arXiv:2304.05393v2 [math.AP] 6 Jun 2024

压电多孔介质中蠕动变形驱动流动的均匀化模型

E. Rohan[a,*], V. Lukeˇs[a]

[a]西波希米亚大学应用科学学院力学系与信息社会新技术（*NTIS*），*Univerzitní 22, 30100* 比尔森，捷克共和国

摘要

本文提出了一种由牛顿流体饱和的可控周期性多孔压电结构的新型弱非线性双尺度模型。流动由微通道的蠕动变形驱动，该变形源于嵌入微观结构中的压电段，并由电压波在局部驱动。通过均匀化，推导出多孔弹性介质的宏观模型，其有效参数受到骨架压电性质的修正。为了描述蠕动泵送，必须考虑与变形构型相关的非线性。在宏观模型中，这种非线性通过依赖于变形微观构型的均匀化系数引入。为此，采用基于均匀化系数灵敏度分析的线性展开，以描述其相对于宏观量所诱导变形的变化。该方法避免了非线性问题中通常所需的宏观问题与微观问题之间的双尺度紧耦合。所推导的降阶模型得到了实现，并通过周期性非均质介质的直接数值模拟进行了验证。数值结果展示了响应电驱动的蠕动流体推进，并证明了所提出非线性处理方法的有效性。本文为基于均匀化的计算高效建模提供了新的视角，适用于连续体微结构受到耦合场扰动的弱非线性问题。

关键词：多尺度建模、压电材料、多孔介质、

*通讯作者电子邮箱： rohan@kme.zcu.cz (E. Rohan), vlukes@kme.zcu.cz (V. Lukeˇs)

此手稿版本依据 *CC-BY-NC-ND 4.0* 许可协议公开。

1. 引言

蠕动流是由通道变形的壁面诱导产生的。对这一现象的研究在生理学和生物力学[22, 4, 29, 12], 中具有重要意义，然而，作为一种流体输运的驱动机制，它在智能“仿生”材料的设计中提出了一个重要且具有挑战性的问题。我们研究了由牛顿流体饱和的局部周期性多孔结构，该流体可由局部分布的压电段进行控制；这些压电段能够诱导微通道产生蠕动变形波，而在生物组织中，则由其他生理机制，即肌肉收缩，提供所需的驱动。

本文旨在为新兴且具有发展前景的可控自适应结构领域的数学建模和计算方法作出贡献。由于这是一个广泛且具有挑战性的研究领域，我们聚焦于配备嵌入式致动器和传感器并与电路相连接的周期结构，这些结构提供了更高层次的多功能性，例如收集能量或抑制不必要的振动。可控超材料为连续介质力学和多尺度建模领域带来了许多具有挑战性的问题。除了被动的非线性力学行为（由大变形或位移引起的几何非线性，或由多物理场耦合引起的材料非线性）之外，非线性还源于电路控制。此外，因此，这类超材料能够表现出非局部性质，在某种意义上打破了邻域公理。对流固耦合在空间和时间上产生的非线性进行控制和调节，并将其连接至“智能”在线/实时控制系统，可为机器人结构的设计和自适应形状变形应用提供广泛的适用范围。

自很久以前，人们就开始研究甚至优化含有压电组分的复合材料的有效材料性质，参见例如 [28]。对多孔压电结构中机电转换的研究受到生物组织的启发 [37, 38], ，并进一步推动了活化生物压电多孔植入物的应用 [36, 40]。在多尺度建模背景下，为辅助骨愈合和再生过程而设计新型生物材料的需求，促使人们对

由压电基体和弹性各向异性夹杂组成的周期性复合材料进行均匀化 [25], 参见 [32] ，其中研究了有效材料性质对夹杂形状的敏感性，参见 [19]。压电纤维复合材料也已得到研究例如 [24, 18]。研究者从三维压电性问题出发，通过渐近分析推导了压电杆和梁的高阶模型 [39]。除了经典的周期均匀化 [34, 9, 8], ，研究者还采用 Suquet 均匀化方法，获得颗粒状和纤维状压电复合材料的解析模型 [18]。 [2]采用了包括 Mori-Tanaka 和自洽上尺度方法在内的微观力学方法。除了线性压电效应，研究者还采用高阶连续介质方法，研究了复合材料产生表观挠电效应的问题，该效应与非均匀变形有关 [41, 5], 参见 [23]。 [16], 提出了一种控制挠电膜动态驱动的理论，该膜与黏性流相互作用；这项研究受到生物系统的启发。本文研究的多孔压电介质具有嵌入式电极，可在局部施加电场。为在均匀化极限下补偿这一效应，必须引入压电材料系数的尺度变换。由于这种“强非均质性”，所得均匀化模型无法简化为不进行任何尺度变换的标准均匀化模型，因此会得到扩展的压电有效本构定律，详情见 [31]。

创新性与论文贡献。 本文在三个方面为当前研究前沿作出了贡献：a) 利用局部周期结构均匀化，推导了一种新型双尺度模型，用于描述充满牛顿流体的可控周期性多孔压电介质；b) 我们展示了基于均匀化的高效计算建模的新视角：采用线性化方法，根据均匀化系数对扰动微观构形的灵敏度分析，研究局部宏观场作用下的弱非线性问题。具体而言，我们展示了这种建模方法在双尺度问题的模型降阶 中的效率，其适用范围为线性运动学但变形不可忽略的情形，因此平衡条件是在“真实”构形中施加的。此外，c) 关于流体饱和复合介质在电—机械驱动作用下产生的蠕动变形，文献中尚无相关报道，尤其是在多尺度建模方面。

本文以我们近期围绕三个主要问题开展的工作为基础，并将这些问题整合到所提出的“智能”流体饱和多孔介质基于均质化的模型中，用以描述蠕动驱动流。为考虑连通孔隙度，压电孔弹性模型 [31]通过加入 Darcy 流动模型得到扩展，该模型由 Stokes流均匀化获得。对于微观结构发生大变形时多孔挠曲电介质中的流固耦合研究，均质化方法似乎颇具前景 [35, 20], cf. [3, 11, 27], ，但不可避免地会导致非常复杂的双尺度计算（即广为人知的“有限元平方”（FE^2）方法），需要在离散宏观问题的所有积分节点上反复求解微观问题。然而，在将变形限制为小变形的情况下，变形依赖的有效模型参数所引起的非线性，可利用通过均匀化系数灵敏度分析推导的一阶展开公式加以近似，该方法沿用了 [30]中提出的思路。得益于这一建模策略，双尺度模型采用一种计算效率高的方案实现，避免了“有限元平方”带来的复杂性。本文报告的数值研究表明，为描述产生流体输运的电活性多孔介质，模型中必须考虑非线性。

论文结构。 周期性微结构的非均质尺度上流体与压电固体复合材料相互作用的问题在第2节中介绍。均匀化过程在第3节中描述，其中针对线性问题推导了宏观模型。该模型涉及以所谓微结构特征响应表示的均匀化系数。这些特征响应通过微观问题的解给出。宏观模型的非线性在第4节中介绍。为此，在附录 B 中利用一个针对非连通孔隙度的简化问题，对线性化增量公式的均匀化进行了说明。这为采用依赖于宏观状态变量的均匀化系数扰动分析提供了依据，相关技术细节推迟至附录 C。第5节报告了诱导蠕动驱动流的“压电控制”多孔微结构的双尺度建模数值示例。利用具有一维和二维流体通道连通性的三维微结构示例，展示了均匀化介质的泵送效应以及模型非线性的关键作用。与该模型相关的技术部分

推导内容放在附录中，附录共分为四部分：附录A介绍参考问题；附录 B 说明基于增量公式并采用初始构型进行近似的建模框架。附录 C 给出了均匀化系数关于微观结构变形的微分过程的一些细节。最后，附录 D 使用均匀化介质的简化一维模型，阐述多孔结构中由蠕动变形驱动的流体输运，并展示了依赖于变形的渗透率对泵送效应的重要性。

记号。 我们采用以下记号。由于我们处理的是一个双尺度问题，因此分别区分“宏观”和“微观”坐标 x和 y。当分别关于坐标 x和 y进行微分时，我们使用 $\nabla_x = (\partial_i^x)$和 $\nabla_y = (\partial_i^y)$，其中 $\nabla \equiv \nabla_x$。通过$\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}) = 1/2[(\nabla \boldsymbol{u})^T + \nabla \boldsymbol{u}]$表示向量函数$\boldsymbol{u}$的应变，其中转置算子由上标 ^{T}表示。在开区域 $D \subset \mathbb{R}^3$ 上平方可积函数的二次幂Lebesgue空间记为 $L^2(D)$；包含一阶广义导数的 D 上平方可积向量值函数的Sobolev空间 $\boldsymbol{W}^{1,2}(D)$简记为$\mathbf{H}^1(D)$。此外，$\mathbf{H}^1_{\#}(Y)$表示Y-周期向量值函数的Sobolev空间（下标#）。面积分以dS,dS$_x$或dS$_y$结束，而体积分不带“积分元素”书写，例如dV。

2. 微观模型与流固耦合

在描述非均质尺度下流体饱和多孔介质的几何框架中，我们引入流固耦合（FSI）问题，通过第 3节中的均匀化方法可获得该问题的双尺度问题。尽管本文考虑固体的小变形和线性本构定律（7），但正如将要展示的，为了捕捉蠕动变形的“泵送效应”，有必要考虑界面上由变形孔隙引起的流固耦合非线性，从而改变水力渗透率。附录 D 使用一维约化模型对这一现象进行了简要说明。

2.1. 基于欧拉坐标系的线性化

流固耦合问题可以在空间构形$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 中表述，并可进一步使用参考构形 $\Omega_R \subset \mathbb{R}^3$ 进行近似，这使得-

以引入增量公式，其中涉及以李导数定义的应力增量 $\delta_R^{\mathcal{L}}\boldsymbol{\tau}_R$。固体和流体的平衡均可通过虚功率原理表示，其中虚（测试）位移场 $\tilde{\boldsymbol{v}}$ 定义于 $\Omega_R = \Omega_R^s \cup \Omega_R^f$ 内，并在界面 $\Gamma_R^{fs} = \partial\Omega_R^s \cup \partial\Omega_R^f$ 上连续，

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_R} \delta_R^{\mathcal{L}}\boldsymbol{\tau}_R : \boldsymbol{e}_R(\tilde{\boldsymbol{v}}) J_R^{-1}\,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_R} \boldsymbol{\tau}_R : \delta\boldsymbol{\eta}_R(\tilde{\boldsymbol{v}}) J_R^{-1}\,\mathrm{d}x \\ = \int_{\partial_\sigma\Omega_R^f} \boldsymbol{g}_R(\bar{p})\cdot\tilde{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}S - \int_{\Omega_R} \boldsymbol{\tau}_R : \boldsymbol{e}_R(\tilde{\boldsymbol{v}}) J_R^{-1}\,\mathrm{d}x\,,\end{aligned} \tag{1}$$

对于所有试位移 $\tilde{\boldsymbol{v}}$，该条件均须成立；这些试位移被认为可平滑地延拓至整个区域 Ω_R。

此外，我们忽略与位移增量 $\delta\boldsymbol{u}$相关的格林-拉格朗日应变的非线性部分 $\delta\boldsymbol{\eta}_R(\tilde{\boldsymbol{v}})$ 的变化。相应地，鉴于小变形（因此不区分柯西应力与基尔霍夫应力），我们假设 $J_R \approx 1$，于是（1）变为

$$\int_{\Omega_R} \delta_R^{\mathcal{L}}\boldsymbol{\tau}_R : \boldsymbol{e}_R(\tilde{\boldsymbol{v}})\,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_R} \boldsymbol{\tau}_R : \boldsymbol{e}_R(\tilde{\boldsymbol{v}})\,\mathrm{d}x = \int_{\partial_\sigma\Omega_R^f} \boldsymbol{g}_R(\bar{p}+\delta\bar{p})\cdot\tilde{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}S\,. \tag{2}$$

因此，假设在区域 Ω_R 中，由于 $\bar{p}$ 在 $\partial_\sigma\Omega_R^f$ 处产生的应力$\boldsymbol{\tau}_R$ 和外载荷达到平衡，（2）可进一步简化为

$$\int_{\Omega_R} \delta_R^{\mathcal{L}}\boldsymbol{\tau}_R : \boldsymbol{e}_R(\tilde{\boldsymbol{v}})\,\mathrm{d}x = \int_{\partial_\sigma\Omega_R^f} \boldsymbol{g}_R(\delta\bar{p})\cdot\tilde{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}S\,. \tag{3}$$

方程（2）可写成（A.2）的形式。关于如何使用该方法求解非线性问题的更多说明留待附录A讨论。下文中，我们将位移 $\boldsymbol{u}$ 视为延拓至整个参考构形 Ω_R，因此它在流体中$_R^f$也有定义。

2.2. 静态流体饱和的多孔压电固体

我们考虑压电骨架的准静态加载过程，该骨架与充满骨架孔隙的黏性流体相互作用。压电孔弹性介质占据一个开有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$，其边界为利普希茨边界$\partial\Omega$。将 Ω 分解为压电基体 Ω_m^ε、

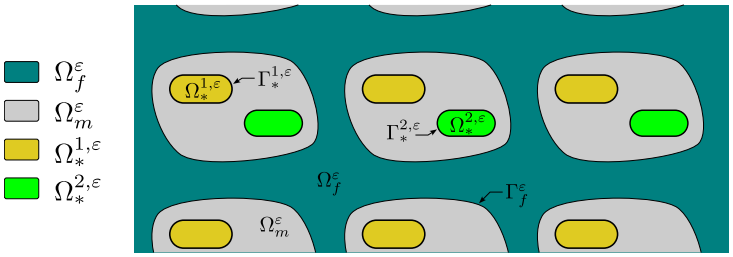


图 1：周期性微结构及其分解为子区域，如公式（4）和（5）所述。

弹性导电夹杂物 Ω_*^ε 以及占据通道 Ω_f^ε 的流体，具体如下：

$$\begin{aligned} \Omega = \Omega_f^\varepsilon \cup \Omega_m^\varepsilon \cup \Omega_*^\varepsilon \cup \Gamma^\varepsilon \,, \quad \Omega_f^\varepsilon \cap \Omega_m^\varepsilon \cap \Omega_*^\varepsilon = \emptyset \,, \\ \Omega_s \equiv \Omega_{m*} = \Omega_m^\varepsilon \cup \Omega_*^\varepsilon \cup \Gamma_*^\varepsilon \,, \quad \text{where } \Omega_*^\varepsilon = \bigcup_\alpha \Omega_*^{\alpha,\varepsilon} \,, \end{aligned} \tag{4}$$

其中，Γ^ε 是分隔三个主要部分的所有界面的并集。采用记号 Ω_s，我们通常将由压电基体和导体子部分组成的固体部分称为固体部分，这些子部分由 Γ_*^ε 分隔；该界面由其各段 $\Gamma^{\alpha}{}_{,*}{}^{\varepsilon}$组成，具体引入如下：

$$\Gamma_*^\varepsilon = \bigcup_\alpha \Gamma_*^{\alpha,\varepsilon} \quad \text{and} \quad \Gamma_*^{\alpha,\varepsilon} = \partial\Omega_*^{\alpha,\varepsilon} \cap \overline{\Omega_m^\varepsilon} \,. \tag{5}$$

在（4）中，每个 $\Omega_*^{\alpha\,\varepsilon,}$均假设为直径为$\approx \varepsilon$的各段的并集；这一限制避免了出现单连通的导体部分。相反，这些小段被用作控制手柄，通过局部规定的电压实现对电场的局部控制，具体说明如下。周期性微结构的分解如图 1 所示。用 Γ_f^ε 表示固体-流体界面，$\Gamma_f^\varepsilon = \Omega_m^\varepsilon \cup \Omega_*^\varepsilon \cap \Omega_f^\varepsilon$。压电基体与导体之间的界面 Γ_*^ε此外，我们用 $\partial_{\text{ext}}\Omega_m^\varepsilon = \Omega_m^\varepsilon \cap \partial\Omega$ 表示 Ω_m^ε 的外部边界。类似地，我们将 $\partial_{\text{ext}}\Omega_f^\varepsilon$ 定义为流体 Ω_f^ε 边界上的外部部分。我们假设基体 Ω_m^ε 和充满流体的通道 Ω_f^ε 均为连通区域。

固体和流体相的边界条件规定于外部边界段 $\partial_{\text{ext}}\Omega_{m*} = \partial\Omega_{m*} \cap \partial\Omega$ 和 $\partial_{\text{ext}}\Omega_f =$

$\partial\Omega_f \cap \partial\Omega$。定义以下两个划分，$\partial_{\text{ext}}\Omega^\varepsilon_{m*} = \Gamma^\varepsilon_{\boldsymbol{u}} \cup \Gamma^\varepsilon_\sigma$ 和$\partial_{\text{ext}}\Omega^\varepsilon_f = \Gamma^\varepsilon_p \cup \Gamma^\varepsilon_w$，使得在 $\Gamma^\varepsilon_{\boldsymbol{u}}$ 和 Γ^ε_p上分别规定“狄利克雷”型边界条件，而在 $\Gamma^\varepsilon_\sigma$ 和 Γ^ε_w上分别规定表面牵引力和流体通量，其中

$$\Gamma^\varepsilon_\sigma = \partial_{\text{ext}}\Omega^\varepsilon_{m*} \setminus \Gamma^\varepsilon_{\boldsymbol{u}}\,, \quad \Gamma_w = \partial_{\text{ext}}\Omega^\varepsilon_f \setminus \Gamma^\varepsilon_p\,. \tag{6}$$

为体现材料参数的空间波动，借助上文引入的尺度参数，数学模型中涉及的所有依赖于尺度的材料系数和未知函数均以上标 ε 标记。在压电固体中，柯西应力张量 $\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon$ 和电位移 D^ε 取决于应变张量 $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}^\varepsilon) = (\nabla\boldsymbol{u}^\varepsilon + (\nabla\boldsymbol{u}^\varepsilon)^T)/2$，该张量由位移场$\boldsymbol{u}^\varepsilon = (u^\varepsilon_i)$定义；它们还取决于电场 $\vec{E}(\varphi^\varepsilon) = \nabla\varphi^\varepsilon$，该电场由电势 φ^ε定义。以下本构方程描述 Ω^ε_m 中的压电固体，

$$\begin{aligned} \sigma^\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}^\varepsilon, \varphi^\varepsilon) &= A^\varepsilon_{ijkl} e^\varepsilon_{kl}(\boldsymbol{u}^\varepsilon) - g^\varepsilon_{kij} E^\varepsilon_k(\varphi^\varepsilon)\,, \\ D^\varepsilon_k(\boldsymbol{u}^\varepsilon, \varphi^\varepsilon) &= g^\varepsilon_{kij} e^\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}^\varepsilon) + d^\varepsilon_{kl} E^\varepsilon_l(\varphi^\varepsilon)\,, \end{aligned} \tag{7}$$

其中，$\mathsf{AA}^\varepsilon = (A^\varepsilon_{ijkl})$ 是固体的弹性四阶对称正定张量，$A_{ijkl} = A_{klij} = A_{jilk}$。变形通过三阶张量 $\boldsymbol{g}^\varepsilon = (g^\varepsilon_{kij})$ 与电场耦合，$g^\varepsilon_{kij} = g^\varepsilon_{kji}$ 而$\boldsymbol{d} = (d_{kl})$ 是介电率张量。导电固体仅由其弹性张量 AA^ε 描述。导体中的介电率无限大，因此我们假设任意 $\Omega^{\alpha\,\varepsilon}_*$ 中的电势 $\varphi^\varepsilon = \bar{\varphi}^\alpha$ 为常数，于是 (7) 化简为弹性定律。

本文将采用一种紧凑的（全局）记号，因此（7）可以写成（暂时省略上标 $^\varepsilon$）：$\boldsymbol{\sigma}_s = \mathsf{AA}\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{g}^T \cdot \vec{E}(\varphi)$，以及 $\vec{D} = \boldsymbol{g}\colon \boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{d}\,\vec{E}$，其中 $(\boldsymbol{g}\colon \boldsymbol{e})_k = g_{kij} e_{ij}$。对于压电材料和介电材料（非压电材料），我们将不作区分，因为二者都由（7）描述，唯一的区别是后者的 $\boldsymbol{g}$ 为零。在导体中，不考虑（7）$_2$。

关于由压力 p^ε 和速度$\boldsymbol{v}^{f,\varepsilon}$ 描述的流体流动，在孔壁上满足无滑移边界条件，必须对流体黏度进行尺度化。我们考虑牛顿流体，其黏性应力本构关系由 $D^{f,\varepsilon}_{klij} = \mu^\varepsilon(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} - (2/3)\delta_{ij}\delta_{kl})$ 给出，其中 μ^ε是动力黏度。因此，流体中的应力由

$$\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon_f = -p^\varepsilon \boldsymbol{I} + \mathbb{D}^{f,\varepsilon}\boldsymbol{e}(\boldsymbol{v}^{f,\varepsilon})\,, \quad \text{where} \quad \mathbb{D}^{f,\varepsilon} = 2\mu^\varepsilon(\mathbb{I} - \frac{1}{3}\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I})\,. \tag{8}$$

2.3. 异质介质的问题表述

依托上文及附录 A 中引入的增量公式，本节关注固定构形下施加的线性子问题。在求解非线性问题的背景下，未知场 $\boldsymbol{u}^{\varepsilon}, \boldsymbol{v}^{f,\varepsilon}, p^{\varepsilon}, \varphi^{\varepsilon}$ 可视为扰动，见附录 B。

2.3.1. 强形式（含惯性项）

现在，我们将考虑问题表述中涉及的所有惯性效应。稍后，由于仅研究准静态事件，推导均匀化模型时将忽略这些惯性效应。微观模型包含以下控制流固相互作用以及电场与变形通过压电本构定律 (7) 耦合的微分方程，

$$\begin{aligned} \rho_s \ddot{\boldsymbol{u}}^{\varepsilon} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_s^{\varepsilon}(\boldsymbol{u}^{\varepsilon}, \varphi^{\varepsilon}) &= \boldsymbol{f}^{s,\varepsilon} \ , \quad \text{in } \Omega_{m*}^{\varepsilon} \ , \\ -\nabla \cdot \vec{D}^{\varepsilon}(\boldsymbol{u}^{\varepsilon}, \varphi^{\varepsilon}) &= q_E^{\varepsilon} \ , \quad \text{in } \Omega_m^{\varepsilon} \ , \\ \mu^{\varepsilon} \nabla^2 \boldsymbol{v}^{f,\varepsilon} - \rho_f \left(\dot{\boldsymbol{v}}^{f,\varepsilon} + \boldsymbol{w}^{\varepsilon} \cdot \nabla \right) \boldsymbol{v}^{f,\varepsilon} \big) &= \nabla p^{\varepsilon} - \boldsymbol{f}^{f,\varepsilon} \ , \quad \text{in } \Omega_f^{\varepsilon} \ , \\ \gamma \dot{p} + \nabla \cdot \boldsymbol{v}^{f,\varepsilon} &= 0 \ , \quad \text{in } \Omega_f^{\varepsilon} \ , \end{aligned} \tag{9}$$

其中 γ 为流体压缩率。

在此情形下，采用流体速度分解较为方便

$$\boldsymbol{w}^{\varepsilon} = \boldsymbol{v}^{f,\varepsilon} - \dot{\tilde{\boldsymbol{u}}}^{\varepsilon} \ , \tag{10}$$

其中 $\dot{\tilde{}}\boldsymbol{u}^{\varepsilon}$ 是从 Ω_m^{ε} 延拓至孔隙 Ω_f^{ε}的固相速度场，且$\boldsymbol{w}^{\varepsilon} = \boldsymbol{0}$位于孔壁上 $\Gamma_{fs\circ}^{\varepsilon}$ 注意，$\dot{\boldsymbol{u}}$是固体速度（“点”表示物质导数），而 $\tilde{\boldsymbol{u}}$ 表示将$\boldsymbol{u}$ 从固体光滑延拓至孔隙所得的函数。

一般而言，为固体规定的边界条件包括关于场 $\boldsymbol{u}^{\varepsilon}, \boldsymbol{v}^{f,\varepsilon}$和 φ^{ε}的狄利克雷条件，而诺伊曼型条件包括边界牵引力 $\boldsymbol{\sigma}_s^{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{b}^{s,\varepsilon}$ 作用于固体表面的 Γ_{σ} 面上的牵引力、代表流体中作用于Γ_p^{ε} 的应力的流体压力 p^{ε} （假设 $\boldsymbol{\sigma}_f^{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{n}$ 的耗散部分为零）以及电绝缘条件，使得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}^{\varepsilon} &= \boldsymbol{u}_{\partial} \quad \text{on } \Gamma_u^{\varepsilon} \ , \quad \boldsymbol{\sigma}_s^{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{b}^{s,\varepsilon} \text{ on } \Gamma_{\sigma} \ , \\ \boldsymbol{v}^{f,\varepsilon} &= 0 \quad \text{on } \Gamma_w^{\varepsilon} \ , \quad p^{\varepsilon} = p_{\partial} \quad \text{on } \Gamma_p^{\varepsilon} \ , \\ \varphi^{\varepsilon} = \bar{\varphi}_{\varepsilon}^{\alpha} &\text{, 上 } \Gamma_{*}^{\alpha,\varepsilon}, \ \alpha = 1, \ldots, \bar{\alpha}, \quad \vec{D}^{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \text{ 上 } \partial\Omega_m^{\varepsilon} \setminus \Gamma_*^{\varepsilon} \ . \end{aligned} \tag{11}$$

应注意，控制电势 $\bar{\varphi}_{\varepsilon}^{\alpha}(t,x)$可为所有 $x \in \Omega$ 定义，并在给定时间 t 内在每个单连通域$\Omega_{*}^{\alpha\,\varepsilon,}$上取常数值。我们假设 $\bar{\varphi}_{\varepsilon}^{\alpha}(t,\cdot) \in C^{0}(\Omega)$ 满足其强收敛到某个 $\bar{\varphi}^{\alpha}(x,t)$。

以下界面条件表达了牵引应力、速度和电势的连续性，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n}\cdot[\boldsymbol{\sigma}^{\varepsilon}]=0\,, \quad [\boldsymbol{u}^{\varepsilon}]=0\,, \quad \text{on } \Gamma_{*}^{\varepsilon}\,, \\ \boldsymbol{v}^{f,\varepsilon}=\dot{\boldsymbol{u}}^{\varepsilon}\,, \quad \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}_{f}^{\varepsilon}=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}_{s}^{\varepsilon}\,, \text{ and } \quad \boldsymbol{n}\cdot\vec{D}^{\varepsilon}=0 \quad \text{on } \Gamma_{fs}^{\varepsilon}\,. \end{aligned} \tag{12}$$

在下文介绍的弱形式中，将使用以下可容许集和空间，这些集合和空间根据边界条件 (11) 定义，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{U}}^{\varepsilon}(\Omega_{m*}^{\varepsilon}) &= \{\boldsymbol{v}\in\mathbf{H}^{1}(\Omega_{m*}^{\varepsilon})|\ \boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}_{\partial} \text{ on } \Gamma_{\boldsymbol{u}}^{\varepsilon}\}\,, \\ \mathcal{V}_{*}(\Omega_{m}^{\varepsilon},\{\Gamma_{*}^{\alpha,\varepsilon}\}_{\alpha}) &= \{\varphi\in H^{1}(\Omega_{m}^{\varepsilon})|\,\varphi=\bar{\varphi}_{\varepsilon}^{\alpha} \text{ on } \Gamma_{*}^{\alpha,\varepsilon}\}\,, \\ \mathcal{Q}^{\varepsilon}(\Omega_{f}^{\varepsilon}) &= \{q\in H^{1}(\Omega_{f}^{\varepsilon})|\ q=p_{\partial} \text{ on } \Gamma_{p}^{\varepsilon}\}\,, \\ \boldsymbol{\mathcal{W}}_{0}^{\varepsilon}(\Omega_{f}^{\varepsilon},\Gamma_{fs}^{\varepsilon}) &= \{\boldsymbol{v}\in\mathbf{H}^{1}(\Omega_{f}^{\varepsilon})|\ \boldsymbol{v}=\mathbf{0} \text{ on } \Gamma_{fs}^{\varepsilon}\cup\Gamma_{w}^{\varepsilon}\}\,, \end{aligned} \tag{13}$$

其中，空间 $\boldsymbol{\mathcal{W}}_{0}^{\varepsilon}(\Omega_{f}^{\varepsilon},\Gamma_{fs}^{\varepsilon})$ 将用于渗流速度 $\boldsymbol{w}^{\varepsilon}$。用 $\boldsymbol{\mathcal{U}}_{0}^{\varepsilon}(\Omega_{m*}^{\varepsilon})$ 和 $\mathcal{Q}_{0}^{\varepsilon}(\Omega_{f}^{\varepsilon})$ 表示与上文定义的仿射集合$\boldsymbol{\mathcal{U}}^{\varepsilon}(\Omega_{m*}^{\varepsilon})$ 和 $\mathcal{Q}^{\varepsilon}(\Omega_{f}^{\varepsilon})$ 相对应的空间。类似地， $\mathcal{V}_{0}^{\varepsilon}$ $(\Omega_{m}^{\varepsilon},\{\Gamma_{*}^{\alpha,\varepsilon}\}_{\alpha})$ 由 $\mathcal{V}_{*}$ 导出，其中取 $\bar{\varphi}_{\varepsilon}^{\alpha}:=0$。

2.3.2. 准静态流动的弱形式（忽略惯性效应）

在本文后续内容中，我们忽略（9）中的惯性效应，同时将模型限制为描述以缓慢流动和变形为特征的事件。因此，采用周期展开方法的均匀化被应用于准静态流体-固体相互作用的弱形式；该弱形式是在将相应方程分别乘以测试函数并进行分部积分后得到的。然后，代入本构关系后，准静态约束得到以下关于（$\boldsymbol{u}^{\varepsilon}(t,\cdot)$ $\varphi^{\varepsilon}(t,\cdot),\boldsymbol{w}^{\varepsilon}(t,\cdot)$ $\bar{p}^{\varepsilon}(t,\cdot)$) $\in\boldsymbol{\mathcal{U}}^{\varepsilon}(\Omega_{m*}^{\varepsilon})\times\mathcal{V}_{*}(\Omega_{m}^{\varepsilon},$ $\{\Gamma_{*}^{\alpha,\varepsilon}\}_{\alpha})\times$

$\boldsymbol{\mathcal{W}}_0^\varepsilon(\Omega_f^\varepsilon, \Gamma_{fs}^\varepsilon) \times \mathcal{Q}(\Omega_f^\varepsilon)$ 满足于 $t > 0$

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega_{m*}^\varepsilon} \left(\mathbb{A}^\varepsilon \boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}^\varepsilon) - \underline{\boldsymbol{g}}^\varepsilon \nabla \varphi^\varepsilon \right) : \boldsymbol{e}(\boldsymbol{v}^\varepsilon) \, \mathrm{dV} \\
&\qquad - \int_{\Gamma_{fs}^\varepsilon} \boldsymbol{n}^\varepsilon \otimes \boldsymbol{v}^\varepsilon : \boldsymbol{\sigma}_f^\varepsilon(\boldsymbol{w}^\varepsilon, \dot{\tilde{\boldsymbol{u}}}, p^\varepsilon) \, \mathrm{dS} = \int_{\Omega_{m*}^\varepsilon} \boldsymbol{f}^{s,\varepsilon} \cdot \boldsymbol{v}^\varepsilon \, \mathrm{dV} + \int_{\partial_\sigma \Omega_{m*}^\varepsilon} \boldsymbol{b}^{s,\varepsilon} \cdot \boldsymbol{v}^\varepsilon \, \mathrm{dV} \, , \\
&\int_{\Omega_m^\varepsilon} \left((\underline{\boldsymbol{g}}^\varepsilon)^T : \boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}^\varepsilon) \, \mathrm{dV} + \boldsymbol{d}^\varepsilon \nabla \varphi^\varepsilon \right) \cdot \nabla \psi^\varepsilon \, \mathrm{dV} = \int_{\Omega_m^\varepsilon} \rho_E^\varepsilon \psi^\varepsilon \, \mathrm{dV} \, , \\
&\int_{\Omega_f^\varepsilon} \left(2\mu^\varepsilon \boldsymbol{e}(\boldsymbol{w}^\varepsilon + \dot{\tilde{\boldsymbol{u}}}^\varepsilon) \, \mathrm{dV} - p^\varepsilon \boldsymbol{I} \right) : \boldsymbol{e}(\boldsymbol{\theta}^\varepsilon) \, \mathrm{dV} = \int_{\Omega_f^\varepsilon} \boldsymbol{f}^{f,\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\theta}^\varepsilon \, \mathrm{dV} \, , \\
&\qquad \int_{\Omega_f^\varepsilon} q^\varepsilon \left(\gamma \dot{p}^\varepsilon + \nabla \cdot (\boldsymbol{w}^\varepsilon + \dot{\tilde{\boldsymbol{u}}}) \right) \mathrm{dV} = 0 \, ,
\end{aligned}
\tag{14}
$$

对所有 $(\boldsymbol{v}^\varepsilon, \psi^\varepsilon, \boldsymbol{\theta}^\varepsilon, q^\varepsilon) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}_0^\varepsilon(\Omega_{m*}^\varepsilon) \times \mathcal{V}_0(\Omega_m^\varepsilon, \{\Gamma_*^{\alpha,\varepsilon}\}_\alpha) \times \boldsymbol{\mathcal{W}}_0^\varepsilon(\Omega_f^\varepsilon, \Gamma_{fs}^\varepsilon) \times \mathcal{Q}_0^\varepsilon(\Omega_f^\varepsilon)$

注 2.1. 附录*A*中关于非均质结构直接数值模拟的公式 *(A.2)*，可由式 *(14)* 利用相互作用积分得到；该积分可改写为体积分（注意法向方向 $\boldsymbol{n}^{[s]} = -\boldsymbol{n}^{[f]}$）。因此（省略 $^\varepsilon$，假设尺度 ε_0 已知，$\Omega_R^f = \Omega^f$ 处于迭代算法的参考构形中）

$$
-\int_{\Gamma_{fs}} \boldsymbol{\sigma}_f : \boldsymbol{n}^{[s]} \otimes \widetilde{\boldsymbol{v}} \, \mathrm{dS} = \int_{\Omega_f} \boldsymbol{\sigma}_f : \nabla \widetilde{\boldsymbol{v}} \, \mathrm{dV} - \int_{\partial_\sigma \Omega} \boldsymbol{\sigma}_f : \boldsymbol{n}^{[f]} \otimes \widetilde{\boldsymbol{v}} \, \mathrm{dV} \, , \tag{15}
$$

其中已使用平衡恒等式 $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_f = 0 \; in \; \Omega f$。

3. 流固耦合问题的均匀化

尽管我们考虑的是线性问题的尺度变换，但在附录 B 中，我们将说明，也可以将其理解为通过一系列与增量公式相关的线性子问题来求解非线性问题。

我们基于在 [31], 中获得的结果展开研究，其中考虑了由尺寸为 $\sim \varepsilon$ 的流体填充夹杂物并集形成的非连通孔隙度，以及这些相互分离的夹杂物中不受任何流动效应影响的静态或准静态加载。即使对于允许非定常

对于 Stokes流，可以证明，有效压电-孔弹性本构定律的均质化参数可以像在静态情形或准静态情形中一样获得，而与时间无关。在 [33], 这一解耦固体和流体的均匀化性质中，即使在充分考虑惯性效应并采用声学线性化的完全动态情形下，也能得到该性质。这同样适用于我们当前涉及压电骨架的情形——均质化流动遵循Darcy定律，其可通过渗透率张量进行描述，而该渗透率张量的计算独立于变形和电场。

3.1. 周期几何和代表性胞元

流体饱和多孔介质由一个参考周期胞元 Y 分解为三个互不重叠的子域 Y_m、 Y_f 和 Y_*，并以此生成周期晶格，见图 2，其中 $|Y| \approx 1$。具体而言，Ω_k^ε 通过在晶格内重复缩放后的胞元子域 εY_k 生成，其中 $k = m, *, f$。因此，根据分解 (4)

$$\begin{aligned} Y = Y_m \cup Y_f \cup Y_* \cup \Gamma_Y \,, \quad Y_i \cap Y_j = \emptyset \text{ for } j \neq i \text{ with } i,j \in \{f, m, *\} \,, \\ Y_* = \bigcup Y_*^\alpha \,, \quad Y_*^\alpha \cap Y_*^\beta = \emptyset \text{ for } \alpha \neq \beta \,, \quad Y_s \equiv Y_{m*} = Y_m \cap Y_* \,, \end{aligned} \tag{16}$$

其中 $\operatorname{dist}\left(Y_*^\alpha, Y_*^\beta\right) \geq s^*(1 - \delta_{\alpha\beta})$， $s^* > 0$ 是不同导电部分之间的最小距离。Γ_Y表示所有界面的并集，按曲面测度分成两个不相交的部分，假设 $\partial Y_f \cap \partial Y_* = \emptyset$ （与流体分隔开的导体）

$$\Gamma_Y = \Gamma_{fs} \cup \Gamma_{m*} \,, \quad \Gamma_{fs} = \overline{Y_s} \cap \overline{Y_f} \,, \quad \Gamma_{m*}^\alpha = \overline{Y_*^\alpha} \cap \overline{Y_m} \,, \quad \Gamma_{m*} = \bigcup_\alpha \Gamma_{m*}^\alpha \,. \tag{17}$$

我们还假设导体部分之间具有足够大的间隔，即 $Y_*^{\overline{\alpha}} \cap \partial Y = \emptyset$，因此周期晶格 Ω_*^α 由彼此不连通的夹杂物构成，其周长为 $\approx \varepsilon$。

3.2. 材料参数与尺度变换

如果认为某些相关材料参数依赖于ε，则微观模型的特定特征可在极限 $\varepsilon \to 0$ 中得以保留。为考虑电场受到强烈控制的微结构，在公式（ 14 ）中，为每个由理想导体占据、并由 Y_*^α在单元Y内表示的单连通域 $\Omega_*^{\alpha\,\varepsilon}$, 给定势 $\bar{\varphi}^\alpha$ 。作出以下假设:

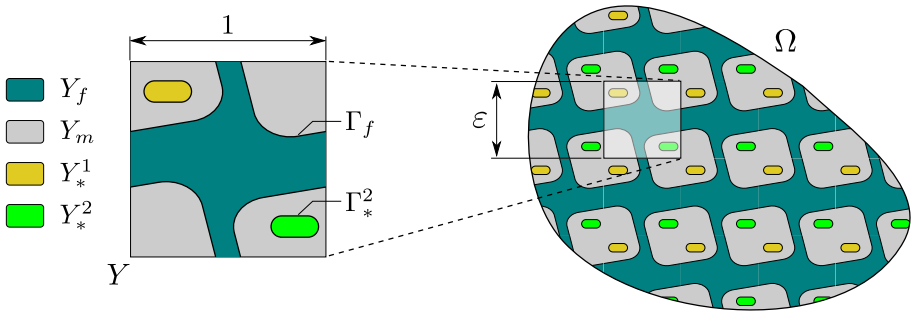


图 2：代表性周期单元分解及所生成周期结构的示意图。导电部分 Y_*^α嵌入固体压电骨架 Y_m 和流体部分 Y_f 中的多孔微观结构。Ω_k^ε由 εY_k、$k = m, *, f$生成周期晶格。（注意，三维情况下的体积为$|\varepsilon Y| \sim \varepsilon^3$。）

$$
\begin{array}{lllll}
\textbf{a)} \text{ Strongly controlled field:} & \bar{\varphi}^\varepsilon = \bar{\varphi}^\alpha & & & \text{in } \Omega_*^{\alpha,\varepsilon}\,, \\
\textbf{b)} \text{ Weakly piezoelectric material:} & \underline{\boldsymbol{g}}^\varepsilon = \varepsilon \underline{\bar{\boldsymbol{g}}}\,, & \boldsymbol{d}^\varepsilon = \varepsilon^2 \bar{\boldsymbol{d}} & & \text{in } \Omega_m^\varepsilon\,, \\
\textbf{c)} \text{ Nonslip condition on pore walls:} & \mu^\varepsilon = \varepsilon^2 \bar{\mu} & & & \text{in } \Omega_f^\varepsilon\,.
\end{array}
$$

与假设 **a)**一致，由于 $\bar{\varphi}^\alpha$ 不会随 $\varepsilon \to 0$消失，因此假定较小 ε下电势具有陡峭梯度，这必须通过尺度变换 **b)**来补偿，详见 [31]。在流体部分，将黏度按因子 ε^2 进行尺度变换 **c)**，与准静态流动模型相一致；该模型在 Γ_f^ε 处对流体速度施加无滑移条件，参见 例如 [1, 17,10]。对于问题 **(14)**，当可以忽略平流加速度时，这一结论成立。然而，若考虑流体惯性，则 $\mu^\varepsilon = \varepsilon^\beta \bar{\mu}$ 取常数$\bar{\mu} > 0$，其中指数 $\beta > 0$ 待定，参见 [6]。

3.3. 渐近展开

可以形式化地引入以下位移、电势、压力和流体渗流速度的截断展开（所谓的恢复序列），从而推导出极限方程：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}_\varepsilon(\boldsymbol{u}^\varepsilon) &\approx \boldsymbol{u}^{R\varepsilon}(x,y) := \boldsymbol{u}^{0\varepsilon}(x) + \varepsilon \boldsymbol{u}^{1\varepsilon}(x,y)\,, \\
\mathcal{T}_\varepsilon(\varphi^\varepsilon) &\approx \varphi^{R\varepsilon}(x,y) := \hat{\varphi}^{0\varepsilon}(x,y)\,, \\
\mathcal{T}_\varepsilon(p^\varepsilon) &\approx p^{R\varepsilon}(x,y) := p^{0\varepsilon}(x) + \varepsilon p^{1\varepsilon}(x,y)\,, \\
\mathcal{T}_\varepsilon(\boldsymbol{w}^\varepsilon) &\approx \boldsymbol{w}^{R\varepsilon}(x,y) := \hat{\boldsymbol{w}}(x,y)\,.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

测试函数也采用类似的形式，因此

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_\varepsilon(\boldsymbol{v}^\varepsilon(x)) &= \boldsymbol{v}^0(x)+\varepsilon\boldsymbol{v}^1(x,y)\ ,\\ \mathcal{T}_\varepsilon(\psi^\varepsilon) &= \hat{\psi}^{0\varepsilon}(x,y)\ ,\\ \mathcal{T}_\varepsilon(q^\varepsilon(x)) &= q^0(x)+\varepsilon q^1(x,y)\ ,\\ \mathcal{T}_\varepsilon(\boldsymbol{\theta}^\varepsilon(x)) &= \hat{\boldsymbol{\theta}}(x,y)\ .\end{aligned} \tag{19}$$

所有双尺度函数关于第二个变量 y 都是 Y-周期的，且对几乎所有 $t>0$

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{u}^1(\cdot,t),\boldsymbol{v}^1\in L^2(\Omega;\mathbf{H}^1_{\#}(Y_s))\ ,\quad \boldsymbol{u}^0(\cdot,t)\in\mathbf{H}^1(\Omega)\ ,\\ &\hat{\boldsymbol{w}}(\cdot,t),\hat{\boldsymbol{\theta}}\in L^2(\Omega;\mathbf{H}^1_{\#0}(Y_f))\ ,\\ &p^1(\cdot,t),q^1\in L^2(\Omega;H^1_{\#}(Y_f))\ ,\quad p^0(\cdot,t)\in H^1(\Omega)\ ,\\ &\hat{\varphi}^0(x,\cdot,t)\in L^2(\Omega;H^1_{\#0*}(Y_m))+\sum_\alpha\Phi^\alpha\bar{\varphi}^\alpha(\cdot,t)\ ,\end{aligned} \tag{20}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathbf{H}^1_{\#0}(Y_f)&=\{\boldsymbol{v}\in\widetilde{\mathbf{H}}^1_{\#}(Y_f)|\ \boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}\text{ on }\Gamma_{fs}\}\ ,\\ H^1_{\#0*}(Y_m)&=\{\psi\in H^1_{\#}(Y_m)|\ \psi=0\text{ on }\Gamma_*\}\ ,\\ H^1_{\#0,\alpha}(Y_m)&=H^1_{\#0*}(Y_m)+\Phi^\alpha\ ,\quad \Phi^\alpha=\delta_{\alpha\beta}\text{ on }\Gamma^\beta_*\ ,\end{aligned} \tag{21}$$

其中 $\Phi^\alpha\in H^1_{\#}(Y_m)$ 其余部分任意给定。请注意，$\hat{}\boldsymbol{w}$ 在 Γ_{fs} 上的无滑移条件是由空间 $\mathbf{H}^1_{\#0}(Y_f)$ 所施加的。因此，对于任意 $\hat{}\,\boldsymbol{\theta}\in\mathbf{H}^1_{\#0}(Y_f)$，都有 $\int_{Y_f}\nabla_y\cdot\hat{}\,\boldsymbol{\theta}=0$。

此外，我们将采用体积分数 $\phi_f:=|Y_f|/|Y|$ 和 $\phi_s=1-\phi_f$。还需要表面相分数 ϕ_s 和 ϕ_f 的概念，它们通过以下收敛关系引入，

$$\int_{\Gamma^\varepsilon_\sigma}\vartheta\,\mathrm{dS}\to\int_{\partial_\sigma\Omega}\bar{\phi}_s\vartheta\,\mathrm{dS}=\int_{\partial\Omega}\bar{\phi}_s\vartheta\,\mathrm{dS}\ ,\quad \int_{\Gamma^\varepsilon_p}\vartheta\,\mathrm{dS}\to\int_{\partial_p\Omega}\bar{\phi}_f\vartheta\,\mathrm{dS}=\int_{\partial\Omega}\bar{\phi}_f\vartheta\,\mathrm{dS}\ , \tag{22}$$

对所有 $\vartheta\in H^1(\Omega)$，这些等式成立是因为定义了 $\bar{\phi}_s:=0$ 于 $\partial\Omega\setminus\partial_\sigma\Omega$ 以及 $\phi_f:=0$ 于 $\partial\Omega\setminus\partial_p\Omega$。这使得我们能够引入有效牵引应力，见下文（40）。

3.4. 极限双尺度方程——$\Omega \times Y_f$中的流体响应

我们回顾微观结构中流体与固体响应的可分离性，如例如在 [33], 参见 [10, 26]中所述。这使得我们能够形式上独立于固体部分推导微观结构中流体流动的极限方程。显然，在宏观尺度上，流体与固体的响应是耦合的。我们省略准静态流动均质化的细节——结果可取自 [33] ，该文讨论了多孔介质中的动态流固耦合。

将渐近展开式 (18)-(19) 代入 (14)[3,4], 后，得到以下极限方程:

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \fint_{Y_f} \mathbb{D}\boldsymbol{e}_y(\hat{\boldsymbol{w}}) : \boldsymbol{e}_y(\hat{\boldsymbol{\theta}})\,\mathrm{dV}_y\,\mathrm{dV}_x - \int_\Omega \fint_{Y_f} p^1 \nabla_y \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}}\,\mathrm{dV}_y\,\mathrm{dV}_x \\
&\quad = \int_\Omega (\widehat{\boldsymbol{f}}^f + p^0 \nabla_x)\,\mathrm{dV}_x \cdot \fint_{Y_f} \hat{\boldsymbol{\theta}}\,\mathrm{dV}_y \ , \\
&\int_\Omega \left(\nabla_x \cdot \left(\phi_f \dot{\boldsymbol{u}}^0 + \fint_{Y_f} \hat{\boldsymbol{w}}\,\mathrm{dV}_y \right) + \fint_{Y_f} \nabla_y \cdot \dot{\hat{\boldsymbol{u}}}^1\,\mathrm{dV}_y + \gamma p^0 \right) q^0\,\mathrm{dV}_x = 0 \ , \\
&\int_\Omega \fint_{Y_f} q^1 \nabla_y \cdot \hat{\boldsymbol{w}}\,\mathrm{dV}_y\,\mathrm{dV}_x = 0 \ ,
\end{aligned} \tag{23}$$

对于所有 $\hat{\boldsymbol{\theta}} \in L^2(\Omega; \mathbf{H}^1_{\#0}(Y_f))$、 $q^0 \in L^1(\Omega)$ 和 $q^1 \in L^2(Y_2)$。上文中，$\widehat{\boldsymbol{f}}^f$ 为平均体力，满足 $\int_{Y_f} \boldsymbol{f}^f \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} = \widehat{\boldsymbol{f}}^f \cdot \int_{Y_f} \hat{\boldsymbol{\theta}}$。

现在，可以定义自主特征响应（$\boldsymbol{w}^k$, π^k）、 $k = 1$, 2, 3，使得（适用于 k 中的求和），

$$\hat{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{w}^k(\widehat{f}_k - \partial^x_k p^0) \ , \quad p^1 = \pi^k(\widehat{f}_k - \partial^x_k p^0) \ . \tag{24}$$

特征响应 $\boldsymbol{w}^k(y)$ 是以下问题的解：求 $\boldsymbol{w}^k \in \mathbf{H}^1_{\#0}(Y_f)$ 和 $\pi^k \in L^2(Y_f)$，使得

$$\begin{aligned}
a_f\left(\boldsymbol{w}^k,\, \boldsymbol{v}\right) - \left\langle \pi^k,\, \nabla_y \cdot \boldsymbol{v} \right\rangle_{Y_f} &= \left\langle \mathbf{1}_k,\, \boldsymbol{v} \right\rangle_{Y_f} \ , \\
\left\langle q,\, \nabla_y \cdot \boldsymbol{w}^k \right\rangle_{Y_f} &= 0 \ ,
\end{aligned} \tag{25}$$

对于所有 $\boldsymbol{v} \in \mathbf{H}^1_{\#0}(Y_f)$ 和 $q \in L^2(Y_f)$。使用所定义的宏观渗流速度

$$\phi_f \boldsymbol{w}^0 := \fint_{Y_f} \hat{\boldsymbol{w}}\,\mathrm{dV}_y \ , \tag{26}$$

质量守恒 $(23)_2$ 得出宏观流动方程,

$$\gamma \dot{p}^0 + \nabla_x \cdot [\phi_f(\boldsymbol{w}^0 + \dot{\boldsymbol{u}}^0)] + \fint_{Y_f} \nabla_y \cdot \dot{\tilde{\boldsymbol{u}}}^1 \, \mathrm{dV}_y = 0 \,, \tag{27}$$

其中 $\tilde{\boldsymbol{u}}^1$ 需使用下文定义的尺度分解公式 (31) 进行替换。

3.5. 极限双尺度方程——$\Omega \times Y_s$中的固体响应

为求得固相平衡的极限，需考虑流体中应力牵引力的相互作用项，该项以流体速度 $\boldsymbol{w}^\varepsilon + \dot{\boldsymbol{u}}^\varepsilon$和压力表示:

$$\mathcal{I}^\varepsilon(\boldsymbol{\sigma}_f^\varepsilon, \boldsymbol{v}^\varepsilon) = \int_{\Gamma_{fs}^\varepsilon} \boldsymbol{n}^{[s]} \cdot \boldsymbol{\sigma}_f^\varepsilon \cdot \boldsymbol{v}^\varepsilon \, \mathrm{dS}_y \,, \quad \text{where} \quad \boldsymbol{\sigma}_f^\varepsilon = -p^\varepsilon \boldsymbol{I} + 2\mu^\varepsilon \boldsymbol{e}(\boldsymbol{w}^\varepsilon + \dot{\tilde{\boldsymbol{u}}}^\varepsilon) \,. \tag{28}$$

请注意，在 [31], 中仅考虑了不连通夹杂物（无流动），因此极限项自然取决于 p^0。对于准静态流动，根据 [33], ，极限相互作用项为

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^\varepsilon(\boldsymbol{\sigma}_f^\varepsilon, \boldsymbol{v}^\varepsilon) \to & \int_\Omega \phi_f \left(p^0 \nabla + \widehat{\boldsymbol{f}}^f \right) \cdot \boldsymbol{v}^0 \, \mathrm{dV}_x \\ & - \int_\Omega p^0 \fint_{\Gamma_{fs}} \boldsymbol{v}^1 \cdot \boldsymbol{n}^{[s]} \, \mathrm{dS}_y \, \mathrm{dV}_x + \int_{\partial_p \Omega} \bar{\phi}_f \bar{\boldsymbol{b}}^f \cdot \boldsymbol{v}^0 \, \mathrm{dS}_x \,, \end{aligned} \tag{29}$$

其中 $\boldsymbol{v}^0 \in \boldsymbol{\mathcal{U}}_0(\Omega)$、$\boldsymbol{v}^1(x, \cdot) \in \mathbf{H}^1_\#(Ys)$，且 $\bar{\phi}_f$为边界孔隙率。注意，在 Γ_p^ε 上，给定压力 p_∂ 表示作用于流体部分的边界牵引应力。因此，根据 (22), 由于作用于 Γ_p^ε上的 $\boldsymbol{b}^{f,\varepsilon}$ 收敛，在 (29) 中出现了规定平均牵引应力 $\bar{\phi}_f \bar{\boldsymbol{b}}^f = -\boldsymbol{n} p_\partial$在 $\partial_p\Omega$ 上的条件。有关边界条件的其他问题将在第 3.6 节讨论。

按照 [31]中阐述的均匀化过程，通过类似的推导得到相应的极限方程。因此，我们利用（29）求得（14）的极限。下面分别给出局部子问题和整体子问题;

当$\boldsymbol{v}^0$, 趋于零时，可得到局部子问题，使得

$$
\begin{aligned}
&\fint_{\Omega\times Y_s} \boldsymbol{e}_y(\boldsymbol{v}^1) : \mathbb{A}\left(\boldsymbol{e}_x(\boldsymbol{u}^0)+\boldsymbol{e}_y(\boldsymbol{u}^1)\right)\,\mathrm{dV}_{xy} - \fint_{\Omega\times Y_m} \boldsymbol{e}_y(\boldsymbol{v}^1) : \underline{\bar{\boldsymbol{g}}}^T\nabla_y\hat{\varphi}^0\,\mathrm{dV}_{xy}\\
&= \int_\Omega p^0 \fint_{\Gamma_f} \boldsymbol{v}^1\cdot\boldsymbol{n}^{[f]}\,\mathrm{dS}_y\,\mathrm{dV}_x\ ,\\
&\fint_{\Omega\times Y_m} \nabla_y\hat{\psi}^0\cdot[\underline{\bar{\boldsymbol{g}}} : \left(\boldsymbol{e}_x(\boldsymbol{u}^0)+\boldsymbol{e}_y(\boldsymbol{u}^1)\right) + \bar{\boldsymbol{d}}\nabla_y\hat{\varphi}^0]\,\mathrm{dV}_{xy} = \fint_{\Omega\times Y_m}\bar{\rho}_E\hat{\psi}^0\,\mathrm{dV}_{xy}\ ,
\end{aligned}
\tag{30}
$$

对所有 $\boldsymbol{v}^1\in\mathbf{L}^2(\Omega;\,\mathbf{H}^1_{\#}(Y_m))$ 和 $\hat{}\ \psi\in L^2(\Omega;\,W_{\#*}(Y_m)$ 均成立。由于线性，采用引入修正函数（特征响应）的标准尺度解耦方法，从而可将双尺度函数表示如下:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}^1(x,y) &= \boldsymbol{\omega}^{ij}e^x_{ij}(\boldsymbol{u}^0) - p^0\boldsymbol{\omega}^P + \boldsymbol{\omega}^\rho\rho_E + \sum_\alpha \hat{\boldsymbol{\omega}}^\alpha\bar{\varphi}^\alpha\ ,\\
\varphi^0(x,y) &= \hat{\eta}^{ij}e^x_{ij}(\boldsymbol{u}^0) - p^0\hat{\eta}^P + \hat{\eta}^\rho\rho_E + \sum_\alpha \hat{\varphi}^\alpha\bar{\varphi}^\alpha\ .
\end{aligned}
\tag{31}
$$

所有 $\boldsymbol{\omega}$,$\hat{}\eta$ 和$\hat{}\varphi$ 都是Y-周期的，表示整个固体部分中的位移、 $Y_{m*}=Y_m\cup Y_*$ 以及基质部分中的电势 Y_m。

3.5.1. 局部特征响应

压电孔弹性介质的特征微观问题通过双线性形式表示:

$$
\begin{aligned}
a^{m*}_Y(\boldsymbol{u},\,\boldsymbol{v}) &= \fint_{Y_{m*}} [\mathbb{D}\boldsymbol{e}_y(\boldsymbol{u})] : \boldsymbol{e}_y(\boldsymbol{v})\,\mathrm{dV}_y\ ,\\
g^m_Y(\boldsymbol{u},\,\psi) &= \fint_{Y_m} g_{kij}e^y_{ij}(\boldsymbol{u})\partial^y_k\psi\,\mathrm{dV}_y\ ,\\
d^m_Y(\varphi,\,\psi) &= \fint_{Y_m} [\boldsymbol{d}\nabla_y\varphi]\cdot\nabla_y\psi\,\mathrm{dV}_y\ .
\end{aligned}
\tag{32}
$$

局部特征响应是以下自治问题（独立于宏观响应）的解:

- 求解（$\boldsymbol{\omega}^{ij}$，$\hat{}\eta^{ij}$）$\in\mathbf{H}^1{}_{\#}$（Y_{m*}）$\times H^1{}_{\#0*}$（Y_m），其中任意 i，$j=1$，2，3均满足

$$
\begin{aligned}
a^{m*}_Y\left(\boldsymbol{\omega}^{ij}+\boldsymbol{\Pi}^{ij},\,\boldsymbol{v}\right) - g^m_Y\left(\boldsymbol{v},\,\hat{\eta}^{ij}\right) &= 0\ , \quad \forall\boldsymbol{v}\in\mathbf{H}^1_{\#}(Y_{m*})\ ,\\
g^m_Y\left(\boldsymbol{\omega}^{ij}+\boldsymbol{\Pi}^{ij},\,\psi\right) + d^m_Y\left(\hat{\eta}^{ij},\,\psi\right) &= 0\ , \quad \forall\psi\in H^1_{\#0*}(Y_m)\ ,
\end{aligned}
\tag{33}
$$

其中 $\boldsymbol{\Pi}^{ij} = (\Pi_k^{ij})$， i， j， $k = 1$，2，3的分量 $\Pi_k^{ij} = y_j \delta_{ik}$ 表示由主要宏观应变模式引起的均匀位移场。

- 求满足条件的 $(\boldsymbol{\omega}^P,\ \hat{}\eta^P) \in \mathbf{H}^1{}_{\#}(Y_{m*}) \times H^1{}_{\#0*}(Y_m)$

$$
\begin{aligned}
a_Y^{m*}\left(\boldsymbol{\omega}^P,\, \boldsymbol{v}\right) - g_Y^m\left(\boldsymbol{v},\, \hat{\eta}^P\right) &= -\fint_{\Gamma_f} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}^{[f]}\,\mathrm{dS}_y\ , \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{H}^1_{\#}(Y_m)\ , \\
g_Y^m\left(\boldsymbol{\omega}^P,\, \psi\right) + d_Y^m\left(\hat{\eta}^P,\, \psi\right) &= 0\ , \quad \forall \psi \in H^1_{\#0*}(Y_m)\ .
\end{aligned}
\tag{34}
$$

- 求满足条件的 $(\boldsymbol{\omega}^\rho,\ \hat{}\eta^\rho) \in \mathbf{H}^1{}_{\#}(Y_{m*}) \times H^1{}_{\#0*}(Y_m)$

$$
\begin{aligned}
a_Y^{m*}\left(\boldsymbol{\omega}^\rho,\, \boldsymbol{v}\right) - g_Y^m\left(\boldsymbol{v},\, \hat{\eta}^\rho\right) &= 0\ , \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{H}^1_{\#}(Y_m)\ , \\
g_Y^m\left(\boldsymbol{\omega}^\rho,\, \psi\right) + d_Y^m\left(\hat{\eta}^\rho,\, \psi\right) &= \fint_{\Gamma_{mc}} \psi\,\mathrm{dS}_y\ , \quad \forall \psi \in H^1_{\#0*}(Y_m)\ .
\end{aligned}
\tag{35}
$$

- 求满足条件的 $(\hat{}\boldsymbol{\omega}^\alpha,\ \hat{}\varphi^\alpha) \in \mathbf{H}^1{}_{\#}(Y_{m*}) \times H^1{}_{\#0,\,\alpha}(Y_m)$，对 $\alpha = 1$，2，…，α^*，

$$
\begin{aligned}
a_Y^{m*}\left(\hat{\boldsymbol{\omega}}^\alpha,\, \boldsymbol{v}\right) - g_Y^m\left(\boldsymbol{v},\, \hat{\varphi}^\alpha\right) &= 0\ , \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{H}^1_{\#}(Y_m)\ , \\
g_Y^m\left(\hat{\boldsymbol{\omega}}^\alpha,\, \psi\right) + d_Y^m\left(\hat{\varphi}^\alpha,\, \psi\right) &= 0\ , \quad \forall \psi \in H^1_{\#0*}(Y_m)\ .
\end{aligned}
\tag{36}
$$

在 (34) 中，界面积分可利用体积分改写：对于任意 $\boldsymbol{v} \in \mathbf{H}^1_{\#}(Y_{m*})$，

$$
\fint_{\Gamma_f} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}^{[f]}\,\mathrm{dS}_y = -\fint_{\Gamma_f} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}^{[m]}\,\mathrm{dS}_y = -\fint_{Y_{m*}} \nabla_y\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{dV}_y\ . \tag{37}
$$

3.6. 宏观问题——准静态流动与变形线性模型

在宏观尺度上，孔隙流动与固体变形相耦合，具体体现为由固体部分产生的宏观准静态平衡，以及由流体部分产生的质量守恒。压电孔弹性介质的宏观状态由二元组 $(\boldsymbol{u}^0, p^0)$ 给出，而宏观电势 $\{\bar{\varphi}^\alpha\}$ 则作为时空控制场参与其中。我们引入可容许集，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\mathcal{U}}(\Omega) &= \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega) |\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_\partial \text{ on } \partial_u\Omega\}\ , \\
\mathcal{Q}(\Omega) &= \{p \in H^1(\Omega) |\ p = p_\partial \text{ on } \partial_p\Omega\}\ .
\end{aligned}
\tag{38}
$$

此外，通过规定零狄利克雷边界条件，我们分别采用与$\boldsymbol{\mathcal{U}}(\Omega)$ 和 $\mathcal{Q}(\Omega)$ 相关联的检验函数空间 $\boldsymbol{\mathcal{U}}_0(\Omega)$ 和 $\mathcal{Q}_0(\Omega)$。

必须指定诺伊曼型极限边界条件。对于固相，牵引应力作用于 $\Gamma_\sigma^\varepsilon$，在极限情况下表示为 $\partial_\sigma\Omega$。施加在 Γ_p^ε 上的流体压力对应狄利克雷型边界条件；然而，在极限模型中，它也作为牵引应力 $-\boldsymbol{n}p_\partial$ 作用于混合物的宏观平衡方程中。

3.6.1. 压电孔弹性介质的均匀化系数

我们首先回顾由流动子问题导出的极限方程（27）和（26）。将（24）代入（27），得到水力渗透率$\boldsymbol{K}$ $=(K_{ij})$,

$$K_{ij} = \fint_{Y_f} w_i^j \,\mathrm{dV}_y \,, \quad K_{ij} = K_{ji} \,. \tag{39}$$

根据（25），将$\boldsymbol{v} := \boldsymbol{w}^j$代入即可得出其对称性和半正定性。请注意，如果孔隙度不是单连通域，则会出现 K_{ij} 的秩亏。

由极限相互作用积分（29）得到作用于$\partial_p\Omega$上的牵引向量 $\bar{\phi}_f \bar{\boldsymbol{b}}^f$，从而可按标准方法得到准静态平衡方程。一般而言，其中涉及有效体力和牵引力,

$$\widehat{\boldsymbol{f}} = \phi_s \widehat{\boldsymbol{f}}^s + \phi_f \widehat{\boldsymbol{f}}^f \,, \quad \widehat{\boldsymbol{b}} = \bar{\phi}_s \bar{\boldsymbol{b}}^s + \bar{\phi}_f \bar{\boldsymbol{b}}^f \,, \quad \phi_d \widehat{\boldsymbol{f}}^d = \fint_{Y_d} \boldsymbol{f}^d \,\mathrm{dV}_y \,, \quad d = s, f \,, \tag{40}$$

其中 $\widehat{\boldsymbol{f}}^d$ 是平均体积力。有效牵引应力 $\widehat{\boldsymbol{b}}$ 根据两相的表面分数 ϕ_d、$d = f, s$ 以及平均牵引应力 $\bar{\boldsymbol{b}}^f$ 和 $\bar{\boldsymbol{b}}^s$ 定义，分别作用于流体和固体。

宏观函数 $\boldsymbol{u}^0 \in \boldsymbol{\mathcal{U}}(\Omega)$ 和 $p^0 \in L^2(\Omega)$ 满足

$$\begin{aligned} &\int_\Omega e_{ij}^x(\boldsymbol{v}^0) \left[a_Y^{m*} \left(\boldsymbol{u}^1 - \boldsymbol{\Pi}^{kl} e_{kl}^x(\boldsymbol{u}^0), \boldsymbol{\Pi}^{ij} \right) - g_Y^m \left(\boldsymbol{\Pi}^{ij}, \hat{\varphi}^0 \right) \right] \mathrm{dV}_x \\ &\quad - \int_\Omega p^0 \phi_f \nabla_x \cdot \boldsymbol{v}^0 \,\mathrm{dV}_x = \int_\Omega \widehat{\boldsymbol{f}} \cdot \boldsymbol{v}^0 \,\mathrm{dV}_x + \int_{\partial\Omega} \widehat{\boldsymbol{b}} \cdot \boldsymbol{v}^0 \,\mathrm{dS}_x \,, \end{aligned} \tag{41}$$

以及流体质量守恒，见 (27),

$$\int_\Omega q^0 \left(\phi_f \nabla_x \cdot \boldsymbol{u}^0 - \fint_{\Gamma_f} \boldsymbol{u}^1 \cdot \boldsymbol{n}^{[m*]} \, \mathrm{dS}_y \right) \, \mathrm{dV}_x + \int_\Omega \phi_f \nabla_x \cdot \boldsymbol{w}^0 \, \mathrm{dV}_x + \gamma \int_\Omega \phi_f p^0 q^0 \, \mathrm{dV}_x = 0 \, , \tag{42}$$

对于所有 $(\boldsymbol{v}^0, q^0) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}_0(\Omega) \times \mathcal{Q}_0(\Omega)$。应注意，微观层面满足电荷守恒。在（41）和（42）中，利用分解（31）代入双尺度函数。收集与不同宏观函数相对应的各项后，即可确定均匀化系数的表达式，见 [31],

$$\begin{aligned}
A_{klij} &= a_Y^{m*}\left(\boldsymbol{\omega}^{ij} + \boldsymbol{\Pi}^{ij}, \boldsymbol{\omega}^{kl} + \boldsymbol{\Pi}^{kl}\right) + d_Y^m\left(\hat{\eta}^{kl}, \hat{\eta}^{ij}\right) \, , \\
B_{ij} &= a_Y^{m*}\left(\boldsymbol{\omega}^P, \boldsymbol{\Pi}^{ij}\right) - g_Y^m\left(\boldsymbol{\Pi}^{ij}, \hat{\eta}^P\right) + \phi_f \delta_{ij} = -\fint_{Y_m} \nabla_y \cdot \boldsymbol{\omega}^{ij} \, \mathrm{dV}_y + \phi_f \delta_{ij} \, , \\
M &= a_Y^{m*}\left(\boldsymbol{\omega}^P, \boldsymbol{\omega}^P\right) + d_Y^m\left(\hat{\eta}^P, \hat{\eta}^P\right) + \phi_f \gamma \, , \\
H_{ij}^\alpha &= a_Y^{m*}\left(\hat{\boldsymbol{\omega}}^\alpha, \boldsymbol{\Pi}^{ij}\right) - g_Y^m\left(\boldsymbol{\Pi}^{ij}, \hat{\varphi}^\alpha\right) \, , \\
S_{ij} &= a_Y^{m*}\left(\boldsymbol{\omega}^\rho, \boldsymbol{\Pi}^{ij}\right) - g_Y^m\left(\boldsymbol{\Pi}^{ij}, \hat{\eta}^\rho\right) \, , \\
R &= -\fint_{\Gamma_f} \boldsymbol{\omega}^\rho \cdot \boldsymbol{n}^{[f]} \, \mathrm{dS}_y \, , \\
Z^\alpha &= -\fint_{\Gamma_f} \hat{\boldsymbol{\omega}}^\alpha \cdot \boldsymbol{n}^{[f]} \, \mathrm{dS}_y \, .
\end{aligned} \tag{43}$$

上述对称表达式是利用特征问题（33）—（36）的方程推导得到的。显然, $A_{klij} = A_{ijkl} = A_{klji}$、 $B_{ij} = B_{ji}$，正如对Biot型连续介质所预期的那样, 以及 $S_{ij} = S_{ji}$、 $H_{ij}^\alpha = H_{ji}^\alpha$。我们将采用“粗体”记号 $\boldsymbol{A} = (A_{ijkl})$、$\boldsymbol{B} = (B_{ij})$、$\boldsymbol{S} = (S_{ij})$ 和 $\boldsymbol{K} = (K_{ij})$，而 $\underline{\boldsymbol{H}} = (H_{ij}^\alpha)$ 和 $Z = (Z^\alpha)$ 与 $\underline{\varphi} = (\bar{\varphi}^\alpha)$ 相匹配，因此 $\sum_\alpha \underline{\boldsymbol{H}}^\alpha \bar{\varphi}^\alpha = \underline{\boldsymbol{H}} \cdot \underline{\varphi}$。

3.6.2. 宏观问题 – 耦合流动与变形的线性模型

极限宏观方程由双尺度极限方程得到，其中唯一不消失的宏观测试函数为 $\boldsymbol{v}^0$ 和 q^0。弱形式如下：对于任意时间 $t > 0$，求一对 $(\boldsymbol{u}^0(t,\cdot)\ p^0(t,\cdot)) \in$

$\boldsymbol{U}(\Omega) \times P(\Omega)$，其满足

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(\mathbb{A}\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}^0) - p^0\boldsymbol{B} + \underline{\boldsymbol{H}} \cdot \underline{\varphi^0}\right) : \boldsymbol{e}(\boldsymbol{v}^0)\,\mathrm{dV}_x \\
&\quad = \int_\Omega \widehat{\boldsymbol{f}} \cdot \boldsymbol{v}^0\,\mathrm{dV}_x + \int_{\partial\Omega} \widehat{\boldsymbol{b}} \cdot \boldsymbol{v}^0\,\mathrm{dS}_x\,, \quad \forall\, \boldsymbol{v}^0 \in \boldsymbol{\mathcal{U}}_0(\Omega)\,, \\
&\int_\Omega q^0 \left(\boldsymbol{B} : \boldsymbol{e}(\dot{\boldsymbol{u}}^0) + \dot{p}^0 M - \underline{Z} \cdot \underline{\dot{\varphi}^0}\right) \mathrm{dV}_x + \int_\Omega \frac{\boldsymbol{K}}{\bar{\mu}} \left(\nabla_x p - \widehat{\boldsymbol{f}}^f\right) \cdot \nabla_x q^0\,\mathrm{dV}_x \\
&\quad = 0\,, \quad \forall q^0 \in \mathcal{Q}_0(\Omega).
\end{aligned} \tag{44}$$

对式（44）进行分部积分后，可得到描述区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 内变形压电孔弹性介质中流体流动的以下方程组，

$$\begin{aligned}
-\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^H(\boldsymbol{u}^0, p^0) &= \hat{\boldsymbol{f}}\,, \quad \text{in } \Omega\,, \\
\text{where} \quad \boldsymbol{\sigma}^H(\boldsymbol{u}^0, p^0) &= \mathbb{A}\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}^0) - p^0\boldsymbol{B} + \sum_\alpha \boldsymbol{H}^\alpha \bar{\varphi}^\alpha + \boldsymbol{S}\rho_E\,,
\end{aligned} \tag{45}$$

and

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B} : \boldsymbol{e}(\dot{\boldsymbol{u}}^0) + M\dot{p}^0 + \nabla \cdot \boldsymbol{w}^0 &= \sum_\alpha Z^\alpha \dot{\bar{\varphi}}^\alpha + R\dot{\rho}_E\,, \\
\text{where} \quad \boldsymbol{w}^0 &= -\frac{1}{\bar{\mu}}\boldsymbol{K}(\nabla p^0 - \boldsymbol{f}^f)\,.
\end{aligned} \tag{46}$$

当压电系数$\boldsymbol{g} \equiv \boldsymbol{0}$为零时，可恢复孔弹性的比奥模型，因为在式（33）—（35）中，所有 $\eta^* \equiv 0$ 均满足：表达式（43）给出标准的有效孔弹性系数 AA，$\boldsymbol{B}$和 M，而$\boldsymbol{H}^\alpha$，R和 Z^α均为零。

在第5节报告的数值算例中，$\rho_E \equiv 0$以及体力均未予考虑。

我们将采用施加在 $\partial\Omega$上的边界条件，其中 $\partial\Omega$被分解为互不相交的部分 Γ_i、$i = 0, 1, 2$，使得 $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$。不失一般性，我们考虑 $p_\partial = \bar{P}^i$在 Γ_i、$i = 1, 2$ 上，以及 $\boldsymbol{u}_\partial = \boldsymbol{0}$ 在 $\Gamma_u \equiv \Gamma_1$

$$\begin{aligned}
p^0 = \bar{P}_i \text{ on } \Gamma_i\,, i = 1, 2\,, \\
\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{w}^0 = 0 \text{ on } \Gamma_0\,, \\
\boldsymbol{u}^0 = \boldsymbol{0} \text{ on } \Gamma_1\,, \\
\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^H = \boldsymbol{0} \text{ on } \Gamma_0\,, \\
\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^H = -\bar{P}_2 \boldsymbol{n} \text{ on } \Gamma_2\,.
\end{aligned} \tag{47}$$

问题表述。 假设零初始条件，在 $t = 0$ 时Ω 中的 $(\boldsymbol{u}^0, p^0)$消失，这对应于无载初始构形。对于给定的关于 $t > 0$的 $P^k(t)$ 函数，其中 $P^k(0) = 0$ （ $k = 1, 2$），以及由电压 $\{\bar{\varphi}^\alpha(t, x)\}_\alpha$ 施加的电激励，该激励定义在$(t, x) \in [0, T] \times \Omega$ 中，且 $T > 0$，其中 $\bar{\varphi}^\alpha(0, \cdot) = 0$ 在 Ω 中，求满足 (45)、(46) 和 (47) 的解 $(\boldsymbol{u}^0, p^0)(t, x)$。

4. 非线性响应的修正公式

尽管均匀化模型 (45)-(46) 是针对固定参考构形推导的，但如附录 B 所述，可以对其进行修正，以捕捉与变形微结构中的流动相关的非线性效应。这对于模拟蠕动驱动流十分重要；参见附录 D，其中采用一维约化模型来说明遵循渗透率对变形的依赖关系的重要性。我们遵循 [30] 中提出的方法，从而能够近似“变形相关”的均匀化系数（DDHC）。DDHC 这一概念实际上反映了微结构构形对局部变形的依赖性；在均匀化极限下，除了取决于宏观应变外，还取决于位移展开中涉及的所有宏观变量 $\boldsymbol{u}^1$，因而也取决于 $\boldsymbol{u}_{\text{mic}}$。在附录 B 中，我们展示了下文用于获得 DDHC 此类线性展开的灵敏度分析与初始构形和变形构形之间的线性化变换之间的联系。

为简化本节的记号，我们省略先前用于表示宏观量的上标$(\cdot)^0$, 。

4.1. 依赖变形的均匀化系数的近似

该近似基于一阶泰勒展开，利用均匀化系数相对于宏观变量的灵敏度。我们将考虑所有标记为˜的张量和向量，它们均定义在扰动微观构型 $\tilde{\mathcal{M}}(\boldsymbol{u}^{\text{mic}}(x, \cdot)\ Y)$ 中；该构型由变形的“局部”代表性周期单胞 $Z(x) \equiv \tilde{Y}(x) = Y + \{\boldsymbol{u}^{\text{mic}}(x, Y)\}$for $x \in \Omega$ 表征。$\boldsymbol{u}^{\text{mic}}$ 表示在微结构中重构的位移场，

$$\boldsymbol{u}^{\text{mic}}(x, y) = \boldsymbol{\Pi}^{ij}(y) e^x_{ij}(\boldsymbol{u}(x)) + \boldsymbol{u}^1(x, y)\ , \tag{48}$$

其中，$\boldsymbol{u}^1(x,y)$ 定义于公式（31）中。由于 $\tilde{Y}(x)$ 取决于宏观坐标，微结构偏离了其周期结构。然而，均匀化过程仍然可以应用，并且对于由场 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{mic}}$ 所确定的扰动几何，可以计算均匀化系数；一般而言，这些系数记为 $\mathbb{H}(\tilde{\mathcal{M}}(\boldsymbol{u}^{\mathrm{mic}},Y))$。由于灵敏度分析（如 [30] 中所解释并在下文给出），并且借助分裂公式（31），扰动后的系数 $\mathbb{H}(\tilde{\mathcal{M}}(\boldsymbol{u}^{\mathrm{mic}},Y)) \approx \tilde{\mathbb{H}}(\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}),p,\{\bar{\varphi}^\alpha\})$ 可以利用具有一般形式的一阶展开公式进行近似

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathbb{H}}(\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}),p,\{\bar{\varphi}^\alpha\}_\alpha) &= \mathbb{H}^0 + \delta_{\boldsymbol{e}}\mathbb{H}^0 : \boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}) + \delta_p\mathbb{H}^0 p + \sum_\alpha \delta_{\varphi,\alpha}\mathbb{H}^0\bar{\varphi}^\alpha \,, \\
(\delta_{\boldsymbol{e}}H^0)_{ij} &:= \left(\partial_{\boldsymbol{e}}(\delta\mathbb{H}^0\circ\boldsymbol{u}^{\mathrm{mic}})\right)_{ij} = \delta\mathbb{H}^0\circ(\boldsymbol{\omega}^{ij}+\boldsymbol{\Pi}^{ij}) \,, \\
\delta_p\mathbb{H}^0 &:= \partial_p(\delta\mathbb{H}^0\circ\boldsymbol{u}^{\mathrm{mic}}) = \delta\mathbb{H}^0\circ(-\boldsymbol{\omega}^P) \,, \\
\delta_{\varphi,\alpha}\mathbb{H}^0 &:= \partial_{\varphi,\alpha}(\delta\mathbb{H}^0\circ\boldsymbol{u}^{\mathrm{mic}}) = \delta\mathbb{H}^0\circ\hat{\boldsymbol{\omega}}^\alpha \,.
\end{aligned}
\tag{49}
$$

系数$\mathbb{H}^0$ 通过（43）和（39）针对参考“初始”构型 $\mathcal{M}(Y)$进行计算，而 $\delta\mathbb{H}^0$ 是根据形状灵敏度术语采用“设计速度场”方法在附录C中推导出的灵敏度。因此，对于任意 $\mathbb{H}$，我们都可以得到一个灵敏度表达式$\delta\mathbb{H}(\vec{\mathcal{V}}) = \delta\mathbb{H}(\circ\vec{\mathcal{V}})$，该表达式关于向量场 $\vec{\mathcal{V}}$ 是线性的，从而对于扰动微观构形 $z_i(y,\tau) = y_i+\tau\mathcal{V}_i(y)$，有 $y\in Y, i=1,2,3$，$\tilde{\mathbb{H}} = \mathbb{H}^0+\tau\delta\mathbb{H}\circ\vec{\mathcal{V}}$。显然，将 $\vec{\mathcal{V}}$ 替换为特定向量场后即可得到导数（49）。

值得注意的是，势 $\{\bar{\varphi}^\alpha(x,t)\}_\alpha$ 被视为（给定的）控制函数，然而，由于展开式（31），它们直接影响均质化模型参数。

4.2. 宏观问题的半线性形式

变分形式 (44) 可以进行修改，以纳入 (43) 和 (39) 中列出的、下文以 $\mathbb{H}^0$ 指代的依赖于变形的均匀化系数。为此，所有 $\mathbb{H}^0$ 均按照 (49) 中的定义，以一般意义上的 $\tilde{\mathbb{H}}$ 替换。在相同语境下，线性化子问题的系数用 $\mathbb{H}$ 表示。

应强调的是，微观问题 (33)-(36) 和 (25)仅需独立于宏观问题求解一次。同样，相关的灵敏度分析是在参考未扰动构型下进行的。

4.2.1. 增量公式

我们考虑一种基于以下建模步骤的增量公式:

步骤 *1*: 变形构形中的固体平衡。基于小变形假设，我们考虑空间参考构形 Ω_S^ε 的扰动，并假设由体力载荷 $\tilde{\boldsymbol{f}}^\varepsilon$ 和表面牵引力 $\tilde{\boldsymbol{b}}^\varepsilon$（包括作用于 $\hat{\Gamma}_{SF}^\varepsilon$ 上的流体应力牵引力 $\boldsymbol{n}^{[s]}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_f^\varepsilon$）所产生的应力 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_s^\varepsilon$ 已达到准静态平衡。固体状态位移增量和电势增量分别为 $\delta\boldsymbol{u}^\varepsilon$ 和 $\delta\varphi^\varepsilon$，应满足

$$\begin{aligned}\int_{\hat{\Omega}_S^\varepsilon}[\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_s^\varepsilon+\delta\boldsymbol{\sigma}_s^\varepsilon(\delta\boldsymbol{u}^\varepsilon,\delta\varphi^\varepsilon)]:\boldsymbol{e}(\boldsymbol{v})\,\mathrm{dV}_x-\int_{\hat{\Gamma}_{SF}^\varepsilon}\boldsymbol{v}\cdot(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_f^\varepsilon+\delta\boldsymbol{\sigma}_f^\varepsilon)\cdot\boldsymbol{n}^{[s]}\,\mathrm{dS}_x\\=\int_{\hat{\Omega}_S^\varepsilon}(\tilde{\boldsymbol{f}}^\varepsilon+\delta\boldsymbol{f}^\varepsilon)\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{dV}_x+\int_{\partial_\sigma\hat{\Omega}_S^\varepsilon}(\tilde{\boldsymbol{b}}^\varepsilon+\delta\boldsymbol{b}^\varepsilon)\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{dS}_x\end{aligned}\tag{50}$$

对所有 $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{\mathcal{U}}_0^\varepsilon(\Omega_S^\varepsilon)$ 均成立。若平衡在 Ω_S^ε 中"精确地"达到（就与过去增量中采用的"δ"扰动相关的有限增量而言），则实际扰动对 $(\delta\boldsymbol{u}^\varepsilon,\delta\varphi^\varepsilon)$ 必须满足

$$\begin{aligned}\int_{\hat{\Omega}_S^\varepsilon}\delta\boldsymbol{\sigma}_s^\varepsilon(\delta\boldsymbol{u}^\varepsilon,\delta\varphi^\varepsilon):\boldsymbol{e}(\boldsymbol{v})\,\mathrm{dV}_x-\int_{\hat{\Gamma}_{SF}^\varepsilon}\boldsymbol{v}\cdot\delta\boldsymbol{\sigma}_f^\varepsilon\cdot\boldsymbol{n}^{[s]}\,\mathrm{dS}_x\\=\int_{\hat{\Omega}_S^\varepsilon}\delta\boldsymbol{f}^\varepsilon\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{dV}_x+\int_{\partial_\sigma\hat{\Omega}_S^\varepsilon}\delta\boldsymbol{b}^\varepsilon\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{dS}_x\,,\\\int_{\hat{\Omega}_m^\varepsilon}\vec{D}^\varepsilon(\delta\boldsymbol{u}^\varepsilon,\delta\varphi^\varepsilon)\cdot\nabla\psi\,\mathrm{dV}_x=0\,,\end{aligned}\tag{51}$$

对所有 $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{\mathcal{U}}_0^\varepsilon(\Omega_S^\varepsilon)$ 和 $\psi\in\mathcal{V}_*(\Omega_m^\varepsilon,\{\Gamma_*^{\alpha,\varepsilon}\}_\alpha)$ 均成立。为简洁起见，式 (50) 中未列出电荷守恒方程。

步骤 *2*: 线性子问题的均匀化。流固相互作用问题是在空间参考构形中提出的；Ω_S^ε 中的固体响应由 (51) 控制，其形式上可由 (14) 的第 1 个和第 2 个方程表示，其中 Ω_{m*}^ε 视为 Ω_S^ε，且 $\boldsymbol{u}^\varepsilon,\varphi^\varepsilon$ 替换为 $(\delta\boldsymbol{u}^\varepsilon,\delta\varphi^\varepsilon)$。在流体通道 Ω_F^ε 中，采用斯托克斯流动模型，如 (14) 的第 3 个和第 4 个方程所述，其中 $\tilde{\boldsymbol{u}}^\varepsilon$ 根据速度定义替换为 $\dot{\delta\tilde{\boldsymbol{u}}}^\varepsilon$。均匀化

过程按上文所述进行，从而得到与 (44) 形式上相同的宏观问题，该问题由增量 $(\delta \boldsymbol{u}^0, \delta p^0)$ 满足，并涉及控制增量 $\delta\varphi^0$。由于 (44) 是通过对空间非均质构形进行均匀化而得到的，其中的区域 Ω 是实际的空间参考宏观构形，而有效孔弹性系数和渗透率则描述了与局部变形微观构型相对应的有效本构关系。

步骤 *3*：修正的孔弹性系数、增量本构定律。除渗透率 $\boldsymbol{K}$ 外，其他有效材料参数描述宏观应力 $\boldsymbol{\sigma}_S$ 的切线模量。这些有效参数都可以在局部变形的代表性胞元 $Y(x)$ 中计算，然而，如上所述，我们采用基于灵敏度分析（SA）的近似。在附录B中，给出了增量宏观本构定律的简要推导，以证明基于SA 的近似的相关性。应力由次弹性本构定律给出，该定律可表示为：记 $\boldsymbol{s}(t,x) = (\boldsymbol{u}\ p, \varphi)(t,x)$ 为（均质化）孔弹性介质的状态，对于 $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{s}(t,x)) &= \int_0^t \delta_{\boldsymbol{s}}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{s}(\tau,x)) \circ \hat{\boldsymbol{s}}(x)\,\mathrm{d}\tau\ , \quad \boldsymbol{s}(t,x) = \hat{\boldsymbol{s}}(x)t\ , \\ \delta_{\boldsymbol{s}}\boldsymbol{\sigma} \circ \delta\boldsymbol{s}(\tau,x) &= \tilde{\mathbb{A}}\boldsymbol{e}(\delta\boldsymbol{u}) - \delta p\tilde{\boldsymbol{B}} + \underline{\tilde{\boldsymbol{H}}} \cdot \underline{\delta\varphi}\ , \end{aligned} \tag{52}$$

其中，由于固体的弹性/压电性，适用均匀性 $\delta\boldsymbol{s}(\tau,x) = \hat{\boldsymbol{s}}(x)\,\mathrm{d}\tau$。借助下文第 4.2.2 节介绍的增量算法，可在每次迭代中采用简单的更新 $\boldsymbol{\sigma} := \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \delta\boldsymbol{\sigma}$ 。

半离散化宏观问题。在时间离散层级 $t_k = k\Delta t$、 $k = 0$、1、2、.....中，我们考虑两个连续步，并采用缩写记号 $t := t_k$、 $t^\triangleleft := t_{k-1}$。通过 $(\mathrm{u}\ p) \approx (\mathrm{u}(t,\cdot)\ p(t,\cdot))$，我们将时间 $t = t_k \in \{t_i\}_i$ 的未知场记为上述形式；而 $(\mathrm{u}^\triangleleft, p^\triangleleft) \approx (\mathrm{u}(t^\triangleleft,\cdot)\ p(t^\triangleleft,\cdot))$ 则与时间 $t - \Delta t$ 相关联。采用隐式近似 $\dot{\mathrm{u}} \approx (\mathrm{u} - \mathrm{u}^\triangleleft)/\Delta t$, $\dot{p} \approx (p - p^\triangleleft)/\Delta t$ 和 $\dot{\varphi} \approx (\varphi - \varphi^\triangleleft)/\Delta t$,

由于非线性问题采用牛顿型迭代方法求解，因此引入基于残差的增量公式较为方便。令

引入残差函数,

$$\begin{aligned}\Psi^t((\boldsymbol{u},p),\mathbb{F};(\boldsymbol{v},q)) &= \int_\Omega \left(\tilde{\mathbb{A}}\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}) - p\tilde{\boldsymbol{B}} + \underline{\tilde{\boldsymbol{H}}}\cdot\underline{\varphi}\right) : \boldsymbol{e}(\boldsymbol{v})\,\mathrm{dV}_x \\ &+ \int_\Omega q\left(\tilde{\boldsymbol{B}} : \boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^{\triangleleft}) + (p-p^{\triangleleft})\tilde{M} - \underline{\tilde{Z}}\cdot(\underline{\varphi}-\underline{\varphi}^{\triangleleft})\right)\mathrm{dV}_x \\ &+ \int_\Omega \frac{\Delta t}{\bar{\mu}}\tilde{\boldsymbol{K}}\left(\nabla_x p - \widehat{\boldsymbol{f}}^f\right)\cdot\nabla_x q\,\mathrm{dV}_x - \left(\int_\Omega \widehat{\boldsymbol{f}}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{dV}_x + \int_{\partial_\sigma\Omega}\widehat{\boldsymbol{b}}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{dS}_x\right),\end{aligned} \tag{53}$$

在时间 t 处求值（因此在 Ψ^t 中使用上标）；其中，“波浪号”记法 $\tilde{}$ 表示按照式（49）的一般意义，对所有均匀化系数应用 IH，而 IF 表示时空域 $[0,T]\times\Omega$ 中的所有载荷或控制量。具体而言，IF 包括 $\{\bar{\varphi}^\alpha(x,\ t)\}_\alpha$，以及所有体力和表面牵引力。

现在将时间离散问题（44）改写如下:

给定一个解（$\boldsymbol{u}^{\triangleleft},\ p^{\triangleleft}$），求一对（$\boldsymbol{u}\ p$）$\in\boldsymbol{\mathcal{U}}(\Omega)\times\mathcal{Q}(\Omega)$，使其满足

$$\Psi^t((\boldsymbol{u},p),\mathbb{F};(\boldsymbol{v},q)) = 0 \quad \text{for any} \quad (\boldsymbol{v},q)\in\boldsymbol{\mathcal{U}}_0(\Omega)\times\mathcal{Q}_0(\Omega)\,. \tag{54}$$

可基于最新近似（$^{-}\boldsymbol{u}\ \bar{p}$），对解（$\boldsymbol{u}\ p$）$\in\boldsymbol{\mathcal{U}}(\Omega)\times\mathcal{Q}(\Omega)$ 和修正量（$\delta\boldsymbol{u}\ \delta p$）$\in\boldsymbol{\mathcal{U}}_0(\Omega)\times\mathcal{Q}_0(\Omega)$ 进行直接分解，并通过逐次迭代求解。

$$\boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{u}} + \delta\boldsymbol{u}\,,\quad p = \bar{p} + \delta p\,. \tag{55}$$

T在（$\delta\boldsymbol{u}\ \delta p$）中的一阶展开给出显然的近似

$$\begin{aligned}0 = \Psi^t((\boldsymbol{u},p),\mathbb{F};(\boldsymbol{v},q)) &\approx \Psi^t((\bar{\boldsymbol{u}},\bar{p}),\bar{\mathbb{F}};(\boldsymbol{v},q)) \\ &+ \delta_{(\boldsymbol{u},p)}\Psi^t((\bar{\boldsymbol{u}},\bar{p}),\bar{\mathbb{F}};(\boldsymbol{v},q))\circ(\delta\boldsymbol{u},\delta p) + \delta_{\mathbb{F}}\Psi^t((\bar{\boldsymbol{u}},\bar{p}),\bar{\mathbb{F}};(\boldsymbol{v},q))\circ\delta\mathbb{F}\,,\end{aligned} \tag{56}$$

对任意（$\boldsymbol{v}\ q$）$\in\boldsymbol{\mathcal{U}}(\Omega)\times\mathcal{Q}(\Omega)$ 均成立，其中（$^{-}\boldsymbol{u}\ \bar{p}$）为最新迭代。

总变分 $\delta\Psi^t$ 可用下文 (60)–(61) 中定义的切向增量系数 IH 表示，参见第 4.3 节,

$$\begin{aligned}\delta_{(\boldsymbol{u},p)}\Psi^t((\bar{\boldsymbol{u}},\bar{p}),\bar{\mathbb{F}};(\boldsymbol{v},q))\circ(\delta\boldsymbol{u},\delta p) &= \int_\Omega \left(\overline{\mathbb{A}}\boldsymbol{e}(\delta\boldsymbol{u}) - \delta p\overline{\boldsymbol{B}}\right) : \boldsymbol{e}(\boldsymbol{v})\,\mathrm{dV}_x \\ &- \int_\Omega \left(\partial_{\boldsymbol{e}}\widehat{\boldsymbol{f}}\circ\boldsymbol{e}(\delta\boldsymbol{u}) + \partial_p\widehat{\boldsymbol{f}}\circ\delta p\right)\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{dV}_x - \int_{\partial\Omega}\left(\partial_{\boldsymbol{e}}\widehat{\boldsymbol{b}}\circ\boldsymbol{e}(\delta\boldsymbol{u}) + \partial_p\widehat{\boldsymbol{b}}\circ\delta p\right)\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{dV}_x \\ &+ \frac{\Delta t}{\bar{\mu}}\int_\Omega \nabla q\cdot\left(\overline{\boldsymbol{K}}\nabla\delta p + \overline{\boldsymbol{G}} : \boldsymbol{e}(\delta\boldsymbol{u}) + \overline{\boldsymbol{Q}}\delta p\right)\mathrm{dV}_x + \int_\Omega q\left(\overline{\boldsymbol{D}} : \boldsymbol{e}(\delta\boldsymbol{u}) + \overline{M}\delta p\right)\mathrm{dV}_x\,.\end{aligned} \tag{57}$$

变分 $\delta_{\mathbf{F}}\Psi^t((\bar{\boldsymbol{u}}\ \bar{p})\ \bar{}\mathrm{IF};(\boldsymbol{v}\ q))\circ\delta\mathrm{IF}$ 可以用类似方式表示。不过，由于 IF 在每个时间层都被视为给定的“控制”，并且在迭代过程中保持固定，即 $\delta\mathrm{IF}\equiv 0$, $\delta_{\mathbf{F}}\Psi^t$ 就不需要了。

4.2.2. 时间增量步算法

已知时间 $t^\triangleleft = t-\Delta t$ 时的响应后，通过采用修正牛顿法迭代求解（54），即可计算时间层 t 时的响应。该方法基于上述由（56）得到的线性化。由于边界数据，即 $p_\partial(t,\ \cdot)$（见（47））， 可能随时间变化，因此我们用记号 $\boldsymbol{\mathcal{U}}^t(\Omega)$ 和 $\mathcal{Q}^t(\Omega)$ 表示可容许集。不过，为简单起见，我们认为 Ω 的划分 ∂ 与时间无关，因此继续使用 $\boldsymbol{\mathcal{U}}_0(\Omega)$ 和 $\mathcal{Q}_0(\Omega)$。

给定（$\boldsymbol{u}^\triangleleft,\ p^\triangleleft$）$\approx\big(\boldsymbol{u}(t^\triangleleft,\ \cdot)\ p(t^\triangleleft,\ \cdot)\big)$, 计算（$\boldsymbol{u}\ p$）$\approx\big(\boldsymbol{u}(t,\ \cdot)\ p(t,\ \cdot)\big)$:

- 步骤 0：设置随时间变化的控制 IF^t :=IF(t)，其中包括 Ω 中给定的电势 $\varphi(t,\ \cdot$ 和边界条件，从而得到 $U^t(\Omega)$ 和 $P^t(\Omega)$，并定义一个近似值 $(\bar{\boldsymbol{u}}\ \bar{p})\approx(\boldsymbol{u}^\triangleleft,\ p^\triangleleft)\in\boldsymbol{\mathcal{U}}^t(\Omega)\times\mathcal{Q}^t(\Omega)$。扰动后的均匀化系数 $\tilde{\mathrm{I}}$ H（按一般记号）通过将（$\boldsymbol{u}^\triangleleft,\ p^\triangleleft$）代入（49）$_1$ 进行计算，其中 IH^0 及梯度 $\delta_{()}\mathrm{IH}^0$ 由未扰动的微观构型给出（通过离线计算）。

- 步骤 1：使用$(\bar{\boldsymbol{u}}\ \bar{p})$定义扰动的均匀化系数 IH，并使用 (53) 建立残差 $\tilde{r}(\boldsymbol{v}\ q):=\Psi^t((\bar{\boldsymbol{u}}\ \bar{p}),\mathrm{IF}^t,(\boldsymbol{v}\ q))$，其中测试函数 $(\boldsymbol{v}\ q)\in\boldsymbol{\mathcal{U}}_0(\Omega)\times\mathcal{Q}_0(\Omega)$。

  如果所需容差 $\epsilon>0$ 已达到，即 $|r(\boldsymbol{v}\ q)|<\epsilon\|(\boldsymbol{v}\ q)\|$ 对任意 $(\boldsymbol{v}\ q)\in\boldsymbol{\mathcal{U}}_0(\Omega)\times\mathcal{Q}_0(\Omega)$，令$\boldsymbol{u}^\triangleleft:=\boldsymbol{u}=\bar{\boldsymbol{u}}$, $p^\triangleleft:=p=\bar{p}$，并继续求解下一个时间层 $t^\triangleleft:=t$的响应。转到步骤 0。

- 步骤 2：求解关于 $(\delta\boldsymbol{u}\ \delta p)\in\boldsymbol{\mathcal{U}}_0(\Omega)\times\mathcal{Q}_0(\Omega)$:

$$\delta_{(\boldsymbol{u},p)}\Psi^t((\bar{\boldsymbol{u}},\bar{p}),\mathbb{F}^t;(\boldsymbol{v},q))\circ(\delta\boldsymbol{u},\delta p)=-\Psi^t((\bar{\boldsymbol{u}},\bar{p}),\mathbb{F}^t;(\boldsymbol{v},q)),\quad(58)$$

  对于任意 $(\boldsymbol{v}\ q)\in\boldsymbol{\mathcal{U}}_0(\Omega)\times\mathcal{Q}_0(\Omega)$，然后更新 $\bar{\boldsymbol{u}}:=\boldsymbol{u}=\bar{\boldsymbol{u}}+\delta\boldsymbol{u}$,$\bar{p}:=p=\bar{p}+\delta p$，并转到步骤 1。

注释。 在空间离散化版本中，伽辽金有限元方法意义下的标准残差向量取代了泛函 $r(\cdot,\ \cdot)$。

4.3. 切向增量系数

算法 4.2.2 的第 2 步中采用的扰动 $\delta\boldsymbol{u}$ $\delta p, \delta\varphi$，见式 (58)，代入涉及 Ψ^t 的积分中，见式 (53)，可得到近似线性表达式，如与渗透率相关的项所示，

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \nabla q \cdot \tilde{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}), p)\nabla p \,\mathrm{dV}_x \\
&\quad = \int_\Omega \nabla q \cdot (\boldsymbol{K}^0 + \partial_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{K}^0 \circ \boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}) + \partial_p \boldsymbol{K}^0 \circ p + \partial_\varphi \boldsymbol{K}^0 \circ \varphi)\nabla p \,\mathrm{dV}_x \\
&\quad \approx \int_\Omega \nabla q \cdot \left(\boldsymbol{K}^0 + \partial_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{K}^0 \circ (\boldsymbol{e}(\bar{\boldsymbol{u}}) + \boldsymbol{e}(\delta\boldsymbol{u}))\right) \nabla \bar{p} \,\mathrm{dV}_x \\
&\qquad + \int_\Omega \nabla q \cdot \left(\partial_p \boldsymbol{K}^0 \circ (\bar{p} + \delta p) + \partial_\varphi \boldsymbol{K}^0 \circ (\bar{\varphi} + \delta\varphi)\right) \nabla \bar{p} \,\mathrm{dV}_x \\
&\qquad + \int_\Omega \nabla q \cdot \left(\boldsymbol{K}^0 + \partial_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{K}^0 \circ \boldsymbol{e}(\bar{\boldsymbol{u}}) + \partial_p \boldsymbol{K}^0 \circ \bar{p} + \partial_\varphi \boldsymbol{K}^0 \circ \bar{\varphi}\right) \nabla \delta p \,\mathrm{dV}_x \,,
\end{aligned}
\tag{59}
$$

忽略“$o(\delta^2)$”项。类似地，我们对（53）中的所有其他积分进行处理。

下文将需要在线性化方案中使用的一些进一步记号：设 $\boldsymbol{W} = \partial_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{X}: {}^{-}\boldsymbol{e}) \circ \langle\,\rangle_e$，则 $\boldsymbol{W}\,\delta\boldsymbol{e} = \partial_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{X}: {}^{-}\boldsymbol{e}) \circ \delta\boldsymbol{e}$；类似地，设 $X = \partial_p(\boldsymbol{X}\,{}^{-}\boldsymbol{e}) \circ \langle\,\rangle_p$，则 $X\delta p = \partial_p(\boldsymbol{X}\,{}^{-}\boldsymbol{e}) \circ \delta p$。此外，还将使用以下缩写：

$$
\begin{aligned}
\overline{\partial}\mathbb{H}^0 &= \partial_{\boldsymbol{e}}\mathbb{H}^0 \circ \boldsymbol{e}(\bar{\boldsymbol{u}}) + \partial_p \mathbb{H}^0 \circ \bar{p} + \partial_\varphi \mathbb{H}^0 \circ \bar{\varphi} \,, \\
\overline{\partial}\boldsymbol{K}^0 &= \partial_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{K}^0 \circ \boldsymbol{e}(\bar{\boldsymbol{u}}) + \partial_p \boldsymbol{K}^0 \circ \bar{p} + \partial_\varphi \boldsymbol{K}^0 \circ \bar{\varphi} \,,
\end{aligned}
\tag{60}
$$

在一般意义上（所示示例针对渗透率）。有了这一表示法，我们可以引入系数 $\mathrm{IH}({}^{-}\boldsymbol{u}\ \bar{p})$，其参与式（53），取决于 $({}^{-}\boldsymbol{u}\ \bar{p})$，以及前一时间步 $t^{\triangleleft}$ 的响应（$\boldsymbol{u}^{\triangleleft}$, $p^{\triangleleft}$），

（回顾实际时间层为 $t = t^{\triangleleft} + \Delta t$）

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathbb{A}}(\bar{\boldsymbol{u}}, \bar{p}) &= \mathbb{A}^0 + \overline{\partial}\mathbb{A}^0 + \partial_{\boldsymbol{e}}(\mathbb{A}^0 \boldsymbol{e}(\bar{\boldsymbol{u}})) \circ \langle\ \rangle_{\boldsymbol{e}} - \partial_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{B}^0 \bar{p}) \circ \langle\ \rangle_{\boldsymbol{e}} + \partial_{\boldsymbol{e}} \underline{\boldsymbol{H}}\, \underline{\bar{\varphi}} \circ \langle\ \rangle_{\boldsymbol{e}}, \\
\overline{\boldsymbol{B}}(\bar{\boldsymbol{u}}, \bar{p}) &= \boldsymbol{B}^0 + \overline{\partial}\boldsymbol{B}^0 + \partial_p(\boldsymbol{B}^0 \bar{p}) \circ \langle\ \rangle_p - \partial_p(\mathbb{A}^0 \boldsymbol{e}(\bar{\boldsymbol{u}})) \circ \langle\ \rangle_p - \partial_p(\underline{\boldsymbol{H}}^0 \underline{\bar{\varphi}}) \circ \langle\ \rangle_p, \\
\overline{\boldsymbol{D}}(\bar{\boldsymbol{u}}, \bar{p}, \boldsymbol{u}^0, p^0) &= \boldsymbol{B}^0 + \overline{\partial}\boldsymbol{B}^0 + \partial_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{B}^0 : (\boldsymbol{e}(\bar{\boldsymbol{u}}) - \boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}^0)) \circ \langle\ \rangle_{\boldsymbol{e}} \\
&\quad + \partial_{\boldsymbol{e}} M^0 (\bar{p} - p^0) \circ \langle\ \rangle_{\boldsymbol{e}} - \partial_{\boldsymbol{e}} \underline{Z}^0 (\underline{\bar{\varphi}} - \underline{\varphi}^0) \circ \langle\ \rangle_{\boldsymbol{e}}, \\
\overline{M}(\bar{\boldsymbol{u}}, \bar{p}, \boldsymbol{u}^0, p^0) &= M^0 + \overline{\partial} M^0 + \partial_p M^0 (\bar{p} - p^0) \circ \langle\ \rangle_p \\
&\quad + \partial_p \boldsymbol{B}^0 : (\boldsymbol{e}(\bar{\boldsymbol{u}}) - \boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}^0)) \circ \langle\ \rangle_p - \partial_p \underline{Z}^0 (\underline{\bar{\varphi}} - \underline{\varphi}^0) \circ \langle\ \rangle_p\ , \\
\overline{\boldsymbol{K}}(\bar{\boldsymbol{u}}, \bar{p}) &= \boldsymbol{K}^0 + \overline{\partial}\boldsymbol{K}^0\ , \\
\overline{\boldsymbol{G}} &= \partial_{\boldsymbol{e}} \boldsymbol{K}^0 (\nabla \bar{p} - \boldsymbol{f}) \circ \langle\ \rangle_{\boldsymbol{e}}\ , \\
\overline{\boldsymbol{Q}} &= \partial_p \boldsymbol{K}^0 (\nabla \bar{p} - \boldsymbol{f})) \circ \langle\ \rangle_p .
\end{aligned}
\tag{61}
$$

5. 数值模拟

在本节中，我们介绍通过有限元（FE）双尺度数值模拟获得的压电多孔结构中流动的结果。为了验证第 3节中提出的均匀化介质双尺度模型，我们将控制非均质介质响应的模型视为“参考模型”。因此，“参考解”采用对非均匀化介质进行<款式id='1'>直接数值模拟</款式>（DNS）计算获得，该介质在“完整”FE 网格上离散，而该网格由具有给定 ε_0的“缩放”周期单胞组成的周期晶格生成 $\varepsilon_0 Y$。采用均匀化模型（HOM模型）的双尺度模拟，以及参考模型（REF 模型）响应的 DNS，均已在基于 Python 的有限元软件包 *Sfepy*：Python中的简单有限元 [7] 中实现。一般而言，该软件包非常适合求解具有多尺度和多物理场特征的问题。本节计算所用的代码已发布于代码仓库 [21]中。

HOM模型和REF模型的演化问题均采用时间步进算法求解，其中时间导数由向后有限差分替代。对于HOM 模型，实现了算法 4.2.2，其中包括均匀化系数的更新。对于采用REF 模型的直接数值模拟，通过更新参考构形来捕捉非线性变形对流动的影响。采用以下使用拉格朗日单元的空间有限元近似

在所有计算中：位移、电势和流体压力场均采用 P1（分片线性）单元进行近似，而流体速度则采用 P2（分片二次）单元进行近似。有限元 REF 模型由四节点四面体单元构成，每个单元有$4 \times (u_1, u_2, u_3, \varphi) = 16$ 个自由度（DOF）；也由十节点四面体单元构成，每个单元有 $10 \times (w_1, w_2, w_3) + 4 \times p = 34$个自由度。宏观 HOM 模型采用八节点六面体单元进行近似，每个单元有$8 \times (u_1, u_2, u_3, p) = 32$ 个自由度；微观 HOM 模型采用与 REF 模型相同的近似方法。

5.1. 使用 *HOM* 模型进行双尺度计算

由于第 4.1 节中对变形相关的均质化系数$\tilde{\mathbb{H}}$的处理，用于求解（未变形）微观构型 $\mathcal{M}(Y)$ 特征响应的微观问题 (33)-(36) 和 (25)，以及相关灵敏度 (60)-(61)，均独立于宏观问题 (54) 求解。

微观域 Y 根据（16）分解为几个部分：柔顺弹性部分 Y_e、压电基体 Y_z （$Y_e \cup Y_z = Y_m$）、两个相互断开的导体 Y_*^1和 Y_*^2，以及流体部分 Y_f，见图3。各组成部分的材料属性汇总于表1。注

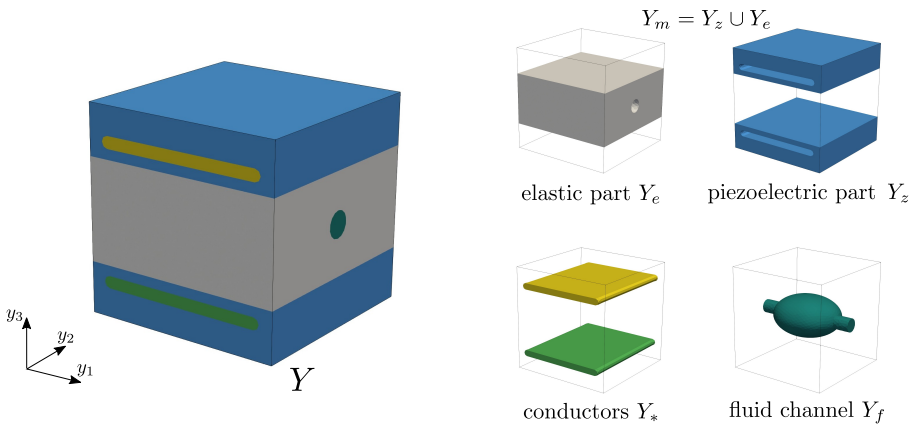


图 3：微观周期单胞的分解。

即，由于第 3.2 节中引入的尺度变换，微观结构的特征响应是使用重新缩放的系数$\bar{\boldsymbol{g}}, \boldsymbol{d}$和 $\bar{\eta}$针对给定微观结构尺寸获得的即 给定 $\varepsilon := \varepsilon_0$计算的。

弹性部分 Y_e （弹性体）	E $= 0.02$ 吉帕， $\nu = 0.49$
压电部分 Y_m （压电聚合物， [19]）	$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 6.0 & 3.72 & 3.83 & 0 & 0 & 0 \\ 3.72 & 6.0 & 3.83 & 0 & 0 & 0 \\ 3.83 & 3.83 & 20.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.23 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.23 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.23 \end{bmatrix} \cdot 10^7$ 帕 $\underline{\boldsymbol{g}}^\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0.340 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 \\ -0.09 & -0.09 & 5.91 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ C/m^2 $\boldsymbol{d}^\varepsilon = \begin{bmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 255.3 \end{bmatrix} \cdot 8.854 \cdot 10^{-12}$ C/Vm
导体 Y_* （钢合金）	E $= 200$GPa， $\nu = 0.25$
流体 Y_f (水)	$\gamma = 1.0/(2.15 \cdot 10^9)$ 帕， $\mu^\varepsilon = 8.9 \cdot 10^{-4}$ 帕秒

表1：压电骨架的材料属性，采用应变的 Voigth 表示法表示张量 AA 和 $\boldsymbol{g}^\varepsilon$。注意， $\bar{\boldsymbol{g}} = \bar{\boldsymbol{g}}^\varepsilon/\varepsilon$和$\bar{\boldsymbol{d}} = \boldsymbol{d}^\varepsilon/\varepsilon$ 是针对给定尺度 $\varepsilon := \varepsilon_0$计算的。_

为了将 HOM 模型的解与通过直接数值模拟（DNS）得到的相应 REF 模型响应进行比较，我们考虑一个“伪一维问题”：尽管 Ω 是一个三维块体，但所有宏观问题参数（包括边界条件）都使 HOM 模型的响应仅取决于 x_1 坐标。

对半线性形式（53）–（54）重述的宏观问题（45）–（46）施加于 Ω，其中 Ω 表示为一个尺寸为 $L \times a \times a$ 、由轴 x_1、x_2，和 x_3 依次张成的块体。边界条件（见图 4）按照（47）设定，并在 Γ_0处改为周期条件。它们沿方向 x_2、x_3 施加于法向分别与这两个方向之一对齐的全部四个面上。特别是在垂直于 x_1 轴的面 $\Gamma_1 \equiv \Gamma_L$ 和 $\Gamma_2 \equiv \Gamma_R$ 上，规定：$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$, $p = 0$ 位于 Γ_L，而 $p = \bar{p}$ 位于 Γ_R，其中 $\bar{p}$ [帕] 为给定的压力值；这也确定了表面牵引力 $\boldsymbol{b} = -\bar{p}\boldsymbol{n}$。边界条件如图 4 所示。

在第一电极上施加 $\varphi^1 = 0$ 的同时，第二电极使电势波传播，因此电势 φ^2 成为依赖于时间 t 和坐标 $x_1 \in]0,\ L[$ 和 $x_2 \in]0,\ a[$的函数：

$$\begin{aligned} &\psi(x_1, x_2, t) := b_1\, x_1 + b_2\, x_2 - c\, t + d\,, \\ &\varphi^2(x_1, x_2, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[1 + \cos(\psi(x_1, x_2, t) + \pi)\right] \bar{\varphi}, & \text{for} \quad \psi(x_1, x_2, t) < 0 \\ 0 \quad \text{otherwise} \end{cases}, \end{aligned} \tag{62}$$

其中，b_1、b_2、c和 d 是在下文报告的“1D”和“2D”算例中指定的常数，电压波幅值 $\bar{\varphi}$ 则根据算例作相应调整，见表 2。上述设定确保电势引起的宏观位移$\boldsymbol{u}$ 和压力梯度 $\nabla_x p$ 仅在 x_1 方向上非零，从而满足“伪一维问题”的设定要求。由于 x_2 和 x_3 方向上的周期性，长度 a 可以任意取值；但为了更好地与基于 REF 模型的参考计算进行比较，我们选择 $a := L/N$，其中 N 为实际尺寸周期 $Y^{\varepsilon_0} = \varepsilon_0 Y$的数量，见下一小节。

5.2. 使用 *REF* 模型的参考模拟

为验证均匀化模型并检验其数值实现，采用异质连续体响应的直接数值模拟（DNS）方法

结构 / 流动	$\bar{\varphi}$ [V]	b_1	b_1	c	d
一维情形	$4 \cdot 10^5$	$\pi/0.03$	0	10π	0
二维情况	$4 \cdot 10^5$	$\pi/0.03$	$\pi/0.075$	10π	0

表 2：电势波的参数，见（62）。

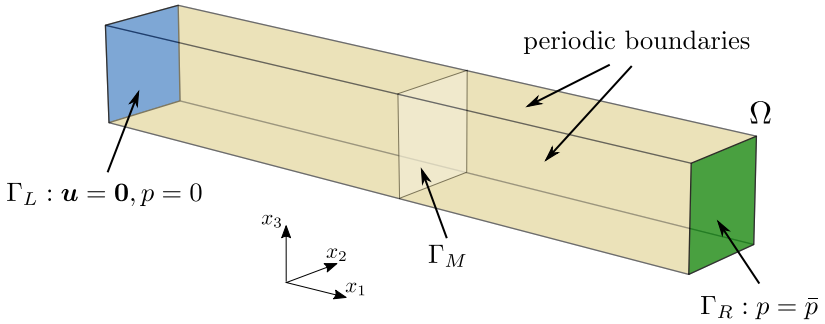


图 4：宏观区域 Ω $=]0, L[\times]0, a[^2$ 及施加的边界条件。截面 Γ_L、 Γ_M 和 Γ_R 的位置分别为 $x_1 = 0, L/2$ 和 L。

。REF 模型的参考响应由问题（14）的解得到，材料参数如表 1 所示。对于 HOM 模型，我们令 $L = 0.1$ m 和 $a = L/N = 0.005$ m 取 $N = 20$, 由此得到 $\varepsilon_0 = 0.005$。一般分解（4）成立；在固相 $\Omega_s^{\varepsilon_0} = \Omega_e^{\varepsilon_0} \cup \Omega_z^{\varepsilon_0} \cup \Omega_*^{\varepsilon_0}$中, 我们区分出弹性-介电部分 $\Omega_e^{\varepsilon_0}$、压电区段 $\Omega_z^{\varepsilon_0}$以及电极 $\Omega_*^{\alpha\,\varepsilon_0} \subset . \Omega_*^{\varepsilon_0}$, $\alpha = 1$, 2，它们由参考单胞 Y 的组成部分周期性重复生成，见图 3。采用常数如表 2 所示的式（62），在 $\Omega^{2.}{}_*^{\varepsilon_0}$ 处施加电势波（电压）。为符合有限尺寸电极的设定，采用展开括号：$\hat{x}_k = \varepsilon_0\{x_k/\varepsilon_0\}_Y$，并使用式（62），其中 $\varphi^2(\hat{x}_1, \hat{x}_2, t)$，得到分段常数值。

为捕捉在随时间变形的“空间”构型中施加REF模型方程所引起的模型非线性，我们选择直接更新$\Omega^{\varepsilon_0}(t)$ 的子域几何形状。通过这种方式，我们避免了任何额外的近似，例如HOM 模型中所采用的、基于 HOM 模型有效系数灵敏度分析的近似。

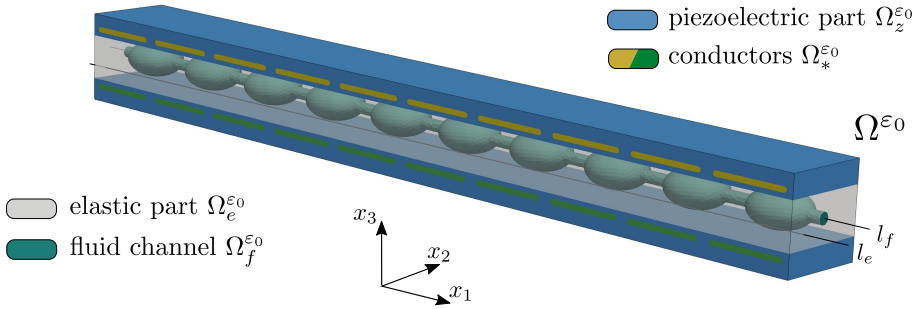


图5：参考数值模拟中采用的几何形状，以及两条探测直线 l_f, l_e ，第5.3节中的数值沿其显示。

相反，我们采用了迭代增量计算算法，并更新用于离散 $\Omega^{\varepsilon_0}(t)$ 上子域的有限元网格。在单个时间步内的每次迭代中，有限元网格的节点都会移动到由实际位移确定的新位置。此类迭代更新循环会重复进行，直至几何形状的更新可忽略不计，即 当位移修正量的范数足够小时，迭代便会终止。

5.3. 验证测试

我们考虑施加于块状试样 Ω 中的“伪一维问题”，其边界条件如上所述，但将试样两端 Γ_L 和 Γ_R 处的流体压力设为零， $\bar{p} = 0$。根据（62）计算 REF 模型和 HOM 模型在 $\bar{\varphi}^2 = 4 \cdot 10^5$V 驱动下的响应，并采用针对 “1D” 情况调整后的常数，见表 2，在时间区间$[0, 1]$s内以 50 个均匀时间步施加。注意， $b_2 = 0$ 从而 $\varphi^2 = \varphi^2(x_1, t)$，因此上述由有限尺寸电极引起的修改适用于 REF 模型。

首先，我们比较式（44）中定义的线性 HOM 模型，其均匀化系数 IH^0 由未受扰动的构型给出。因此，REF 模型在不更新构型的情况下使用，解也在固定的有限元网格上计算。为了提供与 REF 模型所捕捉到的有限非均质性相一致的响应，必须针对给定的有限尺度 ε^0，在微观层面重构 HOM 模型的宏观解。两尺度场重构（有时称为“下尺度化”）基于分解公式（31），详情见 [31]。重构后的压力

场 $p^{HOM,\ \varepsilon_0}$ 以及位移场 $u^{HOM,\ \varepsilon_0}_{,\ 1}$ 与参考解 $p^{REF,\ \varepsilon_0}$，$u^{REF,\ \varepsilon_0}_{,\ 1}$ 在选定的时间层 $t_k = 0.25,\ 0.5,\ 0.75$秒进行了对比—
在图7 中进行比较。这些场的分布沿着平行于轴 x_1的直线 l_f, l_e 显示，见图 5。三个选定时刻 t_k 的电势 $\varphi^2(x_1, t_k)$ 显示于图6 中。从图 7 可以看出，线性情形下参考与均匀化模型之间的吻合度非常好。

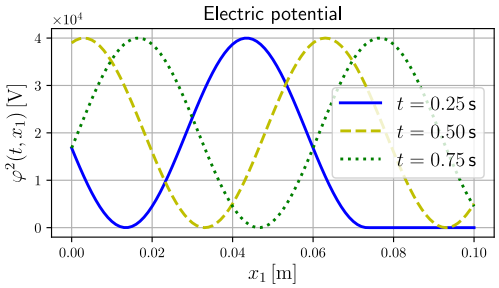


图 6：控制电势的空间分布 φ^2 在选定时刻 t_k；请注意，分步修改适用于 REF 模型。

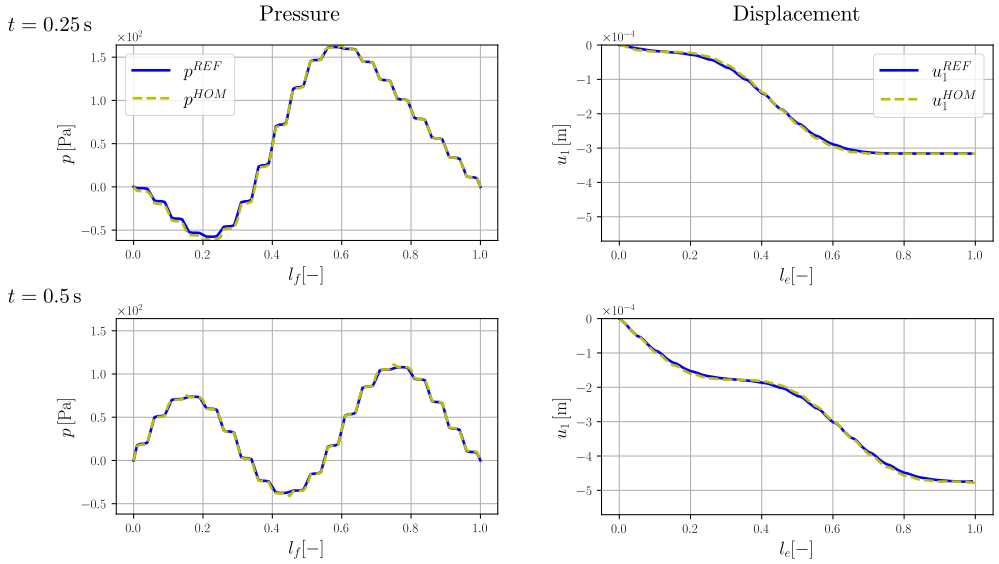


图 7：均质化解与参考解的比较——线性模型。

在第二次对比中，我们考虑非线性模型，因此HOM模型中的均匀化系数根据（49）进行更新，由此宏观响应由第 4.2.2节所述的算法给出。相应地，参考模型的响应通过在每个时间步中嵌入迭代循环的网格更新来计算，如上文所述。第二次对比测试的结果以与第一次相同的方式呈现；重构的压力场和位移场以及参考模型得到的结果报告于图 8中。对于非线性情形，均匀化模型与参考模型之间的差异相当显著。这种差异是由于所施加的电势在 10^{-2} 量级上引起了相对较大的应变，并且通过灵敏度分析对均匀化系数进行的近似不再准确。渗透率对所施加电势，进而对变形的依赖性示于图 9中，渗透率的相对误差绘于图 10/右图中。通过灵敏度分析更新的均质化渗透率 $\tilde{\boldsymbol{K}}^{QP}$在给定的宏观求积点 QP 处进行评估，而参考渗透率张量 $\boldsymbol{K}^{REF,QP}$ 则在发生变形的微观单胞 Y上计算。单胞变形定义为

$$\delta u(QP,y) = (\boldsymbol{\omega}^{ij} + \boldsymbol{\Pi}^{ij}) e^{x}_{ij}(\delta \boldsymbol{u}^{0,QP}) - \boldsymbol{\omega}^{P} \delta p^{0,QP} + \sum_{\alpha} \delta \hat{\boldsymbol{\omega}}^{\alpha} \hat{\varphi}^{\alpha,QP}, \qquad (63)$$

其中， $\delta u^{0,QP}$、 $\delta p^{0,QP}$ 和 $\delta \hat{\varphi}^{\alpha,QP}$ 是在 QP 处计算的宏观变量增量。

为展示均匀化系数对宏观变形和压力的依赖性，我们对单个参考单胞进行测试，记为$Y^{\bullet}$。在第一次测试中，单胞受宏观应变 $e^{0,}_{33}{}^{\bullet} \in [-0.01, 0.01]$ 作用；在第二次测试中，单胞受宏观压力 $p^{0,\bullet} \in [-7, 7]$ MPa 作用~，具体依据方程（63）。对于给定应变，弹性系数 $A^{\bullet}_{1111}$ 的变化仅约为百分之一，而均质化渗透率 $K^{\bullet}_{11}$ 的变化约为 25%。对于变化的宏观压力，弹性系数几乎保持不变，而均质化渗透率的变化幅度仍达数十个百分点。图 11 还比较了通过灵敏度分析获得的系数（记为 ~）与在变形的微观单胞上计算得到的系数（记为 ^{REF}）。

图 12 展示了试样部分区域重构得到的微观压力、流体速度和应变幅值。

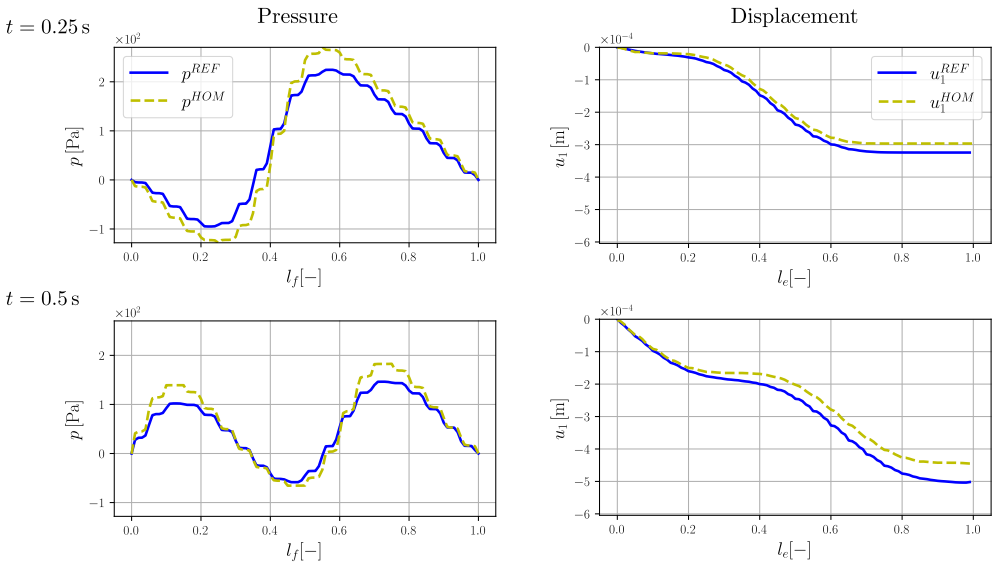


图 8：均质化解与参考解的对比——非线性模型。

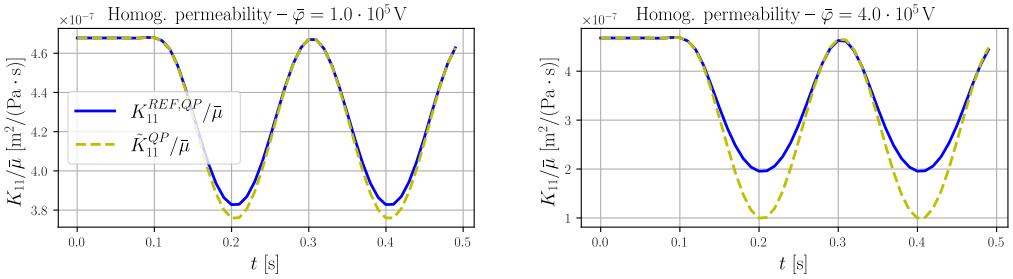


图 9：宏观积分点 QP 处均质化渗透率与参考渗透率的对比 K_{11} ： $\bar{\varphi} = 10^5\mathrm{V}$ — 左侧， $\bar{\varphi} = 4 \cdot 10^5\mathrm{V}$ — 右侧。

为说明模型非线性对模拟结果的影响，按照（D.9）计算的通过右侧面 Γ_R 的累积通量，但使用$w := w_1$ （沿 x_1 轴排列的通量），在图 13 中对线性情形和非线性情形进行了比较，即不使用和使用近似式（49）更新均匀化系数。正通量值表示流动方向为从 Γ_L 到 Γ_R。在线性情形下，通量围绕一个常数值振荡，表明不存在有效通量；而在非线性情形下，泵送效应

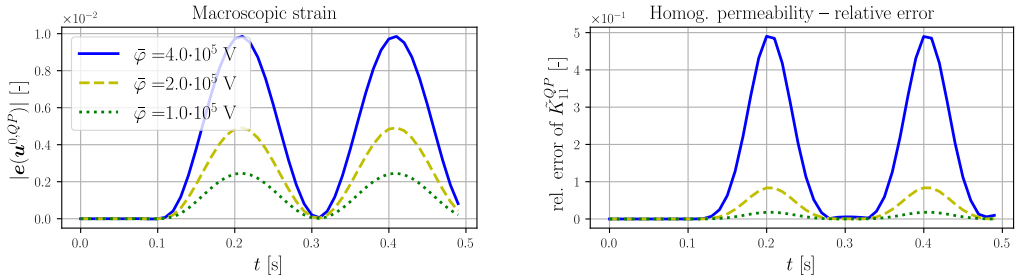
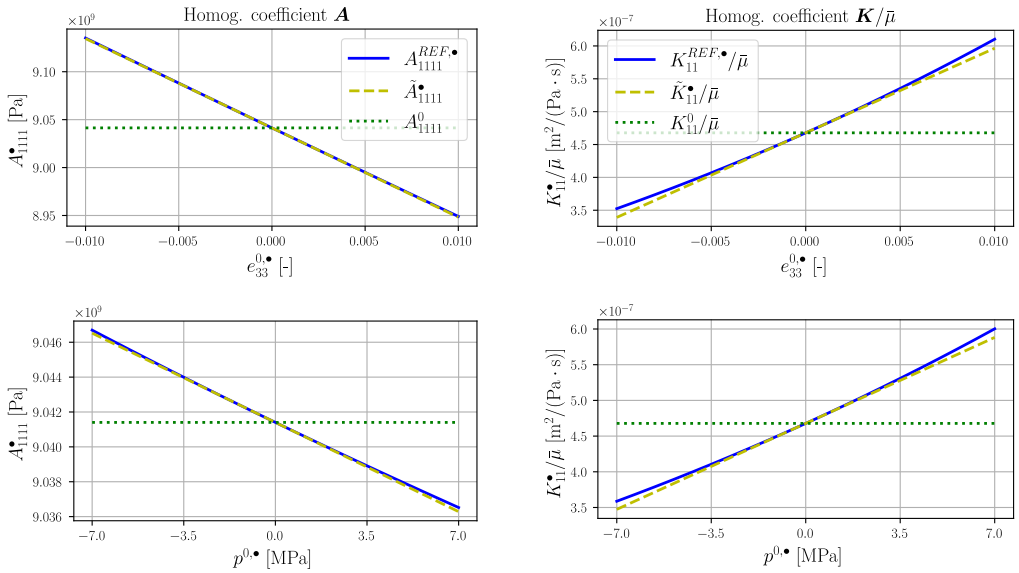


图 10：各物理量对所施加电势的依赖关系：应变幅值 $|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}^{0,QP})|$– 左图， $\tilde{K}_{11}^{QP}$ 的相对误差 – 右图。



~ ~图 11：均匀化系数 A_{1111} （左）和 K_{11}（右）对宏观量的依赖关系。单胞 $Y^{\bullet}$ 通过宏观应变 $e^{0}{}_{,33}^{\bullet} \in [-0.01, 0.01]$ （上）或宏观压力 $p^{0,\bullet} \in [-7, 7]$MPa（下）加载。将通过灵敏度分析近似得到的系数与参考值进行比较。

这是显而易见的，因为累积通量值随时间增加，因此流体从 Γ_L 输送到 Γ_R。请注意，计算结果对应的驱动为 $\bar{\varphi} = 4 \cdot 10^5$V，即应变相对较大，因此我们观察到非线性情形下的累积通量存在显著差异。如果我们

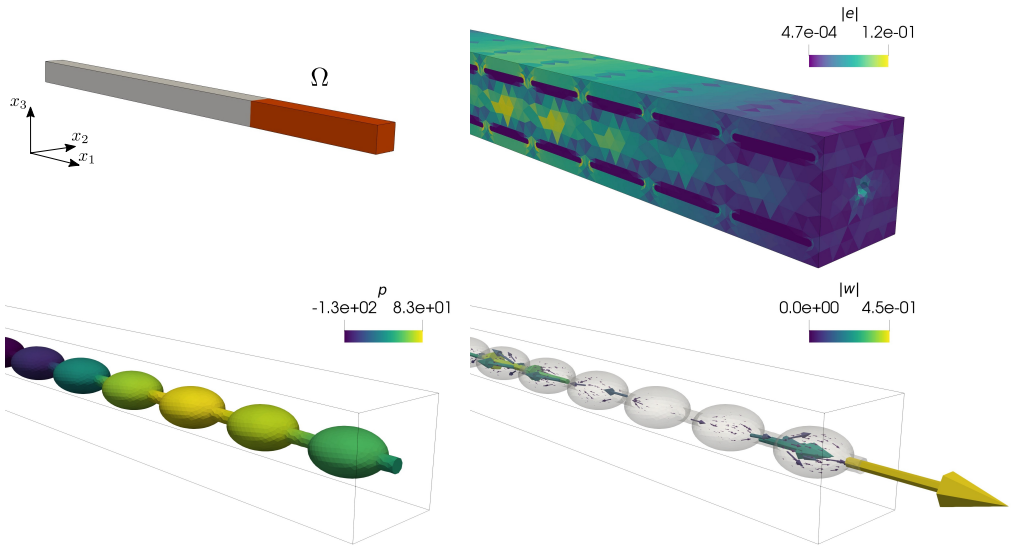


图12： $t = 0.9$s 时 Ω 高亮（红色）部分中的重构均质化解：应变幅值 $|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}^{HOM,\varepsilon_0})|$–右上，压力 p^{HOM,ε_0} –左下，速度–右下。

减小 $\bar{\varphi}$，差异就会变小。

对于周期数 $N = 20$，REF 模型包含 317265 个四面体单元，其中 22328 个为四节点四面体，83980 个为十节点四面体，总自由度超过 $3 \cdot 10^6$。

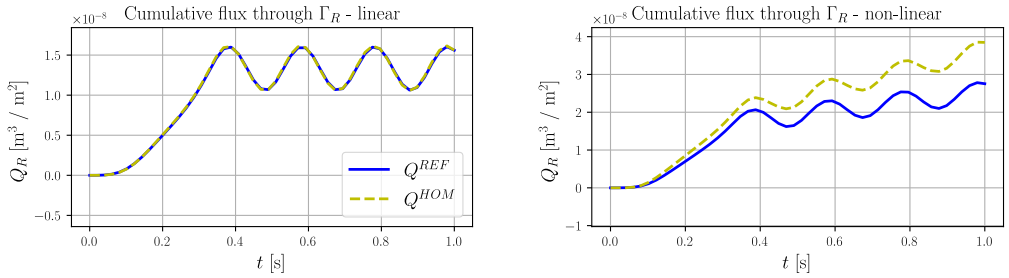


图 13：通过右侧面的累积通量 Γ_R：线性模型——左侧，非线性模型——右侧。

5.4. 蠕动泵送对抗自然流动

现在，我们在线性模型和非线性模型的背景下考察蠕动泵送效应。为此，采用了经过修改的数据。给定非零压力 $\bar{p}$，其中 Γ_R，而 $p = 0$，其中 Γ_L，达西定律会产生朝向 Γ_L 的自然流动。向右传播的诱导蠕动变形波所驱动的泵送应产生朝向 Γ_R 的净通量，方向恰与自然流动相反。我们选择 $\bar{p} = 1\,\mathrm{kPa}$，并设定 $\varepsilon^0 = 10^{-3}$，这意味着材料属性不同于上述验证测试中采用的属性。我们的目的是评估电压驱动 $\bar{\varphi}^*$ 对向右输运流体量 Γ_R 的影响，见图 14。显然，当电势为 $\bar{\varphi} = 0\,\mathrm{V}$ 时，不存在由蠕动驱动的流动，只会因压力梯度产生朝向 Γ_L 的自然流动。随着 $\bar{\varphi}$ 增大，可以实现反向流动；当电势为 $\bar{\varphi} = 7 \cdot 10^4\,\mathrm{V}$ 时，则会因蠕动泵送而产生稳定的流体输运。

结构克服压力降输运流体的能力受到微观结构几何排列的显著影响，尤 其是流体通道的形状。这一影响如图15所示，其中比较了“气囊 ∩ 圆柱”流体通道几何结构与简单圆柱几何结构的累积通量。由图可见，纯圆柱形流体通道并不适用于流体的蠕动输运，因为大直径圆柱无法被充分节流以消除回流，而较小的通道在给定压力梯度和电势下只能输运有限量的流体。

5.5.“二维”结构中的蠕动流

在本节中，我们采用一种改进的周期性单胞，该单胞允许沿 x_1 和 x_2 方向流动，见图 16/左侧；并采用尺寸为 $0.1 \times 0.1 \times 0.0625\,\mathrm{m}$ 的宏观样品，对其施加图 16/右侧所示的边界条件。

为了展示通过规定的电势如何控制流体通过该结构的输运，我们考虑两个不同的函数 φ^2。在第一次模拟中，我们采用函数 $\varphi^2 = \varphi_I^2(x_1, t)$，该函数与第5.3节中使用的函数相同；而第二次模拟则针对非零的 $d = \pi/0.75$ 和 $b_2 = \pi/0.075$进行，即表 2 中的“2D 情形”，因此 $\varphi^2 = \varphi_{II}^2(x_1, x_2, t)$。图 17 展示了对于 φ_I^2 和φ_{II}^2，通过面 Γ_N、Γ_F、 Γ_L 的累积通量比较结果。图中显示，改变控制电势的参数会对.....产生重大影响

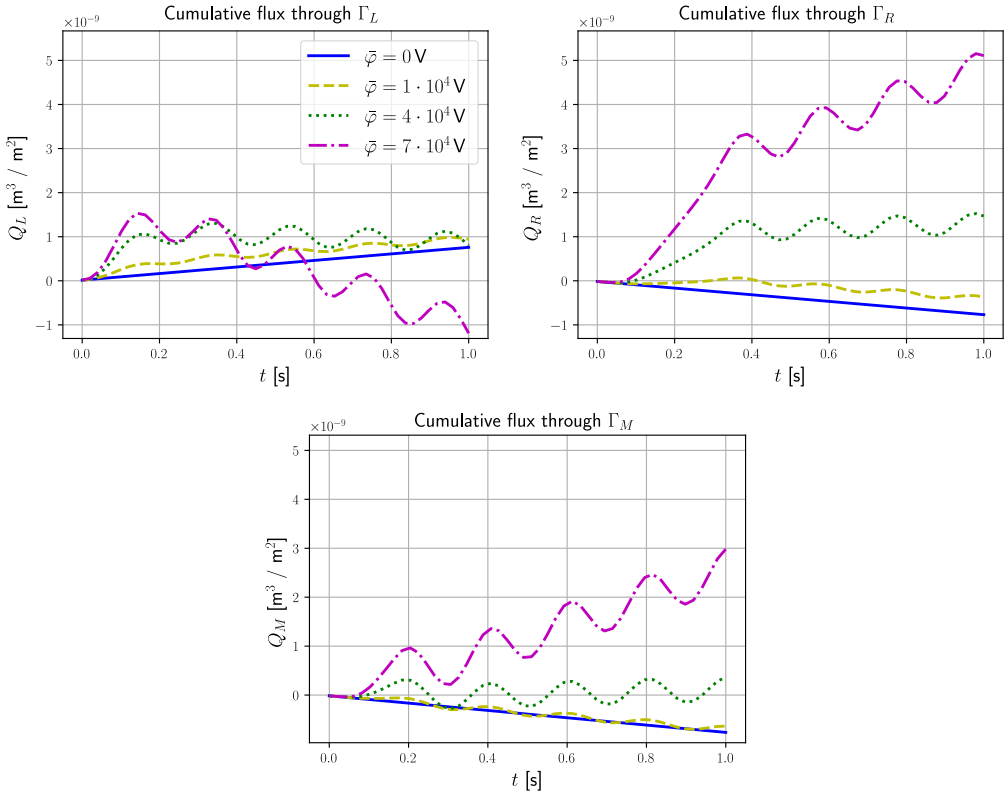


图14：通过面 Γ_L、 Γ_R和 Γ_M 的累积通量，对于不同的 $\bar{\varphi}$.

由此产生的流体输运以及向所需方向泵送的能力。而对于 φ_I^2，通量从 Γ_L 到 Γ_F 和 Γ_N均匀分布；在 φ_{II}^2 的情况下，我们通过改变参数 d 来改变通量，使流体从 Γ_L 和 Γ_F 流向 Γ_N。根据所需流动优化控制函数参数，是进一步研究的一项挑战。

在规定的电势 φ_I^2 下，模拟时间层 $t_k = 0.14$、0.28、0.42、0.56s 时的宏观压力和速度场随时间的演变如图18所示。

6. 结论

本文总结了我们为开发高效计算工具所开展的研究工作，这些工具旨在模拟可由电场控制的“智能多孔”材料的行为，这类材料专为输运流体而设计。

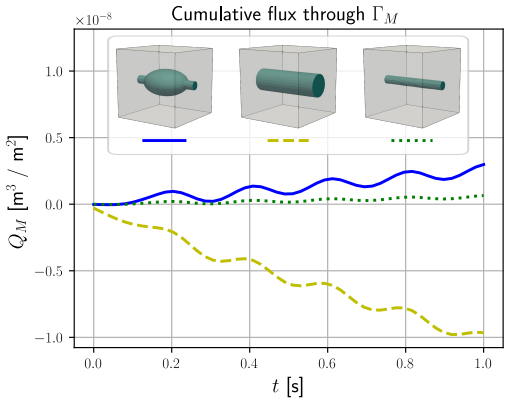


图 15：三种不同流体通道形状下通过面 Γ_M 的累积通量，$\bar{\varphi} = 7 \cdot 10^4$V。

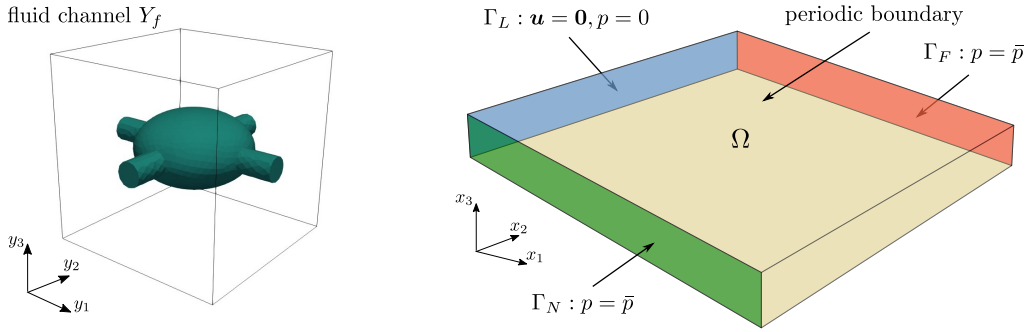


图 16：微观周期单胞 Y（左）和宏观区域 Ω，以及所施加边界条件的示意图（右）。

使用蠕动变形原理。具体而言，通过对线性化流固耦合问题进行均匀化，我们推导出了电活性多孔材料模型。所考虑的周期性复合结构包含压电致动器，它们提供了时间和空间上的控制手段，以诱导所需的变形波。在这方面，对于给定尺度 $\varepsilon_0 > 0$，即给定尺寸的代表性周期单胞 $\varepsilon_0 Y$，应使用均匀化模型（HOM模型），因为该模型具有与微观模型的缩放材料参数相关的强非均质性。通过将非均质结构响应的直接数值模拟作为“参考”（REF模型），对HOM模型进行了验证。正如预期的那样，均匀化介质的响应提供了良好的近似-

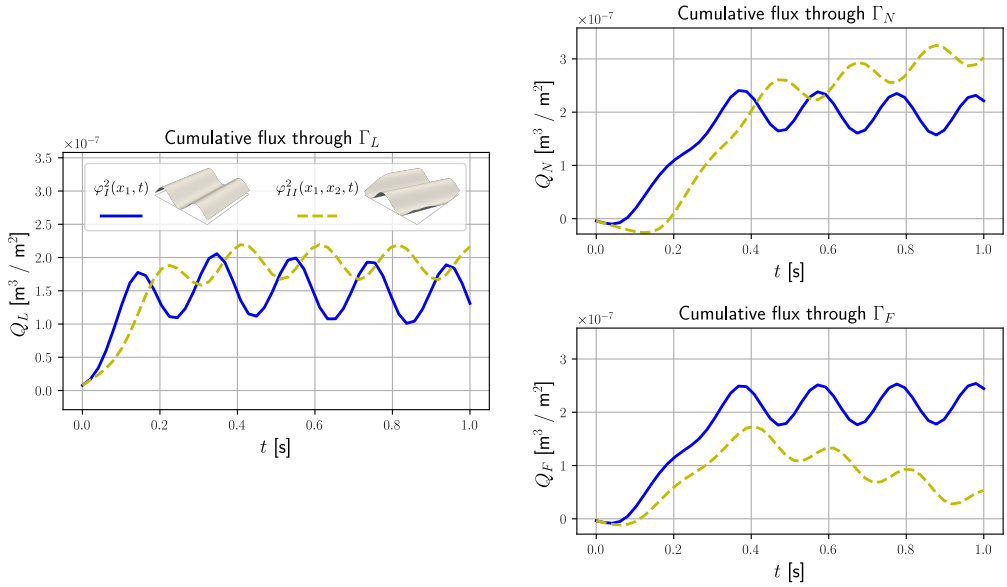


图 17：当电势为 φ_I^2 和 φ_{II}^2 时，通过面 Γ_L、Γ_N、Γ_F 的累积通量。

变形场的近似较好，而压力的近似通常较差。不过需要注意的是，由于对电极（等电势）线段的处理方式不同，规定的控制——电势波——在参考模型和 HOM 模型中并不完全相同，因此比较结果受到控制波长的较大影响。在我们的验证中，为了观察流体输运效应，我们不得不将波长保持得相对较短，小于所考虑的微结构周期数。

数值研究证实，为实现均质化连续体所需的泵送效应，必须考虑变形相关微观构型所带来的非线性，并因此遵循均质化材料的变形相关有效性能。为此，我们采用了灵敏度分析方法，从而得到一种计算高效的数值方案，用于求解非线性问题。

所推导均匀化模型的主要优势在于降低求解非线性问题的计算复杂度。这可以通过比较三种可能的建模方法来说明：a) 直接数值模拟

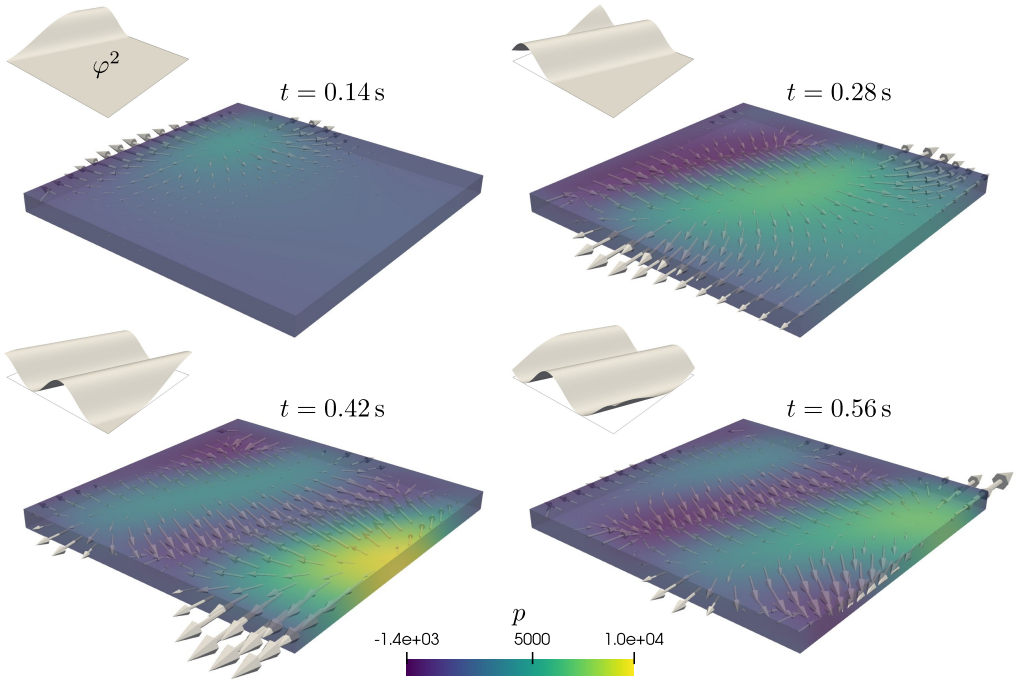


图 18：时刻 t_k =0.14，0.28，0.42，0.56 s 时的宏观压力和速度场，$\varphi^2 = \varphi^2_{II}$。

（参考模型）；b) FE² 方法——基于更新空间局部参考微结构的均匀化方法（详见附录 B）；以及 c) 所提出的降阶模型，该模型基于利用未变形构型响应的灵敏度对均匀化系数进行近似（MOR/SA）。在情况 a) 中，由包含 20 个周期单元的 FE 网格构成的参考计算，会产生一个包含超过 300000 个自由度的线性系统；该系统必须在每个时间步中经过多次迭代求解。在个人计算机（10 核 Intel i9 处理器，64GiB 内存）上，每个时间步的求解约需 2.4 分钟。在情况 b) 中，双尺度计算包括求解若干微观子问题、评估均匀化系数，以及利用时间步进迭代算法在宏观尺度上进行计算。微观层面的 FE 网格由 ≈ 16000个四面体单元和 ≈ 3000个节点组成。作为说明，不进行灵敏度分析时，求解单个微观问题约需 8 秒；对于 160 个宏观积分点，这意味着求解时间约为 1280 秒，即微

在每个宏观迭代步中求解微观问题。最后，在情况 c) 中，“MOR/SA”方法只需在求解宏观问题之前求解一次“单胞问题”并进行一次灵敏度分析（与迭代次数和时间步数无关）。这大约需要 35 秒，而近似系数的计算则只需几十毫秒（在宏观积分点处逐点进行）。因此可以得出结论，与 FE^2 方法相比，MOR/SA 方法的计算量减少了 30 至 40 倍。以实际运行时间计，采用所提出的 MOR/SA 方法完成第5节.3中报告的数值模拟约需 5 分钟，而对相同问题，DNS 和 FE^2 方法的求解时间均超过 2 小时。

尊重几何非线性的双尺度压电模型似乎是模拟多孔压电结构中蠕动流的有效工具。未来拟进一步开展研究并完善模型，以期利用声波能量进行流体输运，这与“声流”现象类似。为此，对于压电执行器中更高频率的电压驱动而言，流动动力学的影响以及对所有相关惯性现象的考虑将十分重要。

致谢。本研究得到捷克科学基金会项目 GA21-16406S 和 GA24-12291S 的资助。

附录A. 直接数值模拟——增量公式

我们给出了由（2）导出的线性化问题的弱形式，并针对流固耦合问题以及第 2.3 节中介绍的非均质介质对其进行了调整，见注释 2.1。

我们考虑时间层 $t_0 < t_1 < t_2, \dots$，使得采用时间上的向后近似来定义 $\dot{\boldsymbol{u}}(t_k, x) \approx (\boldsymbol{u}^k - \boldsymbol{u}^{k-1})/\Delta t$。在每个时间层内，“载荷”由 $\delta\bar{p}$ 以及规定的电势 $\delta\bar{\varphi}$给出。在每个时间层 t_k，解 $\boldsymbol{s}(t_k, x) \approx \boldsymbol{s}^k(x)$，其中$\boldsymbol{s}^k(x^i) = \boldsymbol{s}^{k-1}(x^0) + \Delta\boldsymbol{s}(x^0)$，其中 $x^0 \in \Omega_{k-1}$，并且 x^i 是 x^0 在第 i次迭代中的空间位置，使得

$$\begin{aligned} \Omega(t_{k-1}) = \Omega_0, \quad \Omega(t_k) \approx \Omega_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots \\ \boldsymbol{s}(x^i) \approx \boldsymbol{s}^k(\hat{x}), \quad x^i \approx \hat{x} = x^0 + \Delta x, \end{aligned} \tag{A.1}$$

现在我们将考虑以下简化问题，其中“迭代”与“时间步”合并。目标是为扰动载荷 $\delta\bar{p}$ 和电势 $\delta\bar{\varphi}$ 寻找新的平衡，如下所述。相应的解扰动 $\delta\boldsymbol{u}$ $\delta\boldsymbol{w}$ δp 和 $\delta\varphi$ 必须满足以下方程，

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega_R^s} \left(\mathbb{D}\boldsymbol{e}(\delta\boldsymbol{u}) - \underline{\boldsymbol{g}}^T \cdot \nabla\delta\varphi\right) : \boldsymbol{e}_R(\tilde{\boldsymbol{v}})\,\mathrm{dV} \\
+ &\int_{\Omega_R^f} (\mu\boldsymbol{e}(\boldsymbol{w}+\delta\boldsymbol{w}+\dot{\boldsymbol{u}}+\delta\dot{\boldsymbol{u}}) - (p+\delta p)\boldsymbol{I}) : \boldsymbol{e}_R(\tilde{\boldsymbol{v}})\,\mathrm{dV} \\
&\qquad + \int_{\Omega_R^s} \boldsymbol{\sigma}_R^s(\boldsymbol{u},\varphi) : \boldsymbol{e}_R(\tilde{\boldsymbol{v}})\,\mathrm{dV} = \int_{\partial_\sigma\Omega_R^f} (\bar{p}+\delta\bar{p})\boldsymbol{n}\cdot\tilde{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{dS}\,, \\
&\int_{\Omega_R^s} \left(\underline{\boldsymbol{g}} : \boldsymbol{e}(\delta\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{d}\nabla\delta\varphi\right)\cdot\nabla\psi\,\mathrm{dV} = -\int_{\Omega_R^s} \underline{D}_R(\boldsymbol{u},\varphi)\cdot\nabla\psi\,\mathrm{dV}\,, \\
&\int_{\Omega_R^f} (\mu\boldsymbol{e}(\boldsymbol{w}+\delta\boldsymbol{w}+\dot{\boldsymbol{u}}+\delta\dot{\boldsymbol{u}}) - (p+\delta p)\boldsymbol{I}) : \boldsymbol{e}_R(\vartheta)\,\mathrm{dV} = \int_{\partial_\sigma\Omega_R^f} (\bar{p}+\delta\bar{p})\boldsymbol{n}\cdot\vartheta\,\mathrm{dS}\,, \\
&\qquad \int_{\Omega_R^f} q\nabla\cdot(\boldsymbol{w}+\delta\boldsymbol{w}+\dot{\boldsymbol{u}}+\delta\dot{\boldsymbol{u}})\,\mathrm{dV} = 0\,,
\end{aligned}
\tag{A.2}
$$

对任意 $\tilde{\boldsymbol{v}} \in V_0(\Omega_R)$、$\psi \in \Psi_0(\Omega_R)$、$\vartheta \in W_0(\Omega_R)$ 和 $q \in Q_0(\Omega_R)$ 均成立。上述固体速度 $\dot{\boldsymbol{u}}$ 被视为在流体中的延拓，其中，

$$
\boldsymbol{u}^k \approx \bar{\boldsymbol{u}}^k + \delta\boldsymbol{u}\,, \quad \dot{\boldsymbol{u}}^k \approx (\bar{\boldsymbol{u}}^k - \boldsymbol{u}^{k-1})/\Delta t + \delta\boldsymbol{u}/\Delta t\,, \tag{A.3}
$$

其中，$\bar{\boldsymbol{u}}^k$ 是未知量 $\boldsymbol{u}^k$ 的当前近似值。

增量问题定义如下。假设参考构形 Ω_R 已给定，对于作用于 $\partial_\sigma\Omega_R^f$ 的压力增量 $\delta\bar{p}$ 所产生的载荷，以及施加于电极上的实际电势 $\delta\bar{\varphi}$，计算解增量 $\delta\boldsymbol{s} = (\delta\boldsymbol{u}\ \delta\varphi, \delta p, \delta\boldsymbol{w}) \in \mathcal{W}(\Omega_R) = V(\Omega_R) \times \Psi(\Omega_R) \times Q(\Omega_R) \times W(\Omega_R)$，使得 (A.2) 得到满足。

应力更新至“下一”迭代/时间层，如下

$$
\begin{aligned}
\Omega_R^* &= \Omega_R + \{\delta\boldsymbol{u}\}_{\Omega_R}\,, \quad x := x^* = x + \delta\boldsymbol{u}(x)\,, \\
\boldsymbol{\tau}_R^*(x^*) &= \boldsymbol{\tau}_R(x) + \mathrm{sym}\{\boldsymbol{\tau}_R\nabla\delta\boldsymbol{u}\}(x) + \delta_R^{\mathcal{L}}\boldsymbol{\tau}_R(x)\,, \\
\delta_R^{\mathcal{L}}\boldsymbol{\tau}_R^s &= \mathbb{D}\boldsymbol{e}(\delta\boldsymbol{u}) - \underline{\boldsymbol{g}}^T\cdot\nabla\delta\varphi\,.
\end{aligned}
\tag{A.4}
$$

在 $\boldsymbol{\tau}_R^*(x^*)$ 的表达式中，若变形极小，则可以忽略项 $(\nabla\delta\boldsymbol{u})\boldsymbol{\tau}_R$。

时间增量和迭代。载荷 $\delta\bar{p} := \Delta\bar{p}$ 和 $\delta\bar{\varphi} = \Delta\bar{\varphi}$ 可在每个时间步 $\Delta t = t_k - t_{k-1}$ 的第一次迭代 $i = 1$ 中施加，见 (A.1)，由此产生 (A.2) 中的不平衡量。对于迭代 $i = 2, 3, \ldots,$ $\delta\bar{p} = 0$ 和 $\delta\bar{\varphi} = 0$，使得 $\delta \boldsymbol{s}^i \to 0$ 随 i 增大。

附录 B。以变形构型描述的多孔弹性介质均匀化

我们考虑具有由（不可移动）流体饱和的周期性封闭（不连通）孔隙的多孔线性弹性介质的简化准静态问题。其目的是论证为引入带有近似多孔弹性均质化系数的“降阶模型”而采用的灵敏度分析方法的合理性。根据平衡式（2），非均质结构的微观模型

现在考虑变形构形中的准周期结构，其展开区域为 $\Omega_R \times Z(x)$。对于任意 $x \in \Omega_R$，微观构形 $Z(x)$ 由初始参考单胞Y的局部变形定义。下文中，我们简写为 Z，而不写作 $Z(x)$。将Y分解为固体 Y_S和流体 Y_F仍然适用，因此 $Z = Z_S \cup Z_F \cup \Gamma_Z$也成立，其中 Γ_Z 为固体-流体界面。在极限情况下，$\varepsilon \to 0$，变形构形中的均匀化导出双尺度方程。

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_R} \fint_{Z_S} \hat{\mathbb{D}}[\boldsymbol{e}_x(\delta\boldsymbol{u}^0) + \boldsymbol{e}_z(\delta\hat{\boldsymbol{u}}^1)] : [\boldsymbol{e}_x(\boldsymbol{v}^0) + \boldsymbol{e}_z(\boldsymbol{v}^1)] \,\mathrm{dV}_{xz} \\
- \int_{\Omega_R} \delta p^0 \fint_{Z_F} (\nabla_x \cdot \boldsymbol{v}^0 + \nabla_z \cdot \boldsymbol{v}^1) \,\mathrm{dV}_{xz} = \\
\int_{\Omega_R} p^0 \fint_{Z_F} (\nabla_x \cdot \boldsymbol{v}^0 + \nabla_z \cdot \boldsymbol{v}^1) \,\mathrm{dV}_{xz} - \int_{\Omega_R} \fint_{Z_S} \boldsymbol{\sigma}_S^0 : [\boldsymbol{e}_x(\boldsymbol{v}^0) + \boldsymbol{e}_z(\boldsymbol{v}^1)] \,\mathrm{dV}_{xz} \,, \\
\int_{\Omega_R} q^0 \fint_{Z_F} (\nabla_x \cdot \delta\boldsymbol{u}^0 + \nabla_z \cdot \delta\hat{\boldsymbol{u}}^1) \,\mathrm{dV}_{xz} = 0 \,,
\end{aligned}
\tag{B.1}
$$

对于所有试位移 $\boldsymbol{v}^0 \in V_0(\Omega)$、$\boldsymbol{v}^1 \in \mathbf{H}^1_{\#}(Z)$ 以及所有 $q^0 \in L_2(\Omega)$。

附录 *B.1.* 在初始构型中变换的局部问题

变形构形 $Z(x)$ 中的局部问题，是类比于在固定（初始）构形中考虑的线性模型得到的；它

内容如下：求 $\delta\boldsymbol{u}^1 \in \mathbf{H}^1_{\#}(Z)$，使得

$$\fint_{Z_S} \hat{\mathbb{D}}[\boldsymbol{e}_x(\delta\boldsymbol{u}^0) + \boldsymbol{e}_z(\delta\hat{\boldsymbol{u}}^1)] : \boldsymbol{e}_z(\boldsymbol{v}^1)\,\mathrm{dV}_z + \delta p^0 \fint_{Z_S} \nabla_z \cdot \boldsymbol{v}^1\,\mathrm{dV}_z = -r_Z(x, \boldsymbol{v}^1)\ , \tag{B.2}$$

对于所有试位移 $\boldsymbol{v}^1 \in \mathbf{H}^1_{\#}(Z)$，几乎处处 $x \in \Omega$ 均成立。注意，$\hat{\mathbb{I}}\mathbb{D}(z) = \mathbb{I}\mathbb{D}(y)$，其中 $z = \psi(y, \cdot)$ 表示 $y \in Y$ 的空间位置，定义如下，并取决于宏观位置 x。假设对于应力 $\boldsymbol{\sigma}^0_S$ 和流体压力 p^0 的当前近似，局部平衡成立，则不平衡量消失，

$$r_Z(x, \boldsymbol{v}^1) = \fint_{Z_S} \boldsymbol{\sigma}^0_S : \boldsymbol{e}_z(\boldsymbol{v}^1)\,\mathrm{dV}_z + p^0 \fint_{Z_R} \nabla_z \cdot \boldsymbol{v}^1\,\mathrm{dV}_z \approx 0\ , \quad \forall \boldsymbol{v}^1 \in \mathbf{H}^1_{\#}(Z)\ , \tag{B.3}$$

因此，由（B.1）中的各项推导出的“不平衡量” $R_Z(\boldsymbol{v}^0)$，其中包含平均应力 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_S$ 和 p^0，并以 $\boldsymbol{v}^0$ 为试位移，仅在宏观尺度上得到满足，即在（B.12）和（B.14）中得到满足。由于线性关系，可以引入局部特征响应 $\hat{\boldsymbol{\chi}}^{ij}$ 和 $\hat{\boldsymbol{\chi}}^P$，使得

$$\delta\hat{\boldsymbol{u}}^1 = \hat{\boldsymbol{\chi}}^{ij} e^x_{ij}(\delta\boldsymbol{u}^0) + \hat{\boldsymbol{\chi}}^P \delta p^0\ . \tag{B.4}$$

代入（B.2）后，得到局部特征问题，这些问题必须在几乎处处的 $x \in \Omega$ 上求解：求 $\hat{\boldsymbol{\chi}}^{ij} \in \mathbf{H}^1_{\#}(Z)$ 和 $\hat{\boldsymbol{\chi}}^P \in \mathbf{H}^1_{\#}(Z)$，使得（注意 $\hat{\boldsymbol{\Pi}}^{ij} = \boldsymbol{\Pi}^{ij}(z)$，$\Pi^{ij}_k(z) = z_j\delta_{ik}$）

$$\begin{aligned} \fint_{Z_S} \hat{\mathbb{I}}\mathbb{D}\boldsymbol{e}_z(\hat{\boldsymbol{\chi}}^{ij} + \hat{\boldsymbol{\Pi}}^{ij}) : \boldsymbol{e}_z(\boldsymbol{v}^1)\,\mathrm{dV}_z = 0\ , \quad \forall \boldsymbol{v}^1 \in \mathbf{H}^1_{\#}(Z)\ , \\ \fint_{Z_S} \hat{\mathbb{I}}\mathbb{D}\boldsymbol{e}_z(\hat{\boldsymbol{\chi}}^P) : \boldsymbol{e}_z(\boldsymbol{v}^1)\,\mathrm{dV}_z = -\fint_{Z_S} \nabla_z \cdot \boldsymbol{v}^1\,\mathrm{dV}_z\ , \quad \forall \boldsymbol{v}^1 \in \mathbf{H}^1_{\#}(Z)\ . \end{aligned} \tag{B.5}$$

$\hat{\ }\hat{\ }\hat{\ }$ 均匀化系数 $\mathbb{AA}, \boldsymbol{B}$ 和 M 类似于线性模型中涉及的系数，见（43），可在几乎处处的 $x \in \Omega$ 处计算，以构成宏观问题，具体如下所述。空间（变形后的）微观构型会被更新使用

$$\delta\hat{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{mic}} = \delta\hat{\boldsymbol{u}}^1 + \boldsymbol{\Pi}^{ij}(z) e^x_{ij}(\delta\boldsymbol{u}^0(x))\ . \tag{B.6}$$

因此，将 Y 变换为局部微观构形 $Z(x)$ 的微位移为

$$\hat{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{mic}}(z,\boldsymbol{e}^x,p^0)=\int_0^{\boldsymbol{e}^x}(\hat{\boldsymbol{\chi}}^{ij}(\tilde{z})+\boldsymbol{\Pi}^{ij}(\tilde{z}))\delta\tilde{e}_{ij}(x)+\int_0^{p^0}\hat{\boldsymbol{\chi}}^{P}(\tilde{z})\delta\tilde{p}^0 \tag{B.7}$$

其中，$z=\psi(y,\mathsf{e}^x,p^0)$、$y\in Y$ 以及 $\tilde{z}=\psi(y,\tilde{\mathsf{e}}^x,\tilde{p}^0)$ 均取决于宏观变量。显然，映射 $\psi:y\mapsto z$ 由 $\boldsymbol{\xi}^x:=(\mathsf{e}^x,p^0)$ 参数化；不过，为简洁起见，我们将其记为 $z=\psi(y)$。利用 $\mathsf{u}^{\mathrm{mic}}(y)=\hat{\mathsf{u}}^{\mathrm{mic}}(\psi(y))$ 和映射 ψ，可为 $y\in Y$ 和 $z=\psi(y)$ 建立变形梯度 $\mathsf{F}(y)=\mathsf{I}+\nabla_y\mathsf{u}^{\mathrm{mic}}$ 及其逆 $\hat{\mathsf{F}}=\mathsf{F}^{-1}=\mathsf{I}-\nabla_z\hat{\mathsf{u}}\,\mathsf{mic}$。根据小变形假设，对于 $y\in Y$，可采用近似 $\hat{\mathsf{F}}\approx\mathsf{I}-\nabla_y\mathsf{u}^{\mathrm{mic}}$。现在，可以定义变换后的弹性和散度算子：

$$\begin{aligned}\tilde{D}_{irks}(y,\boldsymbol{\xi}^x)&=D_{ijkl}(\delta_{ls}-\partial_l^z\hat{u}_s^{\mathrm{mic}})(\delta_{jr}-\partial_j^z\hat{u}_r^{\mathrm{mic}})\det(\boldsymbol{I}+\nabla_y\boldsymbol{u}^{\mathrm{mic}}))\\&=D_{ijkl}(y)\hat{F}_{ls}(\psi(y))\hat{F}_{jr}(\psi(y))\,\det(\boldsymbol{F}(y))\,,\\\tilde{\mathrm{Div}}_y&=\det(\boldsymbol{F})\boldsymbol{I}:(\hat{\boldsymbol{F}}\nabla_y)\,,\quad\tilde{\partial}_i^y=\det(\boldsymbol{F})\hat{F}_{ik}\partial_k^y\,.\end{aligned} \tag{B.8}$$

上述对 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 的近似可用于将施加于变形构形中的局部问题 (B.2) 转换至初始构形。对于几乎处处属于 Ω 的给定局部宏观响应 $\boldsymbol{\xi}^x=(\boldsymbol{e}^x(\boldsymbol{u}^0)\ p^0,\boldsymbol{\sigma}_S^0)$，求 $\delta\boldsymbol{u}^1\in\mathbf{H}^1_{\#}(Y)$，使得

$$\begin{aligned}\fint_{Y_S}\tilde{\mathbb{D}}(y,\boldsymbol{\xi}^x)\boldsymbol{e}_y(\tilde{\boldsymbol{\Pi}}^{kl}\delta e_{kl}^x+\delta\boldsymbol{u}^1):\boldsymbol{e}_y(\boldsymbol{v}^1)\,\mathrm{dV}_y\\+\delta p^0\fint_{Y_S}\boldsymbol{I}:(\hat{\boldsymbol{F}}\nabla_y)\boldsymbol{v}^1\det(\boldsymbol{F})\,\mathrm{dV}_y=-r_Y(x,\boldsymbol{v}^1)\,,\end{aligned} \tag{B.9}$$

对所有试位移 $\boldsymbol{v}^1\in\mathbf{H}^1_{\#}(Y)$ 均成立；由于（B.3），右端泛函为零。上面的 $\tilde{\boldsymbol{\Pi}}^{kl}(y)=\boldsymbol{\Pi}^{kl}(z)$ 是利用（B.4）中引入的 $\hat{\boldsymbol{\Pi}}^{kl}$ 定义的，因此，$\tilde{\Pi}_j^{kl}(y)=(y_l+u_l^{\mathrm{mic}}(y))\delta_{jk}$。

可以考虑（B.9），并在给定“预变形”的 $\tilde{}$ $\hat{}$ 构型及给定的 $\mathrm{ID}(y,\boldsymbol{e}^x)$、$\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 时，求解 $\delta\boldsymbol{u}^1$。类比于（B.4），并使用经 Y_S 变换的（B.6），可得

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{u}^1&=\tilde{\boldsymbol{\chi}}^{ij}e_{ij}^x(\delta\boldsymbol{u}^0)+\tilde{\boldsymbol{\chi}}^{P}\delta p^0\,,\\\delta\boldsymbol{u}^{\mathrm{mic}}&=\tilde{\boldsymbol{\Xi}}^{ij}e_{ij}^x(\delta\boldsymbol{u}^0)+\tilde{\boldsymbol{\chi}}^{P}\delta p^0\,,\ \text{where}\ \tilde{\boldsymbol{\Xi}}^{ij}:=\tilde{\boldsymbol{\chi}}^{ij}+\tilde{\boldsymbol{\Pi}}^{ij}\,,\end{aligned} \tag{B.10}$$

在任意 $y \in Y_S$ 处，其中 $\tilde{\boldsymbol{\chi}}^{ij} \in \mathbf{H}^1_{\#}(Y)$ 和 $\tilde{\boldsymbol{\chi}}^{P} \in \mathbf{H}^1_{\#}(Y)$ 满足（在任意 $x \in \Omega_R$ 处）

$$
\begin{aligned}
\fint_{Y_S} \tilde{\mathbb{D}}\boldsymbol{e}_y(\tilde{\boldsymbol{\chi}}^{ij} + \tilde{\boldsymbol{\Pi}}^{ij}) : \boldsymbol{e}_y(\boldsymbol{v}^1)\,\mathrm{dV}_y = 0\,, \quad \forall \boldsymbol{v}^1 \in \mathbf{H}^1_{\#}(Y)\,, \\
\fint_{Y_S} \tilde{\mathbb{D}}\boldsymbol{e}_y(\tilde{\boldsymbol{\chi}}^{P}) : \boldsymbol{e}_y(\boldsymbol{v}^1)\,\mathrm{dV}_y = -\fint_{Y_S} \tilde{\mathrm{Div}}_y \cdot \boldsymbol{v}^1\,\mathrm{dV}_y\,, \quad \forall \boldsymbol{v}^1 \in \mathbf{H}^1_{\#}(Y)\,.
\end{aligned}
\tag{B.11}
$$

附录 *B.2.* 宏观增量问题

对于宏观问题，我们采用"空间"参考构形 $\Omega(t) = \Omega_R$，区域 Ω_R 使用 $\delta\boldsymbol{u}^0$, 进行更新，见（A.4）。由（B.1）可得

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_R} \fint_{Y_S} \tilde{\mathbb{D}}(y, \boldsymbol{\xi}^x)\boldsymbol{e}_y(\tilde{\boldsymbol{\Pi}}^{kl} e^x_{kl}(\delta\boldsymbol{u}^0) + \delta\boldsymbol{u}^1) : \boldsymbol{e}_y(\tilde{\boldsymbol{\Pi}}^{ij}) e^x_{ij}(\boldsymbol{v}^0)\,\mathrm{dV}_{xy} \\
- \int_{\Omega_R} \delta p^0 \left\langle \det(\boldsymbol{F}) \right\rangle_{Y_F} \nabla_x \cdot \boldsymbol{v}^0\,\mathrm{dV}_x = -R_Z(\boldsymbol{v}^0)\,, \\
\int_{\Omega_R} q \left(\left\langle \det(\boldsymbol{F}) \right\rangle_{Y_F} \nabla_x \cdot \delta\boldsymbol{u}^0 - \fint_{Y_S} \tilde{\mathrm{Div}}_y \cdot \delta\boldsymbol{u}^1\,\mathrm{dV}_y \right) \mathrm{dV}_x = 0\,,
\end{aligned}
\tag{B.12}
$$

对于所有 $\boldsymbol{v}^0 \in V_0(\Omega_R)$ 和 $q \in L^2(\Omega_R)$。利用特征解，可以确定孔弹性系数 $\mathsf{AA} = (A_{ijkl})$、$\boldsymbol{B} = (B_{ij})$ 和 M，

$$
\begin{aligned}
\tilde{A}_{ijkl} &= \fint_{Y_S} \tilde{\mathbb{D}}\boldsymbol{e}_y(\tilde{\boldsymbol{\chi}}^{kl} + \tilde{\boldsymbol{\Pi}}^{kl}) : \boldsymbol{e}_y(\tilde{\boldsymbol{\chi}}^{ij} + \tilde{\boldsymbol{\Pi}}^{ij})\,\mathrm{dV}_y\,, \\
\tilde{C}_{ij} &= -\fint_{Y_S} \tilde{\mathbb{D}}\boldsymbol{e}_y(\tilde{\boldsymbol{\chi}}^{P}) : \boldsymbol{e}_y(\tilde{\boldsymbol{\Pi}}^{ij})\,\mathrm{dV}_y = \tilde{C}'_{ij} = -\fint_{Y_S} \tilde{\mathrm{Div}}_y \tilde{\boldsymbol{\chi}}^{ij}\,\mathrm{dV}_y\,, \\
\tilde{M} &= -\fint_{Y_S} \tilde{\mathrm{Div}}_y \tilde{\boldsymbol{\chi}}^{P}\,\mathrm{dV}_y = \fint_{Y_S} \tilde{\mathbb{D}}\boldsymbol{e}_y(\tilde{\boldsymbol{\chi}}^{P}) : \boldsymbol{e}_y(\tilde{\boldsymbol{\chi}}^{P})\,\mathrm{dV}_y\,, \\
\tilde{\boldsymbol{B}} &= \tilde{\phi}_F \boldsymbol{I} + \tilde{\boldsymbol{C}}\,, \quad \tilde{\phi}_F = \left\langle \det(\boldsymbol{F}) \right\rangle_{Y_F}\,.
\end{aligned}
\tag{B.13}
$$

回想一下，这些 ˜标记系数取决于由 $\boldsymbol{\xi}^x = (\boldsymbol{e}_x(\boldsymbol{u}^0)\ p^0)$ 表示的宏观状态。现在，宏观增量问题可以用均匀化系数表示：求 $\delta\boldsymbol{u}^0 \in V(\Omega_R)$

以及 $\delta p^0 \in L^2(\Omega_R)$，使得

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_R} \left(\tilde{\mathbb{A}}\boldsymbol{e}_x(\delta\boldsymbol{u}^0) - (\boldsymbol{I}\tilde{\phi}_F + \tilde{\boldsymbol{C}})\delta p^0\right) : \boldsymbol{e}_x(\boldsymbol{v}^0)\,\mathrm{dV}_x = -R_Z(\boldsymbol{v}^0)\,,\\ \int_{\Omega_R} q\left((\boldsymbol{I}\tilde{\phi}_F + \tilde{\boldsymbol{C}}) : \boldsymbol{e}_x(\delta\boldsymbol{u}^0) + \tilde{M}\delta p^0\right)\mathrm{dV}_x = 0\,,\end{aligned} \tag{B.14}$$

对于所有$\boldsymbol{v}^0 \in V_0(\Omega_R)$ 和 $q \in L^2(\Omega_R)$ 成立。总之，所述迭代计算方案基于交换根据 (A.4) 施加于更新后的Ω_R 上的宏观步骤 (B.14)，并根据(B.8)求解带有更新后的 $\tilde{}$ID 和 $\tilde{}$Div$_y$ 的局部问题 (B.11)，其中涉及$\boldsymbol{u}^{\mathrm{mic}}$、(B.7)。

附录 *B.3.* 基于灵敏度分析的降阶建模

利用特定于$x \in \Omega_R$的局部特征响应近似，可以避免"宏观-微观"交换步骤的计算复杂度。关键在于近似非均质尺度上的局部变形。我们采用以下抽象记号:

$$\delta\boldsymbol{u}^{\mathrm{mic}}(y;\tilde{\boldsymbol{\xi}}^x) = \tilde{\boldsymbol{\Xi}}^*(\tilde{\boldsymbol{\xi}}^x)\delta\boldsymbol{\xi}^x_* = (\boldsymbol{\Xi}^*(\boldsymbol{0}) + \delta_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{\Xi}^*(\boldsymbol{0})\circ\tilde{\boldsymbol{\xi}}^x)\delta\boldsymbol{\xi}^x_*\,, \tag{B.15}$$

其中求和适用于"指标" $*$，它表示 $I = ij$或 P，使得 $\delta\boldsymbol{\xi}^x = (\delta\boldsymbol{e}^x, \delta p^0)$和 $\tilde{\boldsymbol{\Xi}}^* = (\tilde{\boldsymbol{\Xi}}^I, \tilde{\boldsymbol{\chi}}^P)$，回顾在(B.10)中引入的 $\tilde{\boldsymbol{\Xi}}^I$；微分$\delta_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{\Xi}^* \circ \boldsymbol{\xi}^x = \partial^{\odot}_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{\Xi}^*\boldsymbol{\xi}^x_{\odot}$。

利用近似 $\tilde{\boldsymbol{\Xi}}^* \approx \boldsymbol{\Xi}^*(\boldsymbol{0}) + \delta_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{\Xi}^* \circ \boldsymbol{\xi}^x$，即利用在初始构型 $\boldsymbol{\xi}^x = \boldsymbol{0}$ 中确定的敏感度,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}^{\mathrm{mic}}(y,\boldsymbol{\xi}^x) &\approx \int_0^{\boldsymbol{\xi}^x} \left(\boldsymbol{\Xi}^*(y,\boldsymbol{0}) + \partial^{\odot}_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{\Xi}^*(y,\boldsymbol{0})\boldsymbol{\xi}^x_{\odot}\right)\delta\tilde{\boldsymbol{\xi}}_*\\ &\approx \boldsymbol{\Xi}^*(y,\boldsymbol{0})\boldsymbol{\xi}^x_* + \frac{1}{2}\partial^{\odot}_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{\Xi}^*(y,\boldsymbol{0})\boldsymbol{\xi}^x_{\odot}\otimes\boldsymbol{\xi}^x_*\,.\end{aligned} \tag{B.16}$$

对于关于宏观响应（如这里用 $\boldsymbol{\xi}^x$ 表示）的$\boldsymbol{u}^{\mathrm{mic}}$ 一阶近似，我们考虑

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}^{\mathrm{mic}}(x,y) \approx \boldsymbol{\vartheta}(1,x,y)\,,\quad \boldsymbol{\vartheta}(\tau,x,y) = \tau\hat{\boldsymbol{\vartheta}}(x,y)\,,\quad \tau\in[0,1]\,,\\ \text{where}\quad \hat{\boldsymbol{\vartheta}}(x,y) := \boldsymbol{\Xi}^*(y,\boldsymbol{0})\hat{\boldsymbol{\xi}}^x_*\,.\end{aligned} \tag{B.17}$$

除了利用$\boldsymbol{u}^{\mathrm{mic}}$在（B.8）中得到的 $\tilde{\mathbb{D}}(y, \boldsymbol{e}^x)$ 近似之外，我们还采用

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{I} : (\hat{\boldsymbol{F}}\nabla_y)\boldsymbol{v}^1 \det(\boldsymbol{F}) &\approx \boldsymbol{I} : ((\boldsymbol{I} - \nabla_y \boldsymbol{u}^{\mathrm{mic}})\nabla_y)\boldsymbol{v}^1 \det(\boldsymbol{I} + \nabla_y \boldsymbol{u}^{\mathrm{mic}}) \\
&\approx \boldsymbol{I} : ((\boldsymbol{I} - \nabla_y \boldsymbol{u}^{\mathrm{mic}})\nabla_y)\boldsymbol{v}^1 (1 + \nabla_y \cdot \boldsymbol{u}^{\mathrm{mic}}) \\
&= \boldsymbol{I} : \big(\nabla_y \boldsymbol{v}^1 - (\nabla_y \boldsymbol{u}^{\mathrm{mic}} \nabla_y)\boldsymbol{v}^1 + \nabla_y \boldsymbol{v}^1 (\nabla_y \cdot \boldsymbol{u}^{\mathrm{mic}})\big) \\
&\quad - \boldsymbol{I} : (\nabla_y \boldsymbol{u}^{\mathrm{mic}} \nabla_y)\boldsymbol{v}^1 (\nabla_y \cdot \boldsymbol{u}^{\mathrm{mic}}) \,,
\end{aligned} \tag{B.18}$$

其中最后一项可以忽略。在（B.9）中，需要采用以下近似，其精度截至 $o(|\boldsymbol{\xi}^x|)$ 阶，定义见 Y：

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{F}} &\approx \boldsymbol{I} - \nabla_y \boldsymbol{\vartheta} \,, \\
\boldsymbol{F} &\approx \boldsymbol{I} + \nabla_y \boldsymbol{\vartheta} \,, \\
\boldsymbol{I} : (\hat{\boldsymbol{F}}\nabla_y)\boldsymbol{v}^1 \det(\boldsymbol{F}) &\approx \boldsymbol{I} : \big(\nabla_y \boldsymbol{v}^1 - (\nabla_y \boldsymbol{\vartheta} \nabla_y)\boldsymbol{v}^1 + \nabla_y \boldsymbol{v}^1 (\nabla_y \cdot \boldsymbol{\vartheta})\big) \,, \\
\langle \det(\boldsymbol{F}) \rangle_{Y_F} &\approx \phi_F + \langle \nabla_y \cdot \boldsymbol{\vartheta} \rangle_{Y_F} \,, \\
\tilde{\mathbb{D}}(\cdot, \boldsymbol{\xi}^x) &\approx \mathbb{D} + \big(\mathbb{D}\nabla_y \cdot \boldsymbol{\vartheta} - (\mathbb{D}\nabla_y \boldsymbol{\vartheta})^T - \mathbb{D}\nabla_y \boldsymbol{\vartheta}\big) \,, \\
\delta_{\boldsymbol{\vartheta}} \tilde{\mathbb{D}}(\cdot, \boldsymbol{\xi}^x) \circ \boldsymbol{\vartheta} &\approx \mathbb{D}\nabla_y \cdot \boldsymbol{\vartheta} - (\mathbb{D}\nabla_y \boldsymbol{\vartheta})^T - \mathbb{D}\nabla_y \boldsymbol{\vartheta} \,.
\end{aligned} \tag{B.19}$$

利用这一近似，我们可以重写(B.9)，由此残差 $r_Y(x, \boldsymbol{v}^1) \approx 0$。求 $\delta\boldsymbol{u}^1 \in \mathbf{H}^1_{\#}(Y)$，使得对于给定的宏观响应扰动 $\delta\boldsymbol{\xi}^x = (\delta \boldsymbol{e}^x, \delta p^0)$ 和给定的扰动微位移场 $\boldsymbol{\vartheta}$，

$$\begin{aligned}
&\fint_{Y_S} \mathbb{D}\boldsymbol{e}_y(\tilde{\boldsymbol{\Pi}}^{kl} \delta e^x_{kl} + \delta \boldsymbol{u}^1) : \boldsymbol{e}_y(\boldsymbol{v}^1) \,\mathrm{dV}_y \\
+ &\fint_{Y_S} \big(\mathbb{D}\nabla_y \cdot \boldsymbol{\vartheta} - (\mathbb{D}\nabla_y \boldsymbol{\vartheta})^T - \mathbb{D}\nabla_y \boldsymbol{\vartheta}\big)\, \boldsymbol{e}_y(\tilde{\boldsymbol{\Pi}}^{kl} \delta e^x_{kl} + \delta \boldsymbol{u}^1) : \boldsymbol{e}_y(\boldsymbol{v}^1) \,\mathrm{dV}_y \\
&+ \delta p^0 \fint_{Y_S} \boldsymbol{I} : \big(\nabla_y \boldsymbol{v}^1 - (\nabla_y \boldsymbol{\vartheta} \nabla_y)\boldsymbol{v}^1 + \nabla_y \boldsymbol{v}^1 (\nabla_y \cdot \boldsymbol{\vartheta})\big) \,\mathrm{dV}_y = 0 \,,
\end{aligned} \tag{B.20}$$

对所有试位移 $\boldsymbol{v}^1 \in \mathbf{H}^1_{\#}(Y)$ 均成立。该问题的解可通过对初始构型中计算得到的特征解进行灵敏度分析来近似求得。正如后文将会说明的，由于采用了基于灵敏度分析的近似，因此无需求解 (B.20)。

为此，我们采用在初始构型中定义的局部问题 (B.11)，即针对未变形连续体，这与第 3.5.1 节中的处理方式类似； $\boldsymbol{\chi}^{ij}, \boldsymbol{\chi}^{P} \in \mathbf{H}^1_{\#}(Y_S)$ 满足

$$\begin{aligned} a^s_Y\left(\boldsymbol{\chi}^{ij} + \boldsymbol{\Pi}^{ij},\, \boldsymbol{v}\right) = 0\,, \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{H}^1_{\#}(Y_S)\,, \\ a^s_Y\left(\boldsymbol{\chi}^{P},\, \boldsymbol{v}\right) + b^s_Y\left(1,\, \boldsymbol{v}\right) = 0\,, \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{H}^1_{\#}(Y_S)\,, \end{aligned} \tag{B.21}$$

其中 $\Pi^{ij}_k = y_j \delta_{ik}$ 和

$$\begin{aligned} a^s_Y\left(\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v}\right) &= \fint_{Y_S} [\mathbb{D}\boldsymbol{e}_y(\boldsymbol{u})] : \boldsymbol{e}_y(\boldsymbol{v})\,\mathrm{dV}_y\,, \\ b^s_Y\left(q,\, \boldsymbol{v}\right) &= \fint_{Y_S} q\boldsymbol{I} : \boldsymbol{e}_y(\boldsymbol{v})\,\mathrm{dV}_y = \fint_{Y_S} q\nabla_y \boldsymbol{v}\,\mathrm{dV}_y\,. \end{aligned} \tag{B.22}$$

与未变形构型相关的均匀化系数如下（注意，AA_{IK}结合了 $e^x_K(\delta \boldsymbol{u}^0)$ 和 $e^x_I(\boldsymbol{v}^0)$，$\boldsymbol{C}$结合了 δp^0和 $e^x_I(\boldsymbol{v}^0)$，

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{IK} &= \fint_{Y_S} [\mathbb{D}\boldsymbol{e}_y(\boldsymbol{\Xi}^K)] : \boldsymbol{e}_y(\boldsymbol{\Pi}^I)\,\mathrm{dV}_y = a^s_Y\left(\boldsymbol{\Xi}^K,\, \boldsymbol{\Pi}^I\right)\,, \\ \boldsymbol{C}_I &= \fint_{Y_S} [\mathbb{D}\boldsymbol{e}_y(\boldsymbol{\chi}^P)] : \boldsymbol{e}_y(\boldsymbol{\Pi}^I)\,\mathrm{dV}_y = a^s_Y\left(\boldsymbol{\chi}^P,\, \boldsymbol{\Pi}^I\right)\,, \\ \boldsymbol{B}_I &= \boldsymbol{C}_I + \phi_F \boldsymbol{I}\,. \end{aligned} \tag{B.23}$$

现在我们将进行线性化过程。利用 (B.19)，双尺度（宏观）问题 (B.12) 可变换为以下形式：

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_R} \fint_{Y_S} \mathbb{D}\boldsymbol{e}_y(\tilde{\boldsymbol{\Pi}}^K e^x_K(\delta \boldsymbol{u}^0) + \delta \boldsymbol{u}^1) : \boldsymbol{e}_y(\tilde{\boldsymbol{\Pi}}^I) e^x_K(\boldsymbol{v}^0)\,\mathrm{dV}_{xy} \\ &+ \int_{\Omega_R} \fint_{Y_S} \mathbb{D}_{\boldsymbol{\vartheta}}\boldsymbol{e}_y(\tilde{\boldsymbol{\Pi}}^K e^x_K(\delta \boldsymbol{u}^0) + \delta \boldsymbol{u}^1) : \boldsymbol{e}_y(\tilde{\boldsymbol{\Pi}}^I) e^x_K(\boldsymbol{v}^0)\,\mathrm{dV}_{xy} \\ &\quad - \int_{\Omega_R} \delta p^0 (\phi_F + \langle \nabla_y \cdot \boldsymbol{\vartheta} \rangle_{Y_F}) \nabla_x \cdot \boldsymbol{v}^0\,\mathrm{dV}_x = -R_Z(\boldsymbol{v}^0)\,, \\ &\quad \left(\phi_F + \langle \nabla_y \cdot \boldsymbol{\vartheta} \rangle_{Y_F}\right) \nabla_x \cdot \delta \boldsymbol{u}^0 - \fint_{Y_S} \boldsymbol{I} : \left(\nabla_y \delta \boldsymbol{u}^1\right)\,\mathrm{dV}_y \\ &\quad - \fint_{Y_S} \boldsymbol{I} : \left((\nabla_y \boldsymbol{\vartheta} \nabla_y)\delta \boldsymbol{u}^1 + \nabla_y \delta \boldsymbol{u}^1 (\nabla_y \cdot \boldsymbol{\vartheta})\right)\,\mathrm{dV}_y = 0\,, \end{aligned} \tag{B.24}$$

对于所有 $\boldsymbol{v}^0 \in V_0(\Omega_R)$ 和 $q \in L^2(\Omega_R)$，其中 $\mathrm{ID}_{\boldsymbol{\vartheta}} = \mathrm{ID}\nabla_y \cdot \boldsymbol{\vartheta} - (\mathrm{ID}\nabla_y \boldsymbol{\vartheta})^T - \mathrm{ID}\nabla_y \boldsymbol{\vartheta}$。接下来，我们将 $\delta\boldsymbol{u}^1$ 的分解代入其中。由于微观位移 $\boldsymbol{\vartheta}$ 所产生的扰动，以下表达式成立，

$$\begin{aligned} \delta\boldsymbol{u}^{\mathrm{mic}} &= \tilde{\boldsymbol{\Pi}}^I \delta e_I^x + \delta\boldsymbol{u}^1 = \tilde{\boldsymbol{\Xi}}^* \delta\boldsymbol{\xi}_*^x = (\boldsymbol{\Pi}^I + \partial_{\boldsymbol{\xi}}^* \boldsymbol{\Pi}^I \boldsymbol{\xi}_*^x)\delta e_I^x + \delta\boldsymbol{u}^1 \,, \\ \delta\boldsymbol{u}^1 &= (\boldsymbol{\chi}^I + \delta_{\boldsymbol{\vartheta}}\boldsymbol{\chi}^I \circ \boldsymbol{\vartheta})\delta e_I^x + (\boldsymbol{\chi}^P + \delta_{\boldsymbol{\vartheta}}\boldsymbol{\chi}^P \circ \boldsymbol{\vartheta})\delta p^0 \,, \end{aligned} \tag{B.25}$$

其中，$\delta\boldsymbol{u}^1$的第二个表达式使用 $\boldsymbol{\vartheta} \approx \boldsymbol{\Xi}^*(0)\boldsymbol{\xi}_*$，其中 $\boldsymbol{\Xi}^* := (\boldsymbol{\Xi}^I, \boldsymbol{\chi}^P)$和$\boldsymbol{\xi} = (e_I^x, p^0)$，见（B.15）。请注意，在我们的情形下，$\partial_{\boldsymbol{\xi}}^* \boldsymbol{\Xi}^{I,P} \boldsymbol{\xi}_*^x$关于 $\boldsymbol{\xi}^x = (\boldsymbol{e}^x(\boldsymbol{u}^0)\ p^0)$呈线性表达式。

进一步，我们也将扰动位移 $\boldsymbol{\vartheta} = \boldsymbol{\Xi}^* \boldsymbol{\xi}_*^x$ 表示为如下形式，见（B.19）：

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{ID}}(\cdot, \boldsymbol{\xi}^x) &\approx \mathbb{ID} + \left(\mathbb{ID}\nabla_y \cdot \boldsymbol{\vartheta} - (\mathbb{ID}\nabla_y \boldsymbol{\vartheta})^T - \mathbb{ID}\nabla_y \boldsymbol{\vartheta}\right) \\ &\approx \mathbb{ID} + \delta_{\boldsymbol{\xi}} \tilde{\mathbb{ID}}(\cdot, \boldsymbol{0}) \circ \boldsymbol{\xi}^x \equiv \mathbb{ID} + \partial_{\boldsymbol{\xi}}^* \mathbb{ID} \boldsymbol{\xi}_*^x \,, \end{aligned} \tag{B.26}$$

其中，最后一个表达式是为简洁起见引入的。注意 $\langle \nabla_y \cdot \boldsymbol{\Xi}^* \rangle_{Y_F} \boldsymbol{\xi}_*^x = \langle \nabla_y \cdot \boldsymbol{\Xi}^* \boldsymbol{\xi}_*^x \rangle_{Y_F}$ 24 $\langle \nabla_y \cdot \boldsymbol{\vartheta} \rangle_{Y_F} =$ 。代入（B. ），可得

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_R} \fint_{Y_S} \left[(\mathbb{ID} + \partial_{\boldsymbol{\xi}}^* \mathbb{ID} \boldsymbol{\xi}_*^x)\boldsymbol{e}_y(\boldsymbol{\Xi}^K + \delta_{\boldsymbol{\xi}}^* \boldsymbol{\Xi}^K \boldsymbol{\xi}_*^x)\right] : \boldsymbol{e}_y(\boldsymbol{\Pi}^I + \partial_{\boldsymbol{\xi}}^* \boldsymbol{\Pi}^I \boldsymbol{\xi}_*^x) e_K^x(\delta\boldsymbol{u}^0) e_I^x(\boldsymbol{v}^0)\, \mathrm{dV}_{xy} \\ &\quad + \int_{\Omega_R} \fint_{Y_S} \left[(\mathbb{ID} + \partial_{\boldsymbol{\xi}}^* \mathbb{ID} \boldsymbol{\xi}_*^x)\boldsymbol{e}_y(\boldsymbol{\chi}^P + \partial_{\boldsymbol{\xi}}^* \boldsymbol{\chi}^P \boldsymbol{\xi}_*^x)\right] : \boldsymbol{e}_y(\boldsymbol{\Pi}^I + \partial_{\boldsymbol{\xi}}^* \boldsymbol{\Pi}^I \boldsymbol{\xi}_*^x) \delta p^0 e_I^x(\boldsymbol{v}^0)\, \mathrm{dV}_{xy} \\ &\qquad - \int_{\Omega_R} \delta p^0 \left(\phi_F + \langle \nabla_y \cdot \boldsymbol{\Xi}^* \boldsymbol{\xi}_*^x \rangle_{Y_F}\right) \nabla_x \cdot \boldsymbol{v}^0\, \mathrm{dV}_x = -R_Z(\boldsymbol{v}^0) \,, \end{aligned} \tag{B.27}$$

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega_R} q \left(\phi_F + \langle \nabla_y \cdot \boldsymbol{\Xi}^* \boldsymbol{\xi}_*^x \rangle_{Y_F} \right) \nabla_x \cdot \delta \boldsymbol{u}^0 \, \mathrm{dV}_x \\
&- \int_{\Omega_R} q \fint_{Y_S} \nabla_y \cdot \left(\boldsymbol{\chi}^K + \partial_{\boldsymbol{\xi}}^* \boldsymbol{\chi}^K \boldsymbol{\xi}_*^x \right) e_K^x(\delta \boldsymbol{u}^0) \, \mathrm{dV}_y \, \mathrm{dV}_x \\
&- \int_{\Omega_R} q \fint_{Y_S} \boldsymbol{I} : \left(\nabla_y (\boldsymbol{\Xi}^* \boldsymbol{\xi}_*^x) \nabla_y (\boldsymbol{\chi}^K + \partial_{\boldsymbol{\xi}}^* \boldsymbol{\chi}^K \boldsymbol{\xi}_*^x) \right) e_K^x(\delta \boldsymbol{u}^0) \, \mathrm{dV}_y \, \mathrm{dV}_x \\
&- \int_{\Omega_R} q \fint_{Y_S} \nabla_y \cdot (\boldsymbol{\chi}^K + \partial_{\boldsymbol{\xi}}^* \boldsymbol{\chi}^K \boldsymbol{\xi}_*^x) \nabla_y \cdot (\boldsymbol{\Xi}^* \boldsymbol{\xi}_*^x) e_K^x(\delta \boldsymbol{u}^0) \, \mathrm{dV}_y \, \mathrm{dV}_x \\
&- \int_{\Omega_R} q \fint_{Y_S} \nabla_y \cdot \left(\boldsymbol{\chi}^P + \partial_{\boldsymbol{\xi}}^* \boldsymbol{\chi}^P \boldsymbol{\xi}_*^x \right) \delta p^0 \, \mathrm{dV}_y \, \mathrm{dV}_x \\
&- \int_{\Omega_R} q \fint_{Y_S} \boldsymbol{I} : \left(\nabla_y (\boldsymbol{\Xi}^* \boldsymbol{\xi}_*^x) \nabla_y (\boldsymbol{\chi}^P + \partial_{\boldsymbol{\xi}}^* \boldsymbol{\chi}^P \boldsymbol{\xi}_*^x) \right) \delta p^0 \, \mathrm{dV}_y \, \mathrm{dV}_x \\
&- \int_{\Omega_R} q \fint_{Y_S} \nabla_y \cdot (\boldsymbol{\chi}^P + \partial_{\boldsymbol{\xi}}^* \boldsymbol{\chi}^P \boldsymbol{\xi}_*^x) \nabla_y \cdot (\boldsymbol{\Xi}^* \boldsymbol{\xi}_*^x) \delta p^0 \, \mathrm{dV}_y \, \mathrm{dV}_x = 0 \, .
\end{aligned}
\tag{B.28}
$$

现在需要展示上述线性化宏观问题与公式 (B.14)之间的关系，其中，正如本文主体部分所采用的那样，利用灵敏度分析对受扰动的均质化系数进行近似。为此，我们根据双线性形式 (B.22) 重写(B.27) 和 (B.28)，并忽略相对于宏观“扰动” $\boldsymbol{\xi}_*^x$ 的高阶项。在(B.25) 的语境下，微分 $\delta_{\boldsymbol{\xi}}() \circ \boldsymbol{\xi}^x$ 被简单缩写为“δ”（另见下文的 (B.33)），而 $\Delta \boldsymbol{u}^0 := \delta \boldsymbol{u}^0$ 和 $\Delta p^0 := \delta p^0$ 仅在下文中使用，以避免混淆

方程:

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_R} \left[a_Y^s\left(\boldsymbol{\Xi}^K,\,\boldsymbol{\Pi}^I\right)+\delta a_Y^s\left(\boldsymbol{\Xi}^K,\,\boldsymbol{\Pi}^I\right)\right] e_K^x(\Delta\boldsymbol{u}^0)e_I(\boldsymbol{v}^0)\,\mathrm{dV}_x \\
\int_{\Omega_R} \left[a_Y^s\left(\delta\boldsymbol{\Xi}^K,\,\boldsymbol{\Pi}^I\right)+a_Y^s\left(\boldsymbol{\Xi}^K,\,\delta\boldsymbol{\Pi}^I\right)\right] e_K^x(\Delta\boldsymbol{u}^0)e_I(\boldsymbol{v}^0)\,\mathrm{dV}_x \\
+\int_{\Omega_R} \left[a_Y^s\left(\boldsymbol{\chi}^P,\,\boldsymbol{\Pi}^I\right)+\delta a_Y^s\left(\boldsymbol{\chi}^P,\,\boldsymbol{\Pi}^I\right)\right] \Delta p^0 e_I(\boldsymbol{v}^0)\,\mathrm{dV}_x \\
+\int_{\Omega_R} \left[a_Y^s\left(\delta\boldsymbol{\chi}^P,\,\boldsymbol{\Pi}^I\right)+a_Y^s\left(\boldsymbol{\chi}^P,\,\delta\boldsymbol{\Pi}^I\right)\right] \Delta p^0 e_I(\boldsymbol{v}^0)\,\mathrm{dV}_x \\
-\int_{\Omega_R} \delta p^0(\phi_F+\delta\phi_F)\nabla\cdot\boldsymbol{v}^0\,\mathrm{dV}_x = -R_Z(\boldsymbol{v}^0)\,, \\
\int_{\Omega_R} q(\phi_F+\delta\phi_F)\nabla\cdot\delta\boldsymbol{u}^0\,\mathrm{dV}_x \\
-\int_{\Omega_R} q\left[b_Y^s\left(1,\,\boldsymbol{\chi}^K\right)+b_Y^s\left(1,\,\delta\boldsymbol{\chi}^K\right)+\delta b_Y^s\left(1,\,\boldsymbol{\chi}^K\right)\right] e_K^x(\Delta\boldsymbol{u}^0)\,\mathrm{dV}_x \\
-\int_{\Omega_R} q\left[b_Y^s\left(1,\,\boldsymbol{\chi}^P\right)+b_Y^s\left(1,\,\delta\boldsymbol{\chi}^P\right)+\delta b_Y^s\left(1,\,\boldsymbol{\chi}^P\right)\right] \Delta p^0\,\mathrm{dV}_x = 0\,.
\end{aligned}
\tag{B.29}
$$

双线性形式关于由 $\boldsymbol{\vartheta}$ 引起的扰动的灵敏度（见 (B.17)，回顾多重指标 $ij=I,\,K=kl$）给出

$$
\begin{aligned}
\delta_\tau a_Y^s\left(\boldsymbol{\chi}^I+\boldsymbol{\Pi}^I,\,\boldsymbol{v}\right)+a_Y^s\left(\delta\boldsymbol{\chi}^I+\delta_\tau\boldsymbol{\Pi}^I,\,\boldsymbol{v}\right)=0\,, \\
\delta_\tau a_Y^s\left(\boldsymbol{\chi}^P,\,\boldsymbol{v}\right)+\delta_\tau b_Y^s\left(1,\,\boldsymbol{v}\right)+a_Y^s\left(\delta\boldsymbol{\chi}^P,\,\boldsymbol{v}\right)=0\,,
\end{aligned}
\tag{B.30}
$$

其中，微分 δ_τ 在 (B.17) 的上下文中表示 $\partial/\partial\tau|_{\tau=0}$，

$$
\begin{aligned}
\delta_\tau a_Y^s\left(\boldsymbol{\chi}^I,\,\boldsymbol{v}\right)=\fint_{Y_S}\left(\mathbb{D}\nabla_y\cdot\boldsymbol{\vartheta}-(\mathbb{D}\nabla_y\boldsymbol{\vartheta})^T-\mathbb{D}\nabla_y\boldsymbol{\vartheta}\right)\boldsymbol{e}_y(\boldsymbol{\chi}^I):\boldsymbol{e}_y(\boldsymbol{v})\,\mathrm{dV}_y\,, \\
\delta_\tau b_Y^s\left(1,\,\boldsymbol{v}\right)=\fint_{Y_S}\boldsymbol{I}:\left(-(\nabla_y\boldsymbol{\vartheta}\nabla_y)\boldsymbol{v}+\nabla_y\boldsymbol{v}(\nabla_y\cdot\boldsymbol{\vartheta})\right)\,\mathrm{dV}_y\,,
\end{aligned}
\tag{B.31}
$$

由 (B.30) 和 (B.30)，利用 $\boldsymbol{\Xi}^I=\boldsymbol{\chi}^I+\boldsymbol{\Pi}^I$，可得

$$
\begin{aligned}
a_Y^s\left(\delta\boldsymbol{\Xi}^K,\,\boldsymbol{\Pi}^I\right)&=\delta_\tau a_Y^s\left(\boldsymbol{\Xi}^K,\,\boldsymbol{\chi}^I\right)+a_Y^s\left(\delta\boldsymbol{\Pi}^K,\,\boldsymbol{\Xi}^I\right)\,, \\
a_Y^s\left(\delta\boldsymbol{\chi}^P,\,\boldsymbol{\chi}^K\right)&=-\delta_\tau a_Y^s\left(\boldsymbol{\chi}^P,\,\boldsymbol{\chi}^K\right)-\delta_\tau b_Y^s\left(1,\,\boldsymbol{\chi}^K\right)\,, \\
a_Y^s\left(\delta\boldsymbol{\chi}^P,\,\boldsymbol{\Pi}^I\right)&=-a_Y^s\left(\delta\boldsymbol{\chi}^P,\,\boldsymbol{\chi}^I\right)=\delta_\tau a_Y^s\left(\boldsymbol{\chi}^P,\,\boldsymbol{\chi}^I\right)+\delta_\tau b_Y^s\left(1,\,\boldsymbol{\chi}^I\right)\,, \\
a_Y^s\left(\boldsymbol{\chi}^P,\,\delta\boldsymbol{\chi}^I\right)&=-a_Y^s\left(\boldsymbol{\chi}^P,\,\delta\boldsymbol{\Pi}^I\right)-\delta_\tau a_Y^s\left(\boldsymbol{\chi}^P,\,\boldsymbol{\chi}^I\right)\,.
\end{aligned}
\tag{B.32}
$$

由于 (B.17) 引入了 $\boldsymbol{\vartheta}$，以下恒等式成立，

$$\delta_{\boldsymbol{\xi}}^{*}\boldsymbol{\Xi}\circ\boldsymbol{\xi}_{*}^{x}=\partial_{\boldsymbol{\vartheta}}\boldsymbol{\Xi}\circ\delta\boldsymbol{\vartheta}=\partial_{\boldsymbol{\vartheta}}\boldsymbol{\Xi}\circ\partial_{\boldsymbol{\xi}}^{*}\boldsymbol{\vartheta}\circ\boldsymbol{\xi}_{*}^{x}=(\delta_{\boldsymbol{\vartheta}}\boldsymbol{\Xi}\circ\boldsymbol{\Xi}^{*})\circ\boldsymbol{\xi}_{*}^{x}\ . \tag{B.33}$$

为表示 (B.27) 和 (B.28) 中的 $\delta_{\boldsymbol{\vartheta}}$AA 和 $\delta_{\boldsymbol{\vartheta}}\boldsymbol{B}$，我们汇总相应项，得到最高阶为 $o(|\boldsymbol{\vartheta}|)$ 的表达式。回顾 (B.33)，并利用 (B.32)，由 (B.29) 得到用于有效弹性 AA_{IK} 的

[1]

$$\begin{aligned}\delta_{\boldsymbol{\vartheta}}\mathbb{A}_{IK}&=\delta_{\tau}a_{Y}^{s}\left(\boldsymbol{\Xi}^{K},\,\boldsymbol{\Pi}^{I}\right)+a_{Y}^{s}\left(\delta\boldsymbol{\Xi}^{K},\,\boldsymbol{\Pi}^{I}\right)+a_{Y}^{s}\left(\boldsymbol{\Xi}^{K},\,\delta\boldsymbol{\Pi}^{I}\right)\\&=\delta_{\tau}a_{Y}^{s}\left(\boldsymbol{\Xi}^{K},\,\boldsymbol{\Pi}^{I}\right)+\delta_{\tau}a_{Y}^{s}\left(\boldsymbol{\Xi}^{K},\,\boldsymbol{\chi}^{I}\right)+a_{Y}^{s}\left(\delta\boldsymbol{\Pi}^{K},\,\boldsymbol{\Xi}^{I}\right)+a_{Y}^{s}\left(\boldsymbol{\Xi}^{K},\,\delta\boldsymbol{\Pi}^{I}\right)\\&=\delta_{\tau}a_{Y}^{s}\left(\boldsymbol{\Xi}^{K},\,\boldsymbol{\Xi}^{I}\right)+a_{Y}^{s}\left(\delta\boldsymbol{\Pi}^{K},\,\boldsymbol{\Xi}^{I}\right)+a_{Y}^{s}\left(\boldsymbol{\Xi}^{K},\,\delta\boldsymbol{\Pi}^{I}\right)\ ,\end{aligned} \tag{B.34}$$

对于比奥耦合系数 $\boldsymbol{B}_{I}=\boldsymbol{C}_{I}+\phi_{F}\boldsymbol{I}$，其中

$$\begin{aligned}\delta_{\boldsymbol{\vartheta}}\boldsymbol{C}_{I}&=-\left(\delta_{\tau}a_{Y}^{s}\left(\boldsymbol{\chi}^{P},\,\boldsymbol{\Pi}^{I}\right)+a_{Y}^{s}\left(\delta\boldsymbol{\chi}^{P},\,\boldsymbol{\Pi}^{I}\right)+a_{Y}^{s}\left(\boldsymbol{\chi}^{P},\,\delta\boldsymbol{\Pi}^{I}\right)\right)\\&=-\left(\delta_{\tau}a_{Y}^{s}\left(\boldsymbol{\chi}^{P},\,\boldsymbol{\Pi}^{I}\right)+\delta_{\tau}a_{Y}^{s}\left(\boldsymbol{\chi}^{P},\,\boldsymbol{\chi}^{I}\right)+\delta_{\tau}b_{Y}^{s}\left(1,\,\boldsymbol{\chi}^{I}\right)+a_{Y}^{s}\left(\boldsymbol{\chi}^{P},\,\delta\boldsymbol{\Pi}^{I}\right)\right)\\&=\left(\delta_{\tau}a_{Y}^{s}\left(\boldsymbol{\chi}^{P},\,\boldsymbol{\Xi}^{I}\right)+\delta_{\tau}b_{Y}^{s}\left(1,\,\boldsymbol{\chi}^{I}\right)+a_{Y}^{s}\left(\boldsymbol{\chi}^{P},\,\delta\boldsymbol{\Pi}^{I}\right)\right)\ ,\end{aligned} \tag{B.35}$$

因此，

$$\begin{aligned}\partial_{\boldsymbol{\vartheta}}\boldsymbol{B}_{I}&=\partial_{\boldsymbol{\vartheta}}\boldsymbol{C}_{I}+\partial_{\boldsymbol{\vartheta}}\phi_{F}\boldsymbol{I}_{I}\ ,\\\partial_{\boldsymbol{\vartheta}}\phi_{F}&=\partial_{\boldsymbol{\vartheta}}\left\langle\nabla_{y}\cdot\boldsymbol{\vartheta}\right\rangle_{Y_{F}}=\left\langle\nabla_{y}\cdot\circ\right\rangle_{Y_{F}}\ .\end{aligned} \tag{B.36}$$

由 $(\mathrm{B.29})_{2}$,类推

$$\begin{aligned}\delta_{\boldsymbol{\vartheta}}\boldsymbol{C}_{I}'&=-\delta_{\tau}b_{Y}^{s}\left(1,\,\boldsymbol{\chi}^{I}\right)-b_{Y}^{s}\left(1,\,\delta\boldsymbol{\chi}^{I}\right)\\&=-\delta_{\tau}b_{Y}^{s}\left(1,\,\boldsymbol{\chi}^{I}\right)+a_{Y}^{s}\left(\boldsymbol{\chi}^{P},\,\delta\boldsymbol{\Pi}^{I}\right)+\delta_{\tau}a_{Y}^{s}\left(\boldsymbol{\chi}^{P},\,\boldsymbol{\chi}^{I}\right)\ ,\end{aligned} \tag{B.37}$$

由此得到 $\delta_{\boldsymbol{\vartheta}}\boldsymbol{C}'_{I}=\delta_{\boldsymbol{\vartheta}}\boldsymbol{C}_{I}$，这正如预期。将 $(\mathrm{B.32})_{4}$ 代入最终表达式 (B.35) 即可得到 (B.37)。对于 Biot 压缩率，我们得到

$$\begin{aligned}\delta_{\boldsymbol{\vartheta}}M&=-\delta_{\tau}b_{Y}^{s}\left(1,\,\boldsymbol{\chi}^{P}\right)-b_{Y}^{s}\left(1,\,\delta\boldsymbol{\chi}^{P}\right)\\&=-2\delta_{\tau}b_{Y}^{s}\left(1,\,\boldsymbol{\chi}^{P}\right)-\delta_{\tau}a_{Y}^{s}\left(\boldsymbol{\chi}^{P},\,\boldsymbol{\chi}^{P}\right)\ .\end{aligned} \tag{B.38}$$

利用这些微分，并且已知 $\delta_{\boldsymbol{\vartheta}}(\,) = \partial^*_{\boldsymbol{\xi}}(\,)\boldsymbol{\xi}^x_* = \partial_e(\,)\boldsymbol{e}_x(\boldsymbol{u}^0) + \partial_p(\,)p^0$，可以引入以下取决于实际解的系数

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbb{A}}(\boldsymbol{\xi}^x) &:= \mathbb{A} + \partial_e \mathbb{A}\,\boldsymbol{e}_x(\boldsymbol{u}^0) + \partial_p \mathbb{A} p^0 \,, \\
\overline{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{\xi}^x) &:= \boldsymbol{B} + \partial_e \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{e}_x(\boldsymbol{u}^0) + \partial_p \boldsymbol{B} p^0 \,, \\
\overline{M}(\boldsymbol{\xi}^x) &:= \partial_e M\,\boldsymbol{e}_x(\boldsymbol{u}^0) + \partial_p M p^0 \,,
\end{aligned} \tag{B.39}$$

其中 $\boldsymbol{\xi}^x = \bar{\boldsymbol{\xi}}^x + \delta\boldsymbol{\xi}^x$ 与 $\delta\boldsymbol{\xi}^x = (\boldsymbol{e}_x(\delta\boldsymbol{u}^0)\ \delta p^0)$ 以及 $\bar{\boldsymbol{\xi}}^x = (\boldsymbol{e}_x(\bar{}\boldsymbol{u}^0)\ \bar{p}^0)$。现在，由增量公式 (B.12) 导出的非线性问题具有以下形式：

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_R} \left(\overline{\mathbb{A}}(\boldsymbol{\xi}^x)\boldsymbol{e}_x(\delta\boldsymbol{u}^0) - \overline{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{\xi}^x)\delta p^0\right) : \boldsymbol{e}_x(\boldsymbol{v}^0)\,\mathrm{dV}_x = -R_Z(\boldsymbol{v}^0) \,, \\
\int_{\Omega_R} q\left(\overline{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{\xi}^x) : \boldsymbol{e}_x(\delta\boldsymbol{u}^0) + \overline{M}(\boldsymbol{\xi}^x)\delta p^0\right)\mathrm{dV}_x = 0 \,,
\end{aligned} \tag{B.40}$$

对于所有 $\boldsymbol{v}^0 \in V_0(\Omega_R)$ 和 $q \in L^2(\Omega_R)$。

注释 附录 B.1. 对于在孔隙尺度上引入的非均质孔弹性介质，基于变形构形下的流固耦合问题所建立的弱非线性问题的增量形式（即线性化公式），通过在变形参考构形下进行均匀化，并基于初始构型下的响应对特征响应进行近似，转换为公式 *(B.40)*。我们发现，这种处理使问题实现了一致线性化，其中涉及的均匀化系数是局部宏观响应 $\boldsymbol{\xi}^x$ 的线性函数，可通过灵敏度分析求得，具体说明见附录 *C*。灵敏度分析适用于 *Y*-周期向量场 $\hat{}$ $\boldsymbol{\vartheta} = \vec{\mathcal{V}}$，见 *(B.17)*。使用 *(B.34)–(B.38)* 得到的 $\delta_{\boldsymbol{\vartheta}}\mathrm{AA}$、$\delta_{\boldsymbol{\vartheta}}\boldsymbol{B}$ 和 $\delta_{\boldsymbol{\vartheta}}M$ 的公式，与压电材料“完整问题”中在压电性质为零（即忽略 g_{ikl}）时得到的公式 *(C.6)–(C.8)* 等价，其中 $\boldsymbol{\omega}^P = -\boldsymbol{\chi}^P$。

附录 C。压电孔弹性系数的灵敏度分析

均匀化系数的灵敏度分析基于形状灵敏度中所谓的“设计速度法”，该方法在结构优化中广为人知，[13, 15, 14]。材料点的“通量”

$y \in Y$ 由可微的 Y-周期向量场 $\vec{\mathcal{V}}(y)$ 表示，使得 $z_i(y,\tau) = y_i + \tau\mathcal{V}_i(y)$, $y \in Y$, $i = 1,2$，其中 τ是“类时间”变量，用于描述 $y \in Y$的扰动位置。我们采用以下导数概念： $\delta(\cdot)$ 是全（材料）导数， $\delta_\tau(\cdot)$ 是关于 τ的偏（局部）导数。这些导数是沿 $\vec{\mathcal{V}}(y)$, $y \in Y$方向计算的方向导数。

形状灵敏度的初步结果

我们将使用形状灵敏度分析的区域方法中的一些特定结果，该方法依赖于对流速度场 $\mathcal{V}$。辅助结果。利用（37），

$$\delta_\tau|Y_d| = \int_{Y_d} \nabla_y \cdot \vec{\mathcal{V}} \,\mathrm{dV}_y = \int_{\partial Y_d} \vec{\mathcal{V}} \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{dV}_y \,, \quad \delta_\tau\phi_f = |Y|^{-1}(\delta_\tau|Y_c| - \phi_f\delta_\tau|Y|) \,,$$
$$\delta_\tau \fint_{\Gamma_f} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}^{[f]} \,\mathrm{dS}_y = -\delta_\tau \fint_{Y_m} \nabla_y \cdot \boldsymbol{v} \,\mathrm{dV}_y = \fint_{Y_m} \partial_i^y \mathcal{V}_k \partial_k^y v_i \,\mathrm{dV}_y$$
$$- \fint_{Y_m} \nabla_y \cdot \boldsymbol{v} \nabla_y \cdot \vec{\mathcal{V}} \,\mathrm{dV}_y + |Y|^{-1}\delta_\tau|Y| \fint_{Y_m} \nabla_y \cdot \boldsymbol{v} \,\mathrm{dV}_y \,. \tag{C.1}$$

注意，当 $\vec{\mathcal{V}}$ 为 Y-周期时， $\delta_\tau|Y| = 0$。

对于局部问题中涉及的双线性形式，以下灵敏度表达式成立：

$$\delta_\tau a_Y^{m*}(\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v}) = \fint_{Y_m \cup Y_*} D_{irks} \left(\delta_{rj}\delta_{sl}\nabla_y \cdot \vec{\mathcal{V}} - \delta_{jr}\partial_s^y \mathcal{V}_l - \delta_{ls}\partial_r^y \mathcal{V}_j\right) e_{kl}^y(\boldsymbol{u}) e_{ij}^y(\boldsymbol{v}) \,\mathrm{dV}_y$$
$$- a_Y^{m*}(\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v}) \fint_Y \nabla_y \cdot \vec{\mathcal{V}} \,\mathrm{dV}_y \,, \tag{C.2}$$

$$\delta_\tau d_Y^m(\varphi,\, \psi) = \fint_{Y_m} d_{rs} \left(\delta_{ri}\delta_{sk}\nabla_y \cdot \vec{\mathcal{V}} - \delta_{ks}\partial_r^y \mathcal{V}_i - \delta_{ir}\partial_s^y \mathcal{V}_k\right) \partial_k^y\varphi \partial_i^y\psi \,\mathrm{dV}_y$$
$$- d_Y^m(\varphi,\, \psi) \fint_Y \nabla_y \cdot \vec{\mathcal{V}} \,\mathrm{dV}_y \,, \tag{C.3}$$

$$\delta_\tau g_Y^m\left(\boldsymbol{u},\,\psi\right)=\fint_{Y_m} g_{jks}\left(\delta_{ij}\delta_{sl}\nabla_y\cdot\vec{\mathcal{V}}-\delta_{ij}\partial_s^y\mathcal{V}_l-\delta_{sl}\partial_j^y\mathcal{V}_i\right)e_{kl}^y(\boldsymbol{u})\partial_i^y\psi\,\mathrm{dV}_y \\ -g_Y^m\left(\boldsymbol{u},\,\psi\right)\fint_Y\nabla_y\cdot\vec{\mathcal{V}}\,\mathrm{dV}_y\,, \tag{C.4}$$

我们将使用以下记号:

$$\boldsymbol{\Xi}^{ij}=\boldsymbol{\omega}^{ij}+\boldsymbol{\Pi}^{ij}\,,\ \text{so that}\ \delta\boldsymbol{\Xi}^{ij}=\delta\boldsymbol{\omega}^{ij}+\delta_\tau\boldsymbol{\Pi}^{ij}\,. \tag{C.5}$$

微问题的求导

利用局部特征问题 (33)–(36) 和 (25) 的恒等式，以及上述推导出的对应求导形式，可以推导出 $\delta\mathrm{IH}\circ\vec{\mathcal{V}}$ 所有均匀化系数 (43) 的灵敏度表达式；注意，[30] 中讨论的孔弹性系数的灵敏度表达式不能使用，因为在我们的模型中，所有这些系数都受到骨架压电性的修正。

弹性。

$$\delta A_{klij}^H=\delta_\tau a_Y^{m*}\left(\boldsymbol{\Xi}^{ij},\,\boldsymbol{\Xi}^{kl}\right)-\delta_\tau d_Y^m\left(\hat{\eta}^{kl},\,\hat{\eta}^{ij}\right)+a_Y^{m*}\left(\boldsymbol{\Xi}^{ij},\,\delta_\tau\boldsymbol{\Pi}^{kl}\right)+a_Y^{m*}\left(\delta_\tau\boldsymbol{\Pi}^{ij},\,\boldsymbol{\Xi}^{kl}\right) \\ -\left(\delta_\tau g_Y^m\left(\boldsymbol{\Xi}^{kl},\,\hat{\eta}^{ij}\right)+\delta_\tau g_Y^m\left(\boldsymbol{\Xi}^{ij},\,\hat{\eta}^{kl}\right)+g_Y^m\left(\delta_\tau\boldsymbol{\Pi}^{kl},\,\hat{\eta}^{ij}\right)+g_Y^m\left(\delta_\tau\boldsymbol{\Pi}^{ij},\,\hat{\eta}^{kl}\right)\right), \tag{C.6}$$

比奥模量。

$$\delta M^H=\gamma\delta_\tau\phi_f-2\delta_\tau\fint_{\Gamma_f}\boldsymbol{\omega}^P\cdot\boldsymbol{n}^{[f]}\,\mathrm{dS}_y \\ +\delta_\tau d_Y^m\left(\hat{\eta}^P,\,\hat{\eta}^P\right)+2\delta_\tau g_Y^m\left(\boldsymbol{\omega}^P,\,\hat{\eta}^P\right)-\delta_\tau a_Y^{m*}\left(\boldsymbol{\omega}^P,\,\boldsymbol{\omega}^P\right)\,. \tag{C.7}$$

比奥耦合系数。

$$\delta B_{ij}^H=\delta_\tau\phi_f\delta_{ij}-\delta_\tau\fint_{Y_m}\nabla_y\cdot\boldsymbol{\omega}^{ij}\,\mathrm{dV}_y+a_Y^{m*}\left(\boldsymbol{\omega}^P,\,\delta_\tau\boldsymbol{\Pi}^{ij}\right)+\delta_\tau a_Y^{m*}\left(\boldsymbol{\omega}^P,\,\boldsymbol{\Xi}^{ij}\right) \\ -\left(\delta_\tau g_Y^m\left(\boldsymbol{\omega}^P,\,\hat{\eta}^{ij}\right)+\delta_\tau g_Y^m\left(\boldsymbol{\Xi}^{ij},\,\hat{\eta}^P\right)+g_Y^m\left(\delta_\tau\boldsymbol{\Pi}^{ij},\,\hat{\eta}^P\right)+\delta_\tau d_Y^m\left(\hat{\eta}^P,\,\hat{\eta}^{ij}\right)\right)\,. \tag{C.8}$$

应力-电压耦合系数。

$$\delta H_{ij}^\alpha=a_Y^{m*}\left(\hat{\boldsymbol{\omega}}^k,\,\delta_\tau\boldsymbol{\Pi}^{ij}\right)-g_Y^m\left(\delta_\tau\boldsymbol{\Pi}^{ij},\,\hat{\varphi}^\alpha\right)-\delta_\tau g_Y^m\left(\hat{\boldsymbol{\omega}}^\alpha,\,\hat{\eta}^{ij}\right)-\delta_\tau d_Y^m\left(\hat{\varphi}^\alpha,\,\hat{\eta}^{ij}\right) \\ +\delta_\tau a_Y^{m*}\left(\hat{\boldsymbol{\omega}}^\alpha,\,\boldsymbol{\omega}^{ij}+\boldsymbol{\Pi}^{ij}\right)-\delta_\tau g_Y^m\left(\boldsymbol{\omega}^{ij}+\boldsymbol{\Pi}^{ij},\,\hat{\varphi}^\alpha\right)\,. \tag{C.9}$$

压力-电压耦合系数。

$$\begin{aligned}\delta Z^{\alpha} = {} & \delta_{\tau} g_Y^m \left(\boldsymbol{\omega}^P,\, \hat{\varphi}^{\alpha}\right) - \delta_{\tau} a_Y^{m*} \left(\hat{\boldsymbol{\omega}}^k,\, \boldsymbol{\omega}^P\right) \\ & \delta_{\tau} g_Y^m \left(\hat{\boldsymbol{\omega}}^{\alpha},\, \hat{\eta}^P\right) + \delta_{\tau} d_Y^m \left(\hat{\varphi}^{\alpha},\, \hat{\eta}^P\right) - \delta_{\tau} \fint_{\Gamma_f} \hat{\boldsymbol{\omega}}^{\alpha} \cdot \boldsymbol{n}^{[f]} \,\mathrm{dS}_y \,. \end{aligned} \tag{C.10}$$

$$\begin{aligned}\delta K_{ij} = {} & \fint_{Y_c} \left(w_i^j + w_j^i - \nabla_y \boldsymbol{w}^i : \nabla_y \boldsymbol{w}^j + \pi^i \nabla_y \cdot \boldsymbol{w}^j + \pi^j \nabla_y \cdot \boldsymbol{w}^i\right) \nabla_y \cdot \vec{\mathcal{V}} \,\mathrm{dV}_y \\ & - \fint_Y \nabla_y \cdot \vec{\mathcal{V}} \,\mathrm{dV}_y \fint_{Y_c} \nabla_y \boldsymbol{w}^i : \nabla_y \boldsymbol{w}^j \,\mathrm{dV}_y \\ & + \fint_{Y_c} \left(\partial_l^y \mathcal{V}_r \partial_r^y w_k^i \partial_l^y w_k^j + \partial_l^y \mathcal{V}_r \partial_r^y w_k^j \partial_l^y w_k^i - \pi^i \partial_k^y \mathcal{V}_r \partial_r^y w_k^j - \pi^j \partial_k^y \mathcal{V}_r \partial_r^y w_k^i\right) \mathrm{dV}_y \,. \end{aligned} \tag{C.11}$$

尽管形式上 δK_{ij} 取决于 $\mathcal{V}$，但可以在 Y_c 的内部任意构造该场，而不会对 δK_{ij}产生任何影响。

请注意，式（C.7）和（C.10）中边界积分的灵敏度根据式（C.1）进行评估。

附录 D。一维均质化超材料模型示例

利用一维模型，我们可以说明一种基于均质化压电孔弹性介质半线性扩展的建模方法，该介质可由电势波控制。在此，我们仅考虑影响流动的非线性，以证明渗透率对变形构形的依赖性对于捕捉蠕动驱动流是基础性的。

在后续章节推导的三维模型中施加适当的对称边界条件，可得到宏观均匀介质的简化一维模型，其中涉及位移 $u = u_1$、流体渗流 $w = w_1$、应变 $e = e_{11} = u'$ 和电势 φ，它们是 (x, t) 的函数。我们考虑由区间 $X =]x_-, x_+[$ 表示的一维连续体；将空间导数记为 $\partial_x() \equiv ()'$，

$$\begin{aligned} e \equiv e_{11} \,, \quad e_{ij} = 0 \quad \text{for } i, j \neq 1 \,, \\ \nabla p = (p', 0, 0) \,, \quad \text{and } \nabla \varphi = (\varphi', 0, 0) \,, \\ \boldsymbol{u} = (u, 0, 0) \,, \quad \boldsymbol{w} = (w, 0, 0) \,. \end{aligned} \tag{D.1}$$

由于本文忽略了惯性效应，因此只需要静态渗透率 K 。这样，我们避免了动态达西流模型中涉及动态渗透率的卷积积分。此外，以一种简单的方式，这一准静态约束使得由以下方程表示的均匀化模型得以简化，

$$\begin{aligned} -\sigma' &= f \ , \ \text{where } \sigma = Ae(u) - pB + H\varphi \ , \\ M\dot{p} + w' + Be(\dot{u}) &= Z\dot{\varphi} \ , \ \text{where } w = -\tilde{K}p' \ . \end{aligned} \tag{D.2}$$

上方的“点”表示时间导数。根据扩展孔弹性定律，应力 σ 由压力 p 和势 φ 给出，其中涉及系数 A, B和 H。此外，我们忽略体力 f。渗透率取决于根据线性展开公式得到的响应，

$$\tilde{K}(e,p,\varphi) = K_0 + \partial_e K_0 e + \partial_p K_0 p + \partial_\varphi K_0 \varphi \ , \tag{D.3}$$

该响应可通过对微观结构响应进行灵敏度分析获得； $\partial_p K_0$ 是 K_0 关于压力的导数，类似地，关于 e 和 φ 的导数分别记为 $\partial_e K_0$ 和 $\partial_\varphi K_0$。对于其他系数，也可以类似地考虑此类展开。质量守恒涉及均匀化系数 M, B 和 Z。

定义

$$\begin{aligned} C = M + BA^{-1}B \ , \quad F = Z + BA^{-1}H \ , \\ K_p = \partial_p K_0 + \partial_e K_0 A^{-1} B \ , \quad K_\varphi = \partial_\varphi K_0 - \partial_e K_0 A^{-1} H \ . \end{aligned} \tag{D.4}$$

当不考虑体力和惯性效应时，因此，(D.2) 中的 $f = 0_1$, 即 $\bar{\sigma}' = 0$, 一维连续体中的应力 $\sigma(x, t) = \bar{\sigma}(t)$。可从质量守恒方程中消去应变

$$e = A^{-1}(Bp - H\varphi + \bar{\sigma}) \ . \tag{D.5}$$

˜因此，可以将渗透率 K 及˜其空间导数 K' 的展开式仅用 p、 $\bar{\sigma}$ 和 φ 表示，

$$\tilde{K} = K_0 + \partial_e K_0 A^{-1}\bar{\sigma} + K_p p + K_\varphi \varphi \ , \quad \tilde{K}' = K_p p' + K_\varphi \varphi' \ , \tag{D.6}$$

注意 $\bar{\sigma}' = 0$。利用Darcy定律，可从 (D.2)_2, 得到线性流动模型和非线性流动模型。

$$\begin{aligned} C\dot{p} - K_0 p'' &= F\dot{\varphi} \ , \\ C\dot{p} - (\tilde{K}p'' + \tilde{K}'p') &= F\dot{\varphi} \ , \end{aligned} \tag{D.7}$$

˜ ˜其中，非线性源于 K 和 K' 对 p的依赖，这一点可由（D.6）˜ ˜得出。将 K 和 K' 代入非线性流动模型（D.7）$_2$，并使用（D.6），可得

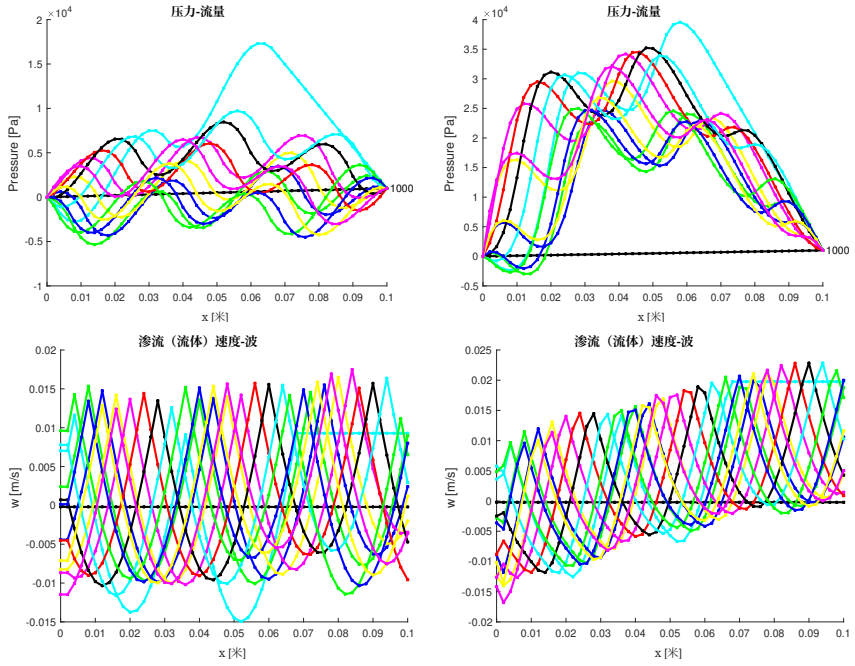
$$C\dot{p} - K_0 p'' - (K_p p' + K_\varphi \varphi')p' - (\partial_e K_0 A^{-1}\bar{\sigma} + K_p p + K_\varphi \varphi)p'' = F\dot{\varphi}\ . \quad \text{(D.8)}$$

这说明了“依赖于变形的˜均匀化系数”所导致的非线性是如何产生的。我们将对所有孔弹性系数应用展开式 K(e、 p、 φ)，详见下文第 3 节。数值结果证实，必须考虑这种非线性，才能模拟泵送效应，使流体能够逆着压力梯度流动。图 D.19 和 D.20 通过一个数值示例支持了这一结论：给定压力为 p(x−、 t) $= 0$ 和 p(x+、 t) $= \bar{p} = 0.1$ 千帕，控制势为 $\varphi = \bar{\varphi}_0|\sin($ $\omega t - kx)|$，电压为 $\bar{\varphi}_0 = -100$千伏， $c = \omega/k$ =0.8 米/秒。图 D.19 展示了方程 (D.8) 在线性和非线性情形下的解，分别以压力 p(x、 t) 和渗流 w(x、 t) 表示。图 D.20 描绘了累积通量 Q_+(t)（在右端），其在端点 x_- 和 x_+ 处的表达式为时间 $t > 0$

$$Q_\pm(t) = \pm \int_0^t w(x_\pm, \tau)\, \mathrm{d}\tau\ , \quad \text{(D.9)}$$

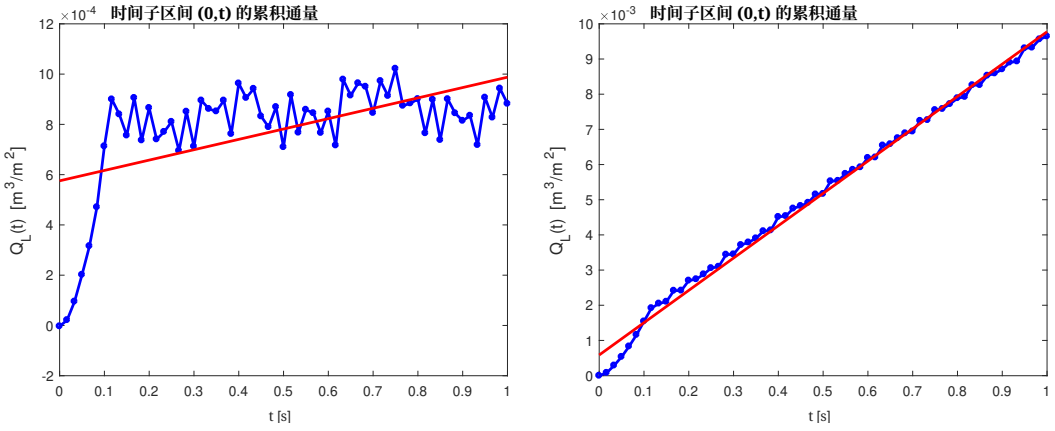
注意到，在时间 $t > t_0$内， Q_+(t) $\approx Q_-$(t)，由此 t_0 已“足够大”，可以抑制初始条件的影响。很容易看出，在 线性情形下， Q(t)围绕一个常数振荡，(D.7)$_1$, 表明输运消失；而在非线性情形下，(D.8)， Q(t) 显示出线性平均增长，因此产生了泵送效应。

[1] Allaire,G., 1992。多孔介质中非定常 Stokes 方程的均匀化，载于：《偏微分方程进展：变分法及其应用》。*Pitman* 数学研究笔记丛书第 296 卷，第 109–123 页。[2] Ayuso, G.M., Friswell,M.I., Adhikari, S., Khodaparast,H.H., Berger, H., 2017。多孔压电材料的均匀化。IntJ SolidsStruct 113-114，218–229。doi：10.1016/j.ijsolstr.2017.03.003。[3] Brown, D.,Popov, P.,Efendiev, Y., 2014。流体-结构相互作用的有效方程及其在孔弹性中的应用。Appl Anal 93，771–790。doi：10.1080/00036811.2013.839780。



线性　　非线性

图 D.19：不同时间层（时间层特定颜色）下压力 $p(\cdot, t)$ 和渗流 $w(\cdot, t)$ 的空间分布：线性（左）和非线- 性（右）模型。



线性　　非线性的

图 D.20：线性模型和非线性模型的累积通量 $Q_+(t)$ $[\mathrm{m}^3/\mathrm{m}^2]$ 。回归直线显示了泵送能力。

[4] Carew, E.O., Pedley, T.J., 1997。蠕动泵送的主动膜模型：第一部分——无限管中的周期性激活波。J Biomech Eng 119, 66–76。doi:10.1115/1.2796066.[5] Chen, Y., Kadic, M., Wegener, M., 2021。支持各向同性声学活动性和各向同性手性声子的手性三斜超材料晶体。Proc R Soc A doi:10.1098/rspa.2020.0764.[6] Chen, Z., Lyons, S., Qin, G., 2001。通过均匀化推导 Forchheimer 定律。Transport Porous Med 44, 325–335。doi:10.1023/A:1010749114251.[7] Cimrman, R., Lukeˇs, V., Rohan, E., 2019。使用 Sfepy 在 Python 中进行多尺度有限元计算。Lect Notes Pure Appl 45, 18971921。doi:10.1007/s10444-019-09666-0.[8] Cioranescu, D., Damlamian, A., Griso, G., 2008。均匀化中的周期展开法。Siam J Math Anal 40, 1585–1620。doi:10.1137/080713148.[9] Cioranescu, D., Donato, P., 1999。均匀化导论。Oxford Lect Ser Math Appl 第 17 卷，牛津大学出版社，牛津。[10] Clopeau, T., Ferr´ın, J., Gilbert, R., Mikeli´c, A., 2001。海床声学性质的均匀化，第二部分。Math Comput Model 33, 821–841。doi:10.1016/S0895-7177(00)00283-1.[11] Collis, J., Brown, D., Hubbard, M., O'Dea, R., 2017。控制主动孔弹性介质的有效方程。Proc R Soc A 473。doi:10.1098/rspa.2016.0755.[12] Fung, Y.C., Yih, C.S., 1968。蠕动输运。J Appl Mech 35, 669–675。doi:10.1115/1.3601290.[13] Haslinger, J., M¨akinen, R.A.E., 2003。形状优化导论。Adv Des Control doi:10.1137/1.9780898718690.[14] Haslinger, J., Neittaanmaki, P., 1988。最优形状设计的有限元近似。J. Wiley，奇切斯特。

[15] Haug, E.J., Choi, K., Komkov, V., 1986。结构系统设计灵敏度分析。Academic Press，奥兰多。[16] Herrera-Valencia, E.E., Rey, A.D., 2014。黏弹性流体中挠电膜的驱动及其在外毛细胞中的应用。Philos T R Soc A 372, 20130369。doi:10.1098/rsta.2013.0369.[17] Hornung, U., 1997。均匀化与多孔介质。Springer，柏林。[18]Iyer, S., Venkatesh, T., 2014。具有各向异性组分的（3-0、3-1）颗粒型、纤维型和多孔压电复合材料的机电响应：基于均匀化方法的模型。Int J Solids Struct 51, 1221 – 1234。doi:10.1016/j.ijsolstr.2013.12.008.[19] Koutsawa, Y., Belouettar, S., Makradi, A., Nasser, H., 2010。利用微观力学微分方案和高阶泰勒级数计算有效性能的灵敏度：压电聚合物复合材料的应用。Mech Res Commun 37, 489–494。doi:10.1016/j.mechrescom.2010.06.001.[20] Lukeˇs, V., Rohan, E., 2022。大变形流体饱和多孔结构的均匀化。Comput Math Appl 110, 40–63。doi:10.1016/j.camwa.2022.01.036.[21] Lukeˇs, V., Rohan, E., 2024。Sfepy：压电多孔介质中蠕动流的均匀化。Mendel Data。doi:10.17632/dsysgwrp3v.2.[22] Maiti, S., Misra, J.C., 2011。多孔通道中的流体蠕动流：与病理状态下导管内胆汁流动相关的研究。Int J Eng Sci 49, 950–966。doi:10.1016/j.ijengsci.2011.05.006.[23] Mawassy, N., Reda, H., Ganghoffer, J., Eremeyev, V., Lakiss, H., 2021。压电复合材料均匀化的变分方法：面向压电和挠电等效介质。Int J Eng Sci 158, 103410。doi:10.1016/j.ijengsci.2020.103410.[24]Medeiros, R., Rodr´ıguez-Ramos, R., Guinovart-D´ıaz, R., Bravo-Castillero, J., Otero, J., Tita, V., 2015。主动纤维复合压电复合材料的数值与解析分析。J Intell Mater Syst Struct 26, 101–118。doi:10.1177/1045389X14521881。

[25] Miara, B., Rohan, E., Zidi, M., Labat, B., 2005. 用于骨再生设计的压电材料——均质化方法。固体力学与物理学杂志 53, 2529–2556. doi:10.1016/j.jmps.2005.05.006.[26]Mikelic, A., Wheeler, M., 2012. 关于含有黏性流体的可变形多孔介质与弹性体之间的界面定律。数学模型与应用科学方法 22, 1–32. doi:10.1142/S0218202512500315.[27] Miller, L., Penta, R., 2021. 非线性孔隙弹性复合材料的均质化平衡方程。应用科学 11. doi:10.3390/app11146611.[28] Nelli Silva, E.C., Ono Fonseca, J.S., Kikuchi, N., 1998. 周期性压电复合材料的优化设计。《计算机在应用力学与工程中的方法》159, 49–77. doi:10.1016/S0045-7825(98)80103-5.[29] Pozrikidis, C., 1987. 蠕动流研究。流体力学杂志 180, 515–527. doi:10.1017/S0022112087001939.[30] Rohan, E., Lukeˇs, V., 2015. 运用均匀化和灵敏度分析概念对变形流体饱和多孔介质中的非线性现象进行建模。应用数学与计算 267, 583–595. doi:10.1016/j.amc.2015.01.054.[31] Rohan, E., Lukeˇs, V., 2018. 流体饱和压电多孔介质的均匀化。Int J Solids Struct 147, 110–125. doi:10.1016/j.ijsolstr.2018.05.017.[32] Rohan, E., Miara, B., 2006. 用于压电生物材料设计的微观结构均匀化与形状灵敏度。Mech Adv Mater Struc 13, 473–485. doi:10.1080/15376490600862848.[33] Rohan, E., Naili, S., 2020. 黏性流体灌注多孔介质声学中流固相互作用的均匀化。应用数学与物理学杂志 71, 137–164. doi:10.1007/s00033-020-01361-1.[34] Sanchez-Palencia, E., 1980. 非均质介质与振动理论。物理学讲义第127卷，Springer，柏林。[35] Sandstr¨om, C., Larsson, F., Runesson, K., 2016. 多孔材料中耦合流动与变形的均匀化。计算方法与应用数学 308, 535–551. doi:10.1016/j.cma.2016.05.021.

[36] Sikavitsas, V.I., Temenoff,J.S.,Mikos,A.G., 2001. 生物材料与骨力学转导。生物材料 22, 2581–2593。doi:10.1016/S0142-9612(01)00002-3.
[37] Telega, J.,1991.压电性与均匀化。生物力学中的应用。连续介质模型和离散系统 2, 220–229。[38] Telega,J.,Wojnar,R., 2000. 电解质通过多孔压电-电介质的流动：宏观方程。C R Acad Sci Ser IIb: MecPhysAstron328, 225–230。doi:10.1016/S1287-4620(00)00121-6.
[39] Viano, J., Ribeiro, C., Figueiredo,J.,Rodr´ıguez-Ar´os, A., 2016. 压电杆的高阶模型：渐近方法。Int J Solids Struct 81, 294 – 310。doi: 10.1016/j.ijsolstr.2015.12.005.[40]Wiesmann, H.P., Hartig, M., Stratmann, U., Meyer,U.,Joos,U., 2001. 电刺激影响体外成骨细胞样细胞的矿物质形成。BBA-MolCell Res1538, 28–37。doi:10.1016/s0167-4889(00)00135-x.[41] Yvonnet,J.,Chen,X.,Sharma, P., 2020.由非均质压电性引起的表观挠曲电性。J ApplMech 87。doi:10.1115/1.4047981。111003。