arXiv:2304.05347v1 [math.DG] 11 Apr 2023

束丛gerbe和Courant代数丛的无穷小对称

DINAMO DJOUNVOUNA 和 DEREK KREPSKI

ABSTRACT. 设 M 为光滑流形，且 $\chi \in \Omega^3(M)$ 为具有整周期的闭微分形式。我们证明， $\mathbb{L}(C_\chi)$ 的截面所构成的李 2-代数与 χ-扭曲的 Courant代数丛 C_χ 在 M 上的李 2-代数准同构于一个带联络的 S^1-束丛gerbe（定义在 M上）的保联络乘法向量场所构成的李 2-代数，其中其 3-曲率为 χ。

1. INTRODUCTION

˘在致 A. Weinstein 的信中，P.Severa 提出，Dixmier-Douady gerbe，或 S^1-gerbe 的无穷小对称与正合Courant代数丛密切相关[21] （另见 [4] ，其中对这些思想作了进一步发展）。在 [10, 11], 中，Hitchin根据流形 M上的 S^1-gerbe 数据构造了一个正合Courant代数丛，这类似于为主 S^1-丛构造Atiyah代数丛；经过选择分裂后，它可以被识别为带有 χ-扭曲Courant括号的Courant代数丛 $C_\chi = TM \oplus T^*M$，其中 $\chi \in \Omega^3(M)$ 表示 M 上 S^1-gerbe 的3-曲率。

与 S^1-格的无穷小对称之间的联系，最终见于 Collier 的博士论文 [7]。Collier 将 S^1-格 $\mathcal{G}$ 视为栈（即群胚的预层），识别出 S^1-格的无穷小对称，并证明它们构成一个李 2-代数[1] $\mathcal{L}(\mathcal{G})$；他还基于 $\mathcal{G}$的无穷小对称数据，给出了正合Courant代数丛$E_\mathcal{G}$ 的另一种构造（并证明该构造等价于 Hitchin 的构造）。作为 [18–20] 的推论（另见 [23] 和 [17]），截面空间 $\Gamma(E_\mathcal{G})$ 可赋予李 2-代数 $\mathcal{L}(E_\mathcal{G})$ 结构。Collier 随后证明，该李 2-代数与保持格联络 γ的 $\mathcal{G}$ 无穷小对称所构成的李 2-代数 $\mathcal{L}(\mathcal{G}, \gamma)$ 拟同构。

对于带有联络 γ 和曲率势 B 的 S^1-格 $\mathcal{G}$，Collier 还考虑了保持 γ 和 B 的无穷小对称子李 2-代数 $\mathcal{L}(\mathcal{G}; \gamma, B) \subset \mathcal{L}(\mathcal{G}, \gamma)$。在 [8], 中，Fiorenza、Rogers 和 Schreiber 对这个李 2-代数子代数以及所有无穷小对称的李 2-代数 $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ 给出了有趣的诠释。具体而言，

本研究部分由加拿大自然科学与工程研究理事会（RGPIN-2015-05833）资助。[1]本文中的李 2-代数是 L_∞ 中所述的 2 项 [1]-代数。

they 证明李 2-代数的自然“遗忘”态射序列 s,

$$\mathcal{L}(\mathcal{G};\gamma,B) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{G},\gamma) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{G}), \tag{1.1}$$

它（通过拟同构）等价于另一列李 2-代数态射，我们接下来回顾这一列。

考虑以下三个可与流形 M 上的闭 3-形式 χ 联系起来的自然李 2-代数：可观测量李 2-代数 $\mathbb{L}(M,\chi)$、 χ-扭曲 Courant代数丛 $\mathbb{L}(C_\chi)$ 的截面所成的李 2-代数，以及与向量场李代数 $\mathfrak{X}(M)$ 在 $C^\infty(M)$ 上的表示相关联的骨架 Lie 2-代数$\mathbb{A}(M,\chi)$，其 3-余循环 χ 取值于 $C^\infty(M)$（在 [8] 中称为 Atiyah李2-代数）——简要回顾见第 2.1 节。存在一列李 2-代数态射，

$$\mathbb{L}(M,\chi) \longrightarrow \mathbb{L}(C_\chi) \longrightarrow \mathbb{A}(M,\chi), \tag{1.2}$$

其中，第一个态射是定义于 [17], 中的嵌入，第二个态射则定义于 [8]中。在前引文献中，作者证明了，当 χ 是一个带有联络 γ 和曲率势 B的 S^1-gerbe$\mathcal{G}$ 的3-曲率时，序列（1.1）通过拟同构与序列（1.2）等价，其中间的拟同构是从 [7]得到的。

文献中有多种 S^1-gerbe模型，因此，对 S^1-gerbe无穷小对称的描述取决于所选模型。如上所述，对于作为群胚预层的gerbe，无穷小对称在 [7]中有所描述。在该文中，Collier 还描述了以Čech数据给出的 S^1-gerbe的无穷小对称——即 Hitchin-Chatterjee gerbe [6,9] ，或等价地， S^1-束丛 gerbe [15]，其中底层浸没是由互不相交的开子集构成的覆盖。在 [8], 中，Fiorenza、Rogers 和 Schreiber 在更一般的高阶结构背景下，将（$n-1$）-束丛 gerbe（或主 $U(1)$-n-丛）视为Čech-Deligne 上闭链，并描述了它们的无穷小对称。当 $n=2$时，这些对象等价于 Hithcin-Chaterjee gerbe，而由此得到的无穷小对称李 2-代数与 [7]中的李 2-代数基本等价。

本文采用的视角是来自 [12], ，在该视角下， S^1-束丛gerbe的无穷小对称由李群胚上的乘性向量场建模。在这一观点中，流形 M 上的 S^1-束丛 gerbe $\mathcal{G}$ 是与满射次沉浸 $X \to M$相关联的次沉浸群胚 $X \times_M X \rightrightarrows X$ 的李群胚 $P \rightrightarrows X$ 的 S^1-中心扩张。李群胚上的乘性向量场构成一个范畴 [13], ，且该范畴自然地是一个李 2-代数 [3]。因此，对于 S^1-束丛 gerbe $\mathcal{G}=\{P \rightrightarrows X\}$，我们得到一个无穷小对称的李2-代数 $\mathbb{X}(\mathcal{G})$，其由 $P \rightrightarrows X$上的乘性向量场构成。当 $\mathcal{G}$ 配备一个联络 γ 和一个曲率势 B时，以适当的“弱”意义保持 γ （分别保持 γ 和B二者）的乘性向量场构成一个李 2-代数 $\mathbb{X}(\mathcal{G},\gamma)$（分别为 $\mathbb{X}(\mathcal{G};\ \gamma,B)$）——详见命题 2.6和 [12]。对于 X 是 M的开子集的不交并的丛gerbe，这些李 2-代数与 [7]中的李 2-代数一致。

现在我们描述本文的主要贡献。在定理3.1中，对于一般的 S^1-丛 gerbe，我们证明了上文所述的 Collier 拟同构对于 Hitchin-Chaterjee 格的预期类比。我们在Noohi的李2-代数双范畴中工作，使用蝴蝶态射 $[16],$ ，而所需的拟同构实现为一个可逆蝴蝶（详见第3节）。

定理3.1'. 设 $\mathcal{G}$ 是一个带有联络 γ 的 S^1-束丛gerbe，定义在流形 M上。对曲率势 B 的选择决定了一个可逆蝴蝶$\mathbf{F} : \mathbb{X}(\mathcal{G}, \gamma) \dashrightarrow \mathbb{L}(C_\chi)$，其中$\chi$ 表示该联络和曲率势的3-曲率。

类似地，在定理3.3中我们证明：

定理3.3'。设 $\mathcal{G}$ 为流形 M上的一个 S^1-束丛gerbe。选取联络 γ 和曲率势 B 确定了一个可逆蝴蝶$\mathbf{G} : \mathbb{X}(\mathcal{G}) \dashrightarrow \mathbb{A}(M, \chi)$，其中$\chi$ 表示该联络和曲率势的3-曲率。

在命题 3.8 和 3.10 中，我们证明，上述可逆蝴蝶态射所给出的拟同构，与规范变换 $\chi \mapsto \chi + d\tau, \tau \in \Omega^2(M)$ 具有预期的相容性；这些变换相应地改变束丛gerbe的曲率势和 3-曲率。

对于带有联络 γ 和曲率势B的束丛gerbe $\mathcal{G}$ 上的乘性向量场，自然的“遗忘”态射序列

$$\mathbb{X}(\mathcal{G}; \gamma, B) \to \mathbb{X}(\mathcal{G}, \gamma) \to \mathbb{X}(\mathcal{G})$$

与序列 (1.1) 类似，现证明它等价于态射序列 (1.2)。事实上，拟同构由 $[12,$ 定理 5.1],定理3.1 和定理 3.3 给出，而所需的 2-交换图表则由命题 3.2 和 3.4 得出。

作为一项应用，我们在第 4 节给出一个几何论证，其思路与 $[14]$ 辛情形中的一个论证类似，说明 Rogers 将李 2-代数嵌入（即 (1.2) 中的第一个态射）与规范变换相容 $\chi \mapsto \chi + d\tau$：沿同伦矩映射拉回到有限维李代数后，这一结论依然成立。

本文结构。我们在第2节回顾 2 辛几何中的李 2-代数以及 S^1-束丛gerbe的对称性方面的一些预备知识。第3节给出本文的主要结果，即定理 3.1 和 3.3，以及这些结果与规范变换 $\chi \mapsto \chi + d\tau$的相容性。最后，在第4节中，我们将几何地讨论与 $[14]$ 中的讨论类似的问题：作为第3节结果的应用，考察可观测量的李 2-代数在规范变换下的行为。

2. Preliminaries

本节回顾 2 辛几何中出现的李 2-代数背景知识，以及关于 S^1-束丛gerbe及其无穷小对称性的一些预备知识。我们假设读者熟悉李 2-代数——也就是 [1]中所述的 2 项 L_∞-代数。我们将李 2-代数对弱等价（拟同构）局部化，并在 Noohi 的李 2-代数双范畴中开展讨论，其中蝴蝶态射是 1-态射。详细内容请参阅 Noohi 的论文 [16] ，或 [12, 第4节1] 中关于李 2-代数的简要回顾。

2.1. 2辛几何中的李2-代数。本小节简要回顾三种与光滑流形上的闭3-形式自然相关的李2-代数：可观测量的泊松-李2-代数、正合Courant代数丛的截面所构成的李 2- 代数（见 [17]），以及 [8] 的 Atiyah 李 2- 代数。

我们从辛流形上可观测量泊松代数的（预）2辛类比开始。

定义 2.1. 设 M 是一个流形，且 $\chi \in \Omega^3(M)$ 是闭的。可观测量的泊松-李2-代数 $\mathbb{L}(M,\chi)$ 是一个底层为如下二项复形的李2-代数

$$C^\infty(M) \to \{(x,\beta) \in \mathfrak{X}(M) \times \Omega^1(M) \mid \iota_x\chi = -d\beta\},$$

其微分为 $\mathrm{d}f = (0, df)$；括号定义为

$$[(x_1,\beta_1),(x_2,\beta_2)] = ([x_1,x_2], \iota_{x_2}\iota_{x_1}\chi)$$

在 0 次且其他情况下为零；Jacobiator 由下式给出

$$J(x_1,\beta_1;x_2,\beta_2;x_3,\beta_3) = -\iota_{x_3}\iota_{x_2}\iota_{x_1}\chi.$$

回顾一下，闭3-形式 χ 在流形 M 上导出一个正合Courant代数丛， $C_\chi = TM \oplus T^*M$ 其带有 χ-扭曲的 Courant括号 [22]。正如 [17]中所指出的（另见 [23]），由Rotyenberg和 Weinstein [20] 可知， C_χ 的截面构成一个李 2-代数，以下定义将对此进行回顾。

定义 2.2. 设 M 为流形，且 $\chi \in \Omega^3(M)$ 是闭的。Courant李2-代数 $\mathbb{L}(C_\chi)$ 是一个李 2-代数，其底层 2 项复形为

$$C^\infty(M) \to \Gamma(TM \oplus T^*M)$$

带有微分 $\mathrm{d}f = (0, df)$；括号由下式给出

$$[(u,\alpha),(v,\beta)] = ([u,v], L_u\beta - L_v\alpha - \frac{1}{2}d(\iota_u\beta - \iota_v\alpha) - \iota_v\iota_u\chi)$$

在次数 0 的情况下，而在混合次数下，我们有

$$[(u,\alpha), f] = -[f,(u,\alpha)] = \frac{1}{2}\iota_u df\,.$$

Jacobiator 由下式给出

$$J(u_1,\alpha_1;u_2,\alpha_2;u_3,\alpha_3)=-\frac{1}{6}\left(\langle[(u_1,\alpha_1),(u_2,\alpha_2)],(u_3,\alpha_3)\rangle^{+}+\text{cyc. perm.}\right).$$

定义 2.2 中的记号 $\langle-,-\rangle^{+}$ 表示 $\Gamma(TM\oplus T^{*}M)$、$\langle(u,\alpha)$ 和 $(v,\beta)\rangle^{+}=\iota_u\beta+\iota_v\alpha$ 上的标准对称配对。

最后，我们回顾与配备闭 3-形式 χ 的流形 M 相关联的 Atiyah李2-代数的构造——也就是说，由 $\mathfrak{X}(M)$ 在 $C^{\infty}(M)$ 上的李代数表示以及取值于 $C^{\infty}(M)$ 的 3-余循环 χ 所确定的骨架 Lie 2-代数（见 [1]）。更明确地说，

定义2.3. [8] 设 M 是一个流形，并且 $\chi\in\Omega^{3}(M)$ 是闭的。Atiyah李2-代数 $\mathbb{A}(M,\chi)$ 是一个李 2-代数，其底层 2-项复形

$$C^{\infty}(M)\to\mathfrak{X}(M)$$

微分 $\mathrm{d}(f)=0$为零，括号由 0 次的向量场李括号以及混合次数中的李导数 $[x,f]=-[f,x]=L_xf$给出。Jacobiator 由下式给出

$$J(x_1,x_2,x_3)=-\iota_{x_3}\iota_{x_2}\iota_{x_1}\chi.$$

2.2. 束丛gerbe及其无穷小对称。

束丛gerbe及联络结构。我们首先简要回顾 S^1-束丛gerbe，以确立相关视角和记号。进一步细节请参见 [2] 。

回顾一下，在流形 M 上的 S^1-束丛gerbe $\mathcal{G}$ 是次沉浸群胚 $X\times_M X\rightrightarrows X$的 S^1-中心扩张，其中 $\pi\colon X\to M$是一个满射次沉浸。更具体地说，这包括一个李群胚态射

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & X\times_M X \\ \downarrow\downarrow & & \downarrow\downarrow \\ X & = & X \end{array}$$

以及在 P 上的左 S^1-作用，使得 $P\to X\times_M X$ 成为一个主 S^1-丛，并且 S^1在 P 上的作用与群胚乘法相容：

$$(zp)\cdot(wq)=(zw)(p\cdot q)$$

对于所有可复合的 p、$q\in P$ 以及 z、$w\in S^1$。

S^1-束丛gerbe $\mathcal{G}$ 上的联络是一个联络 1-形式 $\gamma\in\Omega^{1}(P)$，它是可乘的（即 $m^{*}\gamma=\mathrm{pr}_1^{*}\gamma+\mathrm{pr}_2^{*}\gamma$，其中 $m\colon P\times_X P\to P$ 表示 P 上的李群胚乘法，而 pr_1，pr_2 表示显然的投影）。等价地，令 δ 表示与李群胚 $P\rightrightarrows X$相关的单纯流形 $P_\bullet$上的单纯微分，则当且仅当 $\delta\gamma=0$时，P 上的联络 1-形式 γ 定义了 $\mathcal{G}$ 上的联络。

给定 $\mathcal{G}$上的联络 γ ，对于 γ 的曲率势是一个 2-形式 $B \in \Omega^2(X)$，满足 $\delta B = d\gamma$。在这种情况下，我们称对(γ, B)在 $\mathcal{G}$上定义了一个联络结构。联络结构(γ, B)的 3-曲率是满足$\pi^*\chi = dB$的 3-形式 $\chi \in \Omega^3(M)$。

注 2.4. 注意，对于 M 上的 S^1-束丛gerbe $\mathcal{G}$ ，若固定一个联络 γ ，则 γ 的曲率势构成一个 $\Omega^2(M)$-挠子：事实上，任意两个曲率势 B、 B' 都满足 $\delta(B - B') = 0$ ，因此存在唯一的 2-形式 $\tau \in \Omega^2(M)$，使得 $\pi^*\tau = B - B'$。此外，若 χ 表示联络结构 (γ, B) 的 3-曲率，则 $\chi + d\tau$ 是联络结构 $(\gamma, B + \pi^*\tau)$ 的 3-曲率。

丛 gerbe 上的乘性向量场。在 [12], 中， S^1-丛 gerbe 的无穷小对称由李群胚上的乘性向量场建模，这些向量场自然具有李 2-代数结构（参见 [3]）。特别地， [12] 讨论了 M 上的 S^1-格 $\mathcal{G}$ 上保持 $\mathcal{G}$ 上联络结构 (γ, B) 的乘性向量场。在本文中，我们研究 $\mathcal{G}$ 上保持联络 γ （但不一定保持曲率势 B）的乘性向量场。

首先，我们简要回顾一般李群胚 $\mathsf{G} = \{G_1 \rightrightarrows G_0\}$上的可乘向量场所构成的（严格）李 2-代数。回顾 [13] ，李群胚 G 上的可乘向量场是一个函子 $\mathsf{x} : \mathsf{G} \to T\mathsf{G}$，满足 $\pi_{\mathbf{G}} \circ \mathsf{x} = \mathrm{id}_{\mathbf{G}}$，其中$\pi_{\mathbf{G}}$: $T\mathsf{G} \to \mathsf{G}$ 表示切丛投影。因此，这样的函子 x 由一对向量场 $(\mathsf{x}_0,\mathsf{x}_1) \in \mathfrak{X}(G_0) \times \mathfrak{X}(G_1)$ 组成，它们与 G 和 $T\mathsf{G}$ 上的单位及群胚乘法相容。将 G 上的可乘向量场（视为上述向量场对 $(\mathsf{x}_0,\mathsf{x}_1)$）记为 $\mathbb{X}(\mathsf{G})_0$。

令 $A = \ker ds\big|_{G_0}$ 表示 G 的李代数丛，其锚映射为 dt: $A \to TG_0$。截面 $a \in \Gamma(A)$ 可如下导出一个可乘向量场。令 $\mathsf{a} = dt(a)$ 且 $\bar{}\mathsf{a} = \overrightarrow{a} + \overleftarrow{a}$，其中

$$\overrightarrow{a}(g) = dR_g(a(t(g))) \quad \text{and} \quad \overleftarrow{a}(g) = d(L_g \circ i)(a(s(g))).$$

这里， L_g 和 R_g 分别表示由 $g \in G_1$给出的左乘和右乘，而i : $G_1 \to G_1$ 表示求逆。由此可知，$(\mathsf{a}\ \bar{}\mathsf{a})$是一个可乘的向量场 [13,例 3.4], ，我们可以得到一个李 2-代数 $\mathbb{X}(\mathsf{G})$，其底层 2 项复形为

$$\Gamma(A) \longrightarrow \mathbb{X}(\mathbf{G})_0$$

其微分为 $\mathsf{d}a = (\mathsf{a}\ \bar{}\mathsf{a})$。0 次元素的括号在各分量上定义如下:

$$[(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1), (\mathbf{x}'_0, \mathbf{x}'_1)] = ([\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_0], [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}'_1]),$$

而在混合次数下，它定义为

$$[(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1), a] = -[a, (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1)] = [\mathbf{x}_1, \overrightarrow{a}]\big|_{G_0}.$$

这里回顾一下，对于 $a \in \Gamma(A)$，以及 $(\mathsf{x}_0,\mathsf{x}_1)$ 可乘的， $[\mathsf{x}_1, \overrightarrow{a}] \in \ker ds$ and 为右不变的 [13],and 因此其在 G_0 上的限制定义了 $\Gamma(A)$中的一个截面。

设 $\mathcal{G}$ 是流形 M上的一个 S^1-束丛gerbe，其中 $\mathbf{P} = \{P \rightrightarrows X\}$ 表示底层的 S^1-中心扩张。设 γ 是 $\mathcal{G}$上的一个联络。回顾 [12,备注 3.15]，若存在某个 $\alpha \in \Omega^1(X)$使得 $L_{\mathbf{p}}\gamma = \delta\alpha$，则可乘向量场 $(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \in \mathbb{X}(\mathbf{P})_0$ （弱）保持联络 γ。

引理2.5。设 $(\mathcal{G}, \gamma)$是流形 M 上带联络的 S^1-束丛gerbe。令$a \in \Gamma(A_P)$，其中 $A_P \to X$ 表示底层李群胚$P \rightrightarrows X$的李代数丛。则对于任意曲率势 B， $L_{\tilde{\mathbf{a}}}\gamma = \delta(\iota_{\mathbf{a}}B - d\mathbf{v}_a)$，其中 $\mathbf{v}_a = \epsilon^*\iota_{\overrightarrow{a}}\gamma$ （此处， ϵ表示 $P \rightrightarrows X \times_M X$ 的单位映射）。此外，$\iota_{\mathbf{a}}B - d\mathbf{v}_a$ 与曲率势 B 的选择无关。

证明。第一个断言已在 [12, 命题 3.16]的证明中得到验证。为证明$\iota_{\mathbf{a}}B - d\mathbf{v}_a$ 与曲率势 B 无关，根据注 2.4，只需验证$\iota_{\mathbf{a}}\pi^*\tau = 0$对于 $\tau \in \Omega^2(M)$。根据 $P \rightrightarrows X$的定义，$\pi \circ t = \pi \circ s$；因此， $d\pi(dt(a)) = d\pi(ds(a)) = 0$。也就是说，一个 $\sim_\pi 0$，断言得证。□

保持联络的可乘向量场构成李 2-代数 $\mathbb{X}(\mathcal{G}, \gamma)$，其定义见下述命题。

命题 2.6. 设 $(\mathcal{G}, \gamma)$ 是流形M上的一个带联络的 S^1-束丛gerbe。令 $\mathbb{X}(\mathcal{G}, \gamma)$ 表示如下 2 项复形

$$\Gamma(A_P) \longrightarrow \{(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \alpha) \in \mathbb{X}(\mathbf{P})_0 \times \Omega^1(X) \,\big|\, L_{\mathbf{p}}\gamma = \delta\alpha\}$$

其微分定义为 $\mathrm{d}a = (a, a\ \iota_{\mathbf{a}}B - d\mathbf{v}_a)$（其中 B 是该联络γ的任意曲率势）。在次数 0 的元素上定义括号如下：

$$[(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \alpha), (\mathbf{z}, \mathbf{r}, \beta)] = ([\mathbf{x}, \mathbf{z}], [\mathbf{p}, \mathbf{r}], L_{\mathbf{x}}\beta - L_{\mathbf{z}}\alpha),$$

对于混合次数的元素，则定义为

$$[(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \alpha), a] = -[a, (\mathbf{x}, \mathbf{p}, \alpha)] = [\mathbf{p}, \overrightarrow{a}]\big|_X .$$

于是 $\mathbb{X}(\mathcal{G}, \gamma)$ 是一个严格李 2-代数。

证明。证明与 [12, 命题 4.8]，相同，只需验证以下条件：

$$\mathrm{d}[(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \alpha), a] = [(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \alpha), \mathrm{d}a].$$

为检验这一点，选择一个曲率势 B，首先注意到 $\delta(L_{\mathbf{x}}B - d\alpha) = 0$，因此存在 $\beta \in \Omega^2(M)$，使得 $\pi^*\beta = L_{\mathbf{x}}B - d\alpha$。因此， $\iota_{\mathbf{a}}(L_{\mathbf{x}}B - d\alpha) = \iota_{\mathbf{a}}\pi^*\beta = 0$，因为一个 $\sim_\pi 0$，正如引理 2.5 的证明中所观察到的那样。现在很容易对上引文献中的验证作相应调整。□

3. The Courant algebroid and infinitesimal symmetries of bundlegerbes

设 $(\mathcal{G}, \gamma)$ 是一个带有联络、定义在 M 上的 S^1-束丛gerbe，其底层是中心S^1-扩张 $P \rightrightarrows X$，并设 B 是 γ 的曲率势，由此得到的 3-曲率为

$\chi \in \Omega^3(M)$。在第3.1节中，我们确立了本文的主要结果。定理3.1给出了一个可逆蝴蝶，它连接了 $\mathcal{G}$ 上保持联络的可乘向量场所构成的李 2-代数 $\mathbb{X}(\mathcal{G},\gamma)$ 与 Courant李2-代数 $\mathbb{L}(C_\chi)$。在定理3.3中，我们还给出了一个可逆蝴蝶，它连接了 $\mathcal{G}$ 上的可乘向量场$\mathbb{X}$(P) 与 Atiyah李2-代数 $\mathbb{A}(M,\chi)$。在第3.2节中，我们证明这些可逆蝴蝶与规范变换 $\chi \mapsto \chi + d\tau$ 相容，其中$\tau \in \Omega^2(M)$。

3.1. Courant代数丛的截面作为束丛gerbe的无穷小对称。设 $\mathcal{G} = P \rightrightarrows X$ 是一个位于 M 上的 S^1-束丛gerbe，令 γ 为 $\mathcal{G}$ 上的联络，并选取一个曲率势 B。将由此得到的3-曲率记为 $\chi \in \Omega^3(M)$。下面我们构造Courant代数丛的截面与保持联络的 $\mathcal{G}$ 上的可乘向量场之间的一个可逆蝴蝶。

设 $F = \{(\mathrm{x}, \mathrm{p}\ \alpha;\ g) \in \mathbb{X}(\mathrm{P}\ \gamma)_0 \times C^\infty(X) \mid \delta g = \iota_{\mathbf{p}}\gamma\}$，并将下图中的结构映射定义如下。

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma(A_P) & & & & C^\infty(M) \\ \downarrow & \overset{\kappa}{\searrow} & & \overset{\lambda}{\swarrow} & \downarrow \\ & & F & & \\ \downarrow & \underset{\sigma}{\swarrow} & & \underset{\rho}{\searrow} & \downarrow \\ \mathbb{X}(\mathrm{P}\ \gamma)_0 & & & & \Gamma(TM \oplus T^*M) \end{array} \tag{3.1}$$

令 $\sigma = \mathrm{pr}_1$ 表示显然的投影。为定义 ρ，首先注意到 $\delta(\alpha - \iota_{\mathbf{x}}B - dg) = 0$，因此存在唯一的 1-形式 $\varepsilon \in \Omega^1(M)$ 满足 $\pi^*\varepsilon = \alpha - \iota_{\mathbf{x}}B - dg$。令 $\rho(\mathrm{x}, \mathrm{p}\ \alpha;\ g) = (x, -\varepsilon)$，其中 x 是 M 上投影到 x 的向量场。最后，令 $\lambda(f) = (0, 0, 0;\ \pi^*f)$，且 $\kappa(a) = (\mathrm{d}a;\ -\mathrm{v}_a)$。

定理3.1. 设 $(\mathcal{G},\gamma)$ 是 M 上带有联络 γ 的 S^1-束丛 gerbe，并假设 B 是 γ 的曲率势，其相应的 3-曲率为 $\chi \in \Omega^3(M)$。设 F 及所示结构映射如上，并按下式在 F 上定义一个括号

$$[(\mathbf{x},\mathbf{p},\alpha;g),(\mathbf{z},\mathbf{r},\beta;h)] = ([(\mathbf{x},\mathbf{p},\alpha),(\mathbf{z},\mathbf{r},\beta)], \frac{1}{2}(\iota_{\mathbf{x}}(\beta+dh) - \iota_{\mathbf{z}}(\alpha+dg))).$$

于是，F 定义了一个可逆蝴蝶 F : $\mathbb{X}(\mathcal{G},\gamma)$ ⇢ $\mathbb{L}$({v6)。

证明。注意，蝴蝶的底层向量空间 F 连同所示的结构映射，与 [12, 定理 5.1]中出现的几乎完全相同；因此，图表 (3.1) 中三角形的交换性以及对角序列的正合性，理由与上述文献中相同。剩下需要检验括号与各个结构映射的相容性，以及 Jacobiator。这些验证都是运用微分形式的 Cartan演算所进行的常规计算。□

在 [17], Rogers展示了一个李2-代数的嵌入 R: $\mathbb{L}(M,\chi) \hookrightarrow \mathbb{L}(C_\chi)$。在 [12, 定理 5.1], 中，作者描述了一个预量子化蝴蝶，一个可逆的

蝴蝶 E： $\mathbb{L}(M,\chi) \dashrightarrow \mathbb{X}(\mathcal{G},\gamma,B)$，其中 $\mathbb{X}(\mathcal{G},\gamma,B)$表示 $\mathbb{X}(\mathcal{G},\gamma)$的子李2-代数，由保持束丛gerbe的联络和曲率势（两者）的乘性向量场组成。下文的命题3.2表明，定理3.1中的蝴蝶 F 与Rogers的嵌入及预量子化蝴蝶 E 相容。

命题3.2. 设 $(\mathcal{G},\gamma)$ 是 M 上带联络 γ 的 S^1-束丛 gerbe，并设 B 是 γ 的曲率势，其得到的 3-曲率为 $\chi \in \Omega^3(M)$。令 F 如定理3.1所述。则下图 2-交换:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{L}(M,\chi) & \xrightarrow{\ \mathsf{R}\ } & \mathbb{L}(C_\chi) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathsf{E}} & \swarrow\!\!\!\swarrow & \Big\uparrow{\scriptstyle \mathsf{F}} \\ \mathbb{X}(\mathcal{G};B,\gamma) & \longrightarrow & \mathbb{X}(\mathcal{G},\gamma) \end{array}$$

其中，映射 R 是 Rogers 的嵌入，E 是预量子化蝴蝶。

证明。我们证明蝴蝶态射 $\mathsf{R}\circ\mathsf{E}^{-1}$ 与 $\mathsf{F}\circ\mathsf{j}$ 同构，其中 j 表示包含映射 $\mathbb{X}(\mathcal{G},\gamma,B) \to \mathbb{X}(\mathcal{G},\gamma)$。

由于包含映射 j 是严格态射，蝴蝶 F∘j 的底层向量空间就是限制 $F\big|_{\mathbb{X}(\mathbf{P},\gamma,B)_0}$（见 [16, 第 5.1] 节），这与预量子化蝴蝶 E 的底层向量空间 E 相同。

按我们的记号，Rogers 的嵌入 $\mathbb{L}(M,\chi) \to \mathbb{L}(C_\chi)$ 所对应的底层链映射，在 0 次项上为包含映射，在 1 次项上为恒等映射。令 $L_1 \to L_0$ 表示 $\mathbb{L}(M,\chi)$ 的底层 2 项复形， $K_1 \to K_0$ 表示 $\mathbb{L}(C_\chi)$ 的底层 2 项复形。因此，对应蝴蝶 R 的底层向量空间为$K_1 \oplus L_0$；于是对于 $\mathsf{R}\circ\mathsf{E}^{-1}$，它为 $E \overset{L_1}{\underset{L_0}{\oplus}} (K_1 \oplus L_0) \cong (E \oplus K_1)/L_1$（模去 L_1 的对角像）。由于 $L_1 = K_1$，我们还有一个自然同构 $E \cong (E \oplus K_1)/L_1$（嵌入到第一个直和项），其逆映射可通过选取第二个直和项为零的代表元得到。

链同伦 $R\colon L_0 \otimes L_0 \to K_1$ 定义为

$$R((x,\beta),(z,\varphi)) = -\tfrac{1}{2}\left(\iota_x\varphi - \iota_z\beta\right).$$

因此，$(E \oplus K_1)/L_1$ 上的诱导括号由下式给出

$$\begin{aligned}&[(\mathbf{x},\mathbf{p},\alpha,g;f),(\mathbf{z},\mathbf{r},\beta,h;k)]\\ &\qquad = ([\mathbf{x},\mathbf{z}],[\mathbf{p},\mathbf{r}],L_{\mathbf{x}}\beta - L_{\mathbf{y}}\alpha,\iota_{\mathbf{x}}\beta - \iota_{\mathbf{z}}\alpha + \iota_{\mathbf{z}}\iota_{\mathbf{x}}B;\tfrac{1}{2}(\iota_x(dk+\varpi) - \iota_z(df+\varepsilon))\end{aligned}$$

其中 $(x,-\varepsilon)$ 和 $(z,-\varpi)$ 表示 L_0 中由下式定义的元素。

$$\pi^*\varepsilon = \alpha - \iota_{\mathbf{x}}B - dg \quad \text{and} \quad \pi^*\varpi = \beta - \iota_{\mathbf{z}}B - dh. \tag{3.2}$$

在对应关系 $(E \oplus K_1)/L_1 \cong E$ 下，这表示为

$$[(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \alpha, g), (\mathbf{z}, \mathbf{r}, \beta, h)] \\ = ([\mathbf{x}, \mathbf{z}], [\mathbf{p}, \mathbf{r}], L_{\mathbf{x}}\beta - L_{\mathbf{y}}\alpha, \iota_{\mathbf{x}}\beta - \iota_{\mathbf{z}}\alpha + \iota_{\mathbf{z}}\iota_{\mathbf{x}}B - \tfrac{1}{2}\pi^*(\iota_x\varpi - \iota_z\varepsilon))$$

利用 (3.2)，我们看到这个括号与 $F\big|_{\mathbb{X}(\mathbf{P},\gamma,B)_0}$ 上的括号一致。 □

定理3.1中的蝴蝶可以很容易地调整，从而得到一个类似的蝴蝶 $\mathsf{G}: \mathbb{X}(\mathbf{P}) \dashrightarrow \mathbb{A}(M, \chi)$。事实上，令 $G = \{(\mathbf{x}, \mathbf{p}\ g) \in \mathbb{X}(\mathbf{P})_0 \times C^\infty(X) \mid \delta g = \iota_{\mathbf{p}}\gamma\}$，并以与图表 (3.1) 中相应映射类似的显而易见的方式定义下图中的结构映射。

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma(A_P) & & & & C^\infty(M) \\ & \searrow^{\kappa} & & \swarrow^{\lambda} & \\ \downarrow & & G & & \downarrow \\ & \swarrow_{\sigma} & & \searrow_{\rho} & \\ \mathbb{X}(\mathbf{P})_0 & & & & \mathfrak{X}(M) \end{array} \tag{3.3}$$

借助这个蝴蝶，我们得到如下定理，其完全类似于定理3.1。我们省略证明，因为它采用了与定理3.1相同的方法和思想。

定理3.3. 设 $\mathcal{G} = P \rightrightarrows X$ 是 M 上带有联络 γ 和曲率势 B 的 S^1-束丛gerbe，其相应的3-曲率为 χ。设 G 及所示的结构映射如上所述，并按公式在 G 上定义括号。

$$[(\mathbf{x}, \mathbf{p}, g), (\mathbf{z}, \mathbf{r}, h)] = ([(\mathbf{x}, \mathbf{p}), (\mathbf{z}, \mathbf{r})], L_{\mathbf{x}}h - L_{\mathbf{z}}g - \iota_{\mathbf{z}}\iota_{\mathbf{x}}B).$$

于是，G 定义了一个可逆蝴蝶态射 $\mathsf{G}: \mathbb{X}(\mathbf{P}) \dashrightarrow \mathbb{A}(M, \chi)$。

在 [8], 中，作者给出了李 2-代数的一个态射 $\psi: \mathbb{L}(C_\chi) \to \mathbb{A}(M, \chi)$。下面的命题与命题 3.2 类似，表明定理3.1和定理3.3中的蝴蝶态射与 ψ相容。由于该命题的证明与命题 3.2 的证明方式相同，我们省略证明。

命题 3.4. 设 $\mathcal{G}$ 是 M 上的一个带联络 γ、曲率势 B，且其相应的 3-曲率为 $\chi \in \Omega^3(M)$ 的 S^1-束丛gerbe $P \rightrightarrows X$。令 F 如定理3.1所述，G 如定理3.3所述。则以下图表 2-交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{L}(C_\chi) & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{A}(M, \chi) \\ \uparrow{\scriptstyle \mathsf{F}} & \swarrow\!\!\!\swarrow & \uparrow{\scriptstyle \mathsf{G}} \\ \mathbb{X}(\mathcal{G}, \gamma) & \longrightarrow & \mathbb{X}(\mathbf{P}) \end{array}$$

注记 3.5。定理3.3中的蝴蝶 $\mathsf{G}: \mathbb{X}(\mathbf{P}) \dashrightarrow \mathbb{A}(M, \chi)$ 取决于联络 γ 的选择；不过，选择另一种联络会得到一个 2-同构的蝴蝶。事实上，另一种联络必定具有 $\gamma' = \gamma + \delta\nu$ 的形式，其中 $\nu \in \Omega^1(X)$，而映射 $(\mathbf{x}, \mathbf{p}\ g) \mapsto (\mathbf{x}, \mathbf{p}\ g + \iota_{\mathbf{x}}\nu)$ 给出了所需的 2-同构。

注记 3.6。在 [8, Proposition 5.2.6], 中，作者证明了一个与命题 3.2 和 3.4 类似的结果。在该文中，作者用 ˇCech-Deligne 余循环来刻画 S^1-gerbe，它们等价于以 ˇCech 数据定义的束丛 gerbe（即，$X = \sqcup U_i$，其中 $\{U_i\}$ 是 M 的一个开覆盖）。由此得到的无穷小对称李 2-代数（保持相应的联络数据）与 [7], 中的李 2-代数等价，并且作者建立了相应的李 2-代数拟同构及 2-交换图表。

3.2. 与规范变换的相容性。本节中，我们考察定理 3.1 和 3.3 中的拟同构与规范变换 $\chi \mapsto \chi + d\tau$（其中 $\tau \in \Omega^2(M)$）的相容性。

我们首先给出一个引理，说明规范变换使 Courant李2-代数的同构类保持不变。

L引理 3.7.设 $\tau \in \Omega^2(M)$，并令$\mathsf{T}_\tau\colon \mathbb{L}(C_\chi) \to \mathbb{L}(C_{\chi+d\tau})$ 定义为 ,

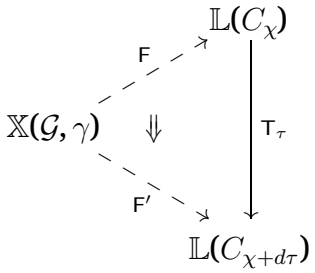
$$(\mathsf{T}_\tau)_0(u,\alpha) = (u, \alpha + \iota_u\tau), \quad (\mathsf{T}_\tau)_1 = \mathsf{id}\,.$$

那么链映射 $(\mathsf{T}_\tau)_\bullet$ 是李 2-代数的（严格）同构。

证明。对于高阶 Courant 代数丛，这一点已在 [14] 中证明。在这个特殊情形下，直接验证很简单。事实上，显然 $(\mathsf{T}_\tau)_\bullet$ 是链映射，直接计算可得 $(\mathsf{T}_\tau)_0$ 保括号并保持标准配对；由此可得 Jacobiator 的相容性。□

S^1-束丛gerbe上保持联络的可乘向量场所构成的李 2-代数，在此类规范变换下是不变的。事实上，根据注 2.4，规范变换对应于曲率势的改变——尤其是，底层的束丛gerbe和联络保持不变。根据引理 2.5，由不同曲率势得到的李 2-代数 $\mathbb{X}(\mathcal{G},\gamma)$ 相同。

命题3.8。设（$\mathcal{G}$，γ）是 S^1-束丛gerbe，在 M 上带有联络 γ。假设 B 是 γ 的曲率势，其所得3-曲率为 χ，而 $B' = B + \pi^*\tau$ 是 γ 的曲率势，其所得3-曲率为 $\chi + d\tau$。令F和F′ 为定理3.1中分别对应于所选曲率势的可逆蝴蝶，并令T_τ：$\mathbb{L}$（C_χ）$\to \mathbb{L}$（$C_{\chi+d\tau}$）如引理3.7所述。则下图2-交换:



证明。请回忆，F′ 的底层向量空间与F的相同——按照(3.1)，将此向量空间记为 F 。

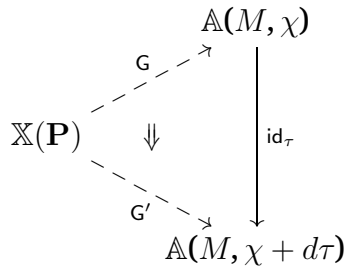
由于 T_τ 是李 2-代数的严格态射，复合 $\mathsf{T}_\tau \circ \mathsf{F}$ 的蝴蝶的底层向量空间由沿着 $(\mathsf{T}_\tau)_1 = \mathrm{id}_{K_1}$的推出给出（参见 [16, 第 5.1]节），$(F \oplus K_1)/K_1 \cong F$，其中 $K_1 \to K_0$ 表示 $\mathbb{L}(C_\chi)$ 的底层 2-项复形。该识别给出了所需的蝴蝶态射 $\mathsf{T}_\tau \circ \mathsf{F} \Rightarrow \mathsf{F}'$。□

与引理 3.7 类似，我们看到，在其上同调类内改变 χ 不会改变 Atiyah李2-代数的同构类。

引理 3.9。设 $\tau \in \Omega^2(M)$。恒等链映射 $\mathbb{A}(M, \chi) \to \mathbb{A}(M, \chi + d\tau)$ 与链同伦 $(x_1, x_1) \mapsto \iota_{x_2}\iota_{x_1}\tau$ 定义了一个李 2-代数同构。

证明。上述公式定义链同伦这一点，直接由外微分的不变公式得到。□

命题3.10。设 $\mathcal{G} = P \rightrightarrows X$ 是 M上的一个 S^1-束丛gerbe。设 γ 是 $\mathcal{G}$的一个联络。假设 B 是 γ 的一个曲率势，其所得的3-曲率为 χ；而$B' = B + \pi^*\tau$ 是 γ 的一个曲率势，其所得的3-曲率为 $\chi + d\tau$。令G和G′分别为定理3.3中对应于这两种曲率势选择的可逆蝴蝶态射，并令$\mathrm{id}_\tau \colon \mathbb{A}(M, \chi) \to \mathbb{A}(M, \chi + d\tau)$表示引理3.9中的同构。那么，下图2-交换：



证明。复合$\mathrm{id}_\tau \circ$ G是蝴蝶 $G \overset{A_1}{\underset{A_0}{\oplus}} (A_1 \oplus A_0)$，其中 $A_1 \to A_0$表示 $\mathbb{A}(M, \chi)$（以及 $\mathbb{A}(M, \chi + d\tau)$）所对应的底层2项复形。括号按分量定义；在 G上，其定义见定理 3.3，而在 $A_1 \oplus A_0$ （id_τ对应的蝴蝶）上，其定义为

$$[(f, x), (g, z)] = (L_x g - L_z f + \iota_z \iota_x \tau, [x, z]).$$

蝴蝶 G′ 与 G 一样由向量空间 G 给出，但其括号为

$$[(\mathbf{x}, \mathbf{p}, g), (\mathbf{z}, \mathbf{r}, h)] = ([(\mathbf{x}, \mathbf{p}), (\mathbf{z}, \mathbf{r})], L_{\mathbf{x}} h - L_{\mathbf{z}} g - \iota_{\mathbf{z}}\iota_{\mathbf{x}}(B + \pi^*\tau)).$$

考虑自然同构 $\varphi \colon G \to G \overset{A_1}{\underset{A_0}{\oplus}} (A_1 \oplus A_0)$，它将 (x, p g) 映射到 (x, p g; 0, x) 的等价类（其中 x 下投影到 x）。直接计算可知，φ 保持括号。□

4. Gauge transformations and homotopy moment maps

作为第3节结果的一个应用，我们给出一个类似于 [14] 中辛情形的几何论证，说明 Rogers 将李 2-代数 R： $\mathbb{L}(M,\chi) \hookrightarrow \mathbb{L}(C_\chi)$ 嵌入到规范变换 $\chi \mapsto \chi + d\tau$中是相容的，其中 $\tau \in \Omega^2(M)$ 是 G-不变形式，在沿同伦矩映射拉回到有限维李代数 $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$之后。

为此，设 (M,χ) 是一个预2-plectic流形（即，其中 $\chi \in \Omega^3(M)$是闭的），其上配备了一个保持 χ不变的连通李群 G 的作用。假设G-作用具有一个如 [5] 中所述的同伦矩映射 $\mathsf{J}\chi : \mathfrak{g} \to \mathbb{L}(M,\chi)$。给定一个 G-不变的 2-形式 $\tau \in \Omega^2(M)^G$，我们定义，

$$(\mathsf{J}_{\chi+d\tau})_0(\xi) = (\mathsf{J}_\chi)_0(\xi) + (0, \iota_{\xi_M}\tau) \quad \text{and} \quad J_{\chi+d\tau}(\xi\otimes\zeta) = J_\chi(\xi\otimes\zeta) - \iota_{\xi_M}\iota_{\zeta_M}\tau,$$

其中， ξ_M 表示与 $\xi \in \mathfrak{g}$对应的生成向量场。使用Cartan演算进行直接计算可验证，上述定义了一个李2-代数态射（即同伦动量映射）$\mathsf{J}_{\chi+d\tau}$: $\mathfrak{g} \to \mathbb{L}(M, \chi + d\tau)$。

命题4.1. 设 $(\mathcal{G},\gamma)$ 是 M 上的一个 S^1-束丛gerbe，其曲率势为 B ，其 3-曲率为 χ。令 E_χ： $\mathbb{L}(M,\chi) \dashrightarrow \mathbb{X}(\mathcal{G},\gamma)$ 表示预量子化蝴蝶 $\mathbb{L}(M,\chi) \dashrightarrow \mathbb{X}(\mathcal{G},\gamma,B)$ 与嵌入到 $\mathbb{X}(\mathcal{G},\gamma)$ 的复合。则下图 2-交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\quad J_\chi \quad} & \mathbb{L}(M,\chi) \\ {\scriptstyle J_{\chi+d\tau}}\downarrow & \not\Downarrow & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathsf{E}_\chi} \\ \mathbb{L}(M,\chi+d\tau) & \xrightarrow[\mathsf{E}_{\chi+d\tau}]{} & \mathbb{X}(\mathcal{G},\gamma) \end{array}$$

证明。复合，

$$\mathfrak{g} \xrightarrow{J_\chi} \mathbb{L}(M,\chi) \overset{\mathsf{E}_\chi}{\dashrightarrow} \mathbb{X}(\mathcal{G},\gamma)$$

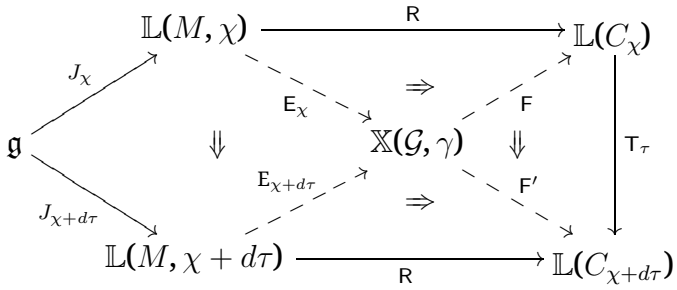
是一个底层向量空间为 $\mathfrak{g} \oplus_{L_0} E$ 的蝴蝶，即蝴蝶结构映射 $E \to L_0$ 与映射 $(\mathsf{J}\chi)_0 : \mathfrak{g} \to L_0$ 的纤维积。同样，复合

$$\mathfrak{g} \xrightarrow{J_{\chi+d\tau}} \mathbb{L}(M,\chi+d\tau) \overset{\mathsf{E}_{\chi+d\tau}}{\dashrightarrow} \mathbb{X}(\mathcal{G},\gamma).$$

是一个底层向量空间为 $\mathfrak{g} \oplus_{L_0} E$ 的蝴蝶态射，它是 $E \to L_0$ 与 $(\mathsf{J}_{\chi+d\tau})_0$ 的纤维积：$\mathfrak{g} \to L_0$。$\mathfrak{g} \oplus_{L_0} E$ 上的恒等映射给出了所需的蝴蝶态射。□

因此，在上述设定中，如果 (M,χ) 存在一个带联络的预量子化束丛gerbe $(\mathcal{G},\gamma)$（即其 3-曲率为 χ），那么根据命题3.2、3.8，以及

4.1，以下图表 2-交换：



(4.1)

注意（参见 [14] 中的注 1.6），可以直接验证，沿图表 (4.1) 外边的两个李二代数态射复合相等（无需假设 χ 是整的）。图表 (4.1) 的 2-交换性为这一观察提供了几何解释，表明这两个复合是二同构的；这与辛情形下 [14, 第 1] 节中的几何论证类似。

References

[1] John Baez 和 Alissa Crans。《高维代数 VI：李2-代数》。《理论与应用范畴》，12(15)：492–528，2004。[2] Kai Behrend 和 Ping Xu。《可微栈与格》。《辛几何杂志》，9(3)：285–341，2011。[3] Daniel Berwick-Evans 和 Eugene Lerman。《向量场李二代数》。《太平洋数学杂志》，309(1)：1–34，2020。[4] Paul Bressler 和 Alexander Chervov。《Courant 代数丛》。《数学科学杂志》，4(128)：3030–3053，2005。[5] Martin Callies、Yael Fregier、Christopher L Rogers 和 Marco Zambon。《同伦矩映射》。《数学进展》，303：954–1043，2016。[6] David Saumitra Chatterjee。《阿贝尔格的构造》。博士论文，剑桥大学，1998。[7] Braxton L Collier。《Dixmier-Douady 格的无穷小对称》。博士论文，德克萨斯大学奥斯汀分校，2012。[8] Domenico Fiorenza、Christopher L Rogers 和 Urs Schreiber。高阶预量子丛的局部可观测量的 L_∞-代数。《同调、同伦与应用》，16(2)：107–142，2014。[9] Nigel Hitchin。《特殊拉格朗日子流形讲义》。《AMS 高等数学研究丛书》，23：151–182，2001。[10]Nigel Hitchin。《广义 Calabi–Yau 流形》。《数学季刊》，54(3)：281–308，2003。[11]Nigel Hitchin。《括号、形式与不变泛函》。《亚洲数学杂志》，10(3)：541，2006。[12] Derek Krepski 和 Jennifer Vaughan。《束丛gerbe上的乘性向量场》。《微分几何及其应用》，84，2022。[13] Kirill CH Mackenzie 和 Ping Xu。《经典提升过程与乘性向量场》。《数学季刊》，49(193)：59–85，1998。[14] Antonio Michele Miti 和 Marco Zambon。《多辛流形上的可观测量与高阶 Courant 代数丛》。arXiv:2209.05836，2022。[15] Michael K. Murray。《丛 gerbe》。《伦敦数学学会杂志》，54(2)：403–416，1996。

[16] Behrang Noohi。《李 2-代数的积分化》。《Compositio Mathematica》，149(2)：264–294，2013。[17] Christopher L Rogers。《2辛几何、Courant代数丛与范畴化预量子化》。《辛几何杂志》，11(1)：53–91，2013。[18] Dmitry Roytenberg。《分次辛超流形与 Courant 代数丛的结构》。《当代数学》，315：169–186，2002。[19] Dmitry Roytenberg。《关于弱李 2-代数》。载于《AIP 会议论文集》，第956卷，第180–198页。美国物理学会，2007。[20] Dmitry Roytenberg 和 Alan Weinstein。《Courant 代数丛与强同伦李代数》。《数学物理学通讯》，46：81–93，1998。[21]Pavol ˇSevera。《致 Alan Weinstein 的关于 Courant 代数丛的信》。arXiv 预印本 arXiv:1707.00265，1998–2000。[22] Pavol ˇSevera 和 Alan Weinstein。《带三形式背景的泊松几何》。《理论物理学进展增刊》，144：145–154，2001。[23] Yunhe Sheng 和 Chenchang Zhu。《同伦表示的半直积》。《太平洋数学杂志》，249(1)：211–236，2011。

Department of Mathematics, University of Manitoba, Winnipeg, MB, Canada
电子邮箱地址：djounvod@myumanitoba.ca

Department of Mathematics, University of Manitoba, Winnipeg, MB, Canada
电子邮箱地址: Derek.Krepski@umanitoba.ca URL: http://server.math.umanitoba.ca/~dkrepski/