arXiv:2304.05410v1 [quant-ph] 11 Apr 2023

量子计算机上的集成流体模拟

Sauro Succi*[1]、Wael Itani†[2]、Katepalli R. Sreenivasan‡[2,3,4]和 Ren´e Steijl§[5]

[1]意大利理工学院基金会 生命纳米神经科学中心，罗马第一大学，Viale Regina Elena 291, 00161 罗马，意大利[2]纽约大学坦登工程学院，布鲁克林，纽约州纽约市 11201，美国[3]纽约大学库朗数学科学研究所，纽约州纽约市 10012，美国[4]纽约大学物理系，纽约州纽约市 10003，美国[5]格拉斯哥大学詹姆斯·瓦特工程学院，G12 8QQ 格拉斯哥，英国

2023年4月13日

摘要

我们探讨在量子计算机上对流体流动进行系综模拟的可行性。其基本思路是为流场构型的概率分布建立一个泛函李乌维尔方程，并认识到，由于该方程具有线性特征，原则上它比流体运动方程更适合量子计算。经过适当的边缘化及相应的闭合后，我们发现刘维尔方法需要数百个逻辑量子比特，因此亟须大力推进当前的噪声校正与缓解技术。

1 引言

现代科学和社会中的大多数问题都极其复杂，对我们最先进的理论和计算方法构成了严峻挑战。举例来说，即使是运算能力高达百亿亿次运算（每秒一百万万亿次浮点运算）的最强大超级计算机，在基于流体运动方程的直接模拟来预测行星尺度的天气这一任务面前也显得力不从心 [1]。此外，这类问题及类似问题通常存在各种不确定性来源，包括初始数据以及影响求解的其他参数。因此，每个个例研究都需要进行多次模拟，以积累足够的统计信息（系综模拟），这进一步加剧了对计算能力的需求。

鉴于电子计算机正面临极其严格的能耗限制，人们不断寻求替代性的模拟策略。过去十年间，为开发量子计算机，人们投入了巨大努力：这类硬件设备能够利用量子系统同时处于多种状态的能力（量子纠缠）。其直接优势在于，量子系统原则上可以执行大量并行量子计算，而经典计算机只能处理二进制状态（比特）。近来，几乎每天都能听到量子计算领域取得突破的消息。然而，抛开炒作 [2], ，一个事实依然存在：要将量子计算的巨大潜力转化为科学研究的实用工具，

*sauro.succi@gmail.com
†itani@nyu.edu
‡katepalli.sreenivasan@nyu.edu§rene.steijl@glasgow.ac.uk

仍然极具挑战。原因有很多，但简而言之，量子纠缠十分脆弱，在环境噪声的影响下往往很快瓦解，而在任何适宜的温度下都极难避免这种噪声——这类问题被称为“退相干”。尽管存在这些重大障碍，仍值得探讨量子计算机可能为流体流动的系综模拟带来哪些助益。

2 系综模拟

近年来，得益于大型超级计算机的普及，系综模拟日益受到关注。其核心思想是通过运行一系列具有不同初始条件和/或参数实现的模拟，对众多不确定性来源进行统计分析，例如天气预报中的不确定性 [3, 1]。

为了说明这一思想，我们考虑一组非线性偏微分方程，并将其离散到网格上，例如包含 G 个网格点。令 $\vec{u}(t)$表示离散化后的未知量集合，例如流体流动的三维速度场；这些未知量满足一组 $O(G)$一阶常微分方程，其形式为（广义）朗之万方程：

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = f(\vec{u}; \vec{\lambda}), \tag{1}$$

初始条件为 $\vec{u}(0) = \vec{u}_0$。上述公式中，λ 表示一组受多种不确定性来源影响的参数，因此其作用类似于系统中的“噪声”。系综模拟通过改变初始条件和/或扰动系统参数，生成解的统计数据。从形式上说，这相当于为解生成概率分布函数（PDF） $\vec{u}(x,\ t)$，其定义如下：

$$p(\vec{u}, t)|\delta\vec{u}| = \frac{\delta t}{T}, \tag{2}$$

其中，δt 表示一组轨迹在相空间体积 $|\delta\vec{u}|$中所经历的时间，这些轨迹覆盖时间区间 $[0 \leq t \leq T]$。生成这些轨迹的计算需求极高，因为按照设计，每次单独的模拟都会将最先进的计算资源推至极限 [3, 4]。

量子计算有望在这些模拟中的每一项上实现指数级加速。然而，除了所有影响量子计算的标准问题之外，还有两个额外问题阻碍着这一计划：量子力学是线性且幺正的，而流体的物理规律既非线性也非幺正即使明确守恒能量，流体模型也不会保持范数，因此是非幺正的。 [1]。

目前正在探索多种方法来解决这些问题，采用的策略各不相同，其中一些会采用流体方程的 Carleman线性化 [5, 6, 7], ，另一些则利用非线性量子 ODE 求解器 [9]。在量子计算机的计算流体动力学应用中，混合量子/经典形式是处理流体动力学控制方程非线性的最常用方法，它通过在算法的经典部分中考虑这一点来有效处理非线性 [9, 10, 12], 。然而，所有这些方法都着眼于运动动力学方程的求解，并未关注系综模拟。

在这篇简短的说明中，我们概述一种潜在策略，它一开始就具备两大优势。首先，从构造上说，它能捕捉系统动力学（统计动力学）所需的全部统计信息。其次，它不依赖对动力学方程进行任何线性化，而是直接从相应概率分布函数（PDF）固有的线性表述出发。

从牛顿动力学过渡到统计动力学，是统计物理学中的一个标准课题，称为经典 N 体力学的刘维尔表述。这一形式体系优雅而实用，有助于进行极具价值的近似；这些近似大多针对单体有效动力学方程，其中最具代表性的例子是玻尔兹曼方程和福克－普朗克方程。

遗憾的是，至少在经典计算机上，处理刘维尔方程完全不可行，因为 N 体分布函数存在于一个 $O(N)$ 维空间中，其中 N的数量级与动力学模拟中的网格点数量相当，因此对于当前的超级计算机模拟而言，很容易达到数十亿甚至更多。

这看起来像是“药不对症反伤身”的情况，因此值得探究量子计算可能如何帮助缓解这一难题。

[1]我们对无黏流体进行抽象，这些流体尽管如此仍是一种（有用的）理想化模型

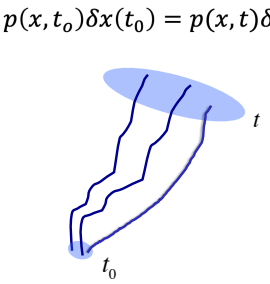


图1：刘维尔方程的几何解释。在 $t = t_0$ 时刻，代表系统各种实现的点云沿着由动力学方程 $\dot{\vec{u}} = f(\vec{u})$ 决定的各自轨迹演化，其初始条件为 $\vec{u}(t_0) = \vec{u}_0$。随着时间推移，点云的形状发生变化，但体积保持不变（若 $\nabla \cdot \vec{u} \neq 0$），因此概率分布 $p(\vec{u},\ t)$ 沿轨迹 $\frac{dp}{dt} = 0$ 保持不变，由此得到刘维尔方程。

3 泛函刘维尔方程

根据刘维尔定理（图 1），与（非线性）朗之万方程相关的 N 点概率密度函数满足如下形式的线性刘维尔-福克-普朗克动力学方程（LFPE）：

$$\partial_t p_N + \sum_{i=1}^{N} \partial_{u_i}[f(u)p_N - D\partial_{u_i} p_N] = 0, \tag{3}$$

其中 D 是与（线性）朗之万方程（1）中的噪声相关的扩散系数。 [2]

由于刘维尔方程在构造上是线性的，因此它可以在与量子力学相同的框架下运行，特别是可以受益于量子线性代数求解器 [11]。

3.1 驯服维度诅咒

刘维尔方程非常优雅，但在实际操作中不可行，因为它存在于一个超高维空间中，其维度数等于执行直接模拟所用的网格点数量；正如前文所述，对于当今的超级计算机而言，这一数量轻易就会超过数十亿。这就是所谓的维数灾难，它影响着现代科学与工程中的许多问题。

不过，刘维尔方程的主要优点在于，它提供了低维近似，使我们往往能够抓住所研究物理问题的本质。这一技术过程称为边缘化，其做法是推导原始 N体概率密度函数的低阶边缘分布所满足的方程。形式上，这可以通过对不需要的变量进行积分，将其消去而得到，具体如下：

$$P_M(u_1 \dots u_M) = \int P_N(u_1 \dots u_N) du_{M+1} \dots du_N, \tag{4}$$

其中，$1 \leq M \leq N$ 定义了边缘分布的阶数。通过将上述定义应用于 N 体刘维尔方程 (3)，可以直接得到

$$\partial_t p_M + \sum_{i=1}^{M} \partial_{u_i}[F(u)p_M - D\partial_{u_i} p_M] = 0, \tag{5}$$

其中

$$F(u) \equiv F(u_1 \dots u_M) = \int f(u_1 \dots u_N) p_N(u_1 \dots u_N) du_{M+1} \dots du_N \tag{6}$$

[2]注意：由于扩散是将 $f(u;\lambda)$ 在参考值 λ_0 附近线性化后得到的，因此相应的扩散系数通常取决于实际流场，即 $D = D(u)$。

是有效的 M体力。这里，我们假设采用无通量边界条件。从上述关系可以立即看出， $F(u)$ 的显式表达式通常取决于未知的 N体概率密度函数，这表明存在一个早已预料到的闭合问题。当然，这是整个方案能否成功的关键问题，但在下文中，我们将假设能够找到一种合理的闭合方法。鉴于统计力学和粗粒化理论已取得重大进展，这终究是一个合理的假设（尽管其具体实现往往需要投入大量精力）。

接下来，让我们考虑一个通用的观测量 $A(u_1 \dots u_N)$，其平均值为

$$\langle A \rangle(t) = \frac{1}{Z(t)} \int_{-\infty}^{+\infty} p(u,t) A(u) du, \tag{7}$$

其中 $Z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(u,t) du$ 和 u 与之前一样，是 $(u_1 \dots u_N)$ 的简写。

如果对每个 N 独立变量 u_j 的依赖都不可约，那么 u_j 的平均值就取决于完整的 N体概率密度函数 $p_N(u_1 \dots u_N)$，无法进行边缘化。但在经典物理学中，这种情况很少见。例如，如果 $K = \sum_{j=1}^{N} u_j^2$ 是流体的总动能，那么它的平均值只取决于单点分布。

$$\langle K \rangle(t) = \sum_{j=1}^{N} \int u_j^2 p_N(u) du = \sum_{i=1}^{N} \int u_i^2 p_1(u_i) du_i, \tag{8}$$

其中， $p_1(u_i)$是通过对从 u_1 到 u_N 的所有变量进行积分消去得到的，但 u_i。同样地，如果我们只需要空间切片 x_i 处的平均速度场值，那么 1 点 PDF 就足够了

$$\langle u_i \rangle(t) = \int u_i p_1(u_i, t) du_i. \tag{9}$$

同理，两点观测量需要两点概率密度函数，依此类推，适用于所有更高阶。话虽如此，我们继续估计边缘化过程在计算上的可行性。

计数方式如下。与具有 G 个晶格点的离散网格相关联的 N体概率密度函数，每个晶格点承载 F 个场，这些场在一组 n 个离散值上离散化，因此具有 $(GF)^n$ 个离散值。于是，表示完整的 N 体离散概率密度函数所需的量子比特数为

$$q = GF log_2 n. \tag{10}$$

鉴于对于当今的超级计算机模拟而言， G 的量级达数十亿，这需要数十亿逻辑比特；在可预见的未来，这个数量似乎完全不切实际。幸运的是，边缘化带来了乐观得多的前景。

如果离散网格上的每个场都与 $z << G$ 个邻居相连，且网格包含 G 个晶格点，那么最低阶不可约边缘项的阶数为 $M = zF$，此时量子比特数可降至

$$q = zF log_2 n. \tag{11}$$

这仍然非常具有挑战性，但远比式（10）简单，因为对于三维Navier–Stokes方程，参数 zF 的量级为几十。这表明，在量子计算机上，边缘化很有希望规避维数灾难。在接下来的章节中，我们将对此进行更定量的评估。在这一背景下，一个有用的参考资料是 [13]。

4 个实际示例

我们首先考察 Burgers方程情况下的刘维尔表述，该方程描述的是一维无压流体。由于我们考虑的是无噪声的 Burgers方程（其含噪声版本是著名的 Kardar–Parisi–Zhang方程），因此下文将扩散设为零。

4.1 伯格斯-刘维尔方程

描述一维无压流体的Burgers方程写作

$$\partial_t u + u \partial_x u = \nu \partial_{xx} u, \tag{12}$$

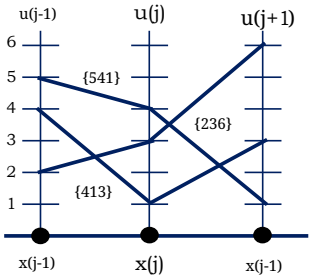


图2：刘维尔-伯格斯方程的几何解释。三个独立变量 u_j，u_{j-1}，u_j 各有 $n=6$ 个可能取值，因此离散刘维尔-伯格斯方程的取值定义在一组三点路径上，这些路径由三个整数 n_{j-1}，n_j，n_{j-i}标记，每个整数的取值范围均为1到6。图中展示了路径 $\{413\}$、$\{236\}$ 和 $\{541\}$。

其中 ν 为运动黏度。

一个简单的中心有限差分格式给出

$$\dot{u}_j = -u_j(u_{j+1}-u_{j-1}) + \nu(u_{j+1}-2u_j+u_{j-1}) \equiv \sum_{k=-1}^{1} B_{j,k}(u_j)u_{j+k} \equiv f_j(u), \tag{13}$$

为简便起见，空间步长取为1，而 $B_{jk}, j=1,\ N, k=-1,\ 0,\ 1$ 是（非线性的）“伯格斯”矩阵。写成显式形式，我们有：

$$B_{j,j-1} = \nu - \frac{1}{4}u_j,\ B_{j,j} = -2\nu - \frac{1}{4}u_j,\ B_{j,j+1} = \nu + \frac{1}{4}u_j. \tag{14}$$

N点刘维尔-伯格斯方程的形式如下：

$$\partial_t p_N + \sum_{j=1}^{N} \partial_{u_j}[\sum_{k=-1}^{1} B_{j,k}u_{j+k}]p_N. \tag{15}$$

此处，$p_N \equiv p(u_1 \ldots u_N,\ t)$ 是与包含 $G=N$ 个点的空间网格相关联的N体概率密度函数。

由于 $\dot{u}_j$ 取决于三元组（$u_{j-1},\ u_j,\ u_{j+1}$），最低阶不可约边缘分布是三点概率密度函数 p_3，其定义为对除三个变量 $u_{j-1},\ u_j,\ u_{j+1}$ 之外的所有独立变量进行积分消去。于是得到：

$$p_3(u_{j-1},u_j,u_{j+1}) = \int_{\infty}^{+\infty} p(u_1 \ldots u_N)du_1 \ldots du_{j-2}du_{j+2} \ldots du_N. \tag{16}$$

相应的三点动力学方程形式为：

$$\partial_t p_3 + \partial_{u_{j-1}}[\sum_{k=-1}^{1} B_{j-1,k}U_{j-1+k}]p_3 + \partial_{u_j}[\sum_{k=-1}^{1} B_{j,k}U_{j+k}]p_3 + \partial_{u_{j+1}}[\sum_{k=-1}^{1} B_{j+1,k}U_{j+1+k}]p_3 = 0. \tag{17}$$

这里，根据周期性，$j-2=j+1$ 和 $j+2=j-1$。

在上述内容中，我们定义了

$$U_j(t) = \int u_j p(u,t)du_1 \ldots du_{j-2}du_{j+1}du_N, \tag{18}$$

它通常是一个未知函数，取决于 u_{j-1}, u_j, u_{j+1}。因此，需要推导出 U_j 与 u_j 之间的合适表达式，这就是通常所说的闭合问题。下文中，我们将假设可以推导出这样的闭合关系。

参考表达式 (11)，我们有 $z = 3$ 和 $F = 1$，因此相应的量子比特数为

$$q = 3\ log_2 n. \tag{19}$$

目前的量子计算机最多配备 $q \sim 500$ 名义上 个量子比特 [14], ，这意味着最多可达到$n \sim 2^{500/3}$，远超任何实际所需的分辨率。若采用合理的分辨率，例如 $n \sim 1000 \sim 2^{10}$，则得到 $q \sim 30$；只要能抑制噪声和退相干，这似乎是可行的。

4.2 示例 2：纳维–斯托克斯刘维尔方程

描述可压缩耗散流体运动的纳维–斯托克斯方程如下

$$\partial_t \rho + \partial_a(\rho u_a) = 0, \tag{20}$$

$$\partial_t(\rho u_a + \partial_b(\rho u_a u_b + P\delta_{ab} - \sigma_{ab}) = 0, \tag{21}$$

其中， ρ为密度， u_a、$(a = x,\ y,\ z)$为流速， $P = P(\rho)$为流体压力， σ_{ab}为耗散张量。

参照表达式 (11)，现在有 $F = 4$ （密度和三个速度分量）和$z = 7$ （每个网格点与六个最近邻相连），因此相应的量子比特数量为

$$q = 28\ log_2 n. \tag{22}$$

取 $n = 10^3$，则有 $q = 280$，这远大于 Burgers 方程所需的数量，但仍在当前量子硬件的名义能力范围内 [14]。采用不同的表示方式或完全不同的公式，例如格子玻尔兹曼方法 [15] ，可能会带来更有利的缩放特性；这也是未来研究的一个重要课题。

上述考量揭示了量子计算通常面临的诸多问题，尤其是噪声和退相干。接下来，我们简要讨论另一个实时量子模拟特有的问题，即时间推进。

5 量子算法概述

如上所述，近期已有多种不同的量子计算策略被提出，用于在量子计算机上模拟流体问题。尽管这些方法都需要处理非线性问题，但我们的情况无需如此，因为该问题从一开始就是线性的；我们可以采用量子线性求解器算法 [11], ，具体如下。

我们先将三点刘维尔方程写成显式守恒形式

$$\partial_t p + \partial_u(Up) + \partial_v(Vp) + \partial_w(Wp) = 0, \tag{23}$$

其中，我们令 $u \equiv u_{j-1}$、 $v \equiv u_j$ 和 $w \equiv u_{j+1}$，而（$U,\ V,\ W$）是（$u,\ v,\ w$）的三个已知函数。将三维函数空间（$u,\ v,\ w$）、（$u_i,\ v_j,\ w_k$）、 $i,\ j,\ k = 1,\ n$离散化后，我们得到一组形式如下的 $G = n^3$ 个常微分方程

$$\dot{p}_{ijk} + U_{ii',jk}p_{i',jk} + V_{i,jj',k}p_{ij'k} + W_{ij,kk'}p_{ij,k'} = 0, \tag{24}$$

其中 $U,\ V,\ W$ 是与三个通量项相关联的离散矩阵。

简单的欧拉前向时间推进即可实现

$$p^{t+1} - (1 - Ldt)p^t = 0, \tag{25}$$

其中初始条件 $p^0 = p_0$, t 表示离散时间， p_0 为初始条件。为简洁起见，省略所有空间指标， L 表示矩阵之和， $L = U + V + W$。上述关系给出了关于未知量 $p = p^{(0)}, p^{(1)} \dots p^{(M)}$ 的线性方程组，其中每个分量都是一个维度为 n^3 的数组。其显式形式为，

$$p^{(0)} = p_0 \tag{26}$$

$$p^{(m+1)} - (1 - Ldt)p^{(m)} = 0 \tag{27}$$

$$m = 0, \dots M - 1, \tag{28}$$

其中 $M = T/dt$ 是时间切片的数量。这是一个线性方程组 $Ap = q$，具有稀疏下三角矩阵结构，且 q 特征仅包含一个元素 p_0。因此，可以轻松地通过一系列因果矩阵向量乘积求解。它在形式上仍然是一个线性方程组；因此，可以使用量子线性求解算法来处理，如 [5]所示，其中考虑的是网格点数量级为 O（$10-100$）的 Burgers方程。

量子计算复杂度由.....给出

$$\mathcal{C}_q \propto s\phi T^2 Polylog(G, 1/\epsilon), \tag{29}$$

其中， s 是矩阵的稀疏度， ϕ 是初始条件的保真度， T 是时间跨度， G是网格规模， ϵ 是误差容限。

经典显式算法的规模增长则会类似于

$$\mathcal{C}_c \propto sTG, \tag{30}$$

这表明主要优势在于 $polylog(G)$ 因子，但部分被其对时间跨度的 T^2 依赖性抵消。由于 $T \sim G^{1/3}$，预计可以获得显著的量子加速。

6 与动态方法的比较

本文开篇时，我们曾提醒读者，刘维尔方法在经典计算机上实际上不可行，因为该问题占据的空间约有三十个维度。因此，在经典计算机上，除了反复求解流体方程之外别无选择。因此，有必要评估动态方法在量子计算机上的成本。当前方法的成本随网格点数量呈对数增长，通常随时间呈二次增长。按照这种增长率，对十亿个网格点（10^9）推进一百万个时间步，需要约 10^{21} 次运算，也就是这么多个动态自由度。比如，运行一个包含 1000 次模拟的集合，总计为 10^{24}, ，即约 80 个量子比特，远少于刘维尔方程所需的数量。然而，问题在于，量子计算机上的时间推进需要在每个时间步重构完整的量子态（这是不可克隆定理所致），而这一操作的成本随量子比特数呈指数增长。对于十亿个网格点，也就是 30 个量子比特的情况，这会造成巨大的减速，这是量子计算中的一个主要问题 [16]。

因此，流体流动的系综模拟似乎最好通过刘维尔方法在量子计算机上执行，前提是：（i）能够推导出合理的闭合；以及（ii）能够使用数百个可靠的逻辑量子比特。最后，我们指出，类似的论述基本上适用于任何非线性场论。

7 总结

总而言之，我们评估了在量子计算机上使用泛函刘维尔表述对流体流动进行系综模拟的可行性。当前分析基于一种理想化设想：存在一种量子算法，其计算规模随动态自由度数量呈对数级增长，并且该算法运行于理想的 量子计算机上，不会受到明显的退相干和/或噪声问题的影响且。

在实际应用中，Navier–Stokes方程的量子计算系综模拟需要数百个无噪声的逻辑 量子比特。鉴于当前的量子计算通常只能运行至多几个逻辑量子比特，比如大约十个，这一目标似乎还在未来。这并不是邀请人们放弃，而只是对现状的现实评估，应当与当前围绕量子计算的（主要是商业性的）炒作形成对照（如需高度专业的评估，请参见 [2]）。

8 致谢

作者从与许多同事的宝贵讨论中获益良多，尤其是 S.S.Bharadwaj、D. Buaria、P.Coveney、N.Defenu、A. DiMeglio、M. Grossi、A. Mezzacapo、S. Ruffo、A.Solfanelli 和 T.Weaving。S.S. 感谢意大利国家高性能计算、大数据与量子计算中心（CN00000013）提供的资金支持。

参考文献

[1] F. Tennie、T.N.Palmer，用于天气和气候预测的量子计算机：优点、缺点与噪声，arXiv:2210.17460v1 [quant-ph] 31 2022年10月[2] S. DasSarma，量子计算存在炒作问题，《麻省理工科技评论》，2022年3月28日
https://www.technologyreview.com/2022/03/28/1048355/quantum-computing-has-a-hype-problem/
[3] A.Navarra、J. Tribbia和 S.Klus，赤道太平洋海表温度的Koopman传递算子估计，《大气科学杂志》，1227，2021，DOI: 10.1175/JAS-D-20-0136.1[4] A.P. Bhati、S. Wan、D. Alfe 等，大流行病药物的研发速度与大流行病同步：利用高性能计算机上的机器学习与基于物理的混合模拟加速COVID-19药物发现的基础设施，《Interface focus》11 (6)，20210018，2021[5] J.P.Liu、H.O.Kolden、H.K. Krovi等，用于耗散性非线性微分方程的高效量子算法，《美国国家科学院院刊》118(35) e2026805118(2021)[6] A.Mezzacapo、M.Sanz、L.Lamata等，流体流动中输运现象的量子模拟器，《科学报告》5 (1)，1-7(2015)[7]W. Itani 和 S. Succi，格子玻尔兹曼的Carleman线性化分析，《Fluids》7，24。https://doi.org/10.3390/fluids 7010024 (2022)[8] L.Budinski，使用流函数-涡量形式和格子玻尔兹曼方法求解纳维–斯托克斯方程的量子算法，arXiv:2103.03804v2[quant:ph] 15 2022年3月[9] F. Gaitan，通过量子计算求解纳维–斯托克斯流体的流动，《NpjQuantum Information》，60 (2020)[10] R. Steijl，流体模拟的量子算法，http://dx.doi.org/10.5722/intechopen.86685 (2019)[11] A.W.Harrow、A.Hassidim、S. Lloyd，线性方程组的量子算法，《物理评论快报》103 (15)，150502(2009)[12] S.S. Bharadwaj 和 K.R. Sreenivasan，流体动力学的量子计算，《Pramana》，Indian Acad.Sci.Conf. Aer. 3，77-96 (2020)[13] G. Xu、A.J. Daley、P. Givi 和R.D. Somma，通过量子算法模拟湍流混合，《AIAA J.》56 (2)，687-699，（2018）[14] https://www.ibm.com/quantum/roadmap[15] S. Succi，流体动力学及其他领域的格子玻尔兹曼方程，Oxford U.P. 2001，《流动物质的复杂状态的格子玻尔兹曼方程》，OxfordU.P. 2018[16] M. Lubasch、J. Joo、P.Moinier、M. Kiffner、D. Jaksch，非线性问题的变分量子算法，《物理评论A》101 (1)，010301(R) (2021)