arXiv:2304.05375v1 [math.RT] 11 Apr 2023

离散前坦纳范畴

NATE HARMAN 和 Andrew Snowden

Abstract. 预坦纳范畴是一类自然的张量范畴，可以视为代数群的推广。我们将由一个 ´étale 交换代数生成的预坦纳范畴定义为离散范畴；这类范畴推广了有限群。本文的主要定理对这类范畴给出了大致的分类：我们证明，任何离散预坦纳范畴 $\mathcal{C}$ 都与一个寡轨道群G相关联，这基于我们最近引入的一种构造。在某些情形下，例如当 $\mathcal{C}$ 有足够多的射影对象时，我们可以用 G $\mathcal{C}$ 对其进行完整描述。

Contents

1. 引言 1 2. 张量范畴 4 3. 寡形群及其表示 7 ´4. 一般张量范畴中的 étale 代数 10 ´5. 阿贝尔张量范畴中的 étale 代数 14 6. 寡形基本群 18 7. 寡形基本群上的测度 21 8. 主要定理 23 参考文献 27

1. Introduction

1.1. 背景。 代数群的表示论在数学的许多领域中发挥着重要作用。理解这一理论的一种方式是从张量范畴的角度出发：代数群的有限维表示所构成的 Rep(G) 形成了一个阿贝尔范畴，并且带有自然的张量积。将这些例子中最重要的性质作为公理，便得到前 Tannakian 范畴（参见定义 预坦纳范畴 （参见定义 2.3）。我们将这些范畴视为本身就具有重要意义的基本对象。从这一角度来看，考虑下面的问题是很自然的：

问题 1.1。分类前 Tannakian 范畴。

在特征零下，Deligne [Del2] 刻画了形如 Rep(G) 的预坦纳范畴，其中 G是一个代数（超）群。此后，若干作者致力于将这一结果推广到正特征 [BE、BEO、Cou1、Cou2、CEO、CEOP、EO、EOV、Ost]。然而，除此之外，我们尚不了解有人系统地研究过问题 1.1。这并不奇怪，因为相关例子寥寥无几：直到最近，已知的特征零下预坦纳范畴仅有那些与（超）群相关的范畴，以及那些

日期：2023年4月11日。

源自 Deligne 插值的范畴（见 [Del3] 和 [CO1、CO2、EAH、Har1、Har2、Kno1、Kno2、Mor]）。

在近期的工作中[HS1], 我们给出了预坦纳范畴的一般构造。回顾一下，寡轨道群是一个置换群（G，Ω），满足 G 在 Ω 上有有限多个轨道^n 对所有 $n \geq 0$都成立。给定这样一个群以及一项额外的数据 μ （称为测度），我们构造了一个（非阿贝尔）张量范畴 $\mathbf{Perm}(G;\ \mu)$。我们还构造了一个阿贝尔范畴 $\mathrm{Rep}(G;\ \mu)$，当测度 μ “正规”时，它性质良好，有时还是预坦纳范畴。这些构造可推广到稍大的一类群，即容许群；它们本质上是寡轨道群的逆极限。概要请见§3 。

无限对称群是寡轨道的，在这种情况下，我们的构造还原为 Deligne 范畴 $\mathrm{Rep}(\mathfrak{S}_t)$。我们理论产生的一个新例子是 Delannoy 范畴：这是一个预坦纳范畴 $\mathrm{Rep}(G;\ \mu)$，其中 G 是实数直线上的保向自同胚群。论文[HSS1] 对 Delannoy 范畴进行了详细研究，而 [HSS2] 讨论了一个相关例子。

寡形群具有重要的拓扑结构，但其本质上是离散的。在[HS2], 中，我们定义并构造了寡形群的代数类比，并预期它们也有类似于[HS1] 的理论。尤其是，Deligne 的插值范畴 $\mathrm{Rep}(\mathbf{GL}_t)$ 应当对应于代数寡形群 $\mathbf{GL}_\infty$。然而，我们尚不清楚这一对应关系如何实现。

我们的工作假设是，代数寡形群能够解释特征零下的所有预坦纳范畴；然而，支持这一想法的证据还很有限，因此我们不会称之为猜想。本文旨在对目前可处理的情形验证这一假设。我们认为，这是在“本质上 Tannakian”情形之外（此处将超 Tannakian 和 Verlinde–Tannakian 情形也包括在内）针对问题 1.1取得的首项进展。

1.2. 离散前坦纳范畴。现在我们引入将在我们的主定理中出现的范畴类。我们先对代数群作一些观察。

设 G 是域 k上的一个代数群。假设 G 是离散的，即其单位连通分支是平凡的。那么，G 忠实地作用于一个有限集 X （例如其自身）上。用代数几何的术语来说， X 是一个有限维 ´étale k-代数的谱 A。我们可以将A 视为范畴 $\mathbf{Rep}(G)$ 中的一个代数对象；由于 G 的作用是忠实的，因此 A 生成 $\mathbf{Rep}(G)$ 这个张量范畴。由于张量幂的和也都是´étale代数，这表明$\mathbf{Rep}(G)$ 的每个对象都是某个 ´étale代数的子商。这个推理也是可逆的：如果 G 是一个代数群，并且$\mathbf{Rep}(G)$ 的每个对象都是某个 ´étale 代数的子商，那么 G 是离散的。

.....的概念 ´étale 代数在任意张量范畴中都有意义（见 §4）。受上述讨论启发，我们作出如下定义：

定义 1.2。若预坦纳范畴 $\mathcal{C}$ 是离散的[1] （分别地，强离散的），则称其为离散的（分别地，强离散的），如果每个对象都是某个 ´étale 代数的子商（分别地，商）。□

我们对这个定义作一些说明。对于代数群，离散与强离散是等价的。一般而言，这并不成立：例如，在正特征下，Deligne 的插值范畴 $\mathrm{Rep}(\mathfrak{S}_t)$ 是离散的，但并非强离散（例 8.9 ）。我们证明，具有足够多射影对象的离散预坦纳范畴是强离散的

[1]若一个范畴等价于一个集合（视为范畴），则称其为离散范畴。由于非零的 k-线性范畴在此意义下从来都不是离散的，因此我们预计，对该术语的这种用法不会造成任何混淆。

（命题 8.6）；特别地，半单离散预坦纳范畴是强离散的。我们还证明，离散预坦纳范畴是强离散的，当且仅当正合列在 ´étale 局部可分裂（命题 8.7）。

最后，我们强调，离散预坦纳范畴是一类值得自然考察的范畴：它们抽象了有限群表示范畴的许多重要性质。因此，从某种意义上说，它们推广了有限群这一概念。

1.3. 主要定理。如上所述，我们的工作假设是，特征零下的预坦纳范畴来源于代数寡形群。这预示着离散预坦纳范畴来源于普通寡形群，因为普通寡形群正是单位连通分支平凡的代数寡形群。我们的主要定理证实了这一点（在任意特征下）：

定理 1.3. 设 $\mathcal{C}$ 是代数闭域 k 上的离散预坦纳范畴。则存在一个容许群 G 以及一个取值于 k 的测度 μ，其定义于 G，使得 $\mathcal{C}$ 是 $\mathrm{Perm}(G;\mu)$ 的弱阿贝尔包络。若 $\mathcal{C}$ 是强离散的，则 $\mathcal{C}$ 是 $\mathrm{Perm}(G;\mu)$ 的阿贝尔包络，测度 μ 是正规的，并且 $\mathcal{C}$ 等价于 $\mathrm{RepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRep}^{\mathrm{f}}(G;\mu)$。

若 $\mathcal{C}$ 作为张量范畴是有限生成的，则可以取 G 为寡轨的（备注 8.5）。我们参见 §8.1 以了解（弱）阿贝尔包络的定义。阿贝尔包络在等价意义下唯一，但弱阿贝尔包络一般不一定唯一（例 8.3）。因此，该定理在一般情形下不一定能唯一确定 $\mathcal{C}$。然而，在强离散情形下，它能非常精确地确定 $\mathcal{C}$。

推论 1.4。设 $\mathcal{C}$ 是代数闭域 k上的半单离散预坦纳范畴。则存在 G 和 μ 定理中的对象，使得 $\mathcal{C}$ 等价于 $\mathrm{Perm}(G;\mu)$的卡鲁比包络。此外，μ 是正则测度（见 §3.3）。

定理 1.3 表明，预坦纳范畴与寡轨道群之间存在根本性的联系。这证明了我们在 [HS1] 中的工作是合理的：在那里构造的范畴并非仅仅是一些有趣的例子，而是构成了一个自然的类别。

1.4. 寡形基本群。定理 1.3 最有趣的方面或许在于，它从范畴 $\mathcal{C}$中构造出了一个群。这一群的构造与 ´étale基本群的构造十分相似，并不需要任何离散性假设。

我们回顾 ´étale 基本群的基本构造。设 X 是代数闭域 k 上的不可约代数簇。令 $\mathbf{S}(X)$ 为 X 的有限´étale 覆盖范畴；我们注意到，这与 $\mathbf{Coh}(X)$ 范畴中有限 ´étale 代数的范畴互为对偶。范畴 $\mathbf{S}(X)$ 是一个伽罗瓦范畴，这意味着它等价于某个前有限群 G 的离散 G-集范畴；事实上，G 可以构造为 $\mathbf{S}(X)$ 上某个纤维函子的自同构群。X 的 ´étale 基本群即为群 G。

现在设 $\mathcal{C}$ 是一个预坦纳范畴。令 $\mathbf{S}(\mathcal{C})$ 为 ´中 $\mathcal{C}$的非分歧代数范畴的对偶。本文中的一个关键结果（定理 6.1）是，$\mathbf{S}(\mathcal{C})$ 是一个预伽罗瓦范畴，这是 [HS3]中引入的一类范畴。预伽罗瓦范畴之于伽罗瓦范畴，正如预坦纳范畴之于坦纳范畴；换言之，它们满足相似的抽象范畴性质，但不一定需要存在纤维函子。主要

.....定理 [HS3] 表明，任何预伽罗瓦范畴都等价于范畴 $\mathbf{S}(G)$ 的（有限型光滑） G-集，对于某个容许群 G。这使我们能够作出如下定义：

定义 1.5. 预坦纳范畴 $\mathcal{C}$ 的寡形基本群，记作 $\pi^{\mathrm{olig}}(G)$，是一个容许群 G，使得 $\mathbf{S}(\mathcal{C})$ 与 $\mathbf{S}(G)$ 等价。□

群 G并未得到精确定义，但这通常不是问题；详情见 §3.2 。假设 $\mathcal{C}$ 与某个代数-寡轨道群 H相关联，那么我们预期 $\pi^{\mathrm{olig}}(\mathcal{C}$能够还原 $\pi_0(H$ 的分支群 H。我们注意到，寡形基本群在思想上与 Deligne 的基本群 $\pi(\mathcal{C})$ [Del1， §8]相似；然而，Deligne 的群是 $\mathcal{C}$ 中仿射概形范畴内的一个群对象，而寡形基本群则是一个实际的群。

我们在定理 7.3 中证明， $\pi^{\mathrm{olig}}(\mathcal{C}$具有一个自然测度 μ，且范畴 $\mathbf{Perm}(\pi^{\mathrm{olig}}(\mathcal{C})\ \mu)$ 自然~~映射~~到 $\mathcal{C}$。有了这一结果，定理 1.3 便可轻松推出。

1.5. 尚待解决的问题。 尽管定理 1.3 是迈向离散前坦纳范畴分类的重要一步，但要得到真正完备的分类，仍需开展更多工作。以下似乎是最重要的三个问题。

(a) 在定理 1.3中， $\mathcal{C}$ 是否为 $\mathbf{Perm}(G;\mu)$ 的阿贝尔包络，即使 $\mathcal{C}$ 不是强离散的？如果不是，$\mathbf{Perm}(G;\mu)$ 的弱阿贝尔包络至少是唯一的吗？~~(b)~~ 给定一个寡轨道群 G 和一个测度 μ，$\mathbf{Perm}(G;\mu)$ 是否存在（弱）阿贝尔包络？我们在相当严格的假设下证明了这一点，见 [HS1]。 (c) 最后，我们希望进一步了解寡轨道群上的测度。例如，能否给出群满足测度存在的一般条件？

1.6. 记号。这里列出一些重要的记号：

k ： 系数域 $\mathbf{0}$：范畴的始对象（例如空集） $\mathbf{1}$：范畴的终对象（例如单点集） $\mathbf{1}$：张量范畴的单位对象（例如平凡表示）$\mathbf{S}(G)$：有限型 G-集的范畴 $\mathbf{Et}(\mathcal{C})$： $\mathcal{C}\mathbf{S}(\mathcal{C})$ 中的 ´étale 代数范畴 $\mathbf{Et}(\mathcal{C})$ 的对偶范畴

2. Tensor categories

2.1. 基本定义。现在我们回顾一些与张量范畴相关的定义。本文中我们固定一个域 k 。

定义 2.1. 张量范畴是一个 k-线性加性范畴，配备一个 $\otimes$ 对称幺半结构，该结构是 k-双线性的。我们用 $\mathbf{1}$ 表示单位对象。张量函子是一个 k-线性对称幺半函子。□

定义 2.2. 设 X 是张量范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个对象。 X 的对偶是一个配备映射的对象 $X^\vee$。

$$\alpha\colon \mathbb{1} \to X \otimes X^\vee, \qquad \beta\colon X^\vee \otimes X \to \mathbb{1},$$

称为余求值和求值，使得这些复合

$$X \xrightarrow{\alpha\otimes\mathrm{id}} X\otimes X^\vee\otimes X \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\beta} X$$
$$X^\vee \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\alpha} X^\vee\otimes X\otimes X^\vee \xrightarrow{\beta\otimes\mathrm{id}} X^\vee$$

是单位元。若对偶存在，则在唯一同构意义下唯一。我们称 X是刚性的，如果它具有对偶；如果每个对象都是刚性的，我们就称 $\mathcal{C}$ 是刚性的。□

注意，如果 X 是张量范畴中的刚性对象，那么函子 $X\otimes -$ 有左伴随和右伴随（分别由 $X^\vee\otimes -$给出）。特别地，在刚性阿贝尔张量范畴中，张量积是正合的。关于对偶的详细内容，参见[EGNO，§2。10]

定义2.3。 若张量范畴 $\mathcal{C}$满足以下条件，则称其为预坦纳范畴 :

(a) 范畴 $\mathcal{C}$是阿贝尔范畴，且每个对象都有有限长度。(b) 对任意两个对象 X 和 Y，k-向量空间 $\mathrm{Hom}(X,Y)$ 是有限维的。(c) 范畴 $\mathcal{C}$是刚性的。(d) $\mathrm{End}(\mathbf{1})=k$。

□

我们参考著作[EGNO] 以了解有关张量范畴的一般背景。我们提醒读者，[EGNO] 对“张量范畴”一词的使用比我们严格得多：在我们的意义下的“预坦纳范畴”等同于[EGNO]意义下的“对称张量范畴”。我们对“预坦纳范畴”的使用遵循 [CO2，§2.1]。

2.2. 代数。固定一个张量范畴 $\mathcal{C}$ ，用于 §2 的其余部分。就我们的目的而言， $\mathcal{C}$ 中的代数是一个结合、含幺且交换的代数对象。我们用 $\mathrm{Alg}(\mathcal{C})$ 表示 $\mathcal{C}$ 中代数构成的范畴。对于一个代数 A，我们用 $\mu_A\colon A\otimes A\to A$ 和 $\eta_A\colon \mathbb{1}\to A$ 表示 A 上的乘法映射和单位映射，并在可能时省略下标。如果 A 和 B 是代数，那么 $A\oplus B$ 和 $A\otimes B$ 自然也是代数。这些构造分别是 $\mathrm{Alg}(\mathcal{C})$ 中的积和余积。代数 0 和 1 分别是 $\mathrm{Alg}(\mathcal{C})$ 的终对象和始对象。以下概念将发挥重要作用：

定义 2.4. 若代数 A 非零且不能分解为积，则称其为原子的；也就是说，给定代数同构 $A\cong B\oplus C$，我们有 $B=0$ 或 $C=0$。□

令 A 是一个代数。A-模是一个对象 M，它属于 $\mathcal{C}$，并配备一个映射 $\mu_M\colon A\otimes M\to M$，满足通常的条件。我们注意到，1-模恰好是 $\mathcal{C}$ 中的对象。我们将 $_A$ 的模范畴记作 Mod_A。 A 的理想是 A 的一个 A- 子模。假设 $\mathcal{C}$ 是阿贝尔的。给定两个 A- 模 M 和 N，我们将 $M\otimes_A N$ 定义为自然映射 $A\otimes M\otimes N\rightrightarrows M\otimes N$ 的余等化子。赋予这种结构后，Mod_A 本身是一个阿贝尔张量范畴。我们注意到，Mod_A 中的单位对象就是 A 本身。这一观察使我们能够将关于一般代数的许多论述归约到单位对象的情形。

2.3. 元素记法。在张量范畴中处理态射时，记号有时会显得繁琐。因此，我们有时会采用点函子的观点，以便使用更熟悉（也更简洁）的记法。下面通过两个例子来说明这一方法。

首先，假设 A 是 $\mathcal{C}$中的一个代数。 T-点 A 就是$\mathcal{C}$中的一个态射 $T\to A$。若 x是 A的一个 T_1-点，且 y是 A的一个 T_2-点，我们将由复合给出的 $(T_1\otimes T_2)$-点记作 $x\cdot y$或 xy

$$T_1\otimes T_2 \xrightarrow{x\otimes y} A\otimes A \xrightarrow{\mu} A.$$

I若 f z 是 A的一个 T_3-点，则 A 的结合律具有通常的形式

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

注意，两边都是态射 $T_1 \otimes T_2 \otimes T_3 \to A$。令 $x = y = z$ 为恒等映射 $A \to A$，即可得到结合性的标准定义。

其次，设 β: $X \otimes Y \to \mathbb{1}$ 是一个配对。给定 X 的一个 T_1-点 x 和 Y的一个 T_2-点y，我们用 β(x, y) 表示复合

$$T_1 \otimes T_2 \xrightarrow{x \otimes y} X \otimes Y \xrightarrow{\beta} \mathbb{1}.$$

设 β 是一个完美配对，即存在一个态射 α: $\mathbb{1} \to Y \otimes X$，使得$\alpha$ 和 β 是对偶中的余求值映射和求值映射。于是有以下熟知的结论：若 x 是 X 的一个 T_1-点，且对于 Y的所有 T_2-点 y（当T_2 变化时）都有 β(x, y) $= 0$，则 $x = 0$。事实上，令 y 为 Y的单位元，我们看到复合

$$T_1 \otimes Y \xrightarrow{x \otimes \mathrm{id}} X \otimes Y \xrightarrow{\beta} \mathbb{1}$$

为零。因此，复合

$$T_1 \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \alpha} T_1 \otimes Y \otimes X \xrightarrow{x \otimes \mathrm{id}} X \otimes Y \otimes X \xrightarrow{\beta \otimes \mathrm{id}} X$$

也为零。但根据 α 和 β 的公理， x（注意，前两个态射的顺序实际上可以互换）。

2.4.不变代数。对于 $\mathcal{C}$的一个对象 M，我们记 $\Gamma(M) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbb{1}, M)$。这是一个$k$-向量空间，我们称之为 M的不变量。若 $\mathcal{C}$ 中的 A 是一个代数，则A(Γ)是一个结合、含幺且交换的 k-代数，我们称之为A的不变代数。容易看出， A 的直积式分解对应于 Γ(A)的幂等元。特别地， A 是原子的，当且仅当 Γ(A)的唯一幂等元是 $0 \neq 1$。

请回忆，交换环 R 上的以下条件是等价的：

(a) R 是绝对平坦的，即每个 R-模都是平坦的。(b) R 的每个元素都是一个单位元与一个幂等元的积。(c) R 是冯·诺依曼正则的，即对于每个 $x \in R$，存在一个 $y \in R$，使得 $x^2y = x$和 $y^2x = y$；元素 y 称为 x的弱逆，且是唯一的。(d) R 是域的积的一个在取弱逆运算下封闭的子环。

命题 2.5. 假设 $\mathcal{C}$ 是刚性阿贝尔的。那么 Γ(1) 是绝对平坦的。此外，映射

$$\{idempotents\ of\ \Gamma(\mathbb{1})\} \to \{ideals\ of\ \mathbb{1}\}$$

将幂等元映射为它生成的主理想，是一个双射。

证明。关于理想的陈述是[DM，注1.18]。由此可推出 Γ(1)的绝对平坦性，现解释如下。设 $a \in \Gamma$(1)。同构 β: $\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \to \mathbb{1}$ 是一个自对偶。设 x和 y是 A的点。于是 β(ax, y) $= axy = \beta$(x, ay)。由此可知，对于所有 y，$ax = 0$ 等价于 $0 = \beta$(ax, y) $= \beta$(x, ay)。因此我们看到，ker(a)恰好是im(a)的正交补，所以根据 [DM，命题1.17]，我们有 $A =$ ker(a) $\oplus$ im(a)。由此可知， a:im(a) $\to$ im(a) 是一个同构。设 b 为其逆，并将其延拓为在ker(a) 上为0。于是 a 和 b 互为弱逆，因此 Γ(1) 是冯·诺依曼正则的。□

该命题让我们得以理解 1 在各种情形下如何分解。以下是一个重要示例。

推论 2.6. 如果 $\mathcal{C}$ 是预坦纳范畴，则 1 是单的。

证明。由于 Γ(1) 是一个域，它没有非平凡幂等元，因此 1 没有非平凡理想，这正合意味着它是一个简单对象。□

我们以 Γ 在预坦纳范畴情形下的另一个性质结束本次讨论。

命题 2.7.假设 $\mathcal{C}$ 是预坦纳范畴。则对于任意对象 X 和 Y 在 $\mathcal{C}$中，自然映射 $\Gamma(X) \otimes_k \Gamma(Y) \to \Gamma(X \otimes Y)$ 是单射。

证明。令 $V = \Gamma(X)$。我们有一个自然映射 $V \to X$，其中此处的 V 实际表示 $V \otimes \mathbb{1}$，即 $\dim_k(V)$个 1的直和。由于 1是单对象，此映射是单射的。由于 $\otimes$ 是正合的，映射 $V \otimes Y \to X \otimes Y$是单射的。由于 Γ 是左正合且加性的，我们得到映射 $V \otimes_k \Gamma(Y) \to \Gamma(X \otimes Y)$ 是单射的，这就完成了证明。□

2.5. 忠实平坦性。假设 $\mathcal{C}$ 是阿贝尔的。若 M 是平坦的，则称其为平坦；若其平坦且 $M \otimes N = 0$ 蕴含 $N = 0$，则称其为忠实平坦。我们注意到，如果 M 是忠实平坦的，那么一个正合列

$$X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_3$$

当且仅当该正合列为正合

$$M \otimes X_1 \longrightarrow M \otimes X_2 \longrightarrow M \otimes X_3$$

是正合的。我们称一个 A-模是（忠实）平坦的，如果它作为张量范畴 $\mathbf{Mod}_A$ 的对象具有这一性质。

命题 2.8. 假设 $\otimes$ 是正合的。令 M 为 $\mathcal{C}$的一个对象，并假设存在一个单射 $f\colon \mathbb{1} \to M' \otimes M$，其中 M' 是某个对象。那么 M 是忠实平坦的。

证明。根据假设，$\mathcal{C}$ 的每个对象都是平坦的。令 N 为 $\mathcal{C}$ 的一个非零对象。由于 $\otimes$ 是正合的，映射 $f \otimes \mathrm{id}: N \to M' \otimes M \otimes N$ 是单射。因此 $M' \otimes M \otimes N$ 非零，故 $M \otimes N$ 非零，因此 M 忠实平坦。□

推论 2.9. 假设 $\otimes$ 是正合的，且 A 是一个代数，其单位映射 $\mathbb{1} \to A$ 是单射。那么 A 是忠实平坦的。

推论 2.10. 假设 $\mathcal{C}$ 是预坦纳范畴。那么每个非零对象都是忠实平坦的。

证明. 设 M 是 $\mathcal{C}$中的一个非零对象。由于 1 是单对象，余评价映射 $\mathbb{1} \to M \otimes M^\vee$ 是单射，因此 M 是忠实平坦的。□

3. Oligomorphic groups and their representations

3.1. 寡形群。 一个 寡轨道群 是一个置换群（G，Ω），满足 G 在 Ω 上有有限多个轨道 ^{n} 对所有 $n \geq 0$都成立。一些例子包括：无限对称群；有限域上的无限一般线性群；实数直线上保序的自双射群；以及拉多图的自同构群。关于寡轨道群的一般背景知识，可参阅 Cameron 的著作[Cam] 。

固定一个寡轨道群(G), Ω。对于Ω 的有限子集 A，令 $G(A)$为 G 中固定 A 的每个元素的子群。这些群 $G(A)$构成 G上某个拓扑中单位元的邻域基。该拓扑是豪斯多夫的、非阿基米德的（开子群构成一个

单位元的邻域基），且 Roelcke 预紧（如果 U 且 V 是开子群，那么 $V\backslash G/U$ 是有限的）[HS1，§2。2]。我们定义一个 容许群为满足这三个性质的拓扑群。因此，每个寡轨道群都会产生一个容许群。虽然我们主要感兴趣的例子是寡轨道群，但从理论上讲，使用容许群更为方便。

设 G 是一个容许群。若 G 在集合 X 上的作用是光滑的，即所有稳定子都是开集，我们就称该作用为光滑作用。我们使用“G-集合”一词，表示“赋予了 G-作用的集合”。若一个 G-集合具有有限个轨道，我们就称其为有限轨道的。记 $\mathbf{S}(G)$ 为有限轨道 G-集合所构成的范畴，其中态射是 G-等变映射。$\mathbf{S}(G)$ 的一个重要性质是它对积和纤维积封闭；参见 [HS1，§2。3]。

3.2. 预伽罗瓦范畴。 设 $\mathcal{B}$ 是一个具有有限余积的范畴。记 $\mathbf{0}$ 为始对象；若一个对象同构于 $\mathbf{0}$，则称其为空的。若对象X 在余积下不可分解，即 $X \cong Y \amalg Z$ 意味着Y 或 Z 为空，则称其为原子。下面的定义由 [HS3], 引入，给出了预坦纳范畴的一个组合类比。

定义 3.1. 若本质小范畴 $\mathcal{B}$ 满足以下条件，则称其为预伽罗瓦范畴：

(a) 范畴 $\mathcal{B}$ 有有限余积。(b) 每个对象都同构于有限个原子的余积。
(c) 给定对象 X、Y 和 Z，其中 X 是一个原子，则自然映射

$$\mathrm{Hom}(X,Y)\times\mathrm{Hom}(X,Z)\to\mathrm{Hom}(X,Y\amalg Z)$$

是一个双射。
(d) 范畴 $\mathcal{B}$有纤维积和终对象 $\mathbf{1}$。(e) 原子之间的单态射是同构。(f) 若 $X\to Z$ 和 $Y\to Z$ 是原子之间的映射，则 $X\times_Z Y$ 非空。(g) 终对象 $\mathbf{1}$ 是原子的。(h) $\mathcal{B}$ 中的等价关系都是有效的（参见 [HS3，定义 4。9]）。

若 $\mathcal{B}$ 满足 (a)–(e)，则称其为 B-范畴。 □

若 G 是一个容许群，则范畴 $\mathbf{S}(G)$ 是预伽罗瓦范畴，这也是本定义的启发性例子。[HS3] 的主要结果证明了反向结论：

定理 3.2. 若 $\mathcal{B}$ 是一个预伽罗瓦范畴，则存在一个容许群 G，使得 $\mathcal{B}\cong\mathbf{S}(G)$。

如[HS3所述，§1.4], 群 G 并不唯一。不过，这通常并不那么重要，因为我们关心的 G 性质只取决于$\mathbf{S}(G)$。若 $\mathcal{B}$ 有可数多个同构类（这通常是应用中的情形），那么存在唯一一个G （在同构意义下）既是第一可数又是完备的。

3.3. 测度与积分。 现在我们回顾一些关于测度的背景知识，采用 [HS1]的意义。设 G 为一个容许群。一个 G-集 是一个集合，带有某个开子群对其施加的光滑 ˆ 作用，该开子群取自 G；缩小开子群不会改变这个 G-集。详见 [HS1,§2.5] 。

定义 3.3. 设 G 是一个容许群。对于 G 取值于一个交换 ˆ 环 k 的测度，是一条规则，它为每个有限 G-集合 X 赋予一个量 $\mu(X)$，其值在 k 中，并满足以下 ˆ 条件（其中 X 和 Y 表示有限 G-集合）：

(a) 同构不变性：若 $X \cong Y$ 则 $\mu(X) = \mu(Y)$。(b) 规范化：若 $X = \mathbf{1}$ 是单点集，则 $\mu(X) = 1$。(c) 可加性：$\mu(X \amalg Y) = \mu(X) + \mu(Y)$。(d) 共轭不变性：$\mu(X^g) = \mu(X)$，其中 X^g 是 X 在 $g \in G$下的共轭。(e) 乘法性：若 $\pi\colon X \to Y$是传递 U-集之间的映射，其中某个开子群为U，且 $F = \pi^{-1}(y)$是某个点上方的纤维，则 $\mu(X) = \mu(F) \cdot \mu(Y)$。□

设 μ 是一个测度，且 $f\colon X \to Y$ 是 G-集的一个映射，其中 X 是有限的且 Y是传递的。那么 f 的所有纤维都共轭，因此具有相同的测度。我们定义$\mu(f)$ 为这个共同值。可以从 μ中恢复 $\mu(f)$（对所有 f），并正合地刻画这些值必须满足的关系。换言之，可以将测度定义为满足某些条件的一条规则 $f \mapsto \mu(f)$；详见 [HS1, §4.5] 事实上，对于任意 B-范畴，这种测度表述都有意义。

如果 μ 是 G 的测度，且 U 是 G 的开子群，那么 μ 限制到U后仍是测度。若对于每个传递 G-集 X，$\mu(X)$都是 k 中的单位元，则称测度 μ 为正则测度。正则测度限制到开子群后仍为正则测度。若测度 μ 限制到某个开子群后是正则测度，则称其为拟正则测度。

假设 μ 是 G的 k值测度。由此我们得到如下积分理论。设 X 是一个 G集。若函数 $\varphi\colon X \to k$ 光滑（即在 G 的某个开子群作用下左不变）且具有有限型支集，我们就称它为 Schwartz 函数。在这种情况下，φ 只取有限多个值，记为 a_1、……、a_r，并定义

$$\int_X \varphi(x)dx = \sum_{i=1}^{r} a_i \mu(\varphi^{-1}(a_i)).$$

详见[HS1, §3.3] 以了解详情。设 $\mathcal{C}(X)$ 为施瓦茨函数空间。如果 $f\colon X \to Y$ 是 G-集合的映射，则存在推前映射 $f_*\colon \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(Y)$，其定义为对纤维进行积分。该映射具有预期的性质；详见[HS1,§3.4]。如果 μ 在 f_* 满射时也满射，则称测度 μ 为正规测度。拟正则测度是正规测度。

3.4. 表示范畴。设 G 是一个带有 k 值测度 μ 的容许群。给定有限支撑的 G 集 X 和 Y，一个 $Y \times X$ 矩阵是一个施瓦茨函数 $A\colon X \times Y \to k$。我们将 $\mathrm{Mat}_{Y,\,X}$ 定义为这类矩阵构成的空间。若 A 是一个 $Y \times X$ 矩阵，且 B 是一个 $Z \times Y$ 矩阵，我们将 BA 定义为如下的 $Z \times X$ 矩阵：

$$(BA)(z,x) = \int_Y B(z,y)A(y,x)dy.$$

矩阵乘法具有预期的性质，并且在这一语境下可以进一步发展线性代数；参见 [HS1，§7]。

一个 $Y \times X$ 矩阵 A 定义了一个积分算子 $A\colon \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(Y)$。设 $f\colon X \to Y$ 是一个光滑函数。我们将 A_f 和 B_f 定义为分别由 f 的图（或其转置）的示性函数给出的 $Y \times X$ 矩阵和 $X \times Y$ 矩阵。作为施瓦茨空间上的算子，我们有 $A_f = f_*$ 和 $B_f = f^*$。

现在我们定义一个 k-线性张量范畴 $\mathrm{Perm}(G;\mu)$，如下：

- 对象是形式符号 Vec_X，带有 X 一个有限的 G-集。

- $\mathrm{Hom}(\mathrm{Vec}_X, \mathrm{Vec}_Y) = \mathrm{Mat}_Y^G$，$X$ 是 G-不变矩阵空间。
- 复合由矩阵乘法给出。
- 张量积 $\otimes$ 在对象上的定义为 $\mathrm{Vec}_X \otimes \mathrm{Vec}_Y = \mathrm{Vec}_{X\times Y}$。

参见 [HS1，§8] 了解详情。范畴 $\mathrm{Perm}(G;\ \mu)$ 是刚性的：事实上，每个对象都是自对偶的[HS1，§8.4]。然而，它几乎从来不是阿贝尔范畴。应将 $\mathrm{Perm}(G;\ \mu)$ 视为 G的“置换模”范畴。

我们现在回顾阿贝尔范畴 $\mathrm{RepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRep}(G;\mu)$ 的定义。除引理 8.16 的证明外，这一构造的细节并不重要，因此我们简要介绍。为简便起见，假设 G 是第一可数的。定义完备群代数$A = A(G)$ 为施瓦茨空间 $\mathcal{C}(G/U)$ 关于开子群 U 的逆极限。它在卷积运算下构成一个环；参见 [HS1, §10.3]。我们称一个 A-模是光滑的，如果对每个元素，A 的作用都通过某个 $\mathcal{C}(G/U)$ 分解。我们将 $\mathrm{RepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRep}(G;\ \mu)$ 定义为 Mod_A 的由光滑模构成的全子范畴。这总是一个格罗滕迪克阿贝尔范畴。

假设 μ 是正规的。那么我们在 [HS1, §12]，中为 $\mathrm{RepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRep}(G;\mu)$ 定义一个张量结构，并且存在一个自然的完全忠实张量函子 $\mathrm{Perm}(G;\mu) \to \mathrm{RepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRep}(G;\mu)$ [HS1,Props. 11.12, 12.10]。如果 μ 是拟正则的，并满足一个称为性质(P)的附加技术条件，那么我们证明每个光滑 A-模都是其有限长度子模的并集，并且有限长度范畴 $\mathrm{RepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRep}^{\mathrm{f}}(G;\mu)$ 是预坦纳范畴 [HS1, Theorem 13.2]。

注 3.4。假设 μ 是正规子群，并且我们知道 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}(G;\ \mu)$ 是预坦纳范畴。定义 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}(\widehat{G};\ \mu)$ 为范畴 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}(U;\ \mu)$ 在 U的开子群 G上取的 2-余极限。这是一个有趣的刚性阿贝尔张量范畴实例，但它不是预坦纳范畴：通常，Hom 空间不是有限维的，并且对象不是有限长度的。□

4. Etale algebras in general tensor categories

4.1. 迹。 固定一个张量范畴 $\mathcal{C}$ 贯穿始终 §4.2。一个 刚性代数 是一个其底层对象具有刚性的代数。设 A 为一个刚性代数。我们将 迹形式 $\epsilon\colon\ A \to \mathbb{1}$ 定义为以下复合。

$$A \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\alpha_0} A\otimes A\otimes A^\vee \xrightarrow{\mu\otimes\mathrm{id}} A\otimes A^\vee \xrightarrow{\beta_0} \mathbb{1}$$

其中 α_0 和 β_0 是（余）求值映射。由于对偶在唯一同构意义下唯一，因此可以相对于 A 的任意对偶计算 ϵ。我们定义迹配对 $\beta\colon\ A\otimes A \to \mathbb{1}$，定义为 $\beta = \epsilon\circ\mu$。注意，迹配对满足 $\beta(xy, z) = \beta(x, yz)$。

命题 4.1. 设 A 和 B 是刚性代数。

(a) 代数 $A\oplus B$ 和 $A\otimes B$ 是刚性的。(b)我们有 $\epsilon_{A\oplus B} = \epsilon_A \oplus \epsilon_B$ 和 $\epsilon_{A\otimes B} = \epsilon_A \otimes \epsilon_B$。(c) 配对 $\beta_{A\oplus B}$ 是 β_A 和 β_B的正交直和。(d) 配对 $\beta_{A\otimes B}$ 是配对 β_A 和 β_B的张量积。

证明。第一条结论由如下普遍事实推出：刚性对象的和或张量积仍是刚性对象。其余结论由定义可轻易得出。□

4.2. ´Étale 代数。 代数 A 在 $\mathcal{C}$ 是 ´étale[2]，如果它是刚性的，且其迹配对 β 是完美的。我们用 Et($\mathcal{C}$) 表示 Alg($\mathcal{C}$) 中由 ´étale 代数构成的全子范畴。由命题 4.1，étale 代数的和或张量积仍为 ´étale。上述运算定义了 Et(´) 上的积和余积。代数 0 和 $\mathbb{1}$ 是 ´étale 代数，分别是 Et($\mathcal{C}$) 的终对象和始对象。

通过迹配对， ´étale 代数可与其自身的对偶相识别。若 A 和 B 是 ´étale 代数，且 $f\colon A \to B$ 是 $\mathcal{C}$ 中的任意态射（不一定是代数同态），我们令 $f^\vee\colon B \to A$ 为 f相对于 A和 B的自对偶性的对偶。

命题 4.2. 对于 ´étale 代数 A，有 $\epsilon = \eta^\vee$。

证明。我们有

$$\beta_A(\eta_A(x) \otimes y) = \eta_A(x) \cdot \epsilon(y) = \beta_{\mathbb{1}}(x \otimes \epsilon_A(y)),$$

这表明 η_A 和 ϵ_A 互为伴随。 □

下一个命题表明，在一般意义下， ´étale 代数在基变换下保持稳定。

命题4.3. 设 $\Phi\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ 为一个张量函子。如果 A 是 ´的étale代数，那么 $\Phi(A)$ 是 ´的étale 代数。因此 Φ 诱导出一个函子 Et($\mathcal{C}$) $\to$ Et($\mathcal{C}'$)。

证明。由于张量函子保留刚性对象， $\Phi(A)$ 是刚性代数。根据定义可直接得出 $\Phi(\epsilon_A) = \epsilon_{\Phi(A)}$。因此， $\Phi(\beta_A) = \beta_{\Phi(A)}$。由于 β_A 是完美配对，且张量函子保留完美配对，可知 $\beta_{\Phi(A)}$ 是完美的。因此$\Phi(A)$ 是 ´étale。□

注4.4。 我们注意到 ´张量范畴中的 étale 代数此前已有研究；例如，[Dav， DMNO， FFRS， LW]。 □

4.3. 可分裂。令 A 为 $\mathcal{C}$ 中的一个代数。 A 的 μ-可分裂是一个（$A \otimes A$）-线性映射δ: $A \to A \otimes A$，满足 $\mu \circ \delta = \mathrm{id}_A$。这里我们通过 μ 将 A 视为一个（$A \otimes A$）-模。我们称 A 是 μ-可分裂的，如果它具有一个 μ-可分裂[3]。 A 的分裂幂等元是一个满足 μ（α）$= 1$ 且对 A的任意点 x 都有（$x \otimes 1$）$\alpha =$ （$1 \otimes x$）α 的幂等元$\alpha \in \Gamma$（$A \otimes A$）。这两个概念是等价的:

命题 4.5. 设 A 是 $\mathcal{C}$中的一个代数。若 δ 是一个 μ-分裂，则 $\delta(1)$是一个分裂幂等元。若 α 是一个分裂幂等元，则由 $\delta(x) = (x \otimes 1)\alpha$ 定义的映射 δ 是一个μ-分裂。这两个构造互为逆构造。

证明. 设 δ 是一个分裂幂等元，并令 $\alpha = \delta(1)$。由于 $\mu \circ \delta = \mathrm{id}_A$，我们有$\mu(\alpha) = 1$。我们有

$$\delta(x) \cdot \delta(y) = \delta(\mu(\delta(x)) \cdot y) = \delta(xy),$$

其中第一步使用了 δ 是 $(A \otimes A)$-线性的，第二步使用了 $\mu \circ \delta = \mathrm{id}_A$。取 $x = y = 1$，我们得到 $\alpha^2 = \alpha$，因此 α 是一个幂等元。我们有

$$(x \otimes 1)\alpha = (x \otimes 1)\delta(1) = \delta(x) = (1 \otimes x)\delta(1) = (1 \otimes x)\alpha.$$

[2]我们只打算在“有限”的情形下使用这个定义，此时它给出了“有限 ´étale”的一个合理概念。若 $\mathcal{C}$ 是一个交换环 R上的所有模构成的范畴，我们的定义就不同于通常的 ´étale R-代数定义。例如，$\mathbb{Z}[1/2]$ 在我们的意义下不是一个 ´étale $\mathbb{Z}$-代数。[3]这类代数有时称为可分代数。

因此， α 是一个分裂幂等元。此外，可以通过命题陈述中的构造从 α 中恢复 δ 。

现在设 α 是一个分裂幂等元，并通过 $\delta(x) = (x \otimes 1)\alpha$ 定义 δ 。我们有

$$(x \otimes y)\delta(z) = (x \otimes y)(z \otimes 1)\alpha = (xyz \otimes 1\alpha) = \delta(xyz),$$

其中在第二步中我们使用了 $(1 \otimes y)\alpha = (y \otimes 1)\alpha$。这表明 δ 是 $(A \otimes A)$-线性的。我们有 $\mu(\delta(x)) = x\mu(\alpha) = 1$，因此 δ 是一个分裂幂等元。显然 $\alpha = \delta(1)$，因此可以通过命题陈述中的构造从 δ 恢复出 α 。□

下述 命题说明了这些概念与 ´étale 代数的相关性 .

命题 4.6。刚性代数是 ´étale 的，当且仅当它是 μ-可分裂的。在此情况下，μ-分裂 δ 与 μ 对偶（因此是唯一的），并满足 $(\epsilon \otimes 1)\delta = \mathrm{id}$。

证明。设 A 是一个刚性的 μ-可分裂代数。设 δ 是一个分裂，且 $\alpha = \delta(1)$ 是相应的幂等元。考虑 $(\epsilon \otimes \mathrm{id})\alpha$。这等于以下复合

$$\mathbb{1} \xrightarrow{\alpha} A \otimes A \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\alpha_0} A \otimes A \otimes A \otimes A^\vee \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\mu\otimes\mathrm{id}} A \otimes A \otimes A^\vee \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\beta_0} A$$

其中 α_0 和 β_0 是（余）求值映射。由于 α 是一个分裂幂等元，我们可以将第三个映射改为 $\mu \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}$。由于 $\mu(\alpha) = 1$，可知上述复合也等于 1，即 $(\epsilon \otimes \mathrm{id})\alpha = \eta$。现在我们有

$$(\epsilon \otimes \mathrm{id})\delta(x) = (\epsilon \otimes \mathrm{id})(1 \otimes x)\alpha = x(\epsilon \otimes \mathrm{id})\alpha = x,$$

也就是说，$(\epsilon \otimes \mathrm{id})\delta = \mathrm{id}$。因此，

$$(\beta \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \alpha)(x) = (\epsilon \otimes 1)(\delta(x)) = x,$$

这表明 β 和 α 定义了 A 的一个自对偶，即 A 是 ´étale。我们有

$$\beta_{A\otimes A}(x \otimes y, \delta(z)) = (\epsilon \otimes \epsilon)((x \otimes y) \cdot \delta(z)) = (\epsilon \otimes \epsilon)(\delta(xyz)) = \epsilon(xyz) = \beta_A(\mu(x \otimes y), z).$$

在第三步中，我们将 $\epsilon \otimes \epsilon$ 分解为 $(\epsilon \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \epsilon)$，并利用了 $(\mathrm{id} \otimes \epsilon)\delta = \mathrm{id}$。这表明 δ 和 μ 互为伴随，因此 $\delta = \mu^\vee$。这说明 δ 是唯一的。

现在假设 A 是一个 ´étale 代数，并令 $\delta = \mu^\vee$。那么

$$\begin{aligned}\beta_{A\otimes A}(x_1 \otimes x_2, (y_1 \otimes y_2)\delta(z)) &= \beta_{A\otimes A}(x_1y_1 \otimes x_2y_2, \delta(z)) = \beta_A(x_1y_1x_2y_2, z) \\ &= \beta_A(x_1x_2, y_1y_2z) = \beta_{A\otimes A}(x_1 \otimes x_2, \delta(y_1y_2z)),\end{aligned}$$

因此 $\delta(y_1y_2z) = (y_1 \otimes y_2)\delta(z)$，即 δ 是 $(A \otimes A)$-线性的。令 $\alpha\colon \mathbb{1} \to A \otimes A$ 为β的对偶；这是 A的自对偶中的余评价映射。根据定义， ϵ 是复合

$$A \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\alpha} A \otimes A \otimes A \xrightarrow{\mu\otimes\mathrm{id}} A \otimes A \xrightarrow{\beta} \mathbb{1}.$$

由于 $\beta = \epsilon \circ \mu$和 μ是结合的，我们可以将上面第二个映射中的 $\mu \otimes \mathrm{id}$ 改为 $\mathrm{id} \otimes \mu$。因此我们得到 $\epsilon(x) = \beta(x, \mu(\alpha))$。由于我们还有 $\epsilon(x) = \beta(x, 1)$，可知 $\mu(\alpha) = 1$，即 $\mu \circ \alpha = \eta$。将等式 $\beta = \epsilon \circ \mu$ 对偶化，我们得到 $\alpha = \delta \circ \eta$，即 $\alpha = \delta(1)$，因此 $\mu(\delta(1)) = 1$。因此

$$\mu(\delta(x)) = \mu((x \otimes 1) \cdot \delta(1)) = x \cdot \mu(\delta(1)) = x.$$

因此， δ 是一个 μ可分裂。 □

4.4. Frobenius 代数。我们已经看到，´étale 代数具有各种额外结构。下面的定义有助于整理这些结构。

定义 4.7。一个Frobenius 代数[4]在 $\mathcal{C}$ 是一个对象 A 配备了映射

$$\eta\colon \mathbb{1} \to A, \quad \mu\colon A \otimes A \to A, \quad \epsilon\colon A \to \mathbb{1}, \quad \delta\colon A \to A \otimes A$$

满足以下条件：

(a) (A, μ, η) 是一个交换、结合、含幺代数对象。(b) (A, δ, ϵ) 是一个余交换、余结合、余幺余代数对象。(c) 我们有

$$(\mathrm{id} \otimes \mu) \circ (\delta \otimes \mathrm{id}) = \delta \circ \mu = (\mu \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \delta)$$

作为映射 $A \otimes A \to A \otimes A$。

（d）我们有 $\mu \circ \delta = \mathrm{id}_A$。 □

以下是 Frobenius 代数的典型示例。

例 4.8. 设 X 是一个有限集，设 $A = k[X]$ 是以$\{e_x\}_{x\in X}$为基的向量空间。则 A 是一个 Frobenius 代数（在向量空间范畴中），其

$$\eta(1) = \sum_{x\in X} e_x, \qquad \mu(e_x \otimes e_y) = \delta_{x,y} e_x, \qquad \epsilon(e_x) = 1, \qquad \delta(e_x) = e_x \otimes e_x,$$

其中第二个等式中的 δ 是克罗内克δ。相对于迹配对 β，这些基向量是正交归一的。□

例 4.9。设 G 是一个带有 k值测度 μ的容许群。那么对于任意G集合 X，对象 Vec_X 自然地是 Perm(G; μ) 中的 Frobenius 代数。各个映射的定义与示例 4.8 中的定义类似。□

例 4.10。设 G 和 μ 如上，并假设 μ 是正规的。对于任意有限的G-集 X，施瓦茨空间 $\mathcal{C}(X)$ 自然地是张量范畴 RepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRep(G; μ) ~~中的~~ Frobenius 代数。这由前一个例子可得，因为 $\mathcal{C}(X)$ 是 Vec_X 在张量函子 Perm(G; μ) $\to$ RepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRep(G; μ) 下的像。不过，也可以直接看出这一点：例如，$\mathcal{C}(X)$ 上的乘法就是 X 上函数通常的逐点乘法。□

下一个命题将弗罗贝尼乌斯代数与´étale代数联系起来。

命题 4.11。我们有如下结论：

(a) 设 A 是一个 Frobenius 代数。则 (A, μ, η) 是一个 ´Etale 代数。此外，ϵ 是此代数的迹，而 δ 是 μ-可分裂。(b) 设 (A, μ, η) 是一个 ´Etale 代数。令 ϵ 为 A 上的迹映射，令 δ 为 A 的 μ-可分裂。则 $(A, \mu, \eta, \delta, \epsilon)$ 是一个 Frobenius 代数。

证明。<style id='3''>(a) 设 A 是一个 Frobenius 代数。定义4.7(c,d) 正合地表明 δ 是一个 μ-可分裂。设 $\alpha = \delta \circ \eta$ 和 $\beta = \epsilon \circ \mu$。于是

$$(\beta \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \alpha)(x) = (\epsilon \otimes 1)((x \otimes 1) \cdot \delta(1)) = (\epsilon \otimes 1)(\delta(x)) = x.$$

在最后一步中，我们使用了 ϵ 是 δ的余单位。因此我们看到，A 是自对偶的。由于 A 是刚性的，并且 μ-可分裂，因此它是 ´étale（命题4.6）。

[4]我们所称的“Frobenius 代数”通常被称为“特殊交换Frobenius 代数”。我们不需要更一般的弗罗贝尼乌斯代数。

计算　结合上述 A 的自对偶性，我们发现， A 的迹形式是

$$A \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\eta} A\otimes A \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\delta} A\otimes A\otimes A \xrightarrow{\mu\otimes\mathrm{id}} A\otimes A \xrightarrow{\mu} A \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{1}.$$

由于 μ 具有结合性，我们可以将中间的 $\mu\otimes\mathrm{id}$ 改为 $\mathrm{id}\otimes\mu$。由于 $\mu\circ\delta=$ 根据定义 4.7(d)，随后我们可以消去第二个和第三个映射。由于 $\mu\circ(\mathrm{id}\otimes\eta)=\mathrm{id}$，因此我们可以消去第一个和第四个映射。由此我们得到 ϵ 是 A 的迹。

(b) 由于 ϵ 和 δ 是 η 和 μ（命题 4.2 和 4.6），因此 A、δ、ϵ）是一个余交换、余结合、余幺余代数。我们已经指出，定义 4.7（c,d）中的条件等价于 δ 是一个 μ-可分裂。由此可见， A 是一个 Frobenius 代数。 □

命题 4.11(b) 表明，每个 ´étale 代数都可以提升为 Frobenius 代数；事实上，这种提升是唯一的，因为命题4.11(a) 根据代数结构指定了 ϵ 和 δ。由此可见， ´étale 代数与 Frobenius 代数是等价的概念。

´5. Etale algebras in abelian tensor categories

5.1. 模。 在整个 $\mathcal{C}$ §5 中固定一个刚性阿贝尔张量范畴。回忆一下，若 A 是 $\mathcal{C}$ 中的一个代数，则 Mod_A 本身也是一个张量范畴，其张量积为 $\otimes_A$。一般而言，Mod_A不具有刚性；事实上， $\otimes_A$ 通常甚至不是正合的。然而，对于以下´étale 代数，我们确实可以得到刚性：

Pro命题5.1。如果 A 是一个 ´étale代数，那么 Mod_A 是一个刚性张量范畴 y.

证明。令 M 为一个 A-模。令 $M^\vee$ 为其在 $\mathcal{C}$中的对偶，并令 α_M 和 β_M 为（余-）求值映射。对象 $M^\vee$具有唯一的 A-模结构，使得 $\beta_M(ax,y)=\beta_M(x,ay)$；我们还有$(a\otimes 1)\alpha_M=(1\otimes a)\alpha_M$。特别地，我们有 $\beta_M(\alpha_A\cdot(x\otimes y))=\beta_M(x,y)$和 $\alpha_A\cdot\alpha_M=\alpha$，其中 α_A是 A的分裂幂等元（回忆 $\mu_A(\alpha_A)=1$）。

定义 $\alpha_{M/A}$：$M\otimes_A M^\vee\to A$为复合

$$M\otimes_A M^\vee \xrightarrow{\alpha_A} M\otimes M^\vee \xrightarrow{1\otimes\alpha_A} M\otimes M^\vee\otimes A \xrightarrow{\beta_M\otimes\mathrm{id}} A$$

令 $\beta_{M/A}$ 为复合

$$A \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\alpha_M} A\otimes M^\vee\otimes M \longrightarrow M^\vee\otimes_A M,$$

其中第二个映射是先施加自然商映射，再进行标量乘法。可以发现，

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}\otimes\beta_{M/A})(\alpha_{M/A}\otimes\mathrm{id})(x) &= (1\otimes\beta_M)(1\otimes\alpha_A)(\alpha_A\otimes 1)(\alpha_M\otimes\mathrm{id})(x)\\ &= (1\otimes\beta_M)(\alpha_M\otimes\mathrm{id})(x)=x,\end{aligned}$$

类似地$(\beta_{M/A}\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\alpha_{M/A})=\mathrm{id}$。因此， $M^\vee$ 是 M 在 Mod_A 中的对偶。 □

推论 5.2. 设 A 是一个 ´埃塔尔代数。

(a) 环 $\Gamma(A)$ 是绝对平坦的。(b) A 的理想与 $\Gamma(A)$ 的幂等元一一对应。(c) A 的任意商代数都是 ´étale 的。

证明。由于 A 是刚性张量范畴 Mod_A 中的单位对象，前两个陈述由命题 2.5 得出。对于 (c)，设 I 是 A 的一个理想。则对于 $\Gamma(A)$ 中的某个幂等元 γ，有 $I=\gamma A$。令 $J=(1-\gamma)A$。则 I 和 J 是代数（单位元分别为 γ 和 $1-\gamma$），并且作为代数有 $A=I\oplus J$。由于 $\mathcal{C}$ 是刚性的，I 和 J 也具有刚性。由于 A 是étale 的，根据命题 4.1，I 和 J 是 étale 代数。最后注意到，A/I 作为代数同构于 J，因此是 étale 的。□

Cor论 5.3. 假设 $\mathcal{C}$ 是预坦纳范畴，并设 A 是一个 étale 代数 $a.$

(a) 不变代数 $\Gamma(A)$ 是一个 étale k-代数，即它是有限个 k的有限可分域扩张的积。

(b) A 分解为有限个原子 étale 代数的积。

证明。由于 $A^{\otimes n}$ 是 étale，$\Gamma(A^{\otimes n})$ 是约化的（推论 5.2），因此 $\Gamma(A)^{\otimes n}$ 也是约化的（由命题 2.7）。于是 $\Gamma(A)$ 是一个有限维 k-代数，且其每个张量幂都是约化的。由此可知，$\Gamma(A)$ 是 étale。$\Gamma(A)$ 的极小幂等元给出 A 分解为有限个代数的积，而根据命题 4.1，这些代数都是 étale。□

命题 5.1 表明，Mod_A 中的张量积在 A 为 可展时是正合的。事实上，关于这个张量积，我们有一个更强的结果。

命题 5.4. 设 A 是一个 可展代数，且 M和 N是 A-模。那么 $M\otimes_A N$是 $M\otimes N$ 中对应于投影算子 α_A的直和项。

证明。我们有

$$M\otimes_A N=(M\otimes N)\otimes_{A\otimes A}A,$$

这里将 A 视为通过 μ作用的（$A\otimes A$）-模。由于 A 是 可展的，A 是 $A\otimes A$ 中对应于幂等元 α_A的直和项，因此结论成立。□

在预坦纳范畴的情形下，命题 5.1 可以加强如下。

命题 5.5. 设 $\mathcal{C}$ 是预坦纳范畴，且 A 是 $\mathcal{C}$中的一个原子 可展代数。令 $K=\Gamma(A)$，它是 k 的有限可分扩张。那么，Mod_A 是 K上的预坦纳范畴。

证明。根据推论 5.3，K 是 k的有限可分扩张。如果 $f\colon M\to N$ 是A-模的映射，且 $a\in K$，那么我们通过 $a\otimes f\colon A\otimes_A M\to A\otimes_A M$得到一个新的映射 $af\colon M\to N$。这表明 Mod_A 是一个 K-线性范畴。由于 Mod_A 的对象是带有额外结构的 $\mathcal{C}$对象，因此显然所有对象都具有有限长度，且所有 Hom 空间都是有限维的。我们已经看到，Mod_A 是刚性的（命题 5.1）。最后，$\mathrm{End}_A(A)=K$。因此，Mod_A 是预坦纳范畴。□

例 5.6。假设 G 是一个有限群，且 $\mathcal{C}=\mathrm{Rep}(G)$。如果 H 是一个子群，那么容易看出，G/H 上的函数空间是 $\mathcal{C}$中的一个原子 étale 代数 A。模范畴 Mod_A 等价于 $\mathrm{Rep}(H)$。□

例 5.7。设 G 是一个带有正规测度的容许群 μ，且 $\mathcal{C}=\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}(G;\mu)$ 是预坦纳范畴。给定一个开子群 U，施瓦茨空间 $A=\mathcal{C}(G/U)$ 是一个 étale 代数（例 4.10），并且很容易看出它是原子的。模范畴 Mod_A等价于 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}(U;\mu)$。□

例 5.8。 设 G 和 μ 如上所述，并令 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}(\hat{G};\mu)$ 如备注 3.4所述，它是一个刚性阿贝尔张量范畴。若 X 是一个有限型 G-集，则 $\mathcal{C}(X)$ 是该范畴中的一个 ´étale 代数（这与例 4.10类似）。它的不变代数仍然是 $\mathcal{C}(X)$，但此时是向量空间范畴中的代数。因此，推论 5.2 意味着 $\mathcal{C}(X)$ 是绝对平坦的，这一点也很容易直接看出。□

´5.2. étale 态射。设 $f\colon A \to B$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个代数态射。若 f 是 ´étale 的，或者说 B 是一个 ´étale A- 代数，则称之为 étale ；这意味着 B 是范畴 Mod_A 中的一个 étale 代数。注意， $\mathcal{C}$ 中的代数 B 是 étale 的，当且仅当它是一个 étale 1-代数。

命题 5.9。设 $A \to B$ 是一个 étale 代数映射，且 $A \to A'$ 是任意代数映射。那么 $A' \to A' \otimes_A B$ 是 étale 的。

证明。 函子 $\mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_{A'}$ 由 $A' \otimes_A -$ 给出，是一个张量函子，因此会将´étale 代数映射到 ´étale 代数（命题 4.3）。□

命题 5.10. 设 $f\colon A \to B$ 是一个代数同态，且 A ´是 étale 的。那么 B 是´étale 的，当且仅当 f 是 ´étale 的。

证明. 假设 f 是 ´étale 的。设 $\alpha_{B/A} \in \Gamma(B \otimes_A B)$ 是 Mod_A 中 B 的一个分裂幂等元，并设 $\alpha_A \in \Gamma(A \otimes A)$ 是 A的分裂幂等元。令 $\alpha_B = \alpha_A \alpha_{B/A} \in \Gamma(B \otimes B)$。（这里我们使用了这样一个事实：乘以 α_A 将 $B \otimes_A B$ 识别为 $B \otimes B$的一个直和项。）显然， α_B 是幂等元，且 $\mu_B(\alpha_B) = 1$。若 x 是 B 的一个点，则 $(x \otimes 1)^{\alpha_{B/A}} = (1 \otimes x)^{\alpha_{B/A}}$ 在 $B \otimes_A B$中成立。乘以 α_A，可得 $(x \otimes 1)\alpha_B = (1 \otimes x)\alpha_B$ 在 $B \otimes B$中成立。因此， α_B 是 B的一个分裂幂等元，所以 B是 μ-可分裂的。由于 $\mathcal{C}$ 是刚性的，由此可知 B 是 ´étale 的（命题 4.6）。

现在假设 B 是 ´étale 的。令 $\alpha_{B/A}$ 为 α_B 在 $B \otimes_A B$中的像。这显然是一个分裂幂等元，因此 B 是 μ-分裂的 Mod_A。由于 Mod_A 是刚性的（命题 5.1），可知 B 是 ´Mod_A 中的 étale 代数（命题 4.6）。□

We n注意，该命题意味着 ´étale 映射的复合仍是 ´étale 的 .

推论 5.11。设 $A \to B$ 和 $A \to C$ 是 étale 代数之间的映射。那么 $B \otimes_A C$ 是一个´étale 代数。若 A 是原子的，且 B 和 C 非零，则 $B \otimes_A C$ 也非零。

证明。根据假设，映射 $\mathbb{1} \to A$ 是 ´étale 的；映射 $A \to B$ 是 ´étale 的（命题 5.10）；映射 $B \to B \otimes_A C$ 是 ´étale 的（命题 5.9）。因此， $\mathbb{1} \to B \otimes_A C$ 是 ´étale 的（命题 5.10）。现在证明最后一句。由于 A 是原子的，它的理想只有 0 和 A（推论 5.2）。由于 A 和 B 是非零代数，映射 $A \to B$ 非零，因此必为单射。于是 B 是一个忠实平坦的 A-模（推论 2.9），因此 $B \otimes_A C$非零，因为 C 非零。□

5.3. 子代数。设 B 是 $\mathcal{C}$ 中的一个 ´étale 代数。我们现在的目标是对 B 的 ´étale 子代数进行分类。分类将使用以下概念。 B 的一个 E-幂等元是满足以下条件的幂等元 $\gamma \in \Gamma(B \otimes B)$：

(a) 我们有 $\alpha \cdot \gamma = \alpha$，其中 α 是 B的分裂幂等元。(b) γ是对称的，即 $\tau(\gamma) = \gamma$，其中 $\tau\colon B \otimes B \to B \otimes B$是对称同构。(c) 对于 $1 \le i < j \le 3$，令 $\gamma_{i,j}$ 为 $B \otimes B \otimes B$ 的幂等元，它在 i 和j 因子中取值为 γ，在其余因子中取值为 1。于是 $\gamma_{1,2}\gamma_{2,3} = \gamma_{1,2}\gamma_{1,3} = \gamma_{1,3}\gamma_{2,3}$。

给定一个 E-幂等元 γ，定义 B^γ 为该映射的核。

$$B \to B \otimes B, \qquad x \mapsto \gamma \cdot (x \otimes 1 - 1 \otimes x).$$

若 $\mathcal{C}$ 是向量空间范畴，那么 B 的一个 E-幂等元对应于 Spec(B) 上的一个等价关系，而 Spec(B^γ) 是商空间。反过来，假设 A 是 B的一个子代数。令 $I(A$为映射 $B \otimes B \to B \otimes_A B$的核。根据推论 5.2，存在唯一的幂等元 $\gamma(A$，属于 $\Gamma(B \otimes B$，使得 $I(A) = \ker(\gamma(B))$. 以下是我们的主要结果：

命题 5.12. 设 B 是一个 ´étale 代数。那么 $A \mapsto \gamma(A)$ 和 $\gamma \mapsto B^\gamma$ 定义了互为逆映射的双射

$$\{\textit{étale subalgebras of } B\} \leftrightarrow \{E\textit{-idempotents of } B\}.$$

在证明该命题之前，我们需要两个引理。

引理 5.13. 设 B 是一个 ´étale 代数，设 γ 是 B的一个 E-幂等元，并令 $A = B^\gamma$。那么：

(a) A 是 B的子代数。(b) γ 属于 $\Gamma(A \otimes A) \subset \Gamma($ $B \otimes B)$。(c) A 是正合的，且 γ 是 A的分裂幂等元。
(d) $I(A)$ =核(γ)。

证明。(a) 显然，1属于 A，即 η 可经由 A分解。设 x 和 y 是 A的点。我们有

$$xy \otimes 1 - 1 \otimes xy = (x \otimes 1)(y \otimes 1 - 1 \otimes y) + (x \otimes 1 - 1 \otimes x)(1 \otimes y).$$

由于右边被 γ消去，左边也如此。因此 xy 是 A的一个点，所以 A 对乘法封闭。因此 A 是 B的子代数。

(b) 由于 $\otimes$ 是正合的， $A \otimes A$ 是该映射的核

$$B \otimes B \to (B \otimes B \otimes B) \oplus (B \otimes B \otimes B)$$
$$x \otimes y \mapsto \big(\gamma_{1,2}(x \otimes 1 - 1 \otimes x) \otimes y\big) \oplus \big(\gamma_{2,3} x \otimes (y \otimes 1 - 1 \otimes y)\big).$$

γ 在此映射下的像是

$$\gamma_{1,2}(\gamma_{1,3} - \gamma_{2,3}) \oplus \gamma_{2,3}(\gamma_{1,3} - \gamma_{1,2}),$$

根据假设，该映射为零。因此 γ 映射到 $A \otimes A$中。

(c) 令 α 为 B的分裂幂等元。将 μ 应用于等式 $\alpha\gamma = \alpha$，并利用 $\mu(\alpha) = 1$这一事实，可得 $\mu(\gamma) = 1$。根据 A 的定义，对于 A 中的任意点 x，都有 $(x \otimes 1)\gamma = (1 \otimes x)\gamma$。因此， γ 是 A 的分裂幂等元，所以 A 是 ´étale（命题 4.6）。

(d) 根据 A的定义，有 $I(A) \subset \ker(\gamma)$。由于 ker($\gamma$)由 $1 - \gamma$生成，只需证明 $1 - \gamma \in I(A)$，或者等价地，证明 γ 在 $B \otimes_A B$中映射为 1。若 $A \otimes A$ 中的任意元素为 z，则其在 $B \otimes_A B$ 中的像等于 $1 \otimes \mu_A(z)$。由于 γ属于 $A \otimes A$，且是 A的分裂幂等元，我们看到它在 $B \otimes_A B$ 中的像为 $1 \otimes \mu_A(\gamma) = 1$，正如所需。□

引理 5.14. 设 B 是一个 ´étale 代数，并设 A 是 B 的任意子代数。那么 $\gamma(A)$ 是 B 的 E-幂等元。

证明。由于 $I(A)$ 是对称的，因此 γ 也是。设 α 是对应于 B 的分裂幂等元。由于 $\alpha\cdot(x\otimes 1-1\otimes x)=0$，且 $\mathrm{im}(1-\gamma)$ 是由 $x\otimes 1-1\otimes x$ 生成的理想，其中 x 是 A 的一点，因此我们有 $\alpha(1-\gamma)=0$，这表明 $\alpha\le\gamma$。现在验证第三个条件。我们首先断言 $\gamma_{1,\,2}\gamma_{2,\,3}\le\gamma_{1,\,3}$。这等价于证明 $\ker(\gamma_{1,\,3})\subset\ker(\gamma_{1,\,2}\gamma_{2,\,3})$。$\ker(\gamma_{1,\,3})$ 中的一个一般点具有如下形式

$$x\otimes 1\otimes 1-1\otimes 1\otimes x.$$

这等于

$$(x\otimes 1\otimes 1-1\otimes x\otimes 1)+(1\otimes x\otimes 1-1\otimes 1\otimes x).$$

上面的第一项属于 $\ker(\gamma_{1,\,2})$，而第二项属于 $\ker(\gamma_{2,\,3})$。由于 $\ker(\gamma_{1,\,2}\gamma_{2,\,3})$ 同时包含 $\ker(\gamma_{1,\,2})$ 和 $\ker(\gamma_{2,\,3})$，结论成立。现在，利用对称性，只要 $\{i,j,k\}=\{1,2,3\}$，就有 $\gamma_{i,\,j}\gamma_{j,\,k}\le\gamma_{i,\,k}$。两边乘以 $\gamma_{i,\,j}$，可得 $\gamma_{i,\,j}\gamma_{j,\,k}\le\gamma_{i,\,j}\gamma_{i,\,k}$。反向的不等式由对称性成立，因此两边相等。由此我们证明了 γ 是一个 E-幂等元。□

命题的证明 *5.12*。 设 γ 是 B 的一个 E-幂等元，并令 $A=B^{\gamma}$。那么 A 是 ´étale（引理 5.13）。现在我们证明 $\gamma=\gamma(A)$。为此，只需证明这两个幂等元具有相同的核。根据定义，有 $\ker(\gamma(A))=I(A)$，而根据引理 $\gamma)=I(A)$ 可得核，见引理 5.13。

现在令 A 为 ´的 étale子代数， B 并令 $\gamma=\gamma(A)$。则 γ 是B 的 E-幂等元（引理 5.14）。我们断言 $A=B^{\gamma}$。这等价于证明正合列的正合性

$$A\longrightarrow B\longrightarrow B\otimes_A B,$$

其中第二个映射是 $x\otimes 1-1\otimes x$；事实上，该映射的核是 B^{γ}，这是由定义得到的。这就是平坦下降；我们回顾一下论证。首先， B 在 A 上是平坦的，因为 Mod_A 是刚性的（命题 5.1），并且是忠实平坦的，因为 $A\to B$ 是单射（推论 2.9）。因此，我们可以在应用 $B\otimes_A$–后验证上述正合列的正合性。这得到正合列

$$B\xrightarrow{d_1}B\otimes_A B\xrightarrow{d_2}B\otimes_A B\otimes_A B,$$

其中

$$d_1(x)=x\otimes 1,\qquad d_2(x\otimes y)=x\otimes y\otimes 1-x\otimes 1\otimes y.$$

定义映射 s_1 和 s_2，方向与 d_1 和 d_2 相反：

$$d_1(x\otimes y)=xy,\qquad d_2(x\otimes y\otimes z)=xy\otimes z.$$

于是 $d_1s_1-s_2d_2$ 是 $B\otimes_A B$ 上的单位元，因此 $\ker(d_2)=\mathrm{im}(d_1)$，如所要求。 □

Q问题 5.15. ´etale 代数的所有子代数本身都是 ´etale 吗?

6. The oligomorphic fundamental group

6.1. 主要定理。设 $\mathcal{C}$是一个预坦纳范畴。回顾 $\mathrm{Et}(\mathcal{C})$ 是 ´etale 代数在 $\mathcal{C}$中的范畴。我们将 $\mathrm{S}(\mathcal{C})$ 定义为 $\mathrm{Et}(\mathcal{C})$ 的对偶范畴。按照 Deligne [Del1，第 7.8], 节，我们将 $\mathrm{S}(\mathcal{C})$ 视为 ´etale 仿射概形在 $\mathcal{C}$中的范畴。对于一个 ´etale 代数 A，我们用 $\mathrm{Sp}(A)$ 表示 $\mathrm{S}(\mathcal{C})$ 中对应的对象。以下是本文的关键技术定理，将在下文 §6.2 中证明。

定理 6.1. 范畴 $\mathrm{S}(\mathcal{C})$ 是预伽罗瓦的。

结合 t 结合定理 3.2，我们现在可以引入以下不变量 :

定义 6.2. 设 $\mathcal{C}$ 为一个预坦纳范畴。我们将 $\mathcal{C}$的寡形基本群记为 $\pi^{\text{olig}}(\mathcal{C})$，定义为满足 $\mathbf{S}(\mathcal{C}) \cong \mathbf{S}(G)$ 的容许群 G。□

我们注意到，群 G 并非唯一；参见 §3.2。参见 §6.3 中的一些例子。

注 6.3。范畴 $\mathbf{S}(\mathcal{C})$ 也可以描述为 $\mathcal{C}$ 中 Frobenius 代数构成的范畴，其态射为余代数同态。□

6.2. 定理 **6.1** 的证明。我们验证定义 3.1中的每个条件。

(a) 我们已经看到，$\mathbf{Et}(\mathcal{C})$ 有有限积：若 A 和 B 是 ´étale 代数，则它们的积是 ´étale 代数 $A \oplus B$。因此，$\mathbf{S}(\mathcal{C})$ 有有限余积，通过

$$\mathrm{Sp}(A) \amalg \mathrm{Sp}(B) = \mathrm{Sp}(A \oplus B).$$

(b) 显然，$\mathbf{Sp}(A)$ 是$\mathbf{S}(\mathcal{C})$ 中的原子对象，当且仅当 A 是原子代数。根据推论 5.3，每个 ´étale 代数都是有限个原子 ´étale 代数的积。因此，$\mathbf{S}(\mathcal{C}$中的每个对象都是原子的有限余积。

(c) Let A、B 和 C be ´etale 代数，其中 A 是原子的。我们证明该映射

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Sp}(A), \mathrm{Sp}(B)) \amalg \mathrm{Hom}(\mathrm{Sp}(A), \mathrm{Sp}(C)) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Sp}(A), \mathrm{Sp}(B) \amalg \mathrm{Sp}(C))$$

是双射。等价地，我们必须证明

$$\mathrm{Hom}(B, A) \amalg \mathrm{Hom}(C, A) \to \mathrm{Hom}(B \oplus C, A)$$

是双射，其中 Hom 是在范畴 $\mathbf{Et}(\mathcal{C})$ 中取的。显然它是单射。设 $f\colon B \oplus C \to A$ 是给定的代数映射。设 $e \in \Gamma(B)$ 和 $e' \in \Gamma(C)$ 分别为单位元。这些是 $\Gamma(B \oplus C)$ 中和为 1 的正交幂等元。因此，$f(e)$ 和 $f(e')$ 是 $\Gamma(C)$ 中和为 1 的正交幂等元。由于 C 是原子的，$\Gamma(C)$ 是一个域，因此 $f(e) = 0$ 或 $f(e') = 0$；不妨设后者成立。于是 e' 属于 f 的核，因此 C 全部包含在 f 的核中。因此，f 属于上述映射下 $\mathbf{Hom}(B, A)$ 的像，这就完成了证明。

(d) 若 $A \to B$和 $A \to C$是 $\mathcal{C}$中的代数映射，则 $B \otimes_A C$是 $\mathbf{Alg}(\mathcal{C})$ 中的推出。若 A、B和 C均为 ´étale，则 $B \otimes_A C$ 也如此（推论 5.11），因此它是范畴 $\mathbf{Et}(\mathcal{C})$ 中的推出。因此 $\mathbf{Et}(\mathcal{C})$ 有推出，故 $\mathbf{S}(\mathcal{C})$ 有纤维积。明确地，

$$\mathrm{Sp}(B) \times_{\mathrm{Sp}(A)} \mathrm{Sp}(C) = \mathrm{Sp}(B \otimes_A C).$$

(e)设 $\mathbf{Sp}(f) : \mathbf{Sp}(B) \to \mathbf{Sp}(A)$是$\mathbf{S}(\mathcal{C})$ 的原子对象之间的单态射。我们断言 f 是同构。由于 $\mathbf{Sp}(f)$ 是单态射，该映射

$$p_1 \colon \mathrm{Sp}(B) \times_{\mathrm{Sp}(A)} \mathrm{Sp}(B) \to \mathrm{Sp}(B)$$

是一个同构，其中 p_1 是投影到第一个因子的映射。翻译为代数语言，这表示映射

$$\mathrm{id} \otimes f \colon B \otimes_A A \to B \otimes_A B$$

是同构。由于 A 是原子，$f\colon A \to B$ 是单射（推论 5.2），因此 B在 A 上是忠实平坦的（推论 2.9）。由于 f 应用$B \otimes_A -$后变为同构，因此 f 是同构。

（f）考虑映射 $\mathbf{Sp}(B) \to \mathbf{Sp}(A)$ 和 $\mathbf{Sp}(C) \to \mathbf{Sp}(A)$，其中 $\mathbf{Sp}(B)$ 和 $\mathbf{Sp}(C)$ 非空，且 $\mathbf{Sp}(A)$ 是原子的。因此，B 和 C 非零，而 A 是原子的。我们有

$$\mathrm{Sp}(B) \times_{\mathrm{Sp}(A)} \mathrm{Sp}(C) = \mathrm{Sp}(B \otimes_A C).$$

由于 $B \otimes_A C$ 非零（推论 5.11），因此上述纤维积非空。

(g) 我们已经指出 $\mathbb{1}$ 是 Et($\mathcal{C}$) 的始对象，因此 Sp($\mathbb{1}$) 是 S($\mathcal{C}$) 的终对象。由于 $\mathcal{C}$ 是预坦纳范畴， $\mathbb{1}$ 是单的（推论 2.6），因此是原子的。所以 Sp($\mathbb{1}$) 也是原子的。

(h)假设 R 是Sp(B)上的等价关系，且位于范畴S($\mathcal{C}$)中，即， R 是Sp($B \otimes B$)的一个子对象，满足等价关系公理。

我们首先作一个一般性观察。设 Sp(A) 是S($\mathcal{C}$中的一个对象。Sp(A) 的子对象是其某些原子的并 [HS3，推论 3。14], 因此具有 Sp($\gamma \cdot A$) 的形式，其中 $\gamma \in \Gamma(A)$ 是某个幂等元。这建立了 $\Gamma(A)$ 的幂等元与 Sp(A) 的子对象之间的保序双射；这里幂等元按通常方式排序。特别地，若 X_1 和 X_2 是分别对应于幂等元 γ_1 和 γ_2 的子对象，那么$X_1 \cap X_2$ 对应于 $\gamma_1\gamma_2$。

现在，令 γ 为 $\Gamma(B \otimes B)$ 中与 R 对应的幂等元。我们声称 γ 是一个 E-幂等元（见 §5.3）。$B \otimes B$ 的对角线对应于分裂幂等元$\alpha \in \Gamma(B \otimes B)$；由于 R 包含该对角线，因此我们有 $\alpha \leq \gamma$，即 $\alpha\gamma = \alpha$。由于 R 是对称的， γ 也是如此。最后，采用显然的记号，我们有 $R_{1、2} \cap R_{2、3} = R_{1、3} \cap R_{2、3} = R_{1、2} \cap R_{1、3}$，从而得到 $\gamma_{1、2}\gamma_{2、3} = \gamma_{1、3}\gamma_{2、3} = \gamma_{1、2}\gamma_{1、3}$。这证明了该断言。

令 $A = B^{\gamma}$。我们断言，Sp(B) $\to$ Sp(A) 是映射 $R \rightrightarrows B$的余等化子。事实上，假设Sp(B) $\to$ Sp(A') 是某个使两条箭头余等化的映射。这恰好意味着两个复合

$$A' \to B \rightrightarrows \gamma \cdot (B \otimes B)$$

相等，其中右侧的两个映射将 x 发送到 $x \otimes 1$ 和 $1 \otimes x$。因此， A' 映射到 $x \mapsto \gamma(x \otimes 1 - 1 \otimes x)$的核中，根据定义该核为 A。由于 $A \to B$ 是一个单射， A' 经过 A 的分解是唯一的。这就证明了该断言。

最后，我们断言 R 是映射 Sp(B) $\to \mathrm{Sp}(A)$ 的核对。这正合意味着 $R = B \otimes_A B$，这可由命题 $\gamma = \gamma(A)$ 中证明的关系推出5.12。由此可见，等价关系 R 是有效的。

6.3.例子。现在我们给出若干寡齐性基本群的例子。在以下例子中，我们假设 k 是特征零的代数闭域。

(a) 向量空间。令 $\mathcal{C} = \mathrm{Vec}^{\mathrm{f}}$ 为有限维 k-向量空间的范畴。然后 S($\mathcal{C}$)是有限 ´étaleschemes over k，这等价于有限集的范畴。这正是 S(G)，其中 G 是平凡群，因此 $\pi^{\mathrm{olig}}(\mathcal{C}) = 1$。

(b) 代数群。设 G 是一个在 k上的代数群，并且设 $\mathcal{C} = \mathrm{Rep}(G)$是 k的有限维代数表示范畴。那么 S($\mathcal{C}$) 是配备了 G代数作用的、在 k 上的有限 ´étale 概形范畴。任何此类作用都通过 $\pi_0(G)$分解，因此 S($\mathcal{C}$) 等价于有限 $\pi_0(G)$-集的范畴。因此$\pi^{\mathrm{olig}}(\mathcal{C}) = \pi_0(G)$。

(c) Deligne 的 $\mathfrak{S}_t$ 范畴。令 $\mathcal{C}$ 为 Deligne 范畴 RepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRep($\mathfrak{S}_t$)[Del3], 的阿贝尔版本，其中 $t \in k$, 这是一个预坦纳范畴。该范畴等价于 RepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRep^{f}($\mathfrak{S}$; μ_t)，其中 $\mathfrak{S}$ 是无限对称群， μ_t 是其上的特定测度。可能需要扩张标量，之后可以将 $\mathcal{C}$ 实现为普通表示范畴 Rep($\mathfrak{S}_n$) 的超积（其中 n 和系数域都在变化）[Har2]。从这个角度看，RepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRep($\mathfrak{S}_t$) 中的一个 ´étale 代数，是 Rep($\mathfrak{S}_n$) 中 ´étale 代数的超极限。这些代数不难分类，由此可知， $\mathcal{C}(X)$ 是 $\mathcal{C}$中唯一的 ´étale 代数；详情参见 [Har2, 命题 2.2] 。因此，S($\mathcal{C}$) 等价于该范畴

S(𝔖)，即有限生成的 𝔖-集合范畴，因此 $\pi^{\mathrm{olig}}(\mathcal{C}) = \mathfrak{S}$。类似的方法也适用于 Deligne 插值的其他情形。

(d) Deligne 的 $\mathbf{GL}_t$ 范畴。 Deligne 还定义了一个插值范畴 $\mathcal{C} = \overline{\mathrm{Rep}(\mathbf{GL}_t)}$，用于一般线性群。我们有 $\overline{\pi^{\mathrm{olig}}(\mathcal{C})} = 1$ 在此情形下成立，这可以利用 (c) 中的超积方法看出。

(e) 绕积 $\mathbf{GL}_u \wr \mathfrak{S}_t$。 可以构造一个范畴 $\overline{\mathrm{Rep}(\mathbf{GL}_u \wr \mathfrak{S}_t)}$，它与 $\overline{\mathbf{GL}_u}$ 和 $\mathfrak{S}_t$的“绕积”相关；参见 [Mor]。寡形基本群是无限对称群 $\mathfrak{S}$；这同样可由超积观点得到。

(f) 超向量空间。在超交换代数中，任何奇元素都是幂零的，因而属于迹形式的根基。因此，任何 ´etale 代数都必须是纯偶的，于是我们又回到了向量空间的情形；因此 $\pi^{\mathrm{olig}}(\mathbf{sVec}) = 1$。

(g) Verlinde 范畴。令 $\mathbf{Ver}_p$ 为 Verlinde 范畴（见 [Ost, §3.2]）。这是一个半单预坦纳范畴，具有 $p-1$ 个简单对象 $L_1, \dots, L_{p-1}$，其中 $L_1 = \mathbb{1}$。对于 $i \neq 1$，简单对象 L_i 会被某个对称幂消去（见 [Ven, 命题 3.1]）。因此，在交换代数中，任何满足 $i \neq 1$ 的 L_i 副本都属于根基。于是，etale 代数只能包含简单对象 L_1，因此 $\pi^{\mathrm{olig}}(\mathbf{Ver}_p) = 1$。

6.4. 单位连通分支。设 G 是一个代数群。可以认为 G 由两部分构成：其分支群 $\pi_0(G)$ 和单位连通分支 G°。如上所见，我们可以从 $\mathbf{Rep}(G)$ 中恢复 $\pi_0(G)$，将其视为寡形基本群。因此，自然会问，对于预坦纳范畴，是否存在一种一般构造，能够从 $\mathbf{Rep}(G)$ 中恢复 $\mathbf{Rep}(G^\circ)$。

事实上，确实存在这样一种构造，不过我们尚无法证明它一般具有良好的性质。设 $\mathcal{C}$ 是一个预坦纳范畴，并设 $H = \pi^{\mathrm{olig}}(\mathcal{C})$。对于 H的一个开子群 U，定义 $\mathcal{C}(U)$ 为与 H/U对应的原子 étale ˆ 代数上的模范畴；根据命题 ´5.5，它是预坦纳范畴。现在定义 $\mathcal{C}$ 为开子群偏序集上各范畴 $\mathcal{C}(U)$ 的 2-余极限。

ˆ若 $\mathcal{C} = \mathrm{Rep}(G)$ 是代数群 G的表示范畴，那么 $\mathcal{C}$ 确实是 $\mathbf{Rep}(G^\circ)$。遗憾的是，对于一般的预坦纳范畴，ˆ $\mathcal{C}$本身并非预坦纳范畴（尽管它总是刚性的）；事实上，若 $\mathcal{C} = \underline{\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}(G;\ \mu)}$，则 ˆ $\mathcal{C} = \underline{\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}(\hat{G};\ \mu)}$（见备注 3.4）。人们或许会希望，ˆ $\mathcal{C}$ 中的有限长度对象所成的范畴是一个预坦纳范畴。在这种情况下，这个范畴或许可以合理地称为 $\mathcal{C}$的“单位连通分支”。然而，我们尚无法证明这一点。

7. The measure on the oligomorphic fundamental group

7.1. 线性化。 本节 §7 的目标是为寡形基本群定义一个测度。为此，我们将借助 [HS1] 中的线性化理论。现在我们回顾这一理论。以下我们固定一个 B-范畴 $\mathcal{B}$，尽管我们真正感兴趣的只是 $\mathcal{B} = \mathbf{S}(G)$ 对应容许群 G 的情形。我们令 $\mathcal{B}^\circ$ 为一个范畴，它与 $\mathcal{B}$ 具有相同的对象，且其态射是 $\mathcal{B}$中的同构。我们有一个自然的识别，将$\mathcal{B}^\circ$ 与其对偶范畴对应起来。

对称幺半平衡函子 $\mathcal{B} \to \mathcal{T}$ 是对称幺半函子Ψ和 Ψ'的一个有序对 (Ψ): $\mathcal{B} \to \mathcal{T}$和 Ψ'满足，$\mathcal{B}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{T}$与 Ψ 对 $\Psi'(\mathcal{B}^\circ =)\mathcal{B}^\circ$的限制相等；这里，^{op}带有笛卡尔对称幺半结构。我们将其视为这样一条规则：为 $\mathcal{B}$的每个对象 X 指定 $\mathcal{B}(\Psi)$中的一个对象 X，并为每个态射 $\mathcal{T}$: f指定

$\mathcal{B}$ 态射 $\alpha_f\colon \Psi(X) \to \Psi(Y)$ 和 $\beta_f\colon \Psi(Y) \to \Psi(X)$；这里 $\alpha_f = \Psi(f)$ 和 $\beta_f = \Psi'(f)$。我们通常直接用 Ψ 代替 (Ψ, Ψ')。

假设我们有一个对称幺半平衡函子 Ψ。我们在 Ψ 上引入两个条件。我们称 Ψ 是加性的，如果

$$\Psi(X \amalg Y) = \Psi(X) \oplus \Psi(Y)$$

以自然的方式，对所有对象 X 和 Y 而言，$\mathcal{B}$。具体而言，设 $i\colon X \to X \amalg Y$ 和 $j\colon Y \to X \amalg Y$ 为自然映射。于是我们要求

$$\beta_i\alpha_i = \mathrm{id}_{\Psi(X)}, \quad \beta_i\alpha_j = 0, \quad \beta_j\alpha_i = 0, \quad \beta_j\alpha_j = \mathrm{id}_{\Psi(Y)}$$

$$\alpha_i\beta_i + \alpha_j\beta_j = \mathrm{id}_{\Psi(X \amalg Y)}.$$

对于 X of $\mathcal{B}$ 中的一个对象，我们令 $\alpha_X\colon \Psi(X) \to \mathbb{1}$ 和 $\beta_X\colon \mathbb{1} \to \Psi(X)$ 为自然映射 $X \to \mathbf{1}$ 所诱导的映射，其中 $\mathbf{1}$ 是 $\mathcal{B}$ 的终对象。我们称 Ψ 是丰足的，如果对于 $\mathcal{B}$ 的每个原子 X，空间 $\mathrm{Hom}(\Psi(X), \mathbf{1})$ 都是一维的，且由 α_X 张成。现在我们可以引入以下重要概念：

定义7.1。B-范畴 $\mathcal{B}$ 的线性化是一个二元组（$\mathcal{T}$，Ψ），其中 $\mathcal{T}$ 是一个张量范畴，且 $\Psi\colon \mathcal{B} \to \mathcal{T}$ 是一个对称幺半平衡函子，具有加性、充盈性，并且本质上满射。□

若 μ 是 $\mathcal{B}$ 的测度，则存在自然的线性化 $\Psi_\mu\colon \mathcal{B} \to \mathrm{Perm}(\mathcal{B};\ \mu)$由下式给出$\Psi_\mu(X) = \mathrm{Vec}_X$ 以及 $\alpha_f = A_f$ 和 $\beta_f = B_f$。此处测度的概念在定义 3.3之后进行了讨论，记号见 §3.4。事实上，我们证明了 [HS1，定理 9。9]这些涵盖了所有线性化：

定理 7.2。设 $\Psi\colon \mathcal{B} \to \mathcal{T}$ 是一个线性化。那么存在一个 k 值测度 μ，定义于 $\mathcal{B}$，以及一个张量范畴的等价 $\Phi\colon \mathrm{Perm}(\mathcal{B};\ \mu) \to \mathcal{T}$，使得 $\Psi = \Phi \circ \Psi_\mu$（实际相等）。$\mu$ 和 Φ 都是唯一的。

定理的证明7.2（具体而言，位于 [HS1之前的段落，引理 9。17]）准确展示了如何构造测度 μ：给定一个态射 $f\colon X \to Y$ 在 $\mathcal{B}$中，带有 Y一个原子，μ（f）是满足以下条件的唯一标量 $\alpha_f\beta_X = \mu$（f）β_Y。

7.2. 主定理。以下假设域 k 是代数闭的。设 $\mathcal{C}$ 是一个预坦纳范畴，$G = \pi^{\mathrm{olig}}(\mathcal{C})$ 是其寡形基本群。以下将 $\mathsf{S}(\mathcal{C})$ 与 $\mathsf{S}(G)$ 视为相同。对于一个有限型 G-集，我们令 $k[X]$ 表示 $\mathcal{C}$ 中相应的 ´étale 代数。对于有限型 G-集之间的态射 $f\colon X \to Y$，我们令 $f^*\colon k[Y] \to k[X]$ 表示相应的代数同态，并令 $f_*\colon k[X] \to k[Y]$ 表示 f^* 的对偶。

设 $f\colon X \to Y$ 是一个 G-集之间的态射，其中 X 是有限型的，且 Y 是传递的。则存在一个诱导映射 $f_*\colon \Gamma(k[X]) \to \Gamma(k[Y])$。由于 Y 是原子的，$\Gamma(k[Y]) = k$；事实上，根据命题 5.5，$\Gamma(k[Y])$ 是 k 的有限扩张域，而 k 是代数闭的。因此，我们可以将 $f_*(1)$ 视为 k 的一个元素。令 $\mu(f) = f_*(1)$。

定理 7.3。上述定义的规则 μ 是 G 上的测度。此外，存在一个自然的全忠实张量函子

$$\Phi\colon \underline{\mathrm{Perm}}(G; \mu) \to \mathcal{C}$$

满足 $\Phi(X) = k[X]$ 和 $\Phi(A_f) = f_*$ 和 $\Phi(B_f) = f^*$。

证明。我们定义一个对称幺半平衡函子 $\Psi\colon \mathsf{S}(G) \to \mathcal{C}$。对于一个有限型 G-集X，我们令 $\Psi(X) = k[X]$。对于有限型 G- 集之间的一个态射 $f\colon X \to Y$，我们定义 $\alpha_f = f_*$ 和 $\beta_f = f^*$。容易验证，Φ 自然地是一个对称幺半平衡函子，并且 Ψ 是加性的。如果 X 是一个原子，那么 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\Psi(X), 1)$ 与 $\Gamma(k[X])$ 对偶，因此是一维的；由于 α_X 非零，它就是一个基。由此可见，将 Ψ视为取值于其本质像的函子时，它是 $\mathsf{S}(G)$ 的一个线性化。该定理现由定理 7.2 及其后的评注得出。□

8. The main theorem

8.1. 阿贝尔包络。 在 §8中，我们证明主要定理。我们首先介绍一些围绕阿贝尔包络的术语。

定义8.1。设 $\mathcal{P}$ 是一个张量范畴。 $\mathcal{P}$ 的弱阿贝尔包络是一个对 $(\mathcal{R}, \Phi)$，其中 $\mathcal{R}$ 是一个预坦纳范畴，且 $\Phi\colon \mathcal{P} \to \mathcal{R}$ 是一个完全忠实张量函子，并且 $\mathcal{R}$ 的每个对象都是 Φ 的像中的某个对象的子商。□

定义 8.2.设 $\mathcal{P}$ 是一个张量范畴。 $\mathcal{P}$ 的阿贝尔包络是一个二元组（$\mathcal{R}$， Φ），其中$\mathcal{R}$ 是一个预坦纳范畴，且 Φ 是一个张量函子，使得对于任意预坦纳范畴 $\mathcal{T}$，该函子

$$\mathrm{Fun}^{\mathrm{ex}}_{\otimes}(\mathcal{R}, \mathcal{T}) \to \mathrm{Fun}^{\mathrm{faith}}_{\otimes}(\mathcal{P}, \mathcal{T}), \qquad \Psi \mapsto \Psi \circ \Phi$$

是一个等价，其中$\mathrm{Fun}^{\mathrm{ex}}_{\otimes}$ 表示正合张量函子的范畴，$\mathrm{Fun}^{\mathrm{faith}}_{\otimes}$ 表示忠实张量函子的范畴。□

定义 8.2取自 [CEAH，定义 3.1。2]。如果阿贝尔包络存在，则它在典范等价意义下唯一。阿贝尔包络也是弱阿贝尔包络。下面的例子表明，弱包络一般并不唯一。然而，对于范畴 $\mathsf{Perm}(G; \mu)$，我们不知道存在多个弱包络的例子。

例 8.3. 假设 k 具有正特征 p，且令 $\mathfrak{S}$ 为作用于集合 $\Omega = \{1, 2, \ldots\}$上的无限对称群。对于 $\mathfrak{S}$，取值于 k的测度由 $\mathbb{Z}_p$ [HS1, §15.7]中的元素参数化。对于 $t \in \mathbb{Z}_p$，令 μ_t 表示相应的测度。该测度不是正规的，但已知 $\mathsf{Perm}(\mathfrak{S}; \mu_t)$ 存在一个弱阿贝尔包络 $\mathcal{C}_t$。范畴 $\mathcal{C}_t$ 可以通过超积构造；参见 [Har1, §3.3]。有理由认为 $\mathcal{C}_t$ 是 $\mathsf{Perm}(\mathfrak{S}; \mu_t)$ 的阿贝尔包络，但这一点尚未得到证明。

令 $\Omega^{[n]}$ 表示 Ω^n 中坐标互异的点所组成的子集。令 $\mathsf{S}(\mathfrak{S}; \mathscr{E})$ 表示由 $\mathsf{S}(\mathfrak{S}$的以下对象组成的全子范畴：由形如 $\Omega^{[n]}$的轨道分解而成的 $\mathfrak{S}$-集。事实证明，这个范畴对积和纤维积封闭，因此它本身是一个 B-范畴（尽管它不是预伽罗瓦的，因为等价关系并非有效的）。按照 [HS1, §2.6], $\mathsf{S}(\mathfrak{S}; \mathscr{E})$ 的术语，它是 $\mathscr{E}$-光滑 $\mathfrak{S}$-集的范畴，其中 $\mathscr{E}$ 是由 Ω 生成的稳定子类。

范畴 $\mathsf{S}(\mathfrak{S}; \mathscr{E})$ 存在一种测度的概念；参见 [HS1，注记 3.2]。事实证明，这类测度由 k 的元素参数化；参见 [HS1，注记 15.8]。设 ν_a 是对应于 $a \in k$ 的测度。若 $a \in \mathbb{F}_p$，则对于任意提升 a 的 $t \in \mathbb{Z}_p$，$\mathsf{Perm}(\mathfrak{S}, \mathscr{E}; \nu_a)$ 都嵌入 $\mathcal{C}_t$，因而映射到 $\mathcal{C}_t$。不难看出，所有这类 $\mathcal{C}_t$ 都是 $\mathsf{Perm}(\mathfrak{S}, \mathscr{E}; \nu_a)$ 的弱阿贝尔包络。事实上，这些多种多样的弱阿贝尔包络的存在意味着 $\mathsf{Perm}(\mathfrak{S}, \mathscr{E}; \nu_a)$ 不存在阿贝尔包络。当 $a \notin \mathbb{F}_p$ 时，范畴 $\mathsf{Perm}(\mathfrak{S}, \mathscr{E}; \nu_a)$ 甚至不存在弱阿贝尔包络，因为它有一个迹非零的幂零自同态。□

8.2. 主定理：离散情形。 回忆一下，若每个对象都是某个离散 预坦纳范畴中的子商 ´étale 代数，则称该预坦纳范畴为离散的。现在我们可以给出这类范畴的粗略分类，这是定理 1.3的前半部分。

定理 8.4。设 $\mathcal{C}$ 是一个离散预坦纳范畴，设 $G = \pi^{\mathrm{olig}}(\mathcal{C})$，并设 μ 是 G 上的诱导测度。那么自然函子 $\Phi\colon \mathrm{Perm}(G;\mu) \to \mathcal{C}$ 是一个弱阿贝尔包络。

证明。 测度 μ 和函子 Φ 是在定理 7.3中构造的，该定理还表明 Φ 是完全忠实的。由于每个 ´étale 代数都属于 Φ 的本质像，而 $\mathcal{C}$ 中的每个对象都是某个 ´étale 代数的子商，因此 Φ 是一个弱阿贝尔包络。 □

注 8.5。假设在定理的设定下， $\mathcal{C}$ 由单个 ´étale 代数 A 生成。令 $\mathcal{B}$ 为 $\mathbf{S}(\mathcal{C})$ 中由 $\mathbf{Sp}(A)$ 生成的子预伽罗瓦范畴；由于 $\mathcal{B}$ 是有限生成的，它具有 $\mathbf{S}(H)$ 的形式，其中 H 是一个寡轨道群。仿照定理的证明，可以发现，对于某个 H 上的测度 ν ， $\mathcal{C}$ 是 $\mathrm{Perm}(H;\nu)$ 的弱阿贝尔包络。因此，对于有限生成的预坦纳范畴，可以用寡轨道群代替容许群。□

8.3. 强离散预坦纳范畴。回顾一下，如果每个对象都是一个 ´étale 代数的商，那么这个预坦纳范畴就是强离散的。现在我们来确立这类范畴的一些性质。

命题 8.6. 如果 $\mathcal{C}$ 是离散的且有足够的射影对象，那么它就是强离散的 .

证明。令 X 为 $\mathcal{C}$ 的任意对象。由于 $\mathcal{C}$ 有足够的射影对象，存在一个满射 $P \to X$ ，其中 P 为射影对象。由于 $\mathcal{C}$ 是预坦纳范畴， P 也是单射的 [EGNO，命题 6.1。3]。由于 $\mathcal{C}$ 是离散的， P 是某个 ´etale 代数 A 的子商。由于 P 既是单射又是射影对象，它是 A 的一个直和项，特别地，是 A 的一个商。因此 X 是 A 的一个商，所以 $\mathcal{C}$ 是强离散的。□

命题8.7。假设 $\mathcal{C}$ 是离散的。那么， $\mathcal{C}$ 是强离散的，当且仅当 $\mathcal{C}$ 中的每个正合列在一次 ´étale基变换后可分裂。

证明。假设 $\mathcal{C}$ 是离散的。考虑一个满射 $f\colon A \to \mathbb{1}$ 在 $\mathcal{C}$中，其中 A 是一个 ´etale 代数。我们断言 f 是 ´etale 局部可分裂的。我们有一个分解 $A = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i$ ，其中每个 A_i 都是原子的。令 $f_i = f|_{A_i}$。由于 $\mathbb{1}$ 是单的，某个 f_i 是满射的，因此只需证明 f_i 是 ´etale 局部可分裂的。于是，重新标记后，只需处理 A 是原子的情形。 k-向量空间 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,\mathbb{1})$ 是一维的，由 ϵ 张成，因此 $f = a\cdot\epsilon$，其中某个非零 $a \in k$。考虑映射 $\mathrm{id}\otimes f\colon A\otimes A \to A$。它由 $(1\otimes a^{-1})\cdot\delta$ 分裂，因此断言得证。

接下来，考虑一个满射 $f\colon X \to \mathbb{1}$，其中 X 是 $\mathcal{C}$中的任意对象。由于 $\mathcal{C}$ 是强离散的，对于某个 ´étale代数 A，存在一个满射 $g\colon A \to X$。由上一段可知，存在某个 ´étale代数 B，使得$\mathrm{id}\otimes fg\colon B\otimes A \to B$是可分裂的。令 $s\colon B \to B\otimes A$为一个可分裂映射，则我们有 $(\mathrm{id}\otimes f)s' = \mathrm{id}_B$，其中 $s' = (\mathrm{id}\otimes g)\circ s$。因此， f是étale局部可分裂的。

一般情形现在由[Del1，引理 7.14] 中的同样方法得到。具体地，设$f\colon X \to Y$是 $\mathcal{C}$中的一个满射。在 $\mathrm{Hom}(Y,X)$与$\mathrm{Hom}(Y,Y)$之间存在诱导满射 $\to$，并且有一个自然映射 $\epsilon\colon \mathbb{1} \to \mathrm{Hom}(Y,Y)$，即余求值。令 X'为 $\mathrm{Hom}(Y,X)$ 与$\mathbb{1}$在$\mathrm{Hom}(Y,Y)$ 上的纤维积。由上一段可知，满射 $X' \to \mathbb{1}$是´étale局部可分裂的。这给出了 f 的一个局部分裂，正如所要求的那样。

现在假设正合列在一个 ´étale基变换后可分裂。设 X 为$\mathcal{C}$中的一个给定对象。由于 $\mathcal{C}$ 是离散的，存在一个满射 $Y \to X$ ，其中 Y 是某个 ´étale代数 A的子对象。根据假设，包含映射 $Y \to A$ 局部可分裂，因此存在某个 ´étale代数 B 以及一个分裂映射 $B \otimes A \to B \otimes Y$，后者必然是满射。将其与满射 $B \otimes Y \to B \otimes X$复合，我们看到 X 是 ´étale代数 $B \otimes A$的一个商，正如所要求的。□

注 8.8。 Deligne [Del1，引理 7。14]证明了：在特征零的任意预坦纳范畴中，短正合列经 fppf 基变换后可分裂。 □

最后，我们给出一个例子，说明并非所有离散前 Tannakian 范畴都是强离散的。

例 8.9。设 k 具有特征 p，并且对于 $t \in \mathbf{Z}_p$ ，令 $\mathcal{C}_t$ 为例 8.3 中定义的范畴。我们断言，$\mathcal{C}_t$ 是离散的，但不是强离散的。令 $\mathcal{C}_t$ 为范畴 $\mathrm{Rep}_k(\mathfrak{S}_n)$ 的超积，其所取超滤子使得序列 1, 2, . . . 在 t 处收敛于 $\mathbf{Z}_p$。令 $X_n = k^n$ 为$\mathfrak{S}_n$的置换表示，并令 X 为 $\mathcal{C}_t$ 中各个 X_n 的超极限。那么， $\mathcal{C}_t$ （按定义）是由 X 生成的 $\mathcal{C}_t$ 的张量 ˜ 子范畴。由于 X 是一个 ´étale 代数，这说明 $\mathcal{C}_t$ 是离散的。

现在，令 $X_n^{[p]}$为 $\mathfrak{S}_n$ 的置换表示，其基由$\{1, \ldots, n\}$ 中坐标互异的 p 元组索引，并令 $X^{[p]}$ 为超极限。类似地定义 $X_n^{(p)}$和 $X^{(p)}$，但使用 p 元子集。存在一个自然的满射 π: $X^{[p]} \to X^{(p)}$，以及 $X^{(p)}$ 中平凡表示 1 的唯一副本。令 $Y = \pi^{-1}(1)$。可以证明， Y 不是 $\mathcal{C}_t$ 中某个 ´étale 代数的商，这表明 $\mathcal{C}_t$ 不是强离散的。

让我们在 $p = 2$ 时说明基本思路。 $X_n^{(2)}$ 的不变元素是 $\{1, \ldots, n\}$ 的所有二元素子集之和。在 π 下，此元素的一个原像相当于为每个这样的二元素集合选择一种排序。不存在这样做的“合理”方式；此点的稳定子包含于形如 $\mathfrak{S}_{n/2} \times \mathfrak{S}_{n/2}$ 的杨子群中，而这些群不会收敛到 $\mathfrak{S}$ 的一个开子群。这使得无法将 Y 实现为一个 ´etale 代数的像，因为这样的代数是若干个 $X^{[r]}$ 的和的商。□

8.4. 主定理：强离散情形。 现在我们证明定理 1.3的后半部分，它给出了强离散预坦纳范畴的非常精确的分类。

定理 8.10. 设 $\mathcal{C}$ 是一个强离散预坦纳范畴，设 $G = \pi^{\mathrm{olig}}(\mathcal{C})$，并设 μ 是 G上的诱导测度。

(a) 测度 μ 是正规的；若 $\mathcal{C}$ 是半单的，则它是正则的。(b) 范畴 $\mathcal{C}$ 是 $\mathrm{Perm}(G; \mu)$的阿贝尔包络。(c) $\mathcal{C}$ 等价于 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}(G; \mu)$，且 $\mathrm{Rep}(G; \mu)$ 中的任一对象都是其有限长度子对象的并。

备注 8.5 的类似结论也适用于此定理。该定理意味着，如果 $\mathcal{C}$ 是半单离散预坦纳范畴，那么 $\pi^{\mathrm{olig}}(G)$ 必须带有一个正则测度。我们可以用此结果证明某些类型的范畴并不存在。例如：

推论 8.11。设 G 为保持定向的单位圆自同胚的寡轨道群。不存在半单离散前坦纳范畴 $\mathcal{C}$ 使得 $\pi^{\mathrm{olig}}(\mathcal{C}) = G$。

证明。 我们在 [HS1，§17。9] 证明了 G 没有正则测度。 □

注 8.12. 推论中的群对应一个（非半单）预坦纳范畴G；参见 [HSS2]。 □

我们将在接下来的几个引理中证明定理 8.10 。令 $G = \pi^{\mathrm{olig}}(\mathcal{C})$，并将 $\mathbf{S}(\mathcal{C})$ 与 $\mathbf{S}(G)$ 视为同一对象。我们采用与 §7类似的记号，例如，对于一个有限型 G-集合 X，我们将 $k[X]$ 记作相应的 ´etale 代数，它属于 $\mathcal{C}$。令

$$\Phi\colon \underline{\mathrm{Perm}}(G;\mu) \to \mathcal{C}$$

为定理 7.3 所构造的函子。

引理 8.13. 测度 μ 是正规的。

证明。设 $f\colon X \to Y$ 是有限型 G-集合间的满射。由于 Y 中的每个原子都在其像中，由 $k[Y]$ 的理想的描述（推论 5.2）可知， $f^*\colon k[Y] \to k[X]$ 是单射；因此 $f_*\colon k[X] \to k[Y]$ 是满射。由于 $\mathcal{C}$ 是强离散的， f_* 在 ´etale 局部可分裂。因此存在某个开子群 U，使得 $\mathrm{id}\otimes f_*\colon k[G/U]\otimes k[X] \to k[G/U]\otimes k[Y]$有一个 $k[G/U]$-线性分裂。由于 Φ 是完全忠实的，且将 A_f 映到 f_*，可知 $\mathrm{id}\otimes A_f\colon \mathrm{Vec}_{G/U}\otimes\mathrm{Vec}_X \to \mathrm{Vec}_{G/U}\otimes\mathrm{Vec}_Y$有一个 $\mathrm{Vec}^{G/U}$-线性分裂。容易看出，这样的分裂对应于范畴 $\mathrm{Perm}(U;\mu)$ 中 $A_f\colon \mathrm{Vec}_X \to \mathrm{Vec}_Y$的一个分裂。因此， A_f 有一个 U-等变右逆，故由 [HS1 命题 11.7]， μ 是正规的。□

引理 8.14. 如果 $\mathcal{C}$ 是半单的，那么 μ 是正则的。

证明。设 X 为一个传递的 G-集。为证明 μ 是正则的，我们必须证明 $\mu(X)$ 非零。令 $f\colon X \to \mathbf{1}$ 为到单点 G-集的映射。因此，我们在$\mathcal{C}$中有一个满射 $f_*\colon k[X] \to \mathbb{1}$。由于 $\mathcal{C}$ 是半单的，函子 Γ 是正合的，因此 $f_*\colon \Gamma(k[X]) \to \Gamma(\mathbf{1})$ 是满射的。由此可得， $\mu(f) = f_*(\mathbf{1})$非零。由于 $\mu(X) = \mu(f)$，我们由此看到 μ 是正则的。□

引理 8.15。 $\mathcal{C}$ 是 $\mathrm{Perm}(G;\mu)$ 经由 Φ 的阿贝尔包络。

证明。 根据 [CEAH，定理 3.1。4], 只需验证以下条件：

(i) Φ 完全忠实。(ii) $\mathcal{C}$ 的任意对象都同构于某个映射 $\Phi(\mathrm{Vec}_X) \to \Phi(\mathrm{Vec}_Y)$的像。(iii) 对于 $\mathcal{C}$中的任意满态射 $f\colon M \to N$，存在一个有限的 G-集合 X，使得 $\mathrm{id}\otimes f\colon \Phi(\mathrm{Vec}_X)\otimes M \to \Phi(\mathrm{Vec}_X)\otimes N$可分裂。

我们已经在定理 7.3 中证明了 (i)。条件 (ii) 成立，因为 $\mathcal{C}$是强离散的：给定 $M \in \mathcal{C}$，我们有满射 $\Phi(\mathrm{Vec}_X) \to M$和 $\Phi(\mathrm{Vec}_Y^\vee) \to M^\vee$，对于某些有限$G$-集 X 和 Y，因此 M 是映射 $\Phi(\mathrm{Vec}_X) \to \Phi(\mathrm{Vec}_Y)$ 的像。条件 (iii) 由命题 8.7 得出。□

引理 8.16。 $\mathcal{C}$等价于 $\underline{\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}(G;\ \mu)}$，且 $\mathrm{Rep}(G;\ \mu)$ 中的任意对象都是其有限长度子对象的并。

证明。其证明涉及核实大量细节。限于篇幅，我们仅概述主要思路。我们按如下方式进行。

(a) 对于 $\mathcal{C}$ 中的对象 M 以及 G 的开子群 U，我们将 M 的“U-不变量” M^U 定义为 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(k[G/U], M)$。这是一个有限维 k-向量空间。定义 $\Phi(M)$ 为 M^U 在开子群 U 上的直接极限。这是一个（通常为无限维的）k-向量空间。函子 Φ 显然是左正合的。利用 $\mathcal{C}$ 的强离散性（以 ´etale 局部分裂的形式），可以证明 Φ 是正合的。

(b) 我们在 $\Phi(M)$ 上定义光滑 A-模结构，其中 $A = A(G)$ 是完备群代数。基本思路如下。假设 $x \in M^U$ 和 $a \in A$，并令 $a_U \in \mathcal{C}(G/U)$ 为 a 的 U-分量。（回忆一下，A 是 $\mathcal{C}(G/U)$ 的逆极限。）假设 a_U 在左作用下为 V-不变。那么 a_U 对应于 $\mathcal{C}$ 中的一个态射 $k[G/V] \to k[G/U]$，我们将 ax 定义为此映射与 x 的复合：$k[G/U] \to M$。因此，ax 是 M^V 的一个元素。

(c) 现在验证，对于 $M = k[G/U]$，A-模 $\Phi(M)$ 自然同构于 $\mathcal{C}(G/U)$，并带有其标准的 A-模结构。利用这一点，可以证明 Φ 完全忠实；其思路是选取由 ´étale 代数给出的表示（这可由强离散性保证），从而归约到 $k[G/U]$ 情形。

(d) 接下来证明，Φ 将 $\mathcal{C}$ 的简单对象映到 RepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRep$(G;\mu)$ 的简单对象。思路是，若 S 是 $\mathcal{C}$ 中的一个简单对象，而 $\Phi(S)$ 不是简单对象，那么就存在某个映射 $\mathcal{C}(G/U) \to \Phi(S)$，它能检测出 S 的一个真非零子对象；这将反过来在 $\mathcal{C}$ 中得到这样的映射 $k[G/U] \to S$，从而产生矛盾。由此可知，Φ 保持有限长度对象。由于 $\mathcal{C}(G/U)$ 属于 Φ 的本质像，因此它具有有限长度。由于这些对象是生成元，故 RepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRep$(G;\mu)$ 中的每个对象都是其有限长度子对象的并。还可得出，Φ 的本质像由所有有限长度对象组成，因此 Φ 诱导出等价 $\mathcal{C} \to \mathrm{Rep}^f(G;\mu)$。

(e)最后，我们证明 Φ 自然地具有对称张量函子的结构。设M 和 N 是 $\mathcal{C}$ 的对象。那么存在一个自然的 k-双线性映射

$$\Phi(M) \times \Phi(N) \to \Phi(M \otimes N).$$

可以验证，这在 [HS1 的意义下是强双线性的，参见 §12.2]。根据 $\otimes$ 上的张量积 Rep$(G;\ \mu)$ 的定义可知，存在一个诱导映射

$$\Phi(M) \underline{\otimes} \Phi(N) \to \Phi(M \otimes N).$$

然后可以验证，当 M 和 N 具有 $k[G/U]$的形式时，这是一个同构。一般情形则通过选取由此类对象给出的表示得出（这需要强离散性）。□

注8.17。证明定理 8.10（c）还有另一种方法。由于 μ是一个正规测度，范畴 Perm$(G;\ \mu$带有一个自然的线性格罗滕迪克拓扑[HS1，§14。2]。事实证明，Rep$(G;\ \mu$恰好是关于该拓扑的层范畴[HS1，定理 14。1]。不难看出，$\mathcal{C}$ 的对象也表示层，由此得到一个函子 $\mathcal{C} \to$ Rep$(G;\ \mu)$。然后验证该函子所需的性质。□

References

[BE] Dave Benson、Pavel Etingof。《特征 2 中的对称张量范畴》。Adv. Math. 351 (2019)，967–999。DOI:10.1016/j.aim.2019.05.020 arXiv:1807.05549[BEO] Dave Benson、Pavel Etingof、Victor Ostrik。《正特征中的新不可压缩对称张量范畴》。Duke Math. J. 172 (2023)，第 1 期，105–200 页。DOI:10.1215/00127094-2022-0030arXiv:2003.10499[Cam] Peter J. Cameron。《寡轨道置换群》。伦敦数学会讲义系列，第 152 卷，剑桥大学出版社，剑桥，1990。[Cou1] Kevin Coulembier。《正特征中的坦纳范畴》。Duke Math. J.，169 (2020)，第 16 期，3167–3219 页。DOI:10.1215/00127094-2020-0026 arXiv:1812.02452[Cou2] Kevin Coulembier。《幺半阿贝尔包络》。Compos. Math. 157 (2021)，第 7 期，1584–1609 页。DOI:10.1112/S0010437X21007399 arXiv:2003.10105

[CEAH] Kevin Coulembier、Inna Entova-Aizenbud、Thorsten Heidersdorf。《幺半阿贝尔包络与 Benson–Etingof 猜想》。 arXiv:1911.04303[CEO] Kevin Coulembier、Pavel Etingof、Victor Ostrik。《关于 Frobenius 精确对称张量范畴》。arXiv:2107.02372v2[CEOP] Kevin Coulembier、Pavel Etingof、Victor Ostrik、Bregje Pauwels。《具有商性质的幺半阿贝尔包络》。 arXiv:2103.00094[CO1] Jonathan Comes、Victor Ostrik。《关于 Deligne 范畴 RepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRep(S_t) 的分块》。Adv. Math. 226 (2011)，第 2 期，1331–1377 页。 DOI:10.1016/j.aim.2010.08.010 arXiv:0910.5695[CO2] Jonathan Comes、Victor Ostrik。《关于 Deligne 范畴 RepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRep^{ab}(S_d)》。Algebra Number Theory 8 (2014)，473–496 页。 DOI:10.2140/ant.2014.8.473 arXiv:1304.3491[Dav] Alexei Davydov。《群论模数据的模不变量 I》。J. Algebra 323 (2010)，第 5 期，1321–1348 页。 DOI:10.1016/j.jalgebra.2009.11.041 arXiv:0908.1044[Del1] P. Deligne。《坦纳范畴》。载于《The Grothendick Festschrift, Vol.II》，Prog. Math. 87 (1990)，111–195 页。 DOI:10.1007/978-0-8176-4575-5_3[Del2] P. Deligne。《张量范畴》。Mosc. Math. J. 2 (2002)，第 2 期，227–248 页。 DOI:10.17323/1609-4514-2002-2-2-227-248可见： https://www.math.ias.edu/files/deligne/Tensorielles.pdf[Del3] P. Deligne。《当 S_t 不是自然数时，对称群的表示范畴》。载于：Algebraic Groups and Homogeneous Spaces，收录于：Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math.，Tata Inst. Fund. Res.，孟买，2007，209–273 页。可见： https://www.math.ias.edu/files/deligne/Symetrique.pdf[DM] P. Deligne、J. Milne。《坦纳范畴》。载于《Hodge cycles, motives, and Shimura varieties》，Lecture Notes in Math.，第 900 卷，Springer–Verlag，1982。 DOI:10.1007/978-3-540-38955-2_4可见： http://www.jmilne.org/math/xnotes/tc.html[DMNO]Alexei Davydov、Michael Mueger、Dmitri Nikshych、Victor Ostrik。《非退化编织融合范畴的 Witt 群》。J. Reine Angew. Math. 677 (2013)，135–177 页。DOI:10.1515/crelle.2012.014 arXiv:1009.2117[Eti1] Pavel Etingof。《复秩表示论 I》。Transform. Groups 19 (2014)，第 2 期，359–381 页。 DOI:10.1007/s00031-014-9260-2 arXiv:1401.6321[Eti2] Pavel Etingof。《复秩表示论 II》。Adv. Math. 300 (2016)，473–504 页。 DOI:10.1016/j.aim.2016.03.025 arXiv:1407.0373[EAH] Inna Entova-Aizenbud、Thorsten Heidersdorf。《有限一般线性群的 Deligne 范畴，第一部分：泛性质》。 arXiv:2208.00241[EGNO] Pavel Etingof、Shlomo Gelaki、Dmitri Nikshych、Victor Ostrik。《张量范畴》。Mathematical Surveys and Monographs, 205。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2015。[EHO] Pavel Etingof、Nate Harman、Victor Ostrik。《特征 p 的对称张量范畴中的 p-进维数》。Quantum Topology 9 (2018)，第 1 期，119–140 页。 DOI:10.4171/QT/104 arXiv:1510.04339[EO] Pavel Etingof、Victor Ostrik。《正特征下对称张量范畴的 Frobenius 函子》。J. Reine Angew. Math. 773 (2021)，165–198 页。 DOI:10.1515/crelle-2020-0033 arXiv:1912.12947[EOV] Pavel Etingof、Victor Ostrik、Siddharth Venkatesh。《特征 p 下对称融合范畴中的计算》。Int. Math. Res. Not. IMRN (2017)，第 2 期，468–489 页。 DOI:10.1093/imrn/rnw024 arXiv:1512.02309[FFRS] J¨urg Fr¨ohlich、J¨urgen Fuchs、Ingo Runkel、Christoph Schweigert。《带状范畴之间的对应》。Adv. Math. 199 (2006)，第 1 期，192–329 页。 DOI:10.1016/j.aim.2005.04.007 arXiv:math/0309465[Har1] Nate Harman。《对称群模表示论中的稳定性与周期性》。arXiv:1509.06414v3[Har2] Nate Harman。《作为秩与特征中极限的 Deligne 范畴》。 arXiv:1601.03426[HS1] Nate Harman、Andrew Snowden。《寡形群与张量范畴》。 arXiv:2204.04526[HS2] Nate Harman、Andrew Snowden。《超齐次张量结构》。 arXiv:2207.09626[HS3] Nate Harman、Andrew Snowden。《预伽罗瓦范畴与 Fra¨ıss´e 定理》。arXiv:2301.13784[HSS1] Nate Harman、Andrew Snowden、Noah Snyder。《Delannoy 范畴》。 arXiv:2211.15392[HSS2] Nate Harman、Andrew Snowden、Noah Snyder。《圆形 Delannoy 范畴》。 arXiv:2303.10814

[Kno1] Friedrich Knop。《半单张量范畴的构造》。C. R. Math. Acad. Sci. Paris C 343（2006），第 1 期，第 15–18 页。 DOI:10.1016/j.crma.2006.05.009 arXiv:math/0605126[Kno2] Friedrich Knop。《正则范畴的张量包络》。Adv. Math. 214（2007），第 571–617 页。DOI:10.1016/j.aim.2007.03.001 arXiv:math/0610552[LW] Robert Laugwitz、Chelsea Walton。《构造带局部模的非半单模范畴》。 arXiv:2202.08644[Mor] Masaki Mori。《非整数秩中花环积的表示范畴》。Adv. Math. 231（2012），第 1 期，第 1–42 页。 DOI:10.1016/j.aim.2012.05.002 arXiv:1105.5091[Mac] Dugald Macpherson。《齐性结构综述》。Discrete Math. 311（2011），第 15 期，第 1599–1634 页。 DOI:10.1016/j.disc.2011.01.024[Ost] Victor Ostrik。《正特征下的对称融合范畴》。Selecta Math.（N.S.）26（2020），第 3 期。 DOI:10.1007/s00029-020-00567-5 arXiv:1503.01492[Ven] Siddharth Venkatesh。《正特征下对称融合范畴中的希尔伯特基定理与不变量的有限生成性》。Int. Math. Res. Not. IMRN（2016），第 16 期，第 5106–5133 页。DOI:10.1093/imrn/rnv305 arXiv:1507.05142