\tau; x, y)\,\tau^{\frac{n}{2}}\tilde{\beta}(\tau^2)\,b\big((c_0\theta)^{-1}(\tau-\kappa_m^{c_0\theta})\big)\Upsilon(\tau/\lambda)q(y,y;-\lambda\tau\nabla_y d_g(x,y)) \\ &\quad + O(\lambda^{-3/4}). \end{aligned} \tag{4.64}$$

这里$\tilde{a}_{\iota,\,\theta}$ 满足（4.56）中的界，与 b类似，光滑函数 b 在$[-1,1]$之外消失，并且最后，$\tilde{q} \in S^0_{1,\,0}$。

如果我们结合 (4.62) 和 (4.63)，则可得

$$\begin{aligned} K^{c_0\theta}_{\lambda,\mu}(x,y) = c\lambda^{\frac{n}{2}}\int_0^\infty e^{i\lambda[\tau d_g(x,y)+\tau^2(t-s)]}\tilde{a}_{\iota,\theta}(\lambda\tau; x, y)\tau^{\frac{n}{2}}\tilde{\beta}(\tau^2) \\ \times\,\tilde{b}\big((c_0\theta)^{-1}(\tau-\kappa_m^{c_0\theta})\big)\tilde{q}(x,y;\lambda\tau)\,d\tau,\ \mu=\nu,\nu',\ \iota=j,j',\ m=\ell,\ell'. \end{aligned} \tag{4.65}$$

现在我们将证明 (3.32)–(3.34)。通过一个简单的分部积分论证，我们由 (4.65) 得到 (3.33)；并利用振幅函数 $\tilde{a}_{\iota,\theta}(\lambda\tau;\ x,y)$ 的性质，得到 (3.34) 中的断言：当 $|(x_1,\dots,x_{n-2}| + |(y_1,\dots,y_{n-2})|$ 大于 θ 的某个固定倍数时，振幅为 $O(\lambda^{-N})$，这对 $\mu=\nu,\nu'$ 均成立，因为 $|\nu-\nu'| = O(\theta)$。对于 (3.34) 的最后一部分，即当 $|(x_{n-1}-y_{n-1}) + 2\kappa_\ell^{c_0\theta}(t-s)|$ 大于 θ 的某个固定倍数时，振幅也为平凡的这一结论，我们利用如下事实：若 (3.35) 成立，且 x,y 如 (3.32) 所述位于以 γ_j 为中心的一个 $O(\theta)$-管状邻域内，则在我们的费米正规坐标中，$d_g(x,y) = x_{n-1} - y_{n-1} + O(\theta)$。由 (3.34) 以及前面的步骤，我们得出这些核在 (3.32)–(3.35) 所描述的区域内为 $O(\lambda^{-N})$。

此外，由于（4.65）中的相位函数在 $\tau = -d_g(x,y)/2(t-s)$ 处有一个非退化的唯一驻点，且相位在该处等于 $-(d_g(x,y))^2/4(t-s)$，我们得出结论，（4.64）中的核必为（3.30）的形式。显然，由于（4.56），在 m_1 和 m_2 都为零的特殊情形下，振幅必须满足（3.31）中的估计。

为证明涉及 $(m_1,m_2) \neq (0,0)$ 的估计（3.31），我们首先注意到

$$(d_g(x,y))^2/4(t-s) + \tau d_g(x,y) + \tau^2(t-s) = (t-s)\cdot\big(\tau + d_g(x,y)/2(t-s)\big)^2,$$

并且，根据 (3.34) 和(3.35)，$t-s \approx -\delta$ 当核非平凡时。因此，根据 (4.65)，(3.30) 中的振幅具有如下形式

$$\begin{aligned} &a_{\lambda,\mu}(x,t;y,s) = \\ &\lambda^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^\infty e^{-i\lambda\tau^2}h_{\lambda,\iota,\theta}\big(x,t;y,s;(\tau-\tfrac{(s-t)^{1/2}d_g(x,y)}{2(t-s)});\ \tfrac{1}{(s-t)^{1/2}c_0\theta}(\tau-(s-t)^{1/2}[\kappa_m^{c_0\theta}+\tfrac{d_g(x,y)}{2(t-s)}])\big)\,d\tau, \\ &\qquad\qquad \mu=\nu=(j,k),\nu'=(j',\ell'),\ \iota=j,j',\ m=\ell,\ell', \end{aligned} \tag{4.66}$$

with

$$\begin{aligned} &h_{\lambda,\iota,\theta}(x,t;y,s;u;r) \\ &= \tilde{a}_{\iota,\theta}(\lambda u/(s-t)^{1/2};x,y)\,(u_+/(s-t)^{1/2})^{n/2}\,\tilde{\beta}\big(u^2/(s-t)\big)\ \tilde{q}\big(x,y;\lambda u/(s-t)^{1/2}\big)\,\tilde{b}(r). \end{aligned} \tag{4.67}$$

此处 $u_+ = u$ 若 $u \geq 0$ ，否则为 0。对我们而言重要的是，由~ ~这一事实，即 $\tilde{a}_{\iota,\theta}$ 满足(4.56)、 b 和 β的支撑集性质，以及$s-t$ 远离零且 $\tilde{q} \in S^0_{1,0}$这一事实可知，我们有

$$h_{\lambda,\iota,\theta}(x,t;y,s;u;r) = 0 \quad \text{if} \quad |u|+|r| \geq C \ \text{ or } \ |u| \leq C^{-1}, \tag{4.68}$$

对于某个固定的 $C = C_\delta$，此外

$$D^{\beta_1}_{t,s,u,r,x_{n-1},y_{n-1}} (\theta D_{x',y'})^{\beta_2} h_{\lambda,\iota,\theta}(x,t;y,s;u;r) = O_{\beta_1,\beta_2}(1). \tag{4.69}$$

现在我们利用这一点来证明 (3.31) 对于 $(m_1, m_2) \neq 0$。我们首先考虑特殊情形，其中 $\mu = \nu$ 且在 $x, y \in \gamma_j$上；在我们所使用的费米正规坐标系中，这是一部分 $(n-1)$-轴。于是，如果根据 (3.35) 核是非平凡的，我们有 $d_g(x,y) = x_{n-1} - y_{n-1}$。注意到 (3.33) 告诉我们，(3.30) 中的振幅 $a_{\lambda,\nu}$ 也高度集中在薛定谔曲线上，在此曲线上我们同样有 $x_{n-1} - y_{n-1} = -2\kappa_\ell^{c_0\theta}(t-s)$。考虑到这一点，让我们在 $\beta = 0$, $m_2 = 0$和 $m_1 = 1$ 且位于这条薛定谔曲线上的情形下证明 (3.31)。于是我们有 $-d_g(x,y)/2(t-s) \equiv \kappa_\ell^{c_0\theta}$。在这种情况下，我们在 (4.66) 中取 $\kappa_m^{c_0\theta} = \kappa_\ell^{c_0\theta}$, $\iota = j$ 和 $\mu = \nu$ ，并看到，对于这一特殊情形，如果

$$\int e^{-i\lambda\tau^2} \big(\partial_u h_{\lambda,\iota,\theta}\big)(x,t;y,s;\tau + (s-t)^{1/2}\kappa_\ell^{c_0\theta}; ((s-t)^{1/2}c_0\theta)^{-1}\tau)\, d\tau = O(\lambda^{-1/2}), \tag{4.70}$$

以及

$$\theta^{-1}\int \tau e^{-i\lambda\tau^2} \big(\partial_r h_{\lambda,\iota,\theta}\big)(x,t;y,s;\tau + (s-t)^{1/2}\kappa_\ell^{c_0\theta}; ((s-t)^{1/2}c_0\theta)^{-1}\tau)\, d\tau = O(\lambda^{-1/2}). \tag{4.71}$$

第一个估计式 (4.70) 直接由驻相法和 (4.69) 得出。通过注意到分部积分后，左侧可以改写为

$$(2i\lambda\theta)^{-1}\int e^{-i\lambda\tau^2} \frac{\partial}{\partial\tau}\Big[\big(\partial_r h_{\lambda,\iota,\theta}\big)(x,t;y,s;\tau + (s-t)^{1/2}\kappa_\ell^{c_0\theta}; ((s-t)^{1/2}c_0\theta)^{-1}\tau)\Big]\, d\tau = O((\lambda\theta^2)^{-1}\lambda^{-1/2}) = O(\lambda^{-1/2}), \tag{4.72}$$

其中，右侧的界由 (4.69)、驻相法以及 $\theta \gg \lambda^{-1/2}$ 这一事实得出。鉴于 (4.69)，显然，通过归纳，这一论证将在 (x,t) 和 (y,s) 均位于这条特殊的薛定谔曲线上的特殊情形下，给出 (3.31) 的其余部分。

若 x, y 位于围绕 γ_j 的一个 $O(\theta)$ 管状邻域内，且满足 $d_g(x,y) \approx \delta$，并令 $\gamma(\cdot)$ 为 M^{n-1} 中满足 $\gamma(0) = 0$ 且 $\gamma(r) = x$, $r = d_g(x,y)$ 的单位速测地线，那么该论证还给出

$$\big(2\kappa_\ell^{c_0\theta}\partial_r - \partial_t\big)a_{\lambda,\nu}(\gamma(r),t;y,s) = O(1) \quad \text{if} \quad r = d_g(x,y) \text{ and } r = -2\kappa_\ell^{c_0\theta}(t-s),$$

这是因为连接 (x,t) 和 (y,s) 的薛定谔曲线如 (3.27) 所示。由于我们是在围绕 γ_j 的费米正规坐标中进行计算，这等于

$$(2\kappa^{c_0\theta}\partial_{x_{n-1}} - \partial_t)a_{\lambda,\nu}(x,t;y,s) + O(\theta|\nabla_x a_{\lambda,\nu}|),$$

根据 (3.31) 中的已知估计，此处的误差项为 $O(1)$，其中 $|\beta| = 1$ 和$m_1 = m_2 = 0$。因此，若存在一条连接 (x,t) 和 (y,s) 的 $\kappa_\ell^{c_0\theta}$ -速度薛定谔曲线，且核不是 $O(\lambda^{-N})$，则对于 $m_1 = 1$、$m_2 = 0$和 $\mu = \nu$，(3.31) 成立。通过归纳论证，在这种情况下，它必定对所有 (m_1, m_2, β) 都成立。

若核在 $(x,t;\ y,s)$ 处非平凡，则由 (3.34) 和 (3.35)，存在一条如 (3.27) 中所述的薛定谔曲线，其对应速度为 $\kappa=\kappa_\ell^{c_0\theta}+O(\theta)$，并经过 (x,t) 和 (y,s)。因此，根据上述论证，若有以下 (4.70) 和 (4.71) 的变体，则对于 $\mu=\nu$、 $m_1=1$和 $m_2=0$ ，(3.31) 就成立：

$$\int e^{-i\lambda\tau^2}\big(\partial_u h_{\lambda,\iota,\theta}\big)(x,t;y,s;\tau+(s-t)^{1/2}\kappa;((s-t)^{1/2}c_0\theta)^{-1}(\tau-(s-t)^{1/2}(\kappa_\ell^{c_0\theta}-\kappa))\,d\tau = O(\lambda^{-1/2}), \tag{4.73}$$

以及

$$\theta^{-1}\int(\tau-(\kappa_\ell^{c_0\theta}-\kappa))\cdot e^{-i\lambda\tau^2} \times\big(\partial_r h_{\lambda,\iota,\theta}\big)(x,t;y,s;\tau+(s-t)^{1/2}\kappa;((s-t)^{1/2}c_0\theta)^{-1}(\tau-(s-t)^{1/2}(\kappa_\ell^{c_0\theta}-\kappa))\,d\tau = O(\lambda^{-1/2}). \tag{4.74}$$

与 (4.70) 的情形相同，(4.73) 可由驻相论证和 (4.68)–(4.69) 立即得到。我们还可得到 (4.74)，因为正如之前提到的，必有 $\kappa_\ell^{c_0\theta}-\kappa=O(\theta)$，因此 (4.74) 左侧分为两项，其中一项具有 (4.70) 的形式，另一项具有 (4.71) 的形式。因此，(4.73) 和 (4.74) 推出当 $m_1=1$ 和 $m_2=0$ 时，$\mu=\nu$ 的 (3.31) 成立。此外，与之前一样，通过归纳论证可得到 (3.31) 的其余情形。

最后，由于 $|\kappa_\ell^{c_0\theta}-\kappa_{\ell'}^{c_0\theta}|,\ \theta|j-j'|=O(\theta)$，显然当 $\nu=(c_0\theta j,\ c_0\theta\ell)$ 被替换为 $\nu'=(c_0\theta j',\ c_0\theta\ell')$ 时，(3.31) 也必然成立，由此完成引理 3.5 的证明。

References

[1] N. Anantharaman 和 S. Nonnenmacher。Anosov 流形上拉普拉斯算子特征函数的半疏定位。第 57 卷，第 2465–2523 页。2007 年。Yves Colin de Verdi`ere 纪念文集。[2] P. H. B´érard。无共轭点的紧黎曼流形上的波动方程。*Math. Z.*，155(3):249–276，1977 年。[3] M. D. Blair、X. Huang 和 C. D. Sogge。改进的谱投影估计。 *preprint, arXiv:2211.17266* 。
[4] M. D. Blair 和 C. D. Sogge。二维特征函数精细化的微局部 Kakeya-Nikodym 界。 *Anal. PDE*，8(3):747–764，2014 年。[5] M. D. Blair 和 C. D. Sogge。高维特征函数精细化的微局部 Kakeya-Nikodym 界。 *Comm. Math. Phys.*，356(2):501–533，2017 年。[6] M. D. Blair 和 C. D. Sogge。关于 Toponogov 定理及特征函数估计的对数改进。 *J. Differential Geom.*，109(2):189–221，2018 年。[7] M. D. Blair 和 C. D. Sogge。在非正曲率情形下，临界指数处特征函数 L^p 界的对数改进。 *Invent. Math.*，217(2):703–748，2019 年。[8] J. Bourgain。Besicovitch 型极大算子及其在傅里叶分析中的应用。 *Geom. Funct.* ，( ): *Anal.* 1 2 147 187, 1991 – 。[9] J. Bourgain。某些格子子集的傅里叶变换限制现象及其在非线性演化方程中的应用。I. Schr¨odinger 方程。 *Geom. Funct. Anal.*，3(2):107–156，1993 年。[10] J. Bourgain 和 C. Demeter。 l^2 解耦猜想的证明。 *Ann. of Math.*，182 389，2015 351: – 。[11] N. Burq、P. G´erard 和 N. Tzvetkov。紧流形上的 Strichartz 不等式与非线性 Schr¨odinger 方程。 *Amer. J. Math.*，126(3):569–605，2004 年。[12] I. Chavel。 *Riemannian geometry—a modern introduction* 108 *Cambridge Tracts in Math-* ，第 *ematics* 1993 卷。剑桥大学出版社，剑桥，。[13] Y. Deng、P. Germain 和 L. Guth。无理环面上的 Schr¨odinger 方程的 Strichartz估计。 *J. Funct. Anal.*，273(9):2846–2869，2017 年。

[14] Y. Deng、P. Germain、L. Guth和S.L.Rydin Myerson。非矩形二维环面上的薛¨定谔方程的 Strichartz 估计。 *Amer. J. Math.*，144(3):701–745，2022。[15] J. Gell-Redman、S.Gomes 和 A. Hassell。含时薛¨定谔方程的奇性传播与 Fredholm分析。 *preprint*， *arXiv:2201.03140*。[16] A. Gray。 *Tubes*，
*Progress in Mathematics*的第221卷。Birkh¨auser Verlag，巴塞尔，第二版，2004年。[17] A.Hassell 和 M.Tacy。非正曲-率流形上特征函数估计的改进。 *Forum Mathematicum*，27(3):1435–1451，2015。[18] L. H¨ormander。椭圆算子的谱函数。 *Acta Math.*，121:193–218，1968。[19] L.H¨ormander。 FL^p上的振荡积分与乘子。 *Ark. Mat.*，11:1–11，1973。[20] X. Huang和C. D. Sogge。带奇异势的含时薛¨定谔方程的拟模与 Strichartz估计。 *Math Research Letters*，29:727–762，2022。[21] M.Keel和 T.Tao。端点 Strichartz 估计。 *Amer. J. Math.*，120(5):955–980，1998。[22] T. LaGatta和 J.Wehr。随机黎曼度量的测地线。 *Comm. Math. Phys.*，327 1 181 241，2014( ): –。[23] S.Lee。与限制到超曲面相关的振荡积分算子的线性与双线性估计。 *J. Funct. Anal.*，241(1):56–98，2006。[24] F.K.Manasse 和C.W.Misner。费米正规坐标与微分几何中的一些基本概念。 *J. Mathematical Phys.*，4:735–745，1963。[25] D.C.S´anchez 和 L. Esquivel。球面上薛¨定谔方程的尖锐Strichartz估计。
Journal of Pseudo-Differential Operators and Applications，12:1–14，2021。[26] C. D.Sogge。振荡积分与球面谐函数。 *Duke Math. J.*，53(1):43–65，1986。[27] C.D. Sogge。关于紧流形上二阶椭圆算子的谱簇 L^p 范数。 *J. Funct. Anal.*，77(1):123–138，1988。[28] C. D. Sogge。
Hangzhou lectures on eigenfunctions of the Laplacian 188 *Annals of Math-* ,
ematics Studies 2014
[29] 的第卷。PrincetonUniversityPress，普林斯顿，新泽西州， *Fourier integrals in classical analysis*。 *Cambridge Tracts in Mathematics*C. D. Sogge。[30] 的第 210卷。CambridgeUniversity Press，剑桥，第二版，2017年。
Math. C.
Res. Lett. 24 549 570, 2017
D.Sogge。非正曲率流形上改进的临界特征函数估计。[31] , : –。 L^4C.D.Sogge和S. Zelditch。关于非正曲率紧曲面上的特征函数限制估计与 *Advances in analysis: the legacy of Elias M. Stein*界。载于
Princeton Math. Ser.，第 50 卷，447–461页。Princeton Univ. Press，普林斯顿，新泽西州，2014年。[32] G.Staffilani 和 D. Tataru。具有非光滑系数的薛¨定谔算子的Strichartz估计。
Comm. Partial Differential Equations，27(7-8):1337–1372，2002。[33] E. M.Stein。傅里叶分析中的振荡积分。载于 *Beijing lectures in harmonic analysis (Beijing, 1984)* 112 *Ann. of Math. Stud.* 307 355 ，第卷，–页。PrincetonUniv. Press，普林斯顿，新泽西州，1986。[34] R.S.Strichartz。傅里叶变换在二次曲面上的限制与波动方程解的衰减。 *Duke Math. J.*，44(3):705–714，1977。[35] T. Tao、A. Vargas 和L. Vega。处理限制猜想与Kakeya猜想的双线性方法。
J. ,
Amer. Math. Soc. 11 4 967
(): –1000，1998。[36] M. E. Taylor。 *Pseudodifferential operators*。Princeton Mathematical Series，第34号。Princeton Uni- versityPress，普林斯顿，新泽西州，1981 年。(M.D.B.)

Department of Mathematics, University of New Mexico, Albuquerque, NM 87131
Email address: blair@math.unm.edu(X.H.) Department of Mathematics,
University of Maryland, College Park. MD 20742*Email address*: xhuang49@umd.edu(C.D.S.)
Department of Mathematics, Johns Hopkins University, Baltimore, MD 21218
Email address: sogge@jhu.edu