arXiv:2304.05267v1 [math.GR] 11 Apr 2023

关于右角 Artin 群之间嵌入问题的短期课程

安东尼·热内瓦

CIRM，2022年4月11日至15日

摘要

给定一个图 Γ，直角阿廷群 $A(\Gamma)$，也称为部分交换群，其表示为$\langle u \in V(\Gamma) \mid [u,v] = 1, \{u, v\} \in E(\Gamma)\rangle$。本短期课程致力于研究直角阿廷群中的嵌入问题，即：给定两个有限图 Φ，Ψ，如何确定 $A(\Phi)$ 是否同构于 $A(\Psi)$的一个子群？我们描述了一个基于准中位图的几何的几何框架，在其中可以研究这一问题。

目录

1 讲座 1：右角 Artin 群速成课程 2

习题5 2 第2讲：关于（拟）中位图的速成课程 7 习题 10 3 第3讲：将右角 Artin 群构造为子群 13 习题 16 4 第4讲：二维算法 17 习题 19 参考文献 20

右角阿廷群中的嵌入问题仍然是一个广泛开放的问题，但最近在 [KK13] 中取得了重大进展。我们在第3讲中介绍的结果基本上都源自这项工作，但我们所采用的方法完全不同。在 [KK13]中，映射类群作为辅助对象发挥着核心作用；而在这里，我们将描述右角阿廷群的准中位几何如何带来一种在我们看来更加自然且概念上更为简单的 [KK13] 结果表述。这一观点源自 [Gen17]。

1 讲座 1：右角 Artin 群速成课程

在这门短期课程中，我们将聚焦于一类特殊的群，即直角阿廷群，简称右角 *Artin* 群。

定义 1.1。 设 Γ 是一个图。右角 *Artin* 群 $A(\Gamma)$ 是由以下表示给出的群：

$$\langle u \in V(\Gamma) \mid [u,v]=1,\ \{u,v\} \in E(\Gamma)\rangle,$$

其中， $V(\Gamma)$ 和 $E(\Gamma)$ 分别表示 Γ 的顶点集和边集。

通常，人们会说右角 Artin 群介于自由群和自由阿贝尔群之间。这是因为，如果 Γ 没有边，那么不存在关系， $A(\Gamma)$ 就是秩为 $|V(\Gamma)|$ 的自由群；而如果 Γ 是完全图，也就是说，Γ 的任意两个顶点之间都有一条边相连，那么 $A(\Gamma)$ 就是秩为 $|V(\Gamma)|$ 的自由阿贝尔群。作为其他例子，注意到：当 Γ 是一个四边形时， $A(\Gamma) \simeq \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2$；当 Γ 是一条长度为二的路径时， $A(\Gamma) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{F}_2$。

人们对直角阿廷群了解到了什么程度？要回答这个问题，可以提出一些基本问题，例如：什么时候一个直角阿廷群是平凡的？什么时候是无限的？如何判断给定的两个元素是否可交换？给定的直角阿廷群可能有哪些有限子群？又可能有哪些可解子群？如何判断给定的两个直角阿廷群是否同构？事实证明，这些问题都已得到充分理解。下面我们来详细介绍一些相关内容。

字问题。 固定一个图 Γ。由于 Γ 的顶点提供了 $A(\Gamma)$的生成元， $A(\Gamma)$的每个元素都可以描述为在字母表$V(\Gamma) \sqcup V(\Gamma)^{-1}$上写出的一个字。显然，以下操作不会改变给定字 w 所表示的 $A(\Gamma)$中的元素：$= u_1 \cdots u_n$。

(自由约化)如果 $u_{i+1} = u_i^{-1}$或 $u_i = u_{i+1}^{-1}$，则从 w 中移除这两个字母。

（洗牌）如果 u_i 和 u_{i+1} 由 Γ 中相邻的两个顶点给出，则在 w 中将 $u_i u_{i+1}$ 替换为 $u_{i+1} u_i$ 。

如果一个字不能通过换位和自由约化来缩短，那么它就是图形约化的；如果要指明 Γ，则称为 Γ-约化 。

命题 1.2。 设 $g \in A(\Gamma)$ 是一个元素。一个字在表示 g 的所有字中具有最小长度，当且仅当它是图形约化的。此外，表示 g 的任意两个图约化词仅相差有限次换位。

证明请参见练习 1.12。由此可知，字问题可以很容易地解决。给定一个由生成元组成的字，尽可能多地进行换位和自由约化。由于给定长度的可能字只有有限多个，这一过程必定会终止，并得到一个图形约化词。于是，我们的初始字所表示的元素是平凡的，当且仅当这样得到的图形约化词为空。

作为一个明确的例子，假设 Γ 是一个 5-圈。将其顶点按循环顺序编号为a， b， c， d， e。我们声称 $eade^{-1}c = bacb^{-1}d$。事实上，

$$eade^{-1}c \overset{\text{shuffling}}{\longrightarrow} aede^{-1}c \overset{\text{shuffling}}{\longrightarrow} adee^{-1}c \underset{\text{reduction}}{\overset{\text{free}}{\longrightarrow}} adc$$

给出一个图形约化词，同样

$$bacb^{-1}d \overset{\text{shuffling}}{\longrightarrow} abcb^{-1}d \overset{\text{shuffling}}{\longrightarrow} acbb^{-1}d \underset{\text{reduction}}{\overset{\text{free}}{\longrightarrow}} acd$$

会得到另一个图形约化词。但 adc 可以通过交换变为 acd ，因此得到所需的等式。

命题 1.2 给出的（几乎）标准形极其有用。下面列举几个简单的应用。

推论 1.3。设 Γ 是一个图。对于每个诱导子图 Λ，包含映射$V(\Lambda) \to V(\Gamma)$ 诱导出一个单射同态 $A(\Lambda) \to A(\Gamma)$。

回忆一下，子图 $\Lambda \subset \Gamma$ 是诱导的，当且仅当 Λ 中的两个顶点在 Λ 中相邻，当且仅当它们在 Γ中相邻。

推论 *1.3* 的证明。由于在 $V(\Lambda) \sqcup V(\Lambda)^{-1}$ 上写出的一个字是 Λ-约化的，当且仅当它是 Γ-约化的，所需结论由命题 1.2 得出。 □

推论 1.4。设 Γ 是一个图。

(i) $A(\Gamma)$ 是自由的，当且仅当 Γ 没有边。否则， $A(\Gamma)$ 包含 $\mathbb{Z}^2$。*(ii)* $A(\Gamma)$ 是阿贝尔的，当且仅当 Γ 是完全图。否则， $A(\Gamma)$ 包含 $\mathbb{F}_2$。*(iii)* $A(\Gamma)$ 可非平凡地分解为自由积，当且仅当 Γ 不连通。若如此，$A(\Gamma) = \underset{1\le i\le n}{*} A(\Gamma_i)$，其中 Γ_1、……、Γ_n 是 Γ 的连通分支。*(iv)* $A(\Gamma)$ 可非平凡地分解为直积，当且仅当 Γ^{opp} 不连通。若如此， $A(\Gamma) = \bigoplus A(\Gamma_i)$，其中 Γ_1、……、Γ_n 是由$1\le i\le n$ Γ^{opp}的连通分支所确定的 Γ 的诱导子图。

这里， Γ^{opp} 指的是 Γ 的补图，即顶点集为 $V(\Gamma)$ 的图；当且仅当两个顶点在 Γ 中不相邻时，它们之间才有边。注意，补图不连通等价于将其分解为连接，也就是说， Γ 包含两个非空的诱导子图 Φ， Ψ，满足 $V(\Gamma) = V(\Phi) \sqcup V(\Psi)$，并且 Φ 中的每个顶点都与 Ψ中的每个顶点相邻。我们记下 $\Gamma = \Phi * \Psi$。不是连接的图称为不可约。

推论 *1.4* 的证明。如果 Γ 没有边，那么 $A(\Gamma)$ 必然是自由的，因为它存在一个不含关系的表示。反之，如果 Γ 至少包含一条边，则由推论 1.3 可知， $A(\Gamma)$ 包含 $\mathbb{Z}^2$，因此它不可能是自由的。

如果 Γ 是完全图，那么 $A(\Gamma)$ 显然是自由阿贝尔的。反之，如果 Γ 包含两个不相邻的顶点，则由推论 1.3 可知， $A(\Gamma)$ 包含 $\mathbb{F}_2$，因此它不可能是阿贝尔的。

关于剩下的两项，我们参阅练习 1.10 和 1.11。 □

共轭问题。作为字问题的延伸，共轭问题要求确定：给定生成元中的两个字，它们在群中对应的两个元素是否共轭。与字问题类似，可以在每个共轭类中选取一个较好的代表元，该代表元或多或少是唯一的。更准确地说，字 $u_1 \cdots u_n$是循环图形约化的，当且仅当它是图形约化的，并且不存在 $1 \le i < j \le n$ 使得 $u_i = u_j^{-1}$，且使得 u_i （分别为 u_j）可以通过交换移到该字的开头（分别为结尾）。于是：

命题 1.5. 设 Γ 是一个图。对于每个 $g \in A(\Gamma)$，都存在一个循环图形约化字 w，它在换位和循环置换意义下唯一，使得 g 和 w 在 $A(\Gamma)$ 中共轭。

推论1.6。 设 Γ 是一个图。共轭问题在 $A(\Gamma)$ 中可解。

证明。 设 $g_1, g_2 \in A(\Gamma)$ 是两个元素。对于 $i = 1,2$，将 g_i 写成图形约化词 w_i。可以通过算法判断 w_i 是否为循环图形约化。若不是，则可以对 w_i 进行换位，得到一个新的（图形约化）字 $u \cdot w_i' \cdot u^{-1}$，其中 u 是一个生成元，且 w_i' 是一个比 w_i 更短的字。接下来，我们对 w_i' 重复这一过程，依此类推。至多经过 $|w_i|$ 次迭代，我们便可通过换位将 w_i 写成 $p_i \cdot w_i'' \cdot p_i^{-1}$，其中 w_i'' 现在是一个循环图形约化词。根据命题 1.5， g_1 和 g_2 在 $A(\Gamma)$ 中共轭，当且仅当 w_1 和 w_2 可以通过换位和循环置换由彼此得到；这一点很容易验证。

□

值得一提的是，根据命题 1.5，右角 Artin 群中的共轭问题可以非常高效地解决，即在线性时间内 [CGW09]。

交换问题。 直角阿廷群中另一个可解决的算法问题是交换问题，即：给定两个由生成元构成的字，判断它们对应的两个群元素是否交换。为了解决这个问题，我们将说明如何计算一个元素的中心化子。在下述命题中，直角阿廷群 $A(\Gamma)$ 中元素 g 的支撑 是指由表示 g 的循环图形约化词中出现的生成元所确定的子图 Γ。

定理 1.7 ([Ser89])。 设 Γ 是一个图，且 $g \in A(\Gamma)$ 是一个元素。将 g 的支撑分解为不可约子图的连接 $\Lambda_1 * \cdots * \Lambda_k$，并将 g 写为 $hw_1 \cdots w_k h^{-1}$，其中对于每个 $1 \le i \le k$ 都有 $w_i \in h\Lambda_i i$。然后

$$C(g) = h\left(\langle g_1 \rangle \oplus \cdots \langle g_k \rangle \oplus \langle \mathrm{link}(\mathrm{supp}(g)) \rangle\right) h^{-1}$$

其中每个 g_i 都是包含 w_i 的 $h\Lambda_i i$ 的极大循环子群的生成元 .

在该陈述中，隐含地使用了这样一个事实：直角阿廷群的每个非平凡元素都属于唯一的极大无限循环子群。这是直角阿廷群中根的唯一性的推论。

例如，设 Γ 为包含一个 4-环（a， b， c， d）和两个与这四个顶点相邻的顶点 e， f 的图。我们来计算 $g := a^{-2}cabdc^{-1}bad$ 在 $A(\Gamma)$ 中的中心化子。首先，我们写出

$$g = a^{-1} \cdot a^{-1}cabdc^{-1}bd \cdot a$$

其中 $a^{-1}cabdc^{-1}bd$ 是循环图形约化的。因此， g 的支集是四循环（a， b， c， d），它可分解为连接 $\{a, c\} * \{b, d\}$。写成

$$g = a^{-1} \cdot (a^{-1}cac^{-1})(bd)^2 \cdot a,$$

我们得出结论：

$$C(g) = a^{-1}\left(\langle a^{-1}cac^{-1} \rangle \oplus \langle bd \rangle \oplus \langle e, f \rangle\right) a,$$

它与 $\mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{F}_2$ 同构。

同构问题。给定两个图，一个自然的问题是判断这两个图所对应的直角阿廷群是否同构。当然，如果这两个图同构，那么相应的群也必然同构。事实证明，反过来也是成立的。

定理 1.8 ([Dro87])。令 Φ, Ψ 为两个有限图。右角阿廷群 $A(\Phi)$ $A(\Psi)$ 同构，当且仅当图 Φ， Ψ 同构。

嵌入问题。直角阿廷群之间的许多其他基本问题都已得到充分理解。一个自然问题的例子是下面这个，而它目前还远未得到理解：

设 Φ、Ψ 是两个有限图。如何判断 $A(\Phi)$ 是否同构于 $A(\Psi)$的一个子群？

推论 1.3 表明，如果 Φ 可以实现为 Ψ 的诱导子图，那么 $A(\Phi)$ 可以实现为 $A(\Psi)$ 的一个子群。但反过来并不成立，即使是最简单的例子也如此： $\mathbb{F}_3$ （对应于三个孤立顶点的直角阿廷群）嵌入了 $\mathbb{F}_2$ （对应于两个孤立顶点的直角阿廷群）。

接下来的几讲将介绍一种研究嵌入问题的几何方法。

更一般的框架。在这门短期课程中，我们聚焦于直角阿廷群，但事实证明，我们提出的几何框架在更一般的情形下也适用。给定一个图 Γ 以及一族由 Γ 的顶点索引的群 $\mathcal{G}=\{G_u \mid u \in V(\Gamma)\}$，图乘积 $\Gamma\mathcal{G}$ 是由相对表示给出的群

$$\langle G_u,\ u \in V(\Gamma) \mid [G_u, G_v] = 1,\ \{u,v\} \in E(\Gamma)\rangle$$

其中，$[G_u, G_v] = 1$ 是 $[a,b] = 1$ 的简写，对所有 $a \in G_u$、$b \in G_v$ [Gre90]均成立。直角阿廷群与无限循环群的图乘积一致，但也可以将直角考克斯特群表示为二阶循环群的图乘积。通常，人们说图乘积在自由积（当 Γ 没有边时）和直和（当 Γ 是完全图时）之间进行插值。也可以将群的图乘积视为直角旋转群 [Gen22b]。

习题

练习 1.9。证明直角阿廷群是无挠的，并且它们的循环子群是非扭曲的。

练习 1.10。 证明推论 1.4 中的条目 (iii)。

(提示：在自由积中，自由因子是自共轭的，且非循环自由阿贝尔子群包含于因子的共轭中。)

练习 1.11。 证明推论 1.4 中的第 (iv) 项。

(提示：如果 Γ^{opp} 是连通的，使用定理 *1.7* 构造一个具有循环中心化子的元素。)

练习 1.12。 本练习的目标是证明命题 1.2。我们先回顾一些关于 van Kampen 图的基础知识。

定义 1.13。 设$\mathcal{P} = \langle X \mid R\rangle$ 是一个群表示， D 是嵌入平面中的有限二维复形，其边均带有定向，且标记为 X中的元素。一条定向路径 γ位于 D的一维骨架中，可写成连接 $e_1^{\epsilon_1}\cdot\cdot\, e_n^{\epsilon_n}$，其中 $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n \in \{+1,-1\}$，且每个 e_i都是一条边，其定向取自 D。那么，给 γ标记的字是 $\ell_1^{\epsilon_1}\cdot\cdot\, \ell_n^{\epsilon_n}$，其中对每个 $1 \le i \le n$， ℓ_i是 e_i的标签。若对于 D中的每个二维胞腔 F，给 F 的边界标记的字（固定任意一个基点和任意一种定向）都是 R 的某个关系或 R的某个关系的逆元的循环置换，那么 D 就是一个基于 $\mathcal{P}$的图。

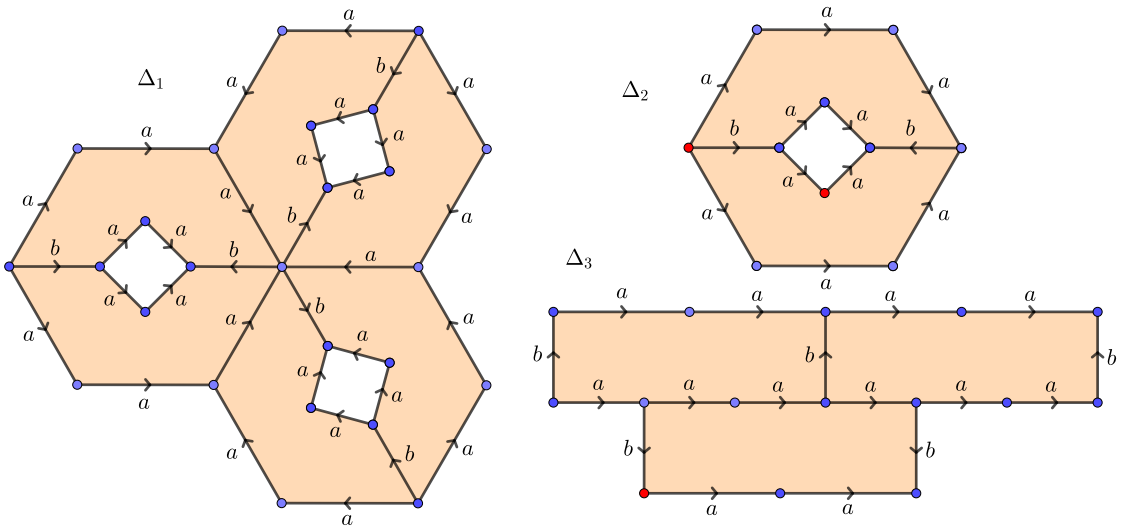


图 1：表示 $\langle a, b \mid ba^2b^{-1} = a^3 \rangle$ 上的一般图、范坎彭图和环形图。

定义 1.14。 设$\mathcal{P} = \langle X \mid R \rangle$ 是一个群表示。基于$\mathcal{P}$ 的范坎彭图 是一个单连通的、基于$\mathcal{P}$ 的图，且其边界上有一个固定顶点（即， D 与 $\mathbb{R}^2 \backslash D$的闭包的交集）。 D 的边界圈 是一个最小长度的圈α ，它包含 D 边界上的所有边且不与自身相交，其含义是：若 α 中的 e 和 e' 是相邻的两条边，且 e 终止于顶点 v，那么在以循环顺序排列的所有从 v出发的边的集合中， e^{-1} 和 e' 相邻。 D 边界的标签 是这样一个字：它给 D 的边界圈标记，该圈从 D 的基点出发，并沿顺时针方向绕 D 一周。

下面的陈述明确说明了范坎彭图与字问题之间的联系。证明参见 [LS77, Theorem V.1.1 and Lemma V.1.2] 。

命题 1.15。 设 $P = \langle X \mid R \rangle$ 是一个群的表示， G 且 $w \in X^{\pm}$ 是一个非空字。当且仅当 $w = 1$ 属于 G时，存在一个边界由 w 标记的 P 上的范坎彭图。

现在，固定一个图 Γ 以及由定义 1.1 给出的 $A(\Gamma)$ 的表示 $\mathcal{P}$ 。注意， $\mathcal{P}$ 上的图都是方形复形。此类图中的对偶曲线 是由连接正方形中相对两边中点的直线段首尾相接而成的极小子集。

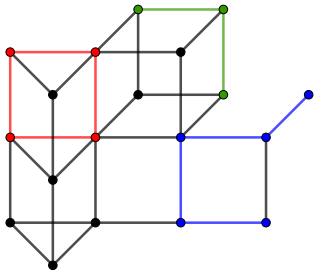
1. 在$\mathcal{P}$上的图中，被同一条对偶曲线穿过的两条边标有 Γ 的同一个顶点。因此，对偶曲线自然地以 Γ的顶点为标签。2. 如果两条对偶曲线相交，那么它们标有 Γ 中相邻的顶点。因此，对偶曲线不能与自身相交。3. 在$\mathcal{P}$上的图中，以图形约化词为标签的路径不能两次穿过同一条对偶曲线。4.推导出图形约化词与具有最小长度的字相一致。5.证明，表示 $A(\Gamma)$ 中同一元素的两个图约化词仅相差有限次换位。

2 第 2 讲：中位图（准中位图）速成课程 S

在本讲中，我们将图视为一个带有邻接关系的顶点集合。因此，图中的点始终指顶点。换言之，我们区分抽象图及其几何实现，所以对我们而言，边上不存在点。等价地，可以将图视为一个度量空间，其度量取值于 $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$，并且任意两个距离有限的有限点都可以通过一列依次相距一的点相连。

给定一个图 X，子图 Y 是指其顶点集和边集分别包含在 X的顶点集和边集中的图。子图分为三种类型：

- Y 是诱导子图，如果 Y 中任意两个在 X 中相邻的顶点在 Y中也相邻；
- Y 是凸子图，如果 Y 中任意两个顶点之间的任意测地线都位于 Y中；
- Y 是门控子图，如果对于每个 $x \in X$，都存在某个 $z \in Y$（称为门控点或投影），对于每个 $y \in Y$，它都属于从 x 到 y 的至少一条测地线。



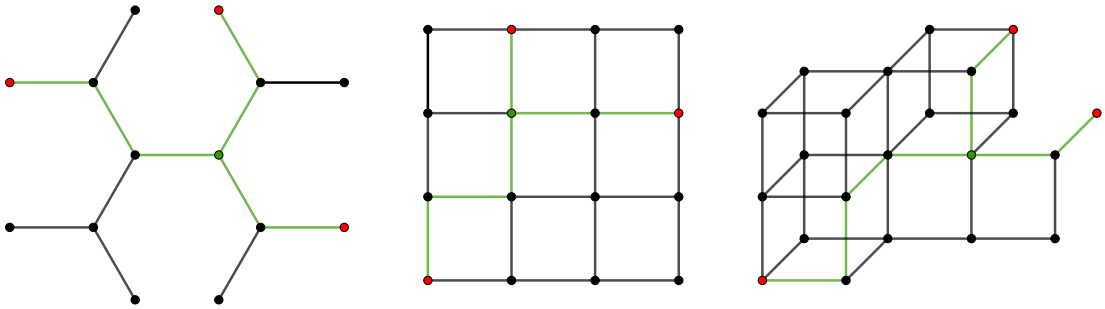
蓝色表示非诱导子图；绿色表示诱导但不凸的子图；红色表示凸但非门控的子图。

注意到，门控子图自动是凸的，并且顶点 x 的投影与 Y 中使到 x 的距离最小的唯一顶点重合。因此，可以将门控性理解为一种强凸性条件。

定义 2.1。连通图 X 是中位图，当且仅当对于任意三个顶点x_1、x_2、$x_3 \in X$，都存在唯一的顶点 $m \in X$（称为中位点）满足

$$d(x_i, x_j) = d(x_i, m) + d(m, x_j),\ \forall i \neq j.$$

需要牢记的典型例子是树。但还有许多其他图，它们与树截然不同，却也是中位图。



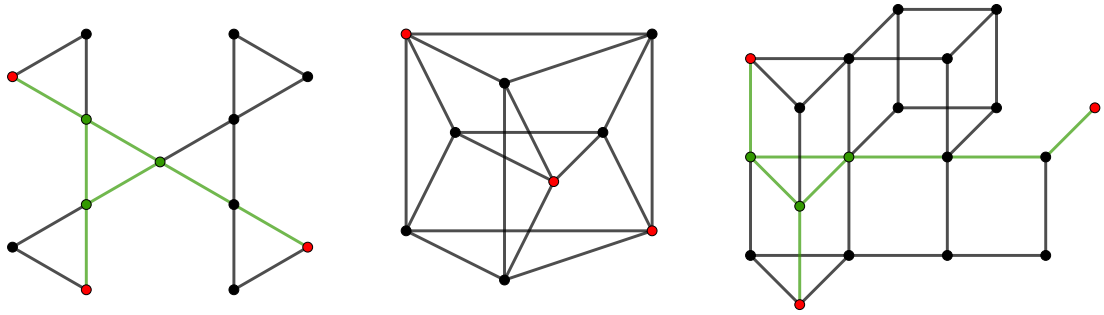
事实证明，中位图恰好是*CAT(0)* 立方复形的一骨架。粗略地说，中位图可以看作由任意维数的立方体组成的非正曲率胞腔复形的一骨架。

中位图的典型反例包括一个 3-圈（其三个顶点不存在中位点）和一个二分完全图 $K_{3,2}$（其三个两两不相邻的顶点存在两个中位点）。有趣的是，可以定义一个更大的图族，它们允许包含 3-圈，并且在本质上具有与中位图相同的几何。

定义 2.2。 设 X 是一个连通图。给定三个顶点 x_1, x_2, $x_3 \in X$，一个中位三角形 是由三个顶点 y_1, y_2, $y_3 \in X$ 构成的数据，使得

$$d(x_i, x_j) = d(x_i, y_i) + d(y_i, y_j) + d(y_j, x_j), \ \forall i \neq j.$$

其大小 为 $d(y_1, y_2) + d(y_2, y_3) + d(y_3, y_1)$。图 X 是准中位 图，当且仅当任意三个顶点都存在唯一的最小规模中位三角形，并且任意此类中位三角形的门控包络都是完全图的乘积。



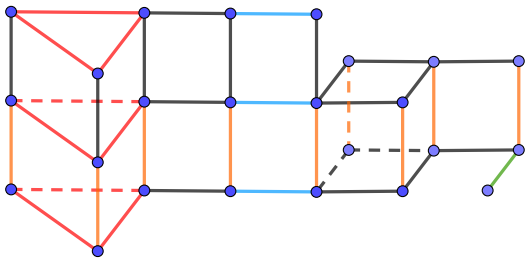
注意，在任意图 X 中，三个顶点 x_1, x_2, $x_3 \in X$ 总是存在一个中位三角形，即 x_1, x_2, x_3。有趣之处在于找到一个规模较小的中位三角形。准中位图的定义要求最小的中位三角形唯一，并且在包含 3-环的图中尽可能小。（注意，完全图的乘积 P 是准中位图，而且它包含三个顶点 a, b, c，其对应的中位三角形是 a, b, c，其门控包络是整个图 P。）

图 K_4^-，即从完全图 K_4 中删除一条边后得到的图（也就是说， K_4^- 是将两个 3-环沿一条边粘合而得到的图），是一个非准中位图的例子。事实上，如果 a, b, $c \in K_4^-$ 是 3-环的三个顶点，那么 a, b, c 就是相应的中位三角形，其门控包络是整个 K_4^-。但是 K_4^- 不是完全图的乘积，因此不可能是准中位图。长度为 ≥ 5 的环是其他非准中位图的例子。

准中位图是“带有3-环的中位图”这一观点受到习题 2.7的启发。同样地，正如中位图是CAT(0)立方复形的一维骨架，准中位图也是 CAT(0) 棱柱复形的一维骨架（棱柱指的是单纯形的乘积）。

中位图和准中位图都具有一个共同性质：边上的平行关系使我们能够定义边的等价类，即超平面，它们将图分隔开来，并在某种意义上编码了图的几何。

定义 2.3。 在准中位图中，超平面 是边的一个等价类，其等价关系是以下关系的传递闭包：凡是属于同一个 3-圈的两条边，或是某个 4-圈中相对的两条边，均被视为等价。若两个超平面在某个 4-圈中分别包含两对不同的相对边，则称它们横截 。



超平面的组合学编码准中位图几何这一想法，源于以下论述：

定理 2.4 ([生成元17])。 设 X 为一个准中位图。

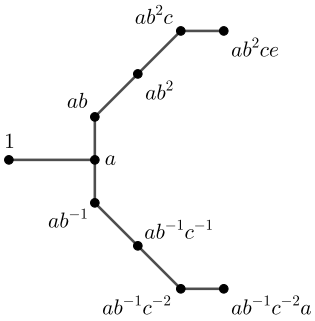
- 对于每个超平面 J，从 X 中移除 J 中的边后得到的图 $X\|\|J$ 至少有两个连通分支，称为 扇区。
- 扇区是门控的。
- X 中的路径是测地线，当且仅当它至多穿过每个超平面一次。因此，任意两个顶点之间的距离都等于分隔它们的超平面数量。

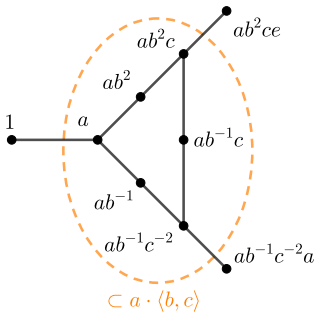
事实证明，中位图和准中位图的例子自然包括直角阿廷群的凯莱图。对于许多问题，这类中位图在研究直角阿廷群时极为有用，但准中位图将在嵌入问题中发挥核心作用。

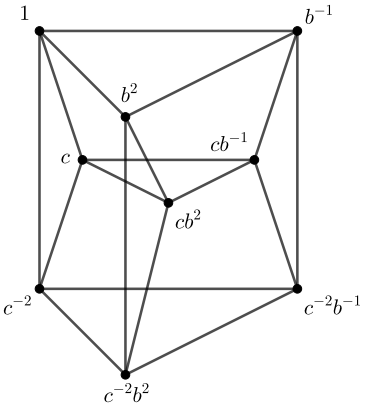
命题 2.5。 设 Γ 为一个图。$\mathrm{M}(\Gamma)\colon=\mathrm{Cayl}(A(\Gamma)\ V(\Gamma))$ 是一个中位图，并且$\mathrm{QM}(\Gamma)\colon=\mathrm{Cayl}(A(\Gamma),\{u^k \mid u\in V(\Gamma)\ k\in\mathbb{Z}_{\neq 0}\})$ 是一个准中位图。

证明思路。需要证明，对于 $A(\Gamma)$中的三个元素，$\mathrm{M}(\Gamma)$中存在唯一的中位点，而 $\mathrm{QM}(\Gamma)$中存在唯一的最小中位三角形。通过左乘 $A(\Gamma)$中的一个元素，不失一般性地假设其中一个元素是 1。举例来说，假设 Γ 是一个 5-圈（a、 b、 c、 d、 e），且这三个元素是 1、 $g:=ab^2ce$、 $h:=ab^{-1}c^{-2}a$。

1， g， h 在$\mathrm{M}(\Gamma)$ 中的中位点 m（如果存在），必须属于从 1到 g， h 的测地线。换句话说，就图形约化词而言， m 必须是 g 和 h 的公共前缀。因此，我们将 m 定义为 g 和 h 的最长公共前缀，并断言它定义了一个中位点。在我们的例子中， $m=a$。为了证明 a 确实是一个中位点，我们需要证明 a 位于 g 和 h 之间的一条测地线上，这相当于说，$(b^2ce)^{-1}\cdot b^{-1}c^{-2}a$ 具有最小长度（相对于生成集 $V(\Gamma)$）。可以检查这个字是图形约化的。







然而，相对于 $\{u^k \mid u\in V(\Gamma)\ k\in\mathbb{Z}_{\neq 0}\}$，这个字并不具有最小长度。从几何上看，注意到 ab^2 与 ab^{-1} 在 $\mathrm{QM}(\Gamma)$中相邻。最长公共前缀 a 给出了我们的中位三角形的三个顶点之一。另外两个顶点如下得到：除了最长公共前缀之外，我们还添加在 $m^{-1}g$ 和 $m^{-1}h$ 中以不同幂次出现的首字母。在我们的例子中，我们得到 ab^2c 和 $ab^{-1}c^{-2}$。注意，这些附加字母由 Γ 的顶点给出，而这些顶点两两相邻。因此，顶点 a、 ab^2c、 $ab^{-1}c^{-2}$

位于 $a \cdot \langle b, c \rangle = a \cdot \langle b \rangle \oplus \langle c \rangle$ 中。可以验证， $a\langle b, c \rangle$ 与我们这三个顶点的门控包络重合，并且显然是完全图的乘积。此外， ab^2c 和$ab^{-1}c^{-2}$ 位于从 ab^2ce到 $ab^{-1}c^{-2}a$ 的一条测地线上（按此顺序），这相当于说，字 $(ce)^{-1} \cdot a$ 相对于我们的生成集具有最小长度。□

最后，我们记录一些关于准中位图 QM(Γ) 结构的信息。回想一下，团 是极大完全子图；棱柱 是可分解为团的乘积的子图；而一个顶点的星形 是由该顶点及其所有邻居构成的子图。

引理 2.6。 设 Γ 是一个图。以下断言成立。

- $\mathrm{QM}(\Gamma)$ 的团与陪集 $g\langle u \rangle$ 相同，其中 $g \in A(\Gamma)$ 且 $u \in V(\Gamma)$。
- $\mathrm{QM}(\Gamma)$ 的棱柱与陪集 $g\langle \Lambda \rangle$ 相同，其中 $g \in A(\Gamma)$ ，且 $\Lambda \leq \Gamma$ 是完全的。

- 对于每个 $u \in V(\Gamma)$，令 J_u 表示包含团 $\langle u \rangle$ 的超平面。$\mathrm{QM}(\Gamma)$ 的超平面为 gJ_u ，其中 $g \in A(\Gamma)$ 且 $u \in V(\Gamma)$，稳定子为 $g\langle \mathrm{star}(u) \rangle g^{-1}$。

这个引理本质上是 QM(Γ) 中 3-圈和 4-圈刻画的推论。如果 $a, b, c \in \mathrm{QM}(\Gamma)$ 是一个 3-圈，那么存在生成元 u, v 以及整数 $r, s \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$ ，使得 $b = au^r$ 和 $c = av^s$，这是因为 b 和 c 都与 a 相邻。但 b 和 c 也相邻，所以 $u^{-r}v^s$ 必须是某个生成元的幂。由直角阿廷群中的标准形可知，我们必须有 $u = v$。因此，QM(Γ) 中的 3-圈位于陪集 $g\langle u \rangle$ 中，其中 $g \in A(\Gamma)$ 且 $u \in V(\Gamma)$。接下来，如果 a, b, c, d 是一个诱导 4-圈，那么必定存在生成元 $u, v \in V(\Gamma)$ 和非零整数 $r, s \in \mathbb{Z}$ ，使得 $b = au^r$ 和 $d = av^s$ ，这是因为 b 和 d 都与 a 相邻。但它们也都与 c 相邻，所以必定还存在另外两个生成元 $f, h \in V(\Gamma)$ 和两个非零整数 $p, q \in \mathbb{Z}$，使得 $au^r f^p = c = av^s h^q$。由 $u^r f^p = v^s h^q$，我们再次根据直角阿廷群中的标准形推得 $u = h$, $f = v$,$p = s$, $q = r$，并且 u, v 在 Γ 中相邻。因此，QM(Γ) 中的 4-圈位于陪集 $g\langle u, v \rangle$ 中，其中 $g \in A(\Gamma)$，且 $u, v \in V(\Gamma)$ 相邻。
细节留作习题。

习题

习题 2.7. 证明：一个图是中位图，当且仅当它是准中位图且不含 3-圈。证明：在中位图中，一个子图是门控的，当且仅当它是凸的。

习题 2.8. 设 X 是一个准中位图。

1. 设 o、x、$y \in X$ 是三个顶点，满足 x、y 相邻，且 $d(o, x) = d(o, y)$。证明存在一个顶点 $z \in X$ ，它与 x、y 都相邻，并且满足 $d(o, z) = d(o, x) - 1$。2. 设 o、x、y、$z \in X$ 是四个顶点，满足 y 与 x、z 都相邻，$d(x, z) = 2$，且 $d(o, x) = d(o, z) = d(o, y) - 1$。证明存在一个顶点 $w \in X$，它与 x、y 都相邻，并且满足 $d(o, w) = d(o, y) - 2$。3. 证明 X 不含与二部完全图 $K_{3,2}$ 同构的诱导子图，也不含与 K_4^- 同构的诱导子图（即删去一条边的完全图 K_4 ）。

满足前两个条件的图称为弱模图。通常，准中位图被定义为不含诱导 $K_{3,\ 2}$, K_4^- 的弱模图。

练习 2.9。 设 X 是一个准中位图。给定 X中的一条路径（x_0，…，x_n），在 e

- 消除一次回溯如果对于某个 i， $x_i = x_{i+2}$，并且如果我们移除 x_{i+1}，x_{i+2};
- 缩短一个3-环，如果对于某个 i， x_i、x_{i+2} 相邻，并且我们移除 x_{i+1};
- 翻转一个 4-环 当 $[x_{i+1}, x_i]$，$[x_{i+1}, x_{i+2}]$ 张成一个4-环，并且如果我们将 x_{i+1} 替换为它在这个4-环中相对的顶点。

本练习旨在证明，子图 Y 在 X 中是凸的，当且仅当它是连通的并且 局部凸（即每个有两条连续边位于 Y 中的 4-圈都必须完全位于 Y 中）。

1.证明具有相同端点的任意两条测地线仅相差有限次的四环翻转。2.证明任意路径都可以通过缩短三环、翻转四环以及移除回溯，将其变为一条测地线。3. 证明子图 i n X 是凸的，当且仅当它是连通的且局部凸。

习题 2.10。 设 X 是一个准中位图。

1. 给定一个顶点 $x \in X$ 和一个门控子图 $Y \subset X$，证明每个将 x 与其在 Y 上的投影分开的超平面，也将 x 与 Y分开。2. 给定两个顶点 x，$y \in X$ 和一个门控子图 $Y \subset X$，证明将 x，y 在 Y 上的投影分开的超平面，与将 x，y 分开且与 Y 相交的超平面相同。由此推导出到 Y上的投影是 1-Lipschitz 的。3. 固定一族团 $\mathcal{C}$，使得 X 的每个超平面恰好包含 $\mathcal{C}$中的一个团。证明

$$\begin{cases} X & \to & \prod_{C\in\mathcal{C}} C \\ x & \mapsto & (\mathrm{proj}_C(x))_{C\in\mathcal{C}} \end{cases}$$

定义了一个等距嵌入。证明其像不一定是凸的。

习题 2.11。 证明（准）中位图的笛卡尔积和尖点和仍是（准）中位图。

习题 2.12。 固定一个图 Γ。本习题旨在证明引理 2.6。

1. 证明 QM(Γ)中一个 3-圈的边都标记为 Γ的同一个顶点。推出引理2.6的第一项。
2.证明在一个4-圈中，两个相对的边标记为 Γ 的同一个顶点。推出引理 2.6 的第二项。
3. 给定一个顶点 $u \in V(\Gamma)$，证明 QM(Γ) 中的一条边属于 J_u 当且仅当它具有以下形式：$\{g, gu^k\}$ 对于某个 $k \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$ 和某个 $g \in \langle$链接$(u)\rangle$。推出引理 2.6 的第三项。

练习 2.13。 令 X 为任意中位图。令 Γ 表示其交叉图，即顶点为 X 中的超平面的图，并且当两个超平面彼此横截时，用边连接它们。本练习的目标是证明 X 嵌入 M(Γ) 中，且为一个凸子图。

1. 为 X 中的每个超平面固定一个定向。给定一条定向边 e 以及包含它的超平面 J，若 e 和 J 的定向一致，则定义 e 的标签 $\ell(e)$ 为 J，否则为 J^{-1}。因此，X 中的定向路径自然带有一个超平面字（及其逆元）作为标签。证明，标记测地线的字是图形约化的。

2. 证明：标记两条具有相同端点的路径的字在 $A(\Gamma)$ 中表示同一个元素。（提示：使用练习 *2.9*。）

3. 固定一个基点 $x_0 \in X$。证明该映射

$$\begin{cases} X & \mapsto & \mathrm{M}(\Gamma) \\ x & \mapsto & \ell(\text{path from } x_0 \text{ to } x) \end{cases}$$

诱导出一个等距嵌入。

4. 验证该嵌入的像是凸的。（提示：使用练习 *2.9*。）

5. 调整该构造，以证明准中位图 X 可以实现为 $\mathrm{QM}(\Gamma)$ 中的凸子图，其中 Γ 表示 X 的交叉图。

3 第3讲：将右角 Artin 群构造为子群

构造自由子群时，一个广为人知且相当有用的工具是乒乓引理。事实证明，这样的引理可以自然地推广到直角阿廷群（[CF], 另见 [Kob12, Gen17]）：

命题3.1。令 G 为作用于某个集合 S上的群。固定一个生成集 $R \subset G$，并假设每个 $r \in R$ 都有一个与之关联的子集 $S_r \subset S$，使得：

- 如果 a、$b \in R$ 可交换，那么对于每个 $k \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$都有 $a^k \cdot S_b \subset S_b$；
- 如果 a、$b \in R$ 不交换，那么对于每个 $k \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$，都有 $a^k \cdot S_b \subset S_a$；
- 存在一个点 $s_0 \in S \setminus \bigcup_{r \in R} S_r$ 使得 $a^k \cdot s_0 \in S_a$ 对每个 $k \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$ 都成立。

然后 G 是一个直角阿廷群。更准确地说，如果 C_R 表示 R 的交换图（即 C_R 是这样一个图，其顶点集为 R，且其边连接任意两个彼此对易的生成元），那么恒等映射 $R \to R$ 延拓为一个同构$A(C_R) \to G$。

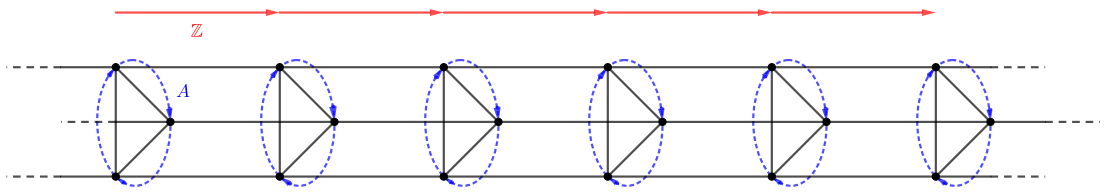
证明。恒等映射 $R \to R$ 延拓为一个满态射 $\varphi : A(C_R) \to G$，但我们必须验证它是单射。设 $g \in A(C_R)$是一个非平凡元素。我们可以将其表示为关于 $R \cup R^{-1}$（视为$A(C_R)$ 的元素）的图形约化词 w，而它在 φ 下的像由关于 $R \cup R^{-1}$（视为 G的元素）的同一个字表示。我们想通过对 w 的长度进行归纳法来证明，$w \cdot s_0$属于某个 S_r，其中 $r \in$ 首部(w)。这里，首部(w) 指的是 w 中可以移到字开头的字母集合。

将 w 写作 $r^k w'$，其中某个 $r \in$首部(w) 满足 $k \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$ 使得 $r \notin$ 首部(w')。若 w' 为空，则 $w \cdot x_0 \in S_r$ 根据假设。否则，存在 $t \in$ 首部(w')，使得$w' \cdot s_0 \in S_t$。我们区分两种情况：要么 r, t 在 Γ 中相邻，由此可知 t 也属于首部(w)，且 $w \cdot s_0 \in r^k \cdot S_t \subset S_t$；要么 r, t 在 C_R 中不相邻，由此可知 $w \cdot s_0 \in r^k \cdot S_t \subset S_r$。这就证明了我们的断言。由此可得 $w \cdot s_0 \neq s_0$，因为 s_0 不属于 $\bigcup_{r \in R} S_r$，从而证明了 $\varphi(g) \neq 1$。 □

作为一项应用，可以在作用于准中位图的群中构造直角阿廷群。在陈述这一方向上的主要结果之前，我们需要介绍一些术语。

定义 3.2。设 G 是作用于准中位图 X上的一个群。超平面 J 的旋转稳定子 $\mathrm{stab}_{\circlearrowleft}(J)$ 是 J中所有团的稳定子的交集。

可以记住下面这个图景。考虑一个群 $A \oplus \mathbb{Z}$ 作用于其凯莱图 $X := \mathrm{Cayl}(A \oplus \mathbb{Z},\ A \cup \{t\})$，其中 t 是 $\mathbb{Z}$- 因子的一个生成元。从几何上看，X 是一个完全图与以 A 为顶点集的图以及一条双无限直线的乘积。令
J 是包含由 A给出的团的超平面。



于是， $A \oplus \mathbb{Z}$ 稳定 J，但这两个因子的动力学大不相同： $\mathbb{Z}$因子稳定由 J 界定的每个因子，并平移 J的团；而 A因子稳定 J 中的每个团，并置换由 J界定的扇区。 J 的旋转稳定子与 A因子重合。

命题 3.3 ([Gen17])。 设 G 是一个作用于准中位图 X 上的群，$\mathcal{J}$ 是一组有限的超平面。假设：

- 顶点稳定子是平凡的；
- 对于每个 $J \in \mathcal{J}$，都存在一个非平凡元素 $r_J \in \mathrm{stab}_{\circlearrowleft}(J)$，它在由 J界定的扇区上自由地置换。

存在某个 $N \geq 1$，使得对于每个 $n \geq N$，子群 $H := \langle r_J^n,\ J \in \mathcal{J} \rangle$ 是一个直角阿廷群。更准确地说，若 $\mathscr{C}\mathcal{J}$ 是 $\mathcal{J}$ 的交叉图，则映射 $J \mapsto r_J^n$ 诱导出一个同构 $A(\mathscr{C}\mathcal{J}) \to H$。

这里，交叉图 $\mathscr{C}\mathcal{J}$ 指的是这样一个图：其顶点集为 $\mathcal{J}$，当两个超平面彼此横截时，它们之间就有一条边。

命题 *3.3* 的证明。 固定一个基点 $x_0 \in X$。给定一个超平面 $J \in \mathcal{J}$，令 S_J表示由 J 界定且不包含任何属于 $\mathcal{J}$的超平面、也不包含 x_0 的扇区之并。由于由 J 界定且不属于 S_J 的扇区只有有限多个（因为 $\mathcal{J}$ 是有限集），因此存在某个 $n_J \geq 1$，使得 $r_J^{n_J}$的每个幂都将一个不属于 S_J 的扇区映到一个属于 S_J的扇区。令 $N := \max\{n_J \mid J \in \mathcal{J}\}$，并固定某个 $n \geq N$。

现在，我们想将命题3.1应用于 x_0、$\{r_J^n \mid J \in \mathcal{J}\}$ 和 $\{S_J \mid J \in \mathcal{J}\}$。注意：

若 $A, B \in \mathcal{J}$彼此横截，则 $r_A^{nk} \cdot S_B = S_B$ 对于每个 $k \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$；

- 若 $A, B \in \mathcal{J}$不横截，则 $r_A^{nk} \cdot S_B \subset S_A$ 对每个 $k \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$均成立；
- x_0 不属于$\bigcup_{J \in \mathcal{J}} S_J$ 和 $r_J^{nk} \cdot x_0 \in S_J$ 对所有 $J \in \mathcal{J}$ 和 $k \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$。

因此，所需的结论由下面的断言推出：

事实3.4。对于任意两个不同的 $A, B \in \mathcal{J}$，$\langle r_A, r_B \rangle = \langle r_A \rangle \oplus \langle r_B \rangle$，如果 A, B 是横向的；否则$\langle r_A, r_B \rangle = \langle r_A \rangle * \langle r_B \rangle$。

如果 A、B 不横截，那么根据我们之前所说的，通过经典的乒乓引理可得分解 $\mathrm{h}r_A, r_B\mathrm{i} = \mathrm{h}r_A\mathrm{i} * \mathrm{h}r_B\mathrm{i}$。假设 A、B 横截。因此存在一个棱柱 $C \times D$，满足 $C \subset A$ 和 $D \subset B$。由于 r_A（分别为 r_B）在 C（分别为 D）上自由作用，且在 D（分别为 C）上平凡作用，并且顶点稳定子群是平凡的，我们便得出 $\mathrm{h}r_A, r_B\mathrm{i} = \mathrm{h}r_A\mathrm{i} * \mathrm{h}r_B\mathrm{i}$，正如所需。 □

命题3.3对作用于准中位图上的任意群都成立，因此我们将其表述限制为右角阿廷群。

推论 3.5。 [1] 设 Γ 是一个图。令 $\mathscr{C}(\Gamma)$ 表示 $\mathrm{QM}(\Gamma)$中所有超平面的交叉图。对于每个有限诱导子图 $\Lambda \leq \mathscr{C}(\Gamma)$，$A(\Gamma)$ 都包含一个与 $A(\Lambda)$同构的子群。

证明。 将命题 3.3 应用于$A(\Gamma)$ 在 $\mathrm{QM}(\Gamma)$ 上的作用，即可直接得到该断言。

□

[1]如 [CRDK13], 所示，该推论的逆命题在一般情况下未必成立。

交叉图 $\mathscr{C}(\Gamma)$ 可以很容易地描述如下[2]:

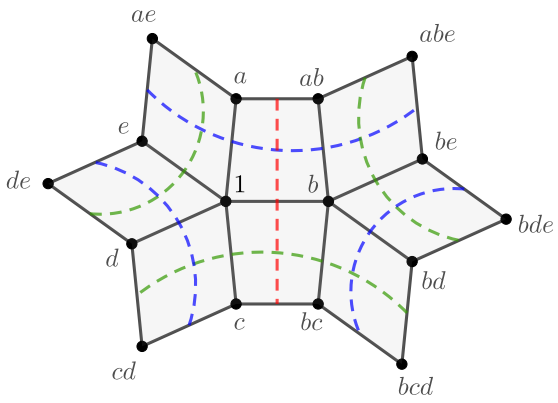
- $\mathscr{C}(\Gamma)$ 的顶点是 $A(\Gamma)$ 中生成元的共轭。

  如果两个共轭元素可交换，则 $\mathscr{C}(\Gamma)$ 的边将它们连接起来。

这一描述源于以下事实：QM(Γ) 中的超平面就是 gJ_u，其中$g \in A(\Gamma)$，且 J_u 表示包含团的超平面 $\langle u \rangle \leq \mathrm{QM}(\Gamma)$； gJ_u 的旋转稳定子是 $g\langle u \rangle g^{-1}$；并且 QM(Γ) 中的两个超平面当且仅当它们的旋转稳定子可交换时才相交，否则它们张成一个自由群。细节留作习题。

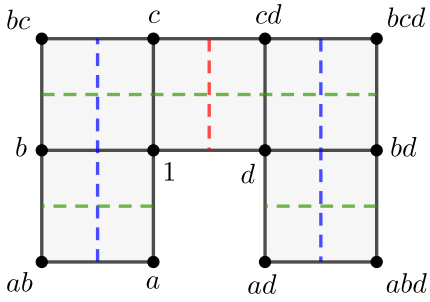
作为示例，我们来构造直角阿廷群之间的非平凡嵌入。另见习题 3.10。

例 3.6. 令 Γ 为一个 5-圈（a， b， c， d， e）。通过将超平面 J_c， J_d， J_e， J_a 绕 J_b 旋转，我们得到一个由超平面 J_c， J_d， J_e， J_a， bJ_e， bJ_d 构成的 6-圈。



因此，$\{c, d, e, a, beb^{-1}, bdb^{-1}\}$ 是 $A(\Gamma)$ 的一个子群的基，该子群同构于定义在一个 6-环上的右角 Artin 群。

例 3.7. 令 Γ 为一条 3-路径（a， b， c， d）。通过绕 J_d 旋转超平面 J_a， J_b， J_c，我们得到一条由超平面组成的 4-路径 J_a， J_b， J_c， dJ_b， dJ_a。



因此，$\{a, b, c, dbd^{-1}, dad^{-1}\}$ 是 $A(\Gamma)$ 的一个子群的基，且该子群同构于建立在 4-路径上的直角 Artin 群。

示例3.8。 前两个例子是一般构造的特例。设 Γ 是任意一个图，且 $u \in V(\Gamma)$是一个顶点。通过应用 u绕 J_u 旋转超平面$\{J_v \mid v \in V(\Gamma)\backslash\{u\}\}$，我们得到一组超平面 $\{J_v \mid v \in V(\Gamma)\backslash\{u\}\} \cup \{J_u\} \cup \{uJ_v \mid v \in V(\Gamma)\backslash \mathrm{star}(u)\}$，其交叉图与并合 $\Gamma \underset{\mathrm{star}(u)}{*} \Gamma$一致。因此， $V(\Gamma) \cup u(V(\Gamma)\backslash \mathrm{star}(u))\ u^{-1}$ 是.....的基

[2]值得注意的是，这一描述与 [KK13]中给出的 扩张图的定义完全一致。因此，推论 3.5 与 [KK13, 定理 1.3] 一致。

$A(\Gamma)$ 的子群，与 $A\left(\Gamma \underset{\mathrm{star}(u)}{*} \Gamma\right)$ 同构。此外，可以证明，该子群与 $A(\Gamma) \twoheadrightarrow \langle u \rangle \simeq \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$的核重合。特别地，它在 $A(\Gamma)$ 中的指数为二。

习题

习题 3.9。 设 Γ 是一个图。对于每个 $u \in V(\Gamma)$，固定一个整数 $p(u) \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$。证明子群 $\langle u^{p(u)} \mid u \in V(\Gamma) \rangle$ 在 $A(\Gamma)$ 中仍然同构于 $A(\Gamma)$。给出一个使用命题 1.2 所给标准形的证明，以及另一个在准中位图 $\mathrm{QM}(\Gamma)$ 上运用乒乓引理的证明。

习题 3.10。 若 Γ 是一个有限森林，证明 $A(\Gamma)$ 嵌入 $A(P_4)$，其中 P_4表示长度为 4 的路径。

习题 3.11。 设 Γ 是一个图，$\Lambda \subset \Gamma$ 是一个诱导子图。令 $\rho_\Lambda \colon A(\Gamma) \to \langle \Lambda \rangle$表示将所有不属于 $V(\Lambda)$ 的生成元消去的收缩映射。

1. 证明 $\ker(\rho_\Lambda)$ 是一个直角阿廷群 $A(\Psi)$。（提示：证明 $\ker(\rho_\Lambda)$由与子图 $h\Lambda i$ 相切的超平面的旋转稳定子生成，这些超平面位于 $\mathrm{QM}(\Gamma)$ 中。）2. 证明，若 Γ 是有限的，那么 $A(\Gamma)$ 的每个非平凡子群都满射到$\mathbb{Z}$。（提示：证明更一般的情形，其中允许 Γ 是无限的，但其色数有限。若 Λ 是一个极大单色子图，证明上一节中 Ψ 的色数小于 Γ的色数。）3. 证明 $\langle a, b \mid aba^{-1} = b^{-1}, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$ 是无挠的、有限扩张意义下等价于 $\mathbb{Z}^2$，且不能嵌入直角阿廷群。

习题 3.12. 设 Γ 是一个图。

1. 证明，对于每个诱导子图 $\Lambda \subset \Gamma$，子图 $\langle \Lambda \rangle$ 在 $\mathsf{M}(\Gamma)$ 中是凸的。

2. 固定两个诱导子图 Φ, Ψ 和一个元素 $g \in A(\Gamma)$。假设 1 和 g 是在$\langle \Phi \rangle$ 与 $g\langle \Psi \rangle$之间距离最小的两个顶点。证明

$$\mathrm{stab}(\langle \Phi \rangle) \cap \mathrm{stab}(g\langle \Psi \rangle) = \langle \Phi \cap \Psi \cap \mathrm{link}(\mathrm{supp}(g)) \rangle.$$

(提示：如果 h 稳定 $h\Phi i$ 和 $gh\Psi i$，注意到分隔1 与h 的超平面，恰好是分隔 g 与 hg的超平面；而分隔1 与 g 的超平面，恰好是分隔 h 与 hg的超平面。)

3. 推出，在 $A(\Gamma)$ 中，两个抛物子群[3] 的交仍是一个抛物子群。

4. 给定一个诱导子图 $\Lambda \subset \Gamma$，证明$\langle \Lambda \rangle$ 的正规化子是$\langle \Lambda \cup \mathsf{link}(\Lambda) \rangle$。

[3]在 $A(\Gamma)$ 中，若一个子群与某个诱导子图 $\Lambda \subset \Gamma$ 对应的 $\langle \Lambda \rangle$ 共轭，则称其为抛物子群。

4 第四讲：二维算法

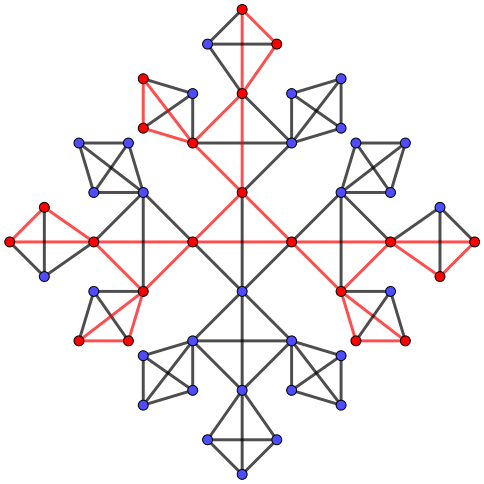
如前所述，右角阿廷群之间的嵌入问题在一般情况下仍有许多未解之处。不过，事实证明，若所考虑的图的围长> 3 满足该条件（即不含 3-圈），则可以通过算法解决这一问题。

定理 4.1。 存在一个算法，对于给定的两个围长为 > 3 的有限图 Φ、 Ψ ，可以判定 $A(\Phi)$ 是否嵌入 $A(\Psi)$。若是，则给出一个显式基。

右直角阿廷群 A 的基指的是一个生成集 $R \subset A$ ，使得包含映射 $R \hookrightarrow A$ 可扩展为同构 $A(C_R) \to A$，其中 C_R 表示 R的交换图。定理 4.1 在 [KK13]的基础上于 [CR15], 中得到证明。我们给出的证明遵循 [Gen22a]。

该定理将是以下陈述的一个直接推论：

命题 4.2。 设 Φ、 Ψ 是两个围长为 > 3的有限图。如果 $A(\Phi)$ 嵌入到 $A(\Psi)$中，那么$\mathrm{QM}^{|\Phi|}(\Psi)$ 包含一组与半径为 $8|\Psi||\Phi|$ 的球相交的超平面J，其交叉图同构于 Φ。此外，若 $J = \{g_1 J_{u_1}, \ldots, g_k J_{u_k}\}$，则 $\left\{g_1 u_1^{|\Phi|} g_1^{-1}, \ldots, g_k u_k^{|\Phi|} g_k^{-1}\right\}$ 是一个与 $A(\Phi)$ 同构的子群的一组基。



这里，给定 $\ell \geq 1$， $\mathscr{C}_\ell(\Gamma)$ 表示子图[4] $\mathrm{QM}\ell(\Gamma)$ 的交叉图。该子图由 $A(\Gamma)$ 中无法用生成元的幂大于 ℓ 的图形约化词表示的元素所确定。粗略地说，$\mathrm{QM}\ell(\Gamma)$ 是 $\mathrm{QM}(\Gamma)$ 的一个凸子图，其构造方式是：对每个超平面，只考虑它所界定的无穷多个扇区中的 ℓ 个扇区。

注意，定理 4.1 随之成立。事实上，给定我们的两个图 Φ 和 Ψ，算法如下。

1. 绘制 $\mathrm{QM}^{|\Phi|}(\Psi)$ 中穿过半径为 $8|\Psi||\Phi|$ 的球的超平面的交叉图 $\mathscr{C}_{|\Phi|}(\Psi)$。根据引理 2.6 和练习 4.3，这在算法上是可行的。 2. 在 $\mathscr{C}_{|\Phi|}(\Psi)$ 中查找一个与 Φ 同构的诱导子图。由于我们的图是有限的，这只需要有限次操作。 3. 如果存在这样的图，那么命题 4.2 就给出了一个与 $A(\Phi)$ 同构的子群的基。否则， $A(\Phi)$ 不嵌入 $A(\Psi)$。

值得注意的是，命题 4.2 特别证明了对于围长为 > 3 的图，命题 3.5 的逆命题成立。请与 [CRDK13] 比较。这使我们能够解决特定图族的嵌入问题；参见练习 4.4。

[4]值得注意的是，$\mathrm{QM}\ell(\Gamma)$与图乘积 $\Gamma\mathbb{Z}_\ell$ （在 Γ 上）由阶为 ℓ的循环群构成的凯莱图重合。因此，我们推得， $A(\Phi)$嵌入 $A(\Psi)$当且仅当 $\Phi\mathbb{Z}_?$ 嵌入 $\Psi\mathbb{Z}_?$。

命题*4.2* 的证明。我们首先证明，在 QM(Ψ) 中存在一组超平面，其交叉图为 Φ。

设 $\varphi\colon A(\Phi) \to A(\Psi)$ 是一个单射态射，并令 Φ_0 表示从 Φ 中移除叶子（即度数为一的顶点）后得到的图。对每个 $u \in \Phi_0$，u 的中心化子都包含一个非阿贝尔自由子群（例如由 Φ 中 u 的两个邻点生成的子群）。因此，$\varphi(u)$ 必须是一个中心化子非阿贝尔的元素。由于 Ψ 的围长为 >3，根据定理 1.7 给出的中心化子描述可知，对于某个 $g(u) \in A(\Psi)$、$a(u) \in \Psi$ 和 $k(u) \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$，有 $\varphi(u) = g(u)a(u)^{k(u)}g(u)^{-1}$。从更几何的角度看，这意味着 $\varphi(u)$ 属于超平面 $g(u)J_{a(u)}$ 的旋转稳定子。令 $\mathrm{J}_0 := \{g(u)J_{a(u)} \mid u \in \Phi\}$。由命题 3.3 可知，当 N 足够大时，$\mathrm{h}\varphi(u)^N$，$u \in \Phi\mathrm{i}$ 同构于 $A(\mathscr{C}(\mathrm{J}_0))$。因此，$\mathscr{C}(\mathrm{J}_0)$ 必须同构于 Φ_0。（更准确地说，映射 $u \mapsto g(u)J_{a(u)}$ 诱导出一个同构 $\Phi_0 \to \mathscr{C}(\mathrm{J}_0)$。）

到目前为止，我们找到了一个超平面集合 $\mathcal{J}_0$，其交叉图为 Φ_0。如果 Φ没有叶子，那么我们的初始断言便得到了证明。对于一般情况，我们还需要补充一个论证。

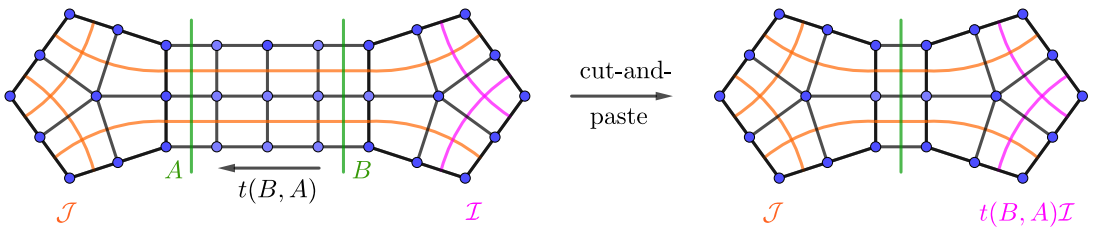
令 $\ell_1, \ldots, \ell_r$ 表示 Φ的叶子。对于每个 $1 \le i \le r$，令 u_i 表示 ℓ_i 在 Φ 中的唯一相邻点，并令 $v_i \in \Phi_0$ 为 u_i 的一个不同于 ℓ_i的相邻点。我们为每个 ℓ_i 关联超平面 $\varphi(\ell_i)g(v_i)J_{a(v_i)}$。我们断言，从 $\mathcal{J}_0$ 中加入这些新超平面后得到的集合 $\mathcal{J}$ 的交叉图与 Φ同构。

- 由于 u_i 和 v_i 在 Φ_0中相邻，超平面 $g(u_i)J_{a(u_i)}$ 与 $g(v_i)J_{a(v_i)}$横截相交。由于 ℓ_i 与 u_i 相邻，$\varphi(\ell_i)$稳定超平面 $g(u_i)J_{a(u_i)}$，这意味着 $\varphi(\ell_i)g(v_i)J_{a(v_i)}$ 与 $g(u_i)J_{a(u_i)}$横截相交。

- 如果 $\varphi(\ell_i)g(v_i)J_{a(v_i)}$ 与某个 $w \in \Phi_0$ 的 $g(w)J_{a(w)}$ 横向相交，那么旋转稳定子必定彼此交换，这意味着 $\varphi(\ell_i v_i)$ 与 $\varphi(w)$ 交换。唯一的可能性是 $w = u_i$。

- 如果 $\varphi(\ell_i)g(v_i)J_{a(v_i)}$ 与 $\varphi(\ell_j)g(v_j)J_{a(v_j)}$横截相交，那么旋转稳定子必须交换，这意味着 $\varphi(\ell_i v_i)$与 $\varphi(\ell_j v_j)$ 交换，而这只有在 $i = j$ 时才可能。

因此，我们已经证明，$\mathscr{C}(\mathcal{J})$ 是通过给 $\mathscr{C}(\mathcal{J}_0)$ 中的每个$g(u_i)J_{a(u_i)}$ 添加一个叶节点得到的，这就证明了 $\mathscr{C}(\mathcal{J})$ 与 Φ 同构，正如所需。
现在，假设$\mathcal{J}$ 包含一个不与以 1 为中心、半径为 $8|\Psi||\Phi|$ 的球相交的超平面。换句话说，$\mathcal{J}$ 包含一个超平面 J，它离1非常远。这意味着我们可以在 QM(Γ)中找到两个不横截的超平面 A，B，它们将 1 与 J 分隔开，并且位于同一个 $A(\Psi)$-轨道中。



令 $t(B, A)$ 表示 $A(\Psi)$ 中将 B 送到 A的最小长度唯一元素。若 $\mathcal{I}$ 表示 $\mathcal{J}$ 中由与 1 被 B分隔的超平面构成的子集，则考虑新的集合 $\mathcal{J}' := \mathcal{J} \backslash \mathcal{I} \sqcup t(B, A)\mathcal{I}$。它由 $\mathcal{J}$经由剪切粘贴得到。我们声称，$\mathcal{J}'$ 与 $\mathcal{J}$ 具有相同的交叉图，并且

$$\sum_{J \in \mathcal{J}'} d_{\mathrm{QM}}(1, J) < \sum_{J \in \mathcal{J}} d_{\mathrm{QM}}(1, J).$$

详情请参阅 [Gen22a，第 5 节。1]（该文针对中位图和直角考克斯特群撰写，但内容可以逐字照搬）。反复迭代这一过程，最终我们得到 QM(Γ) 中的一组超平面 $\mathcal{J}''$，其交叉图与 Φ 同构，并且其中每个元素都与半径为 $8|\Psi||\Phi|$ 的球相交。

对于 QM(Ψ) 的每个超平面 J，选取由 J 分隔的 $|\Phi|$ 个扇区，使得 $\mathcal{J}$ 中的每个超平面都与这些扇区中的至少一个相交。令 $S(J)$ 表示所有由 J 分隔的这些扇区的并集。交集

$$\bigcap_{J \text{ hyperplane}} S(J) \subset \mathrm{QM}(\Psi)$$

定义了一个凸子图，它同构于 $\mathrm{QM}^{\Phi}(\Psi)$，其中 $\mathcal{J}''$ 诱导出一组超平面，其交叉图为 Φ。□

习题

习题 4.3. 设 Γ 是一个有限图。对于所有 $u, v \in V(\Gamma)$ 和 $g, h \in A(\Gamma)$，证明：当且仅当 $\{u, v\} \in E(\Gamma)$ 且 $g^{-1}h \in \langle \mathrm{star}(u) \rangle \cdot \langle \mathrm{star}(v) \rangle$ 时，超平面 gJ_u 和 hJ_v 在 QM(Γ) 中横截相交。推导出一个算法，用于判定 QM(Γ) 中给定的两个超平面是否横截相交。

习题 4.4. 对于每个 $k \geq 4$，我们用 C_k 表示长度为 k 的圈，用 P_k 表示长度为 k 的路径。

证明 $A(C_p)$ 可嵌入 $A(C_q)$，当且仅当 $q - 4$ 整除 $p - 4$。

2. 给定一个有限图 Γ，证明 $A(\Gamma)$ 嵌入 $A(P_4)$ 当且仅当 Γ 是一片森林。 3. 给定一个周长为 > 3 的图 Γ，证明 $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$ 嵌入 $A(\Gamma)$ 当且仅当 Γ 包含一个诱导的 4-圈。

参考文献

[CF] J. Crisp 和 B. Farb。映射类群中曲面群的普遍性。未发表的预印本。[CGW09] J.Crisp、E. Godelle 和 B.Wiest。直角阿廷群子群中的共轭问题。《拓扑学杂志》，2(3):442–460，2009。[CR15] M. Casals-Ruiz。部分交换群的可嵌入性与一阶理论。《国际数学研究通知 *IMRN*》，(24):13575–13622，2015。[CRDK13] M. Casals-Ruiz、A.Duncan和 I. Kazachkov。部分交换群之间的嵌入：两个反例。《代数杂志》，390:87–99，2013。[Dro87] C. Droms。图群的同构。《美国数学学会会刊》，100(3):407–408，1987。[Gen17] A. Genevois。准中位图的立方复形类几何及其在几何群论中的应用。博士学位论文，*arxiv:1712.01618*，2017。[Gen22a] A.Genevois。直角考克斯特群之间的态射与二维中的嵌入问题。《数学杂志》，300(1):259–299，2022。[Gen22b] A. Genevois。旋转群、periagroup 与plurilith 图：关于考克斯特群和群的图乘积的统一观点。预印本，2022。[Gre90] E. Green。群的图乘积。博士学位论文，1990。[KK13] S.-H. Kim 和 T. Koberda。直角阿廷群之间的可嵌入性。《几何与拓扑》，17(1):493–530，2013。[Kob12] T. Koberda。乒乓引理及其在几何与拓扑中的应用。载于 《特征簇的几何、拓扑与动力学》，新加坡国立大学数学科学研究所讲义丛书第 23卷，新加坡国立大学数学科学研究所讲义丛书，第139–158 页。WorldSci. Publ.，美国新泽西州哈肯萨克，2012。[LS77] C. Lyndon 和P. E. Schupp。组合群论。数学及其边缘领域成果 89。Springer，柏林，1977。[Ser89] Herman Servatius。图群的自同构。《代数杂志》，126(1):34–60，1989。

蒙彼利埃大学 亚历山大·格罗滕迪克数学研究所 欧仁·巴塔永广场 34090 蒙彼利埃（法国）电子邮件地址：
anthony.genevois@umontpellier.fr