亮点

通过对设计域进行自适应序贯分解来估计失效概率并检测失效面

Aleksei Gerasimov、Miroslav Vo˘rechovský

- 通过构建网格状几何结构，对样本进行新颖的自适应序贯扩展
- 仅需对可能只返回类别型输出的昂贵模型进行极少次数的评估

- 序贯设计扩展在利用与探索之间实现了最优平衡
- 通过散度定理和求积公式准确估计概率
- 基于整个失效面、按概率密度加权的新型全局失效敏感度
- 针对多个设计点和强非线性的稳健性

arXiv:2304.05475v1 [cs.CE] 11 Apr 2023

通过设计域自适应序贯分解进行失效概率估计和失效面检测

Aleksei Gerasimov

结构力学研究所，布尔诺理工大学，*Veveˇrí 331/95，602 00* 布尔诺，捷克共和国

Miroslav Voˇrechovský

通讯作者。布尔诺理工大学结构力学研究所，*Veveˇrí 331/95，60200* 布尔诺，捷克共和国，电子邮箱：*vorechovsky.m@vut.cz*

摘要

我们提出了一种算法，可从输入随机变量的设计域中最优、自适应地选择点，以准确估计失效概率，并确定安全域与失效域之间的边界。当每次计算性能函数$g(\boldsymbol{x})$的成本都很高，且该函数高度非线性、含噪，甚至具有离散状态（例如二元状态）时，此方法尤为有用。在这种情况下，可行的调用次数有限，且无法使用$g(\boldsymbol{x})$的梯度。输入设计域通过扩展并自适应细化一种网格状、无锁的几何结构，逐步划分。所提出的基于三角剖分的方法有效结合了仿真与近似方法的特点。该算法执行两项独立任务：(i) 通过巧妙结合确定性求积规则与散度定理来估计值 概率；(ii) 通过新增点对实验设计进行序贯扩展。从设计域中序贯选取点，以便后续计算$g(\boldsymbol{x})$，这一过程通过一种新的学习函数来完成，该函数针对局部区域所对应的概率分类，使瞬时信息增益最大化。扩展过程可随时停止，例如在获得足够准确的估计值时。由于在输入域中采用了精确的几何表示，该算法最适用于低维问题，维数不超过八。此方法可处理边缘分布非高斯且彼此相关的随机向量。当性能函数的取值有效且可信时，可基于已评估点集构建平滑代理模型，从而提高估计精度。最后，我们基于整个失效面定义了新的全局失效灵敏度因子，并以输入随机向量的概率密度加权。

关键词： 失效概率、自适应细化、几何方法、对罕见事件的灵敏度、代理模型、散度定理

1. 引言

尽管上世纪下半叶取得了进展，[68], 但目前业界和研究人员的关注表明，确定失效概率仍然是一项重要课题。为了解决现实中的复杂问题，人们仍在不断开发新方法。如今，工程产品（如结构、机械系统、基础设施等）或工艺过程，通常都由计算量庞大的数学模型来表示。正如 Rackwitz [68], 所指出的，在实际工程中，人们关注的是产品和过程的可靠性优化，也就是带有可靠性约束的优化 [7]。然而，可靠性优化方法涵盖可靠性分析，并会反复进行可靠性分析。在问题的标准设定中，极限状态函数（LSF）$g(\boldsymbol{x})$是一个计算模型，用于表示产品或过程的状态，具有N_{var} 个输入随机变量，组成向量$\boldsymbol{X}$，其联合概率密度函数已知或假定为$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})$。在大多数情况下，极限状态

函数的构造方式是：$g(xxx)$取负值时表示失效状态，但失效条件也可以采用其他方式表述。还有一些问题中，$g(xxx)$是离散状态函数，或者该函数仅提供二元输出信息：对于给定的输入组合xxx [90]，输出失效或安全运行。

现有的失效概率估计方法种类非常丰富。根据其关注并处理三组输入信息的程度，可以对这些方法进行分类：(i) 收集于随机向量 XXX 中的输入变量输入空间的几何结构和拓扑结构，(ii) XXX 的概率密度函数，无论是真实的概率密度函数还是某种经过修改的抽样密度，以及 (iii) 极限状态函数 $g(xxx)$，该函数表征产品的性能。根据失效概率估计方法处理极限状态函数输出的方式，现有的大多数方法可以归入两大基本组。第一组由模拟方法构成，这些方法仅使用输出的二元信息：对于给定的输入参数组合，稀有事件要么发生，要么不发生；这些估计方法统计稀有事件的发生次数，并为其赋予权重。该组中基本模拟方法的例子包括蒙特卡罗抽样、朴素版本的重要抽样（IS） [35, 79], 或渐近抽样（AS） [16]。粗略版本的模拟方法 对于噪声、跳变以及极限状态函数 $g(xxx)$中的各种非光滑特征具有较好的稳健性，但估计量方差非常大，并且在高维情况下，对于IS 和AS会急剧增大。因此，对于计算成本高昂的计算机模型，所需的极限状态函数评估次数仍然过高。采用分层抽样策略，例如拉丁超立方抽样、准蒙特卡罗序列空间填充或低差异设计等，可能会使估计量方差略有降低；但是，当对$g(xxx)$进行一次评估所需时间超过几秒时，模拟方法仍然不切实际。

另一组方法可称为近似方法，因为它们利用$\mathrm{g(xxx)}$ 的数值来得出结论，判断安全/失效事件的程度，以及它在输入空间中距离失效域和安全域之间边界的远近。举例来说，我们列出一次可靠度方法（FORM）和二阶可靠度理论（SORM），即基础方法；这些方法至今或许仍是最重要的成果，现代工程师设计规范正是建立在其基础之上的。FORM [36, 69] 和二阶可靠度理论（SORM）[29, 37, 15, 86] 数学理论的发展，以及利用一阶/二阶 [12, 13] 的泰勒级数展开计算多元正态积分的相关 FORM/SORM渐近近似，于 20世纪80 年代完成 [25, 56, 59]。这些方法近似失效面的形状，即安全域和失效域之间的边界。该近似是在概率密度较高的区域$\mathbf{f_X}(\mathrm{xxx})$ 中进行的，也就是在独立输入变量的高斯空间中最居中的失效点——设计点处进行。我们假设失效面是一个 $(\mathrm{N_{var}}-1)$ 维对象，并且通常将其表示为极限状态函数$\mathrm{g(xxx)}$ 的零值等值线。事实上，当失效面是可微函数，且该函数在标准正态空间中几乎呈线性时，失效概率 $\mathrm{p}_{\mathcal{F}}$ 与从原点到失效面的最短距离 β 之间存在简单关系：$\mathrm{p}_{\mathcal{F}} \approx \Phi(-\beta)$。然而，设计点可能很难找到，尤其是对于具有复杂景观的函数$\mathrm{g(xxx)}$。诀窍在于利用 $\mathrm{g(xxx)}$ 的梯度，并采用确定性的基于梯度的搜索 [52, 36, 69] ，同时可以选择改变搜索的起点或参数，以提高成功的可能性。FORM 和SORM 所需的“设计点搜索”并非唯一依赖于性能函数朝最居中的失效点递减这一假设。另一种广为人知的策略假设 $\mathrm{g(xxx)}$ 的梯度与到失效面的距离之间存在联系，这就是著名的子集模拟（SuS） [3], ；它是梯度优化方法的一种巧妙随机版本，参见Breitung [14] 的批判性评价。与FORM 的设计点搜索类似，这类下坡优化方法对于全局优化可能并不成功。如果搜索总是从原点开始，并且几何信息没有被存储以供将来使用，那么重复运行 SuS 可能也无济于事。不重复利用先前$\mathrm{g(xxx)}$ 调用所得数据、并忽略输入域中问题的几何形状这一特征，在许多方法中都很常见，尽管这类数据具有巨大的潜力。

仿真和近似方法可以结合使用。例如，Hohenbichler 和Rackwitz[39] 通过重要抽样改进了利用巧妙几何运算在 FORM和二阶可靠度理论中得到的估计值。与 FORM和 SuS类似，重要抽样方法的一些序贯自适应变体 [18, 66] 也基于这样的假设，即$g(xxx)$函数值与接近失效面的程度之间存在联系。还有许多其他巧妙的方法，例如直线抽样 [75, 21] 或定向

仿真 [8, 63], 这些方法也利用 $g(xxx)$的数值来确定输入变量空间中的方向。渐近抽样中采用一系列经过修正的抽样密度进行外推，这一思路可以类比于基于一系列极限状态函数重新表述进行外推的方法 [60, 55], 从而对假定的平滑 $g(xxx)$的作用作出假设。

一类特殊的方法目前或许代表了该领域最活跃的研究方向之一，它将仿真方法（如重要抽样）的稳健性，与对计算量巨大的真实极限状态函数$g(xxx)$的低保真近似结合起来。其思路是用一个更简单的代理函数（响应面或元模型）替代真实的高保真数学模型。该代理函数可以快速求值，并可用于构造一个指示失效事件的二元指标。实际上，只要代理函数求值足够快，就可以进行数百万次评估，并再次采用基于各种算术平均或加权平均的基础统计方法来估计概率积分。此外，通过代理模型进行光滑近似，有助于选择下一次极限状态函数评估的位置（主动学习）。难点在于如何实现快速且准确的近似，尤其是在失效面概率较高的区域。有效的策略会利用设计域中已分析点的信息，并自适应地细化代理模型；例如参见 [83, 84]。代理模型使用各种光滑函数来近似真实的$g(xxx)$：光滑多项式响应面、径向基函数 [50, 78],克里金法 [26, 94], 多项式混沌展开（PCE） [58, 106], , 或人工神经网络等分类器 [23, 31, 1], 、支持向量回归代理模型（SVM） [48, 11, 10, 65, 72], , 以及最近邻近似 [90]。问题在于，其中一些方法难以用于高维情形（例如 PCE），而且许多方法的效果取决于用户能否恰当选择某些参数（无论是克里金法中的相关函数，还是 SVM 中的核函数）。许多代理模型并不稳健，因为它们可能会出现过拟合、灵活性不足，或者需要设计域中的点过多。研究人员不断尝试将各种方法结合起来。例如，可以将重要抽样与克里金法结合 [27], ，或将 SuS 与克里金法结合 [103]。可以认为，这些组合对问题输入中的不同部分所采用的假设及其关注重点进行了权衡。

大多数现有“近似”方法和代理模型方法之所以能够成功应用，是因为真实函数会返回行为良好（连续且平滑）的输出值。虽然在许多情况下可以满足这一点，但在实际应用中，也存在这样一些问题：输出是不连续的、不可微的（函数值中包含跳跃），带有噪声，或者输出仅为二进制值；甚至对于某些输入值组合，输出根本不返回任何答案，如 [90]所示的“盲点”情形。这种情况可能发生在复杂现象的非线性求解器中，例如模型的组成部分本身就已嵌入了跳跃或非平滑行为。在这种情况下，上文所述的大多数近似方法都会完全失效。然而，能够抵抗这些复杂情况的仿真方法却无法使用，因为每次对$g(xxx)$ 进行评估都非常耗时。

在本文中，我们提出使用小样本实验设计（ED），即其中已评估LSF $g(xxx)$的点，构建一个坚固的几何结构。该结构承担两项任务：失效概率的估计 以及ED的进一步扩展。我们提出了完成这两项任务的新方法，同时考虑到每次LSF评估的代价都非常高昂，并且该方法必须从宝贵的数据中提取尽可能多的信息。这些方法仅使用关于系统状态的二元信息 $g(xxx)$，并将目标模拟方法的稳健性与近似方法的效率相结合。几何表示将输入空间划分为：（i）包围ED点的凸包；以及（ii）其余的“外部”区域。凸包内部被划分为单形，其中ED点为其顶点；该脚手架可以（i）在失效面附近进行局部细化（利用），也可以（ii）通过请求扩展 $g(xxx)$在凸包外部的探索点处进行评估。概率的估计 （第3节）通过使用精确几何实体（超球、超平面和单形）的解析（精确）与数值求积方法实现。所估计的概率用于提出ED的最优扩展（第4节），因此该扩展是自适应的 （基于当前几何结构）且序贯的（每次添加一个LSF评估点）。基于概率的决策会自动在利用与探索之间取得平衡，从而最大化与所选点相关的分类概率所带来的信息增益。对单个随机变量的失效概率灵敏度进行了评估

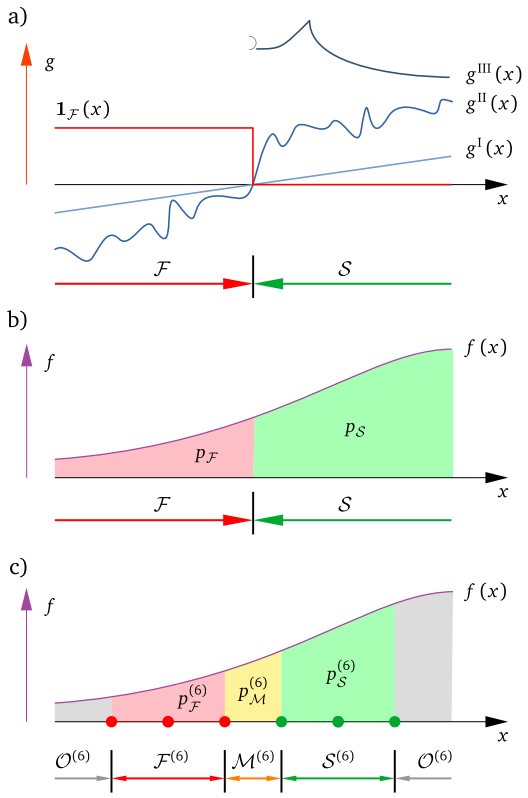


图 1：一维可靠性问题示意图。a）三个不同的极限状态函数 $g(x)$ 对应同一个由指示函数 $\mathbb{1}_{\mathcal{F}}(xxx)$标示的失效域；b）概率密度 $f(x)$以及失效概率和成功概率的几何意义：分别为 $p_{\mathcal{F}}$ 和 $p_{\mathcal{S}}$；c）所提算法在 $N_{\text{sim}} = 6$ 个点上获得的逐点信息的解释：识别四个集合（失效集、安全集、混合集和未探索集），并估计相应的概率。

使用基于第6节提出的失效面所确定的新因子。

2. 所提方法概述

考虑一个包含 N_{var} 个随机变量的系统，我们关注其失效概率$p_{\mathcal{F}}$。该随机向量由连续随机变量构成。这些随机变量所定义的 N_{var}维空间称为设计域 Ω。失效事件的概率$p_{\mathcal{F}}$ （精确解）定义为随机向量的联合密度XXX 在失效集$\mathcal{F}$上的积分

$$p_{\mathcal{F}} = \int \cdots \int_{\mathcal{F}} f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int \cdots \int_{\Omega} \mathbb{1}_{\mathcal{F}}(\boldsymbol{x}) f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{1}$$

其中，$\mathrm{f}_{\boldsymbol{X}}(\mathrm{xxx})$和 $\mathrm{F}_{\boldsymbol{X}}(\mathrm{xxx})$分别是随机向量 XXX 的概率密度和累积分布函数。失效集 $\mathcal{F} \subset \Omega$ 由随机变量 XXX 的整个空间中所有发生失效的区域的并集构成。图1使用一个简单的一维示例对该问题进行了说明。单个失效区域 $\mathcal{F}$ 从负无穷延伸至失效面，在此处该失效面由单个点表示。红色填充区域的面积等于$\mathrm{p}_{\mathcal{F}}$（参见方程 (1)）。$\mathrm{p}_{\mathcal{F}}$ 的另一种表达式使用了指示函数 $\mathbb{1}_{\mathcal{F}}(\mathrm{xxx})$：对于落入失效集的xxx，该函数返回 1，否则返回 0。因此，指示函数 $\mathbb{1}_{\mathcal{F}}(\mathrm{xxx})$ 可能涉及极限状态函数 $\mathrm{g}(\mathrm{xxx})$，即一个量化所研究系统性能的函数。这种表达方式突出了该问题的二分性质：计算 $\mathrm{p}_{\mathcal{F}}$所需的关于LSF $\mathrm{g}(\mathrm{xxx})$ 的唯一信息是二元信息（即失效或成功）。LSF有许多种构造方式，均可将 Ω 分解为安全域和失效域；图1a 描绘了g 函数的三个版本。正如上文所讨论的，然而，也有许多方法不仅基于 $\mathrm{g}(\mathrm{xxx})$的数值，还利用二元信息。这些数值用于构建代理模型，或者用于检测基于梯度的方法所需的最速下降方向。我们认为，依赖

$g(xxx)$ 的数值可能会相当棘手：对于高度非线性的极限状态函数，可能无法收敛；对保留失效域的极限状态函数进行重新参数化可能会改变这些方法的结果；离散状态极限状态函数则可能使这些方法完全失效。

当已知两个互不相交集合的真实分解时，$\Omega = \mathcal{F} \cup \mathcal{S}$，概率密度函数 $f_{\boldsymbol{X}}(xxx)$ 定义于 Ω，可用于估计概率；参见图 1b。在实际情况下，这些区域并未知晓，但可以根据 ED 提供的信息进行近似。图 1c 展示了这样一种情形，其中有 $N_{\text{sim}} = 6$ 个 ED 点，其分类根据此前的极限状态函数评估已知（绿色/红色点表示安全/失效状态）。这些点可用于构造指示函数的中间临时近似，方法是将设计空间划分为四类区域：当前的 失效集 $\mathcal{F}^{(N_{\text{sim}})}$、安全区域 $\mathcal{S}^{(N_{\text{sim}})}$、混合区域 $\mathcal{M}^{(N_{\text{sim}})}$以及剩余的“外部”区域 $\mathcal{O}^{(N_{\text{sim}})}$，该区域不属于此前的任何一类

$$\Omega = \underbrace{\mathcal{F}^{(N_{\text{sim}})} \cup \mathcal{S}^{(N_{\text{sim}})} \cup \mathcal{M}^{(N_{\text{sim}})}}_{\mathcal{I}^{(N_{\text{sim}})}=\text{“inside” (explored)}} \cup \underbrace{\mathcal{O}^{(N_{\text{sim}})}}_{\text{“outside” (unexplored)}} . \tag{2}$$

我们提议在每次评估极限状态函数后构造这一分解。现有 ED 点形成一个凸包（其并集在方程（2）中记为“内部”），其内部被划分为多个多胞体。我们采用给定空间中尽可能简单的多胞体：单形，每个单形仅有 $N_{\text{var}} + 1$ 个顶点，这些顶点就是此前评估过极限状态函数的 ED 点。单形通过 N_{var}维 Delaunay“三角剖分”构造。这种“三角剖分”（在三维空间中推广为四面体剖分等）将一个紧密包围所有 ED 点的凸包划分为互不重叠的多面体（单形）。这种几何方法能够精确控制各个单形；另见图 3 左图。每个单形的内部可临时分类为以下任一部分：$\mathcal{F}^{(N_{\text{sim}})}$，$\mathcal{S}^{(N_{\text{sim}})}$，或 $\mathcal{M}^{(N_{\text{sim}})}$。

我们要指出的是，基于 ED点的这种空间分解，独立于这些点的选取（或抽样）方式而执行。基于空间分类的概率估计 是一项可选任务，可以将其视为对现有逐点信息的后处理。该估计可能会影响，也可能不会影响 ED未来的扩展 。如果认为有必要进行进一步细化，则可以保存该几何表示（骨架），并在之后重新加载。所描述的几何描述能够快速分类输入空间中的大部分区域（仅有可忽略的一小部分概率尚未探索），同时还能准确表示失效面。本文提出的分类方法速度很快，因为我们只需根据顶点中的二元信息对单形内部进行分类。如果所有顶点具有相同的分类（无论是失效还是成功），则整个单纯形都继承该分类。顶点中包含一种以上分类的单纯形属于混合 区域 $\mathcal{M}^{(N_{\text{sim}})}$。通过这种方式，抽样分析所需的指示函数得以定义。

该分解采用相对简单的计算几何方法（Delaunay 三角剖分和凸包），并结合上述快速分类器，独立地实现两个目的：

- 对稀有事件概率的估计 ，可通过本文提出的针对性方法在运行过程中的任意时刻进行评估，
- 对 ED 进行顺序扩展 ，即选择下一个点xxx 来评估 LSF，从而使概率方面的收益最大化。

除非另有说明，我们假设失效集无界，这意味着 $\mathcal{F}$ 是一个开域；见图 2右图。对于失效区域有界的问题，即失效集的某些部分在 Ω 中分散或碎片化的情况（见图 2左图），所提算法无法保证发现失效集的所有闭合部分。这是因为过小的失效区域可能会被归类为成功事件的单形包围。

3. 概率估计

由单形构成的骨架，在 ED扩展过程的任一阶段，都能将紧致凸包合理地划分为互不重叠的子域。这种结构化划分使概率能够得到快速且准确的估计。通常，按所含概率含量计算，凸包很快就会占据输入空间的很大一部分。内部域中构建的几何结构，记作 $\mathcal{I}^{(N_{\text{sim}})}$ 方程 (2)，可直接用作代理模型，为从凸包中选取的任意点提供事件类型的指示函数。事件类型的判定方式很简单：如果一个单形的所有顶点都指示同一种事件类型，那么该单形的整个内部都

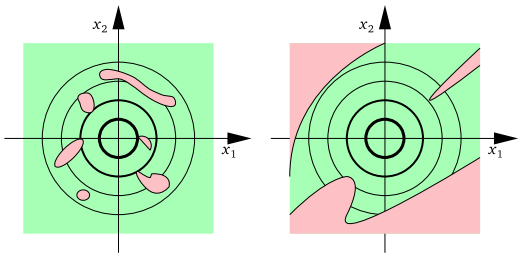


图 2：关于失效域的假设。左：闭合失效域，所提算法可能因失效区域的错误包络而失效。右：符合假设的开失效域。

与该类型相关联（安全运行或失效）。如何将顶点类型不同的单形所含的概率含量，划分为与各顶点所对应的不同事件相关联的概率，将在第 3.1.1 节中说明。最后，凸包外部 区域 $\mathcal{O}^{(N_{\text{sim}})}$所含的概率也会进行评估，从而提供关于尚未探索区域所关联概率的重要信息。本节将算法的说明限定于标准联合高斯分布的情况，即采用标准高斯密度 $f_{\boldsymbol{X}}(xxx) \equiv \varphi(xxx)$，以及分布函数 $F(xxx) \equiv \Phi(xxx)$，此时设计域为$\mathbb{R}^{N_{\text{var}}}$；非高斯向量以及边缘分布可能相关的情况将在第 9 节讨论。

内部区域由三类域组成： $\mathcal{I}^{(N_{\text{sim}})} = \mathcal{F}^{(N_{\text{sim}})} \cup \mathcal{S}^{(N_{\text{sim}})} \cup \mathcal{M}^{(N_{\text{sim}})}$，其中每一类都由一组单形表示。图 3 展示了一个包含21个安全结果（绿色点）和五个失效事件（红色叉号）的二维实验设计示例。它还展示了相应的凸包及其划分为三类区域：左图突出显示了混合单形和失效单形，中图显示了相同类型单形的簇，它们由（超）平面面（脊）分隔。右图说明，外部区域的概率大于外接 N_{var}-球外的概率，其半径为 R （最远的实验设计点）；同时小于内接 N_{var}-球外的概率，其半径为 r （凸包最近的面）。这些界限可以通过解析方法简单计算，因为半径 r 和 R 可由凸包获得（见附录B）。该解法基于这样一个事实：标准高斯空间中的随机距离服从具有 χ 分布，其自由度为 N_{var} 。方程（B.8）给出了外接 N_{var}-球外概率的简单解析解

$$p_{R,\text{out}}(R; N_{\text{var}}) = 1 - F_{\chi}(R; N_{\text{var}}). \tag{3}$$

为了获得未探索概率的上界，可以将半径为 N_{var} 的球之间、半径 R 和 r之间环带中的概率相加：$F_{\chi}(R; N_{\text{var}}) - F_{\chi}(r; N_{\text{var}})$。内接 N_{var} 球的较小半径 r是最中心的面点到原点的距离，该距离可由凸包几何性质得知；参见附录 A。

除了关于外部概率$p_{\mathcal{O}}^{(N_{\text{sim}})}$ 的界限外，我们还提出采用利用散度（高斯–奥斯特罗格拉德斯基）定理的积分方法。通过有限组（超）平面面对凸包进行精确的几何描述，可以非常容易地仅沿其边界，对法向量与经过巧妙选择的向量场的点积进行积分，而无需在整个凸包内部计算求积。该过程使积分域的维度降低一维（在包围表面上，而非内部体积中），具体描述见附录C。

同样的过程可用于计算图3中间所示的单形簇的求积。只需知道具有相同事件类型的单形簇的边界，以及这些单形簇由共享其 $(N_{\text{var}} - 1)$ 维面的相邻单形成对构成的方式。借助提供每个单形的相邻单形列表的 `QHull` 库，可以非常容易地完成邻接 和聚类分析。

*3.1.*凸包内 单个单形的整合

由于我们关注的是稀有事件概率，也就是失效概率，因此我们希望估计与当前失效集 $\mathcal{F}^{(N_{\text{sim}})}$以及混合集合 $\mathcal{M}^{(N_{\text{sim}})}$相对应的概率，其中混合集合的一部分可能会对失效概率有所贡献，尽管其概率占比尚不明确。属于失效集的单形通常只有在混合单纯形形成之后才能形成，并且

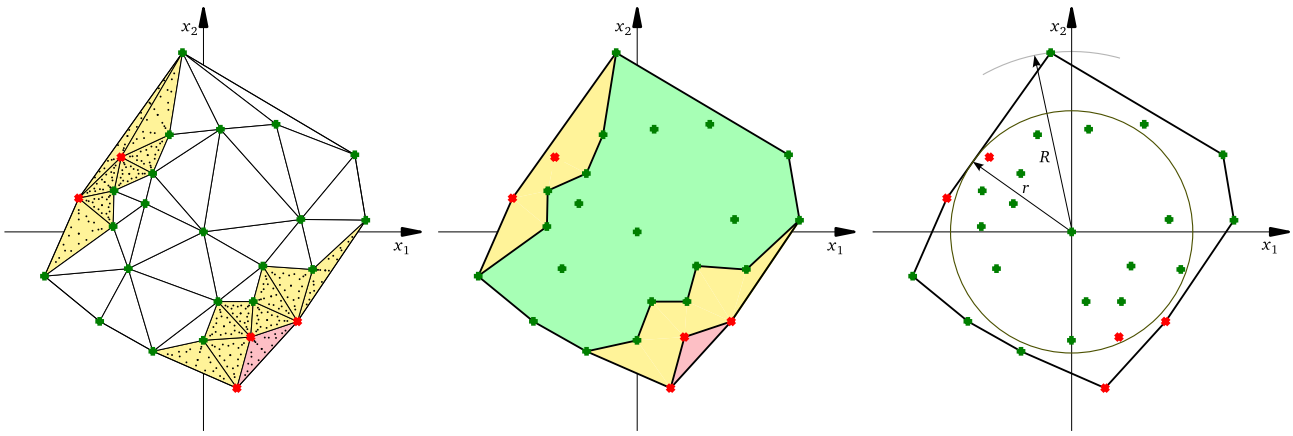


图 3：二维标准高斯空间中概率积分的示意图。左：对凸包内的各个单形进行确定性求积。中：具有分段线性边界的同类型单形簇。右：在半径为r 和R的两个超球之间找到的凸包边界。

它们可能不会形成由相邻失效单纯形组成的紧集。最初散布的失效（红色）单纯形必须逐个整合。此外，具有对稀有事件的不确定贡献的各个混合单纯形的概率含量，可用于通过细化选择ED扩展的最佳位置，参见第4节。因此，我们提出了一种用于对各个单纯形进行求积的工具。

假设凸包被划分为由N_{sim} 个 ED点（顶点）构成的单形。将所有现有单形依次编号为$j = 1,\ldots, N_J$，并用p_j表示第j个单形的概率含量。我们建议只关注失效单形和混合单纯形，并将具有相应类型的所有单形的概率之和作为概率估计。

$$p_{\mathcal{F}}^{(N_{\text{sim}})} = \sum_{j \in \mathcal{F}^{(N_{\text{sim}})}} p_j, \tag{4}$$

$$p_{\mathcal{M}}^{(N_{\text{sim}})} = \sum_{j \in \mathcal{M}^{(N_{\text{sim}})}} p_j. \tag{5}$$

安全（绿色）单形的概率含量不应 通过对各个单形进行类似求和来计算。原因在于，该概率通常较大，数值误差可能会累积并降低估计的准确性。安全概率最好通过以下方式之一进行估计：(i) 从总单位概率中减去“混合”、“失效”以及“外部”概率（见第 3.2节）；或 (ii) 将安全单形分组（它们通常形成一个实体），并通过应用散度定理，利用簇边界计算组内的概率含量，见 附录C。

在估算各个单纯形中的求积时，有许多方法可供采用，包括蒙特卡罗类型的积分。在本文中，我们介绍一种基于预定义积分节点的确定性求积。考虑占据由 Ω_j 表示区域的第 j 个单纯形。目标是估算积分

$$p_j = \int_{\Omega_j} f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{6}$$

即使在高斯分布这一特例下，也没有已知的解析解；过去仅推导出了两个相交超平面发生概率的相对紧致界 [24]。然而，在当前情况下，这些界并不实用，因为单形的数量可能很多，且每个单形都代表许多此类相交。我们提出使用确定性求积规则，这类规则能为给定次数以内的多项式提供精确解，且应用起来快速有效。求积积分涉及将单形体积V_j 乘以被积函数的加权平均值

$f_X(xxx)$。体积是使用坐标矩阵的行列式计算的

$$V_j = \frac{1}{N_{\text{var}}!} \begin{vmatrix} \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_{N_{\text{var}}+1} - \boldsymbol{x}_1 \end{vmatrix}, \tag{7}$$

其中xxx_k是单纯形j的顶点$k = 1$、……、$N_{\text{var}}+1$。加权平均由在n_l个预定义积分节点xxx_l处计算的密度表示，每个密度分别乘以已知权重w_l。最后，通过以下方式估算概率含量

$$p_j = V_j \sum_{l=1}^{n_l} f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}_l)\, w_l. \tag{8}$$

积分节点在单纯形内的坐标xxx_l 预先定义在单位单纯形中，并且可以轻松变换到旋转和拉伸后的单纯形 Ω_j。权重之和为 1： $\sum^{n_l}{}_{l=1} w_l = 1$。许多求积方案提供正负兼有的积分权重，因此部分权重可能为负。上个世纪发展出了许多积分方案。Hammer 和 Stroud 开发了适用于任意维度单纯形的首批积分方案 [34, 81]。后来，Silvester [80] 提出了求积的两种基本变体：开放式（积分节点严格位于单纯形体积内部）和封闭式（积分节点可位于单纯形面上）。Grundmann 和 Möller [32] 为n维单纯形开发了通用次数的方案，并证明变换到单位单纯形是唯一且不变的。他们的方案如今得到广泛应用。De Loera 等人 [22] 也通过递归公式为开发新的高效求积方案作出了贡献，而新方案的开发至今仍在继续，参见 [51, 41, 85]。

在我们的数值研究中，我们采用了一个用于Python 环境的免费软件包，名为quadpy，可在 https://pypi.org/项目/quadpy/ [73]。该库实现了包括 Grundmann 和 Möller 提出的用于积分n维单形的层次细化方法[32]。图 3 左侧展示了混合单形和失效单形中某一特定积分节点集的示例。

我们指出，将这些确定性求应用于概率密度积分时会存在缺点。这些概率密度通常并不是推导节点位置和权重时所针对的多项式，因此，既无法对其进行精确近似，也无法由于龙格现象而用足够高次的多项式对其进行“覆盖”。在高维的激进探索阶段，单形可能跨越具有高局部密度的区域，也可能跨越局部密度极低的偏远区域。尽管所有概率密度都是正的，仍有可能得到负求积结果。这是因为某些积分规则会为一些积分节点使用负权重，从而可能导致可疑的积分结果。当检测到此类行为时，理想的做法是采用另一种积分技术，即使用带有自动误差评估的自适应细化。由于可以独立地对各个单形进行积分，因此这项任务非常适合并行处理。

向 ED 中添加一个新点后，三角剖分通常只会在局部发生变化，因此，跟踪三角剖分和估计值并不困难：将失效的单形从数据库中移除，只对新添加的单形进行积分。

3.1.1. 混合单纯形

对“混合”单形计算得到的概率之和$p_{\mathcal{M}}^{(N_{\text{sim}})}$ 可能不可忽略；尤其是对于较小的 ED，该值很容易超过使用纯“失效”单形估计的失效概率$p_{\mathcal{F}}^{(N_{\text{sim}})}$ 。可以合理地认为，失效域和安全域之间的边界会穿过混合单形。由此产生一个问题：如何将先前通过选定求积得到的单形p^j 的概率含量j 分为失效部分和安全部分，以便将“失效份额”计入失效概率估计值。

我们提出了一种通过对单形上的失效密度进行线性近似，来简单估计单形中失效份额的方法。以下公式仅涉及失效顶点处的概率密度，并给出精确解 [46]，用于计算平面失效体的概率含量；参见二维示意图

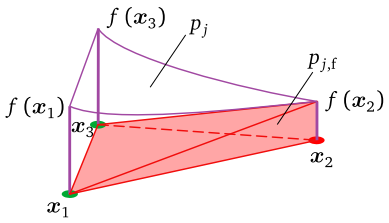


图 4：将单个单纯形的概率分配为“安全”和“失效”概率这一“混合”问题的二维示意图。

见图 4

$$p_{j,\mathrm{f}} = V_j \frac{\sum_{k=1}^{N_{\mathrm{var}}+1} \mathbb{1}_{\mathcal{F}}(\boldsymbol{x}_k)\, f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}_k)}{N_{\mathrm{var}}+1}, \tag{9}$$

其中 $\mathbb{1}_{\mathcal{F}}(xxx_k)$是应用于所有 $N_{\mathrm{var}}+1$顶点 xxx_k编号为 k的指示函数，其中已知极限状态函数结果。我们指出，在一个更简单的替代方案中，可以直接将简单概率p_j 乘以失效顶点数与所有 $N_{\mathrm{var}}+1$ 顶点数之比，但这种粗略的替代方案可能不如方程（9）准确。

一旦将每个混合单纯形的概率含量分配为失效概率和成功概率，就可以通过将所有纯失效单纯形的完整贡献与所有混合单纯形的“失效”贡献之和相加，得到当前的失效概率估计值。

最后，当前的失效概率估计值是纯失效单形中的概率含量之和与混合单形中的失效份额之和。

$$p_{\mathrm{f,v}} = \sum_{j \in \mathcal{F}^{(N_{\mathrm{sim}})}} p_j + \sum_{j \in \mathcal{M}^{(N_{\mathrm{sim}})}} p_{j,\mathrm{f}}. \tag{10}$$

概率的运行估计可用于制定停止准则。当 (i) 失效概率估计趋于稳定（仅在较小范围内波动），或 (ii) 混合概率与外部概率的估计值之和小于失效概率时，人们可能会考虑停止 ED扩展和极限状态函数评估。然而，单独采用这些准则均无法保证不会有尚未发现的失效区域，也无法保证现有失效面的近似已得到充分细化。不过，正如数值算例将展示的那样，当满足开失效域这一基本要求时，该方法具有稳健性：随着新点不断加入 ED，估计值会趋近于正确解。

*3.2.*概率的积分之外 凸包

一旦实验设计中的点数超过 $N_{\mathrm{var}}+1$，就可以构造多个单形，并且其数量会随着新点的加入而迅速增加。如图 3 和 5所示，单形集合形成一个凸包，其概率含量会随着点不断加入实验设计而迅速趋近于一。为了准确计算凸包内的概率，最好计算整个单形集合中的概率含量，而不是将各个单形的求积估计值相加。外部线性边界（线段、平面、超平面）都得到了精确描述，而使用 散度定理将积分限制在 $N_{\mathrm{var}}-1$ 维边界内，是进行计算的极佳工具。 附录C专门介绍了所提出的散度定理应用方法，用于计算封闭区域内的概率积分，以及计算凸包外高斯密度未包含部分的积分。通过在散度定理中适当选择向量场，可以优雅地完成这些估计值，参见 附录C。

4. 实验设计的扩展

针对昂贵函数（即使只是二元极限状态函数）所提出算法，其开发背后的一项默认假设是：必须有效利用现有实验设计点的空间信息，包括这些点的排列方式。采用蒙特卡罗方法

（重要抽样、子集模拟、渐近抽样、直线抽样等）的方式投放实验设计点并不有效；当每次极限状态函数评估都耗费大量时间或资源时，甚至根本无法做到。要实现顺序扩展调用，就需要定义准则（学习函数），用于从所提实验设计点候选项中进行选择。该准则应在探索（发现并标注新区域）与利用（细化有关潜在/重要邻域的局部信息，即混合单纯形）之间取得平衡。

除非在概率分类（$p_{\mathcal{F}}$ 估计）方面能带来显著收益，否则不应要求在彼此相近的位置布置 ED 点。概率方面的收益可以通过以下方式获得：(i) 通过利用来细化 失效面的近似；或 (ii) 通过探索，将区域$g(xxx)$的近似尚不存在的新区域纳入扩展 范围。基于 ED 点构建的几何结构可有效用于辅助确定新 ED 点的位置。空间分解为 (i) 闭合区域 $\mathcal{I}^{(N_{\text{sim}})}$，其在凸包内划分为各个单形；以及 (ii) 延伸至无穷远的外部区域 $\mathcal{O}^{(N_{\text{sim}})}$，该区域也可利用凸包划分为$n_o$ 个子区域。外部区域的分解由通过边界面（壁面）包围凸包的n_o 面墙决定。连接坐标系原点与外部 ED 点的射线构成边，这些边是延伸至无穷远的n_o 个外部子区域之间边界的一部分。

单色单纯形（无论是失效区域还是安全区域）均不纳入选择过程。为改进区域分类，我们选择新的实验设计点，以划分以下区域之一：（1）“关键”混合单纯形，或（2）其中一个n_o 外部区域；参见图5。我们提出了一条简单规则，用于在两者之间进行选择，该规则基于概率估计。在所有混合单纯形中，我们选择概率含量p_j最大的单纯形。将该单纯形划分为更多、更小的区域，并在局部重新生成空间分解，可改善真实失效面附近的分类，最好是在高概率密度区域内。同时，如果凸包外尚未探索的概率较大，那么在凸包外插入一个新的探索型实验设计点，并从n_o 个区域中选择概率含量最大的区域，也有其合理性。我们提出一条简单规则：（1）当最大概率$_{j\in\mathcal{M}}p_j$大于关键面后方的外部概率时，若该最大概率位于概率含量最大的混合单纯形j 中，则下一个实验设计点属于利用型，其选择基于第j个混合单纯形。否则，（2）我们从外部区域中选择新的实验设计点，因为减少尚未探索的概率更为合理。为比较概率，我们将关键面后方的外部概率近似为$p_\beta = \Phi(-r)$，这是一个 FORM 式概率，其依据是高斯空间中超平面后方的概率，该超平面与原点的距离为 r（Φ 是标准高斯变量的累积分布函数）。当前凸包由一组边界墙（超平面）构成；我们首先选取与原点距离最短的超平面，并用该平面将单位概率含量分割开来；示意见图5 中间图，其中关键边界墙位于第一象限。

在情形 (1) 中，最大化$_{j\in\mathcal{M}}\, p_j > p_\beta$的动机是剖分凸包内部找到的最重混合单纯形。新的 ED 点选为外接于N_{var}-球的中心，该球经过$N_{\text{var}}+1$个j阶单纯形的顶点。当单纯形形状规则时，该点位于关键单纯形内部；见图 5 左侧的候选点c_1 。然而，细长多面体可能导致该点落在其体积之外；见图5 左侧的候选点c_2 。无论如何，该中心点都会剖分最重的混合单纯形j ，并改善真实失效面附近区域中细化的规则性（另请参见极小极大空间填充准则 [43, 67, 28]）。

在情形 (2) 中，最大$_{j\in\mathcal{M}}\, p_j < p_\beta$，我们选择凸包扩展中最少覆盖的方向，该方向由距原点 $\equiv\beta$ 最近的超平面决定。下一个实验设计点从这面墙后方的区域中选取；见图 5中。该点的确切位置从多个随机生成的候选点中选取，这些候选点位于与最近的墙平行、偏移量为 o 的平面上。候选点可以通过将随机样本投影到该平面上生成。在所有候选点中，我们选择使 Ψ_c 方程 (27) 中引入的准则达到最大值的候选点 [90]。任一候选点的准则值计算如下：$\Psi_c = \sqrt{f_c f_s}\cdot l^{N_{\text{var}}}{}_{s,c}$，其中第一项是候选点 c 及其最近邻点 s处概率密度的几何平均值，第二项则表示两者之间的距离。将该距离~~提升~~至定义域维数的幂，可量化两者之间的体积 [90]。对该准则求最大值，会选出一个候选点，使该候选点与最近的现有实验设计点之间区域的大致概率含量最大；见图 5 右。通过这种方式，

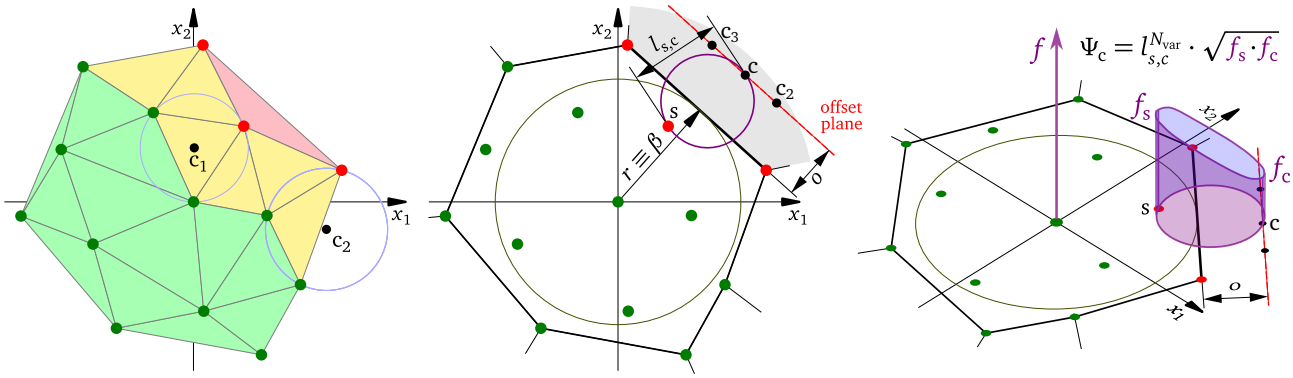


图5：左：br ；中：向外延伸至无穷远的单纯形破裂。右：通过探索候选项的选择 on 标准 Ψ c 。

选出的候选点既远离现有点，同时又倾向于位于概率密度较高的区域。然而，从一组随机生成的候选点中进行选择，可确保形成某种自然的形状，并防止出现不需要的模式。

唯一剩下的问题是偏移量的选择o。其取值应取决于用户对所需探索积极程度的判断。偏移量过小，会导致在给定球半径下消耗许多点，但搜索方向的分布会很密集。遗憾的是，在实际应用中，若失效概率较低（失效面距离较远），发现第一个失效点可能需要进行许多次极限状态函数评估。另一方面，探索阶段过于激进，可能会使ED点距离中心均值过远。显然，最优偏移量的选择不仅取决于外部概率本身，也取决于问题维度。在输入域的高维情形下，在半径为$N_{\text{var}} - 1$ 的重要环上稍微增加径向距离，就会导致占据的概率含量骤然增大，见附录B以及 [90]。我们发现，即使在探索阶段非常早期（极限状态函数评估次数很少且尚无失效点），也可以采用一个合理的选择，建议如下：

$$o = S_{\chi}^{-1}\left(\frac{p_{\mathcal{O}}^{(N_{\text{sim}})}}{\text{Sur}\left[B_{R+q}\right]}; N_{\text{var}}\right) - r, \tag{11}$$

其中 $S_{\chi}^{-1}(\cdot; N_{\text{var}})$ 是 χ 分布的逆生存函数，用于计算 $B\rho$的半径，使其外部对应指定概率，见方程（B.9），且 $\text{Sur}\left[B_{R+q}\right]$ 是半径为 N_{var}的球面，半径为 $R+q$，其中 R 是距原点最远的 ED 点到原点的距离（图 3 右侧所示外接球的半径），而 $q = 1$。偏移量 o 是所提方法的一个自由参数；通过为 o选择特定规则，用户可以控制探索的激进程度。所给出的方程（11）只是众多选项之一；在我们的案例中，它在不同维度及不同类型的极限状态函数问题中表现良好。以下给出的所有数值算例均采用此规则计算。

我们注意到，在典型应用中，失效属于稀有事件，而扩展过程中添加的所有 ED 点最初都表示安全状态。在这一 探索阶段，无需对凸包进行三角剖分。然而，一旦 ED 中首次出现稀有事件，就会构建上述三角剖分，并且方程（2）中列出的四种类型的区域都可能出现。

所述ED扩展方法是自适应的且顺序进行的，也就是说，几何表示会根据当前掌握的信息进行调整（来自新ED点的信息可能会在局部导致几何骨架发生重大重构），并且ED点逐个添加。

5. 估计的稳定性、可重复性、收敛性和效率

所呈现的概率估计值存在多个变异来源。首先，扩展算法构建了一个划分输入空间的骨架，而由于探索步骤中点选择所涉及的随机性，这种分解并不可重复。因此，

多次运行扩展算法会产生不同的空间分解历史。此外，应用于单形的确定性求积公式不止一种，而是否对求积进行自适应细化通常取决于用户指定的参数。尽管估计概率存在上述差异来源，但我们通过无数次数值仿真发现，估计量的变异性非常低。

这些估计量无法单调收敛到精确结果。原因在于，当 ED 较小时，几何结构非常粗糙，因此随着极限状态函数评估次数N_{sim}增加，估计值可能呈现相当锯齿状的曲线。

平均收敛速率在很大程度上取决于问题维度N_{var}。原因有两方面。在最初的探索阶段，极限状态函数结果只有一种，而在高维空间中，凸包占据空间的速度较慢。因此，在高维情况下，外部概率估计的下降速度也较慢。一旦发现第一个稀有事件，扩展算法便会在单纯形结构的局部细化 与全局扩展 之间自动切换。然而，局部利用步骤所占的比例很大程度上取决于失效面的形状。如果边界在高概率区域内的范围较小，其细化速度就很快。但如果边界接近标准高斯空间中N_{var}维球的表面，其范围就很大，因此细化会消耗许多 ED 点。随后，估计量的收敛速率会降低。

所提出的精确几何方法仅适用于小维度（不超过八维）。超过这一限制后，计算几何在CPU和/或内存方面的开销会变得过高。为了能够处理高度非线性、含噪甚至二元极限状态函数而付出的代价是：在这些情形下，大多数现有方法要么会失效（近似方法和平滑替代模型），要么需要进行数量过多的极限状态函数评估（模拟方法）。

与其他现有方法相比，所提出的方法仅通过很少次数的极限状态函数评估，就能获得相当可靠且稳健的估计结果。尽管我们的方法从极限状态函数评估中仅使用二元信息：失效或成功，但这一点依然成立。

关于该方法的计算效率，我们指出，概率的估计以及最佳候选位置的选择（ED 的扩展）都可以针对所有可能的结果预先计算，而此时耗时较长的极限状态函数仍在计算中。这样，所提算法实际上所耗费的时间可以减少，甚至降至零。

6. 失效概率对随机变量的灵敏度

在实际使用失效概率估计方法时，会产生这样一个问题：有多少个单独变量会影响失效事件？更一般地说，我们需要通过分析某个已定义事件中各个变量的重要性占比，来优化产品或流程。这样做能为我们提供重要信息，帮助我们聚焦于关键的不确定性，忽略不重要的因素，从而降低问题维度。

当 LSF $g(\mathbf{x})$ 可以由线性函数合理近似时，FORM解不仅对于估计失效概率非常有效，而且设计点搜索的副产品是对 α-灵敏度 [38, 57]进行简单评估。这些值具有明确的几何意义，并且可直接应用于设计规范中的分项安全系数法。假设我们有一个线性性能函数 $g(\mathbf{x})$ ，且具有一个唯一的设计点 $\mathbf{x}^{\star} = \operatorname{argmin}\{\|\mathbf{x}\| \mid g(\mathbf{x}) = 0\}$。该最中心失效点到标准高斯空间原点的欧几里得距离就是安全指标$\beta = \|\mathbf{x}^{\star}\| = \sqrt{\sum_{v=1}^{N_{\mathrm{var}}} (x_v^{\star})^2}$。该距离也可以利用 α-灵敏度向量 $\boldsymbol{\alpha}$表示，该向量的单位长度为： $\|\boldsymbol{\alpha}\| = \sqrt{\sum_{v=1}^{N_{\mathrm{var}}} \alpha_v^2} = 1$。向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 是性能函数在标准正态空间原点处的负单位梯度，即 $\boldsymbol{\alpha}$ 指向重要方向（见图6a中的示意图）；设计点的坐标可以得到为$\mathbf{x}^{\star} = \beta\boldsymbol{\alpha}$。 $\boldsymbol{\alpha}$ 的分量（称为α-灵敏度因子）被视为在设计点（最中心失效点）处， β 对$\mathbf{x}$ 值变化的灵敏度度量。图6a说明，对于非线性 LSF，基于单个设计点的灵敏度可能无法完整反映所有促成失效的变量。该图描绘了与下列 LSF 相对应的失效面。当$g(\mathbf{x}) \le 0$ 时$g(\mathbf{x}) = \beta - x_1^4/c - x_2$，时发生失效，其中 $\beta = 3$ 且 $c = 33$。采用 $c > 32$ 会导致

一个唯一的设计点 $\mathrm{x}^\star = \{0, 3\}$，但在点 $\mathrm{x}_1 = \pm 2.84$ 和 $\mathrm{x}_2 = 1.02$ 周围还有两个对称分布的区域，它们也对失效概率有相当大的贡献；参见图6a中的深红色区域。基于 $\mathrm{x}^\star$ 的 FORM α-灵敏度为 $\boldsymbol{\alpha} = \{0,1\}$，表明对变量 x_1 不存在灵敏度。事实上，$\mathrm{g}(\mathrm{xxx})$ 在 $\mathrm{x}^\star$ 附近关于 x_2 是线性的，并且不依赖于零点 x_2。失效面 $\mathrm{x}^\star$ 处是线性的，而二阶可靠度理论修正失效了，因为 β-点处的曲率为零。然而，失效事件对变量 x_1 和 x_2 [90]的灵敏度几乎相同。

Vo˘rechovský 最近的工作 [90] 将坐标贡献的拆分推广到整个失效域 $\mathcal{F}$，而不仅仅是设计点。这一推广使得可以考虑失效集内部非线性的极限状态函数及其梯度；参见图6b。其思路是，虽然 $\mathcal{F}$ 内部任意区域对失效概率的贡献都与局部概率密度成正比，但这一局部贡献可以利用广义 N_{var} 因子拆分为若干项。具体而言，变量 v 在点 xxx 对失效事件 $\mathcal{F}$ 的局部贡献为

$$s_v^2(\boldsymbol{x}) = \mathbb{1}_{\mathcal{F}}(\boldsymbol{x}) f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) \alpha_v^2(\boldsymbol{x}), \tag{12}$$

其中 $\alpha_v(xxx)$ 是变量 v 的局部贡献，其标准化方式使得 $\sum_{v=1}^{N_{\mathrm{var}}} \alpha^2(_vxxx) = 1$ 对任意点 xxx 均成立。对所有变量求和，即可得到失效概率（概率密度）的完整局部贡献

$$\sum_{v=1}^{N_{\mathrm{var}}} s_v^2(\boldsymbol{x}) = \mathbb{1}_{\mathcal{F}}(\boldsymbol{x}) f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) \sum_{v=1}^{N_{\mathrm{var}}} \alpha_v^2(\boldsymbol{x}) = \mathbb{1}_{\mathcal{F}}(\boldsymbol{x}) f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}). \tag{13}$$

该概率密度在整个设计域 $p_{\mathcal{F}} = \int_\Omega \mathbb{1}_{\mathcal{F}}(xxx) f_{\boldsymbol{X}}(xxx) \mathrm{d}xxx$ 上的积分即为全局失效概率；与方程（1）对照。不过，方程（12）中对各个变量的拆分，使得可以直接定义变量 v 的总体贡献，记为 $s^2\, v(xxx)$

$$s_v^2 = \int_\Omega s_v^2(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega \mathbb{1}_{\mathcal{F}}(\boldsymbol{x})\, f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})\, \alpha_v^2(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\mathcal{F}} f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})\, \alpha_v^2(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{14}$$

问题仍然是：要确定各个变量的贡献，需要哪些局部 α-因子。一种选择是使用极限状态函数的标准化局部梯度

$$\alpha_v^2(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\nabla g_v(\boldsymbol{x})}{\|\nabla \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\|} \right)^2, \quad \text{i.e.} \sum_{v=1}^{N_{\mathrm{var}}} \alpha_v^2(\boldsymbol{x}) = 1 \ \text{ for any } \boldsymbol{x}. \tag{15}$$

因此，所有敏感度度量之和等于一，$\sum_{v=1}^{N_{\mathrm{var}}} s^2{}_v$，它们可以被视为对完整失效概率的全局贡献。然而，对方程（15）中的极限状态函数取梯度，显然不具有各种重新参数化和问题重新表述下的不变性，而这些重新参数化和重新表述会导向相同的失效集，$\mathcal{F}$ 并以非比例方式改变极限状态函数的值。在 [90], 二元或离散状态函数中，梯度无法使用。相反，在失效域的每个位置都使用指向最近安全点的方向；参见图6b中穿过一簇绿色点的洋红色虚线。失效域中背景的概率密度表明，对 $s^2{}_v$ 的大部分贡献都源自 $\mathcal{F}$ 中的高概率密度区域，并且会自动处理多个设计点对不同敏感度产生贡献的情况。

在本文中，我们认为，敏感度度量不必基于整个失效集 $\mathcal{F}$，而这正是 $s^2{}_v$s 情况下的做法。与单个变量相关的敏感度可视为从安全运行到失效以及反向转变的贡献。因此，我们建议将计算局部贡献的范围限制在失效面 $\partial\mathcal{F}$ 上，安全事件与失效事件之间的转变发生于此。我们预计该边界足够光滑。沿着这条边界，局部贡献 $t^2{}_v(xxx)$ 对转变敏感度的贡献同样与概率密度及 α-因子成正比，参见方程（12）

$$t_v^2(\boldsymbol{x}) = f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) \alpha_v^2(\boldsymbol{x}), \quad v = 1, \ldots, N_{\mathrm{var}}, \tag{16}$$

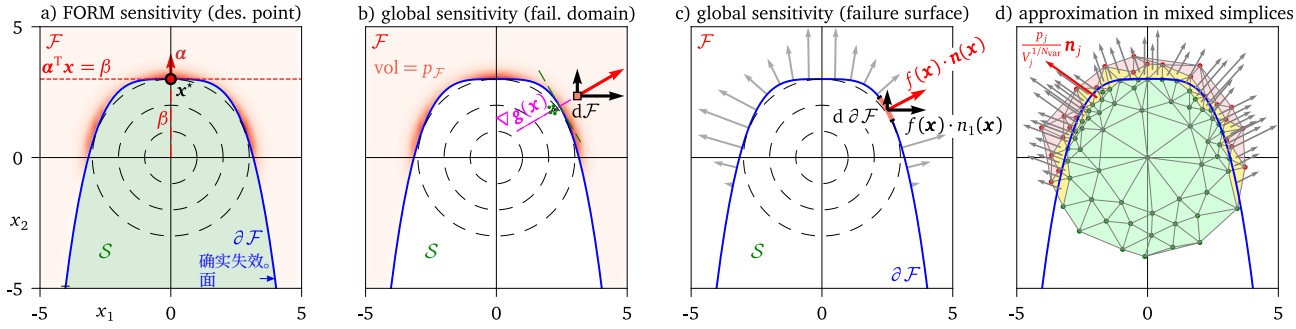


图 6：敏感度度量。a) 基于单个设计点的 FORM 敏感度 $\boldsymbol{\alpha} = \{0,1\}$；b) 基于 [90], 的灵敏度，该灵敏度基于对整个失效域的积分以及梯度的局部方向（对于二元/离散 LSF，通过最近边界近似）；c) 基于失效面轮廓所提出的敏感度定义 $\partial\mathcal{F}$；d) 所提出的数值估计示意图：在 85 个 ED 点处评估 LSF 后，构建了 48 个混合单纯形。

其中，$\alpha_\nu(xxx) \equiv n_\nu(xxx)$ 是单位法向量的分量$nnn(xxx)$，该向量位于点xxx 处的失效面上。这些按局部概率密度缩放的单位法向量在图6c 中以灰色箭头表示。对边界的通量T在整个失效面上积分，即可一次性得到所有变量的全局贡献

$$T = \iint_{\partial\mathcal{F}} f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\partial\mathcal{F} = \iint_{\partial\mathcal{F}} \sum_{\nu=1}^{N_{\text{var}}} f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})\,\alpha_\nu^2(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\partial\mathcal{F} = \sum_{\nu=1}^{N_{\text{var}}} \iint_{\partial\mathcal{F}} t_\nu^2(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\partial\mathcal{F}\,. \tag{17}$$

最后一个表达式表明，可以利用根据局部几何计算出的平方 α 因子，将其积分拆分为各个变量的贡献。因此，所提出的敏感度$t^2{}_\nu$ 很容易通过沿整个边界，对变量ν 对总通量T 的贡献进行轮廓积分而得到

$$t_\nu^2 = \frac{1}{T} \iint_{\partial\mathcal{F}} t_\nu^2(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\partial\mathcal{F} = \frac{1}{T} \iint_{\partial\mathcal{F}} f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})\,\alpha_\nu^2(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\partial\mathcal{F}\,. \tag{18}$$

所有灵敏度之和等于一：$\sum_{\nu=1}^{N_{\text{var}}} t^2{}_\nu = 1$，并给出了各个变量在两种状态转变中的全局占比。定义示意图见图6c。与$s^2{}_\nu$ [90], 的情况不同，该计算并非在N_{var} 维体积中进行，而仅限于失效面；失效面只是一个$N_{\text{var}}-1$ 维对象。还需注意，所提出的转变敏感度可以推广到不仅限于两种状态（失效/成功）的情况。如果相应集合彼此不相交，则积分仅限于所关注的状态对之间的所有边界。例如，可以研究从安全运行到失效类型 1 的转变，而不考虑从安全状态到失效类型 2 的转变。

实际计算$t^2{}_\nu$ 因子，可作为所提出的设计域几何分解方法的副产品获得；参见图6d。由于我们只关注状态之间的转变，因此只需关注据称发生转变的混合单纯形。假设已知已探索设计域部分的当前分解，如图6d所示，其中包含 85 个 ED点。所有混合单纯形的列表标记为$j = \{1, 2, \ldots, N\mathcal{M}\}$。每个这样的单纯形都通过其概率含量$p_j$对$p_\mathcal{M}$ 作出贡献。在每个这样的单纯形中，可利用真实失效面的法向量近似，将各变量对概率p_j 的贡献 $\alpha^2{}_\nu$ 加以划分。为获得这些法向量，我们提出：（1）将所有$N\mathcal{M}$ 个单纯形划分为若干子组，这些子组通过$N_{\text{var}}-1$ 维面相连（构成由混合单纯形组成的实体）；（2）将每个子组划分为尽可能大的单纯形簇，使得单个（超）平面能够严格分隔不同类型的 ED点（顶点）；（3）对簇中的所有单纯形j 使用平面法向量nnn_j。图6d展示了这样一种情况：失效面被一组紧凑的混合单纯形覆盖，且这些单纯形两两共享一条线段（形成一个子组）。然而，由相邻单纯形簇得到的近似法向量只有有限个不同方向。这样的聚类至关重要，可避免潜在的伪敏感度；如果对每个单纯形分别近似法向方向，就可能产生伪敏感度。这些近似法向量的微小偏差会人为地抬高某些$t^2{}_\nu$ 因子，同时降低其他因子，因为碎片化的法向量会

在某些变量上产生寄生投影。将所有单纯形中的概率p_j 分配给各个变量后，把这些贡献的总和除以概率总和，即可得到估计的敏感度

$$t_v^2 \approx \frac{\sum_{j\in\mathcal{M}^{(N_{\text{sim}})}} \left(p_j \cdot V_j^{-1/N_{\text{var}}}\right) n_{j,v}^2}{\sum_{j\in\mathcal{M}^{(N_{\text{sim}})}} \left(p_j \cdot V_j^{-1/N_{\text{var}}}\right)}, \tag{19}$$

其中，项 $p_j \cdot V^{-1/N_{\text{var}}} j$ 用来近似在第 j 个单纯形上积分 $\iint f_{\mathbf{X}}(xxx)\, d\partial\mathcal{F}$。在此近似中，我们假设第 j 个单纯形形状规则，其体积 $V_j = S_j \cdot v_j$ 可表示为通量通过的表面积 S_j 与厚度 v_j的乘积，其中 $S_j = V^{(N_{\text{var}}-1)/N_{\text{var}}} j$，$v_j = V^{1/N_{\text{var}}} j$。第 j 个单纯形的概率含量可写为其平均概率密度 f_j与体积的乘积：$p_j = f_j \cdot V_j$。因此，所需的平均通量为 $f_j \cdot S_j = p_j \cdot V^{-1/N_{\text{var}}} j$。

7. 独立高斯变量的数值算例

我们通过数值算例展示所提方法的应用：从输入随机变量相互独立且服从高斯分布的情形开始，最后以相关非高斯变量为例说明如何采用 Nataf 变换。前八个算例是标准化的双变量问题，其性能函数经过选择，旨在考察那些给现有主流算法带来独特挑战的问题（多个失效点、对问题重新参数化的依赖、交替失效域、闭合失效域等）。第九个算例是一个包含三个高斯变量的实际问题，之后是一个六维标准数值算例。为了展示所提方法在高维情况下的表现，我们将五种具有代表性的极限状态函数推广到任意维度，并给出从二维到八维所有维度的结果；八维大致是所提方法的适用上限。在所有数值算例中，完整的极限状态函数（可能是光滑函数）都简化为一个为所提算法提供结果的二元函数。一般而言，所有利用极限状态函数的数值来估计到失效面的距离、计算极限状态函数梯度或构建光滑替代模型的现有方法，在这种情况下都会失效。我们证明了所提方法能够快速收敛至精确结果，并提供可复用于后续细化的信息。

7.1. 四分支函数

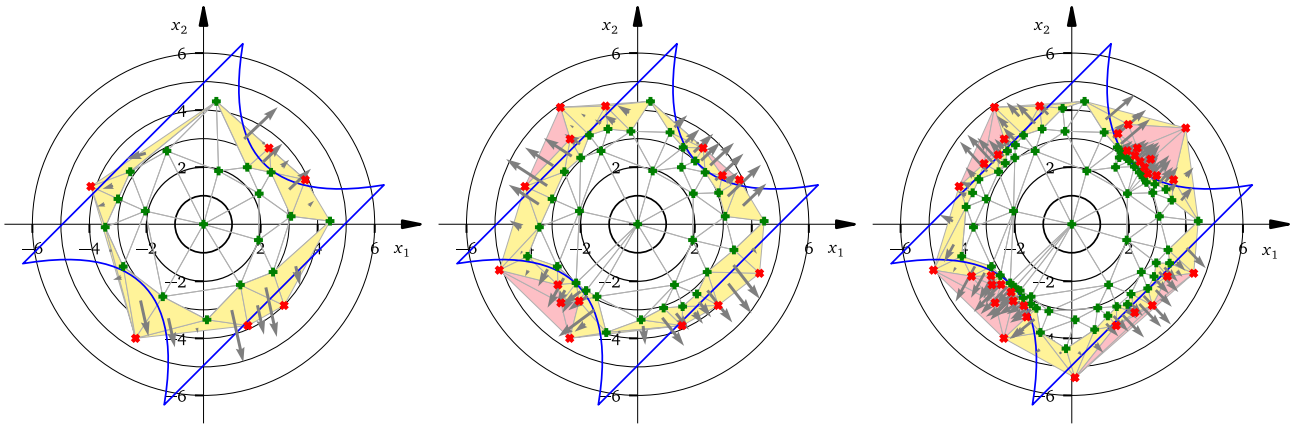


图 7：方程（20）中的四分支可靠性问题。左：经过 $N_{\text{sim}} = 25$ 次模型评估后的情况（检测到的六个失效点促成了 18 个混合单纯形的构建；中：其中 $N_{\text{sim}} = 50$ 个为失效点（构建了五个失效单纯形）；右：$N_{\text{sim}} = 100$，凸包外的概率含量比失效概率小了几个数量级。灰色箭头显示了混合单纯形对敏感度的贡献。

第一个问题是著名的四分支函数 [9]。这是可靠性分析中常用的基准问题；例如，参见采用各种参数设置的研究 [76, 26, 66, 74, 53, 4, 42, 98, 5, 104, 87, 82]。

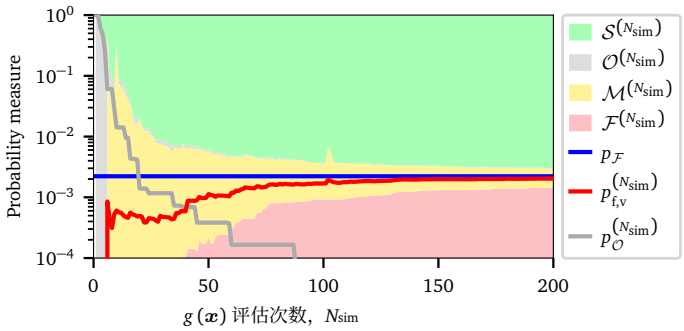


图 8：四分支问题估计值的收敛监测。

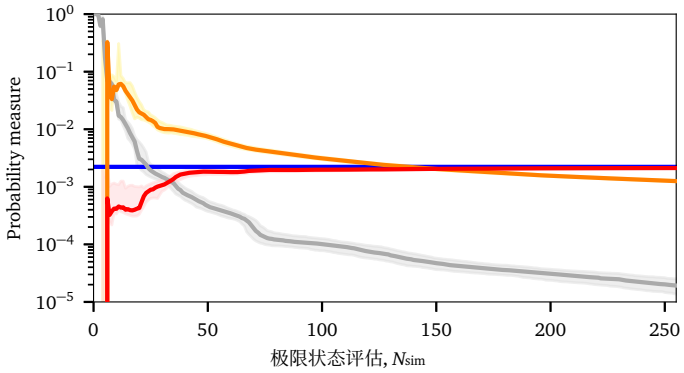


图 9：变异性 由一支乐队伴奏的sing 针对四分支示例情况研究的所提出方法。每次中位数估计均为 acc 25th 和 75th 百分位数。

尽管精确失效概率通常相当高，因此问题很容易求解。该函数描述了一个串联系统 的失效，该系统包含四个不同的极限状态分量：失效面的两个线性分支和两个非线性分支。

$$g(x_1, x_2) = \min \begin{cases} 3 + 0.1(x_1 - x_2)^2 - (x_1 + x_2)/\sqrt{2} \\ 3 + 0.1(x_1 - x_2)^2 + (x_1 + x_2)/\sqrt{2} \\ x_1 - x_2 + 7/\sqrt{2} \\ x_2 - x_1 + 7/\sqrt{2} \end{cases}, \tag{20}$$

其中两个输入变量 $xxx = \{x_1, x_2\}$ 被建模为两个相互独立的标准高斯随机变量。请注意，不同作者使用不同的参数来替代数字 7（最初为 3.5，有时为 6 或 11）。失效事件定义为 $g \leq 0$，所提算法仅使用此二元信息。图 7 中的蓝线表示失效面，它将闭合的安全区域与开放的失效区域分隔开来。同心圆表示具有相同高斯密度的等值线。图 7 还展示了自适应序贯抽样三个阶段构造的安全、混合和失效单纯形：在评估 $g(xxx)$ 25 次、50 次和 100 次之后。所提方法在 $N_{\text{sim}} = 200$ 次极限状态函数评估后的失效概率估计值为 $2.03 \cdot 10^{-3}$，与精确解 $p_{\mathcal{F}} = 2.22 \cdot 10^{-3}$。

图中报告了所提出估计量的演变情况。8下文将以此作为所提方法的典型收敛图进行描述。通常，需要进行若干次模型评估，才能构建出多个“绿色”单形，以界定被认为安全的区域。单形所覆盖区域之外的部分以灰色表示。可以看到，第五次$g(xxx)$函数评估发现了第一个失效事件；参见通过方程（$p_{\text{f, v}}$ （10）得到的首个非零估计值，以及混合单纯形的出现。从那时起，扩展算法不断在探索新的外部区域和利用现有混合区域（黄色单形）之间切换。在进行$N_{\text{sim}} = 29$ 次极限状态函数评估后，构建出了第一个闭合的失效三角形。评估次数达到 60 次时，所有红色单形对应的概率都超过了凸包之外区域对应的“外部概率”；参见灰线与紫色黄色边界在图8中的交点。从那时起，更多样本取自现有混合单纯形内部（细化

关于 f 失效曲面），而非用于扩展至现有凸包之外的样本 .

关于使用所提算法获得的结果是否具有可重复性，一个自然的问题随之产生，见第 5 节。四分支问题在相同的参数设置下运行了 $N_{\text{run}} = 500$ 次，我们在图 9 中展示了估计量的收敛性。粗实线表示中位数，每条粗实线旁还配有一个散布带，用于显示 25^{th} 和 75^{th} 百分位数。随机散布非常小，即单形骨架在不同运行中具有定性上的相似性——其表现几乎如同确定性方法。改变这些曲线特征的唯一方法是调整探索的激进程度；见第 4 节中的讨论。除先前在图 8 中展示的估计量外，我们还添加了一条橙色曲线，用于表示与“混合”单形相关的概率。当该曲线与对应于估计失效概率 $(N_{\text{sim}} \approx 150)$ 的曲线相交时，与包含边界的单形相关的概率含量会变得非常低，因而可能不必再对其进行细化。

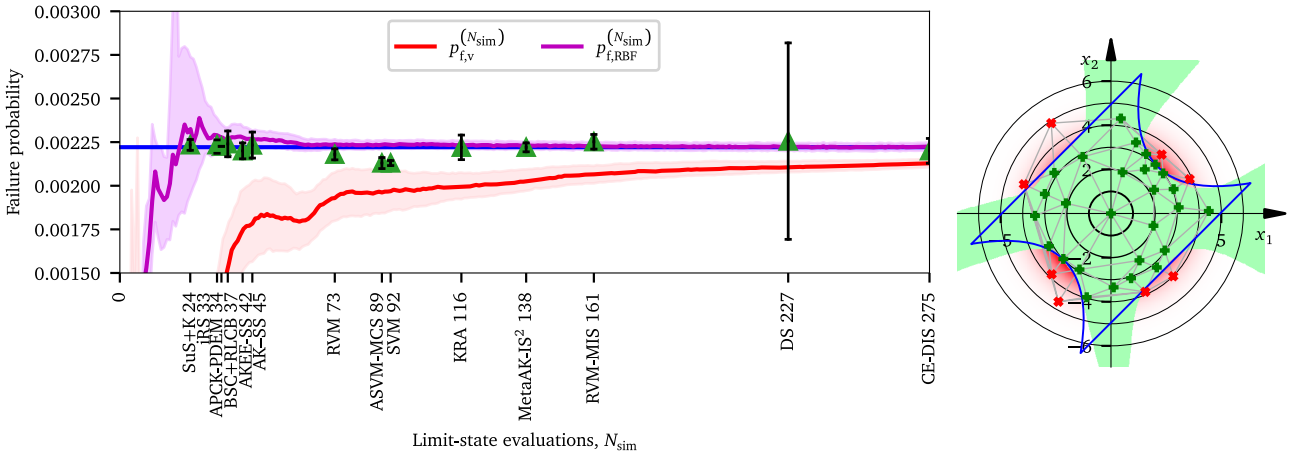


图10：左：与其他方法的比较。须线界定区间 $\pm 0.67\sigma$，条带显示 25^{th} 和 75^{th}百分位数。右：基于实验设计的径向基函数代理模型，在进行$N_{\text{sim}} = 35$ 极限状态函数评估后。

与文献中其他现有方法的比较。 我们还使用此示例比较所提出方法在扩展 ED 以及 估计 失效概率方面与其他现有方法的效率。许多作者过去曾研究过这一数值示例，我们从文献中收集了相关结果，见表 7.1。相同数据也绘制于图 10中，其中平均结果附带方差估计值。

红线显示了在基本设置下使用所提出方法得到的结果：估计量仅基于极限状态函数提供的二元信息。因此，与其他对比方法相比，该方法的估计精度较低；其他方法构建了各种代理模型，并利用了平滑$g(xxx)$函数的数值信息。

当 $g(xxx)$ 函数产生的数值被认为能够映射出良好、连续且平滑的输出时，顶点中的数值可用于构建代理模型（一个全局近似或若干个局部插值）。由于该代理模型基于一组放置在高概率区域中、靠近失效面的 ED点，因此有望非常准确地近似真实失效面（见第 4节中提出的主动学习）。这些代理模型可以通过多项式、径向基函数、克里金法、多项式混沌展开、神经网络等回归方法构建。随后可以对所得代理函数进行分析，例如采用重要抽样等抽样估计。为了将所提出的 主动学习& 稀有事件概率估计 与其他使用 LSF 数值的方法进行公平比较，我们进行了另一组计算。我们重新使用了此前从 ED 扩展中获得的 ED点，但对于每个样本量，我们都基于 $g(xxx)$函数值，而不仅仅是二元结果，建立了径向基函数（RBF）近似。我们使用了类 `Rbf` 中带有默认参数的最简单 RBF，该类来自 `scipy.interpolate` 子包 [88]，并根据 RBF 代理模型的符号，将结果分类为失效域和安全域。重复运行的结果如图 10左图所示，使用洋红色表示（中位数 $\pm$ 25^{th} 和 75^{th} 百分位数）。显然，即使ED点数量小至 $N_{\text{sim}} = 35$，简单 LSF 函数的表示仍然非常出色，见图 10 右图。估计值的改进（图 10 左图）源于对失效面进行更准确的分类，位于

表1：研究四分支问题的论文总结。

Year	方法	N_{sim}	$\hat{}$段落 $\hat{p}_f \cdot 10^3$	协方差$_{\hat{p}_f}$ (%)
2000	DS [91]	227	2.2556	37
2011	AK-MCS+U [26]	96	2.233	-
2011	AK-MCS+EFF [26]	101	2.232	-
2011	^{2}智能 [11]	1035	2.21	1.7
2013	CE-AIS-GM [45]	3943	2.15	3
2014	MetaAK-重要抽样^2 [19]	48+90	2.22	1.7
2016	AK–SS [40]	45	2.233	4.94
2017	KRA [99]	116	2.22	4.7
2017	ASVM-MCS [65]	89	2.13	2.2
2018	iRS [33]	33	2.24	-
2019	AKEE-SS [101]	41.7	2.20	3.07
2020	BSC+RLCB [100]	36.66	2.240	4.89
2020	DRL [97]	2597	2.314	-
2021	ABSVR1 [93]	39.6	2.214	-
2021	ABSVR2 [93]	42.8	2.222	-
2021	SuS+K [20]	23.9	2.234	2.05
2021	相关向量机 [49]	73	2.18	2.14
2021	支持向量机 [47]	91.97	2.13	10
2022	RVM-MIS [95]	161	2.252	2.759
2022	CE-DIS [102]	275	2.20	4.79
2022	APCK-PDEM [105]	34.5	2.226	0.32

四个设计点附近。简而言之，尽管选择准则本身不使用$g(xxx)$函数的数值，但所提出的主动学习所选择的ED点同样非常适合光滑代理模型。诚然，无论是径向基函数还是二元代理模型，都未能正确分类这些“角点”，见图10 右侧。然而，这些远端区域与失效概率估计无关，扩展算法正确地忽略了这些区域，并将ED点集中在高概率区域的边界周围。径向基函数分类器的效率与文献中已知的最佳方法一样高。这意味着，所提出的方法对于性质良好的极限状态函数具有竞争力，但其优势在更困难的问题中更为突出。我们采用其他基于克里金法或支持向量回归构建代理表示的方法时发现，它们过度依赖用户对核函数及其参数的选择。事实上，一些论文的作者甚至指出，对于这个示例，他们作了例外处理，跳过了筛查，或者通过手动“凭直觉”设置感兴趣区域。我们认为，这不利于算法在实践中的广泛应用。我们声明，本文中的所有数值示例均使用完全相同的扩展算法设置进行计算。在所提出的方法中，用户无需进行干预。

由于对称性，所提出的全局敏感度相同$t_1^2 = t_2^2 = 0.5$.

7.2. 分段线性函数

考虑一个包含两个极限状态函数的串联系统，其中再次涉及两个相互独立的标准正态变量x_1 和x_2：$g(xxx) = \min(g_1, g_2)$。这两个极限状态函数是简单的分段线性函数

$$g_1(x_1) = \begin{cases} 0.85 - x_1/10, & \text{for } x_1 \le 3.5 \\ 4 - x_1, & \text{for } x_1 > 3.5 \end{cases}, \tag{21}$$

$$g_2(x_2) = \begin{cases} 2.3 - x_2, & \text{for } x_2 \le 2 \\ 0.50 - x_2/10, & \text{for } x_2 > 2 \end{cases}. \tag{22}$$

Breitung [14], 提出了这个包含两个“设计点”的示例，并指出，从原点附近开始的简单梯度搜索算法以及随机梯度算法（SuS）

会偏离最中心的失效点，错误地只找到第二个（距离更远的）局部点。

与SuS不同，我们的算法从原点出发均匀地扩展占据空间的凸包，不会受到$g(xxx)$函数值的误导，因为它只获取二元信息。图11展示了实验设计的两个阶段，以及使用所提算法获得的收敛图。为了将我们的算法与一项非常近期的研究进行比较，[92], 收敛性相对于可靠性指标 β （见图11中的绿色线和散点带）进行了展示。所提方法使用更少的极限状态函数评估即可提供更准确的结果，并且以与概率含量成比例的方式，利用更多ED点解析失效面的更中心部分。

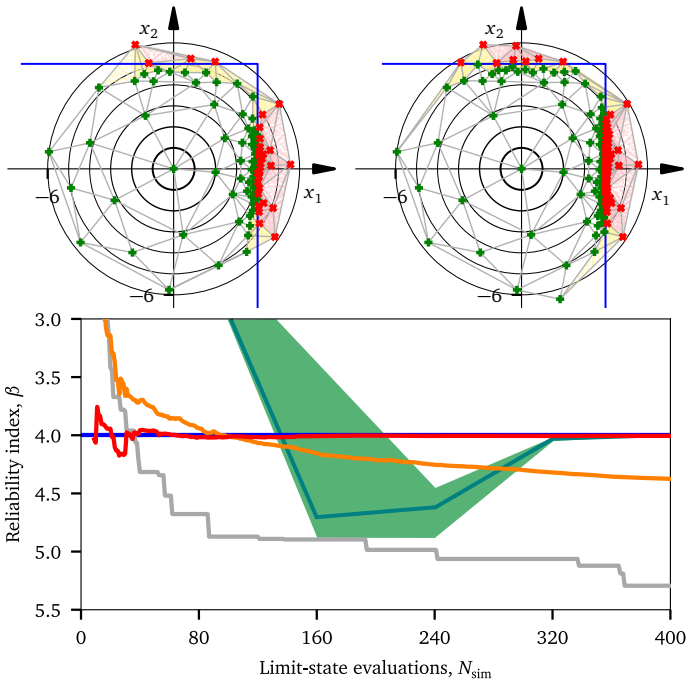


图11：具有方程（21）和（22）中最小值的分段线性函数。绘制 $N_{\text{sim}} = 100$和200（上图），以及收敛图（下图）。紫色和黄色点分别是失效单形和未判定单形中的确定性求积点。它们用于积分其概率含量。带有散布带的绿色直线根据 [92]重新绘制。它代表算法的一次单独运行及估计的 95% 置信区间。其余直线由所提算法获得，可使用图 8 中的图例进行解读。

所提算法的全局敏感度为 $t_1^2 = \varphi(4)\Phi(5)/T \approx 0.989$ 和 $t_2^2 = \varphi(5)\Phi(4)/T \approx 0.011$，其中$T = \varphi(5)\Phi(4) + \varphi(4)\Phi(5) \approx \varphi(5) + \varphi(4)$, $\varphi(x)$ 是概率密度， $\Phi(x)$ 是标准高斯变量的累积分布函数。所提算法使用混合单纯形近似这些精确值。在$N_{\text{sim}} = 400$ 个ED点进行极限状态函数评估后，两个敏感度稳定在精确值。

7.3. 不变性（串联系统）

在第 5.3 节中，Breitung [14] 给出了另一个示例，并利用该示例记录了 SuS 中与根据LSF 形状进行梯度优化相关的问题。他考虑了一个由两个以标准正态变量表示的独立组件构成的串联系统 x_1 和 x_2。当两个组件中至少有一个失效时，就会发生失效事件。在该示例中，第一个组件在 $x_1 > 5$ 时失效，而当 $x_2 < -4$时，第二个组件的失效被触发。这些单个组件的条件可以通过例如使用两个线性函数表述为

$$g_1(x_1) = 5 - x_1 \tag{23}$$
$$g_2(x_2) = 4 + x_2. \tag{24}$$

整个串联系统的极限状态函数为

$$g(x_1, x_2) = \min[g_1(x_1), g_2(x_2)]. \tag{25}$$

然而，通过重新表述第二分量的失效条件，也可以获得相同的失效集。Breitung [14] 选择了一个逻辑斯蒂函数

$$g_2^\star(x_2) = \frac{1}{1+\exp(-2x_2-8)} - 0.5 \tag{26}$$

以替换方程 (25) 中 LSF 里的 $g_2(x_2)$。方程 (24) 和 (26) 中定义的一个重要区别在于原点附近 LSF 的形状。他的观点是指出：通过不同的光滑 LSF 表示同一失效集，可能会影响参与设计点搜索的基于梯度的算法的结果，类似地，也可能对 SuS 算法的表现产生负面影响。同样，该问题包含一个凸多面体安全域，其边界由两个正交的线性安全裕度构成，可靠性指标为 $\boldsymbol{\beta} = \{4; 5\}$。因此，它与图 11 所示的前一个分段线性函数示例具有相同的拓扑结构。分别对应两个失效面的失效概率数量级不同：$p_{\mathcal{F}}(\beta_1) = \Phi(-4) \approx 3.167 \cdot 10^{-5}$，以及 $p_{\mathcal{F}}(\beta_2) = \Phi(-5) \approx 2.867 \cdot 10^{-7}$。同时满足两个准则而失效的概率可以忽略不计，$p_{\mathcal{F}} = p_{\mathcal{F}}(\beta_1) + p_{\mathcal{F}}(\beta_2) - [p_{\mathcal{F}}(\beta_1) p_{\mathcal{F}}(\beta_2)] \approx 3.196 \cdot 10^{-5}$。所提出的全局敏感度与前一个示例互换，即 $t_1^2 \approx 0.01$ 和 $t_2^2 \approx 0.989$。

这种对同一失效条件各种定义的依赖，以及更复杂系统中可能出现的相关收敛问题，支持了我们的论点：算法应基于二元定义，即失效或成功。所提算法不受底层可靠性问题的重新表述或重新参数化影响，且运行估计值能够快速收敛到精确解。

7.4. 乘积函数

本示例说明了这样一个问题：基于梯度的方法会沿最速下降方向“滑落”，但通常无法找到所有 设计点。定义一个具有四个设计“贝塔”点的“乘积”函数，

$$g(x_1, x_2) = \beta^2/2 - |x_1 \cdot x_2|, \tag{27}$$

其中两个输入变量 X_1,X_2 相互独立，且均为标准正态变量；$g(xxx)$ 的负值表示失效。Breitung [14] set $\beta = \sqrt{30}$ 并报告称，在其仿真中，SuS 仅在五十次方法运行中的九次找到了全部四个贝塔点。所提算法的性能如图 12 所示。该算法在所有方向上均匀扩展，不带偏见，并可靠地找到全部四个设计点。当函数调用次数超过 $N_{sim} = 100$时，外部概率降至估计失效概率以下，并且分隔四个重要失效区域的边界部分得到了充分细化。解析解可基于以下事实：乘积 $Z = X_1X_2$ 具有概率密度 $f_Z(z) = K_0(|z|)/\pi$，其中 $K_n(\cdot)$ 为第二类修正贝塞尔函数（n 阶）。分布函数 $F_Z(z) = \int z_{-\infty} f_Z(t)dt$ 可按如下闭式求解

$$F_Z(z) = \frac{1}{2} + \frac{z}{2\pi}\Big[K_0(|z|)(2 + \pi L_1(z)) + K_1(|z|)\pi L_0(|z|)\Big], \tag{28}$$

其中$L_0(\cdot)$ 和$L_1(\cdot)$ 分别为零阶和一阶修正 Struve 函数。利用分布函数，精确的失效概率为：$p_{\mathcal{F}} = P(g(XXX) < 0) = P\left(\beta^2/2 < |X_1 \cdot X_2|\right) = P\left(Z < -\beta^2/2 \cup Z > \beta^2/2\right) = 2 \cdot F_Z\left(-\beta^2/2\right) \approx 6.064 \cdot 10^{-8}$。在存在多个设计点的情况下，对如此小的失效概率进行准确估计——对于具有非线性失效面的二元极限状态函数，仅需约一百次极限状态函数评估——已经相当不错。

所提出的全局敏感度因对称性原因而快速收敛至相同值 $t_1^2 = t_2^2 = 0.5$。

7.5. 元球函数

Breitung [14], 受 [96], 启发，使用元球示例说明了这样一种风险：SuS 的随机梯度优化不会朝着对失效概率贡献最大的区域前进，

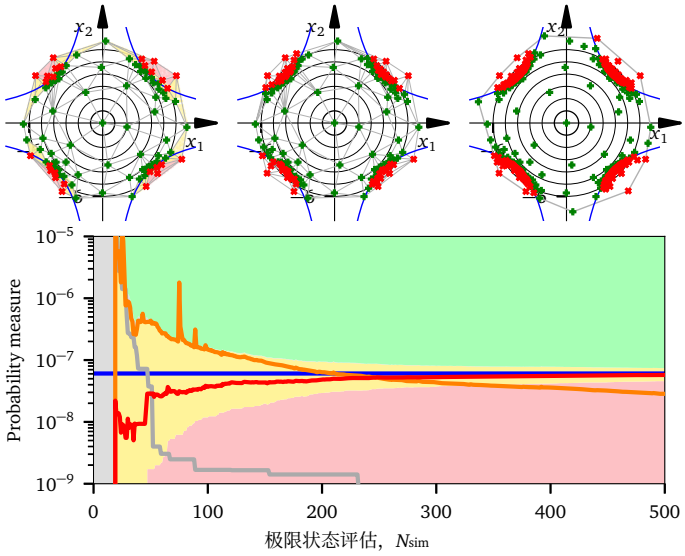


图 12：方程（27）中定义的乘积函数，包含四个设计点。左上：进行 $N_{\text{sim}} = 100$ 次模型评估后的情形，其中积分节点位于失效单形和混合单形中；中上：$N_{\text{sim}} = 200$；右上：$N_{\text{sim}} = 500$，仅显示凸包。下方：使用图 8 中图例得到的估计值的收敛情况。

反而会偏离方向，转向概率低得多的失效区域。[14] 中元球函数的具体定义如下：

$$g(x_1, x_2) = \frac{30}{\left(\frac{4(x_1+2)^2}{9} + \frac{x_2^2}{25}\right)^2 + 1} + \frac{20}{\left(\frac{(x_1-2.5)^2}{4} + \frac{(x_2-0.5)^2}{25}\right)^2 + 1} - 5. \tag{29}$$

这是一个棘手的问题，其复杂的几何结构会误导基于下坡搜索的方法。该函数在原点（均值）处有一个鞍点。下坡优化会导向相距甚远的失效区域，而最靠近中心的失效点则位于一座高“山”之后。拓扑结构的变化会使某些算法感到困惑，因为它们对失效面拓扑结构的假设表示有误。所提算法绝对稳健，因为它不使用函数值来确定探索方向，并以均衡的方式，根据概率贡献的比例，持续细化依次发现的四个失效区域；见图 13。详细分析得到 $p_{\mathcal{F}} \approx 1.12857 \cdot 10^{-5}$。所提算法在进行 100 次和 500 次极限状态函数评估后的 $p_{\mathcal{F}}$ 点估计分别为 $(\cdot 10^{-5})$：$p_{\mathrm{f}}^{(100)} = 1.007$ 和 $p_{\mathrm{f}}^{(500)} = 1.101$.

这些结果具有极高的准确度，与近期论文 [2] 使用 AK-SESC 程序得到的相当不准确的估计形成鲜明对比：$p_{\mathrm{f,AKSESC}}^{(5954)} = 1.59 \cdot 10^{-5}$ 在经过 $N_{\text{sim}} = 5954$ 次评估后。

提出的全局敏感度为 $t_1^2 \approx 0.987$ 和 $t_2^2 \approx 0.013$。

7.6. 窄 V 形失效带——后期发现与细化

考虑以下使用以点 $(-1.8, 1)$ 为中心的极坐标描述的极限状态函数

$$g(\rho, \phi) = \rho \left| 10 - 11 \cos\left(\phi - \frac{\pi}{4}\right) \right| - 1. \tag{30}$$

失效区域所在的 $g < 0$ 是位于两个 V 形边界之间的一条狭窄带；见图 14。要命中这条狭窄的失效区域，需要进行大量函数评估。该失效域穿过概率密度较高的区域，因此，失效概率相对较高。高概率的失效位置很容易一开始就被忽略，因为它们被“安全”的 ED点包围。

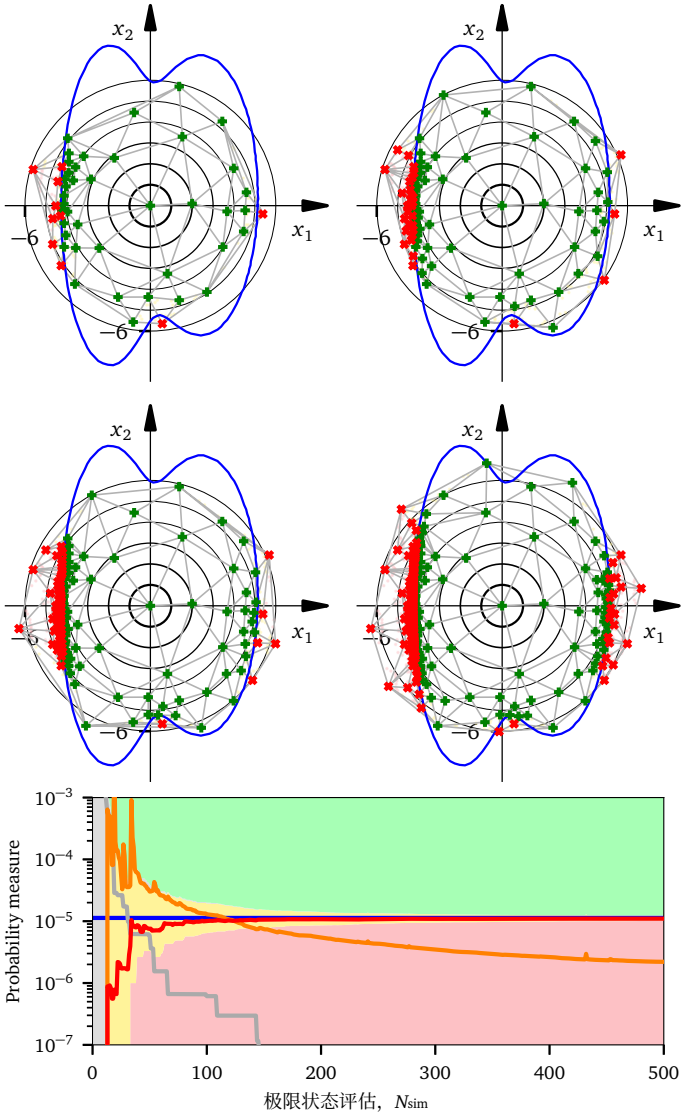


图 13：方程（29）中定义的元球函数。上：$N_{\text{sim}} = 50$，100、200 和 500 次极限状态评估。下：估计收敛。

这些绿色点有助于构建由推测为“安全”的单形组成的粗略脚手架。幸运的是，失效区域是开放的，因此探索点迟早会到达该区域。事实上，图 14 展示了一次运行，在第 31 次极限状态评估中发现了第一个（且相当遥远的）失效事件。从那一刻起，算法自然会聚焦于细化边界，并将失效面向高概率区域回溯。当失效概率估计值等于外部（未探索）区域对应的概率时（约在 $N_{\text{sim}} \approx 40$），算法会自动停止将凸包向无穷远扩展（灰线保持水平），并优先利用有关混合区域的局部信息，直至边界域得到细化。发现首个失效后，其他“红色”点的出现仿佛点流经一条细管，见图 14。

所提出的全局敏感度为$t_1^2 \approx 0.266$ 和$t_2^2 \approx 0.734$。仅在进行 200 次极限状态函数调用后构建的混合单纯形所得估计值为$\{0.33, 0.67\}$。

7.7. 闭合失效域

我们假设，探索阶段最终能到达失效域的必要条件是该失效域为开放的；参见前面的数值示例。事实上，无法保证一定能发现闭合区域。图15展示了一个特意构造的失效区域，旨在使该方法失效。这个闭合失效域是由一个圆形区域构成的，它位于概率极高的区域，但其位置十分不巧，以至于探索阶段可能会漏掉它，并将其包围在“安全”

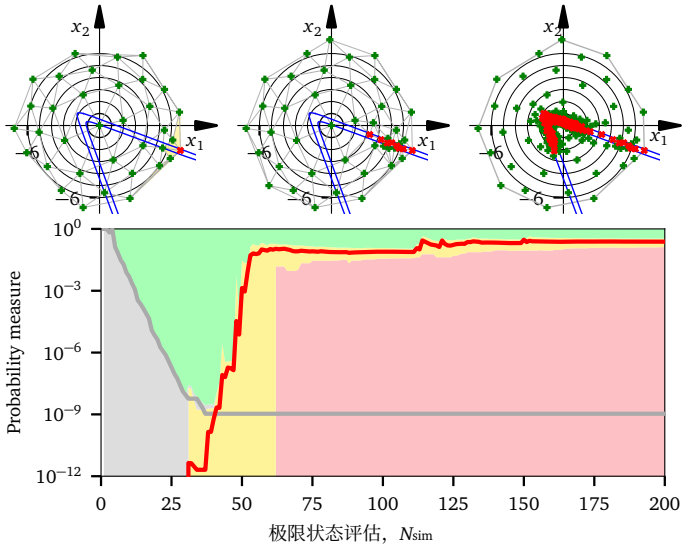


图14：方程(30)中的窄失效域问题。左上：经过 $N_{\text{sim}} = 35$ 次模型评估后，失效域内的积分节点和混合单纯形；中上：$N_{\text{sim}} = 50$；右上：$N_{\text{sim}} = 200$，仅绘制凸包。下方：估计图。

单形。一种补救方法是从安全单形中有意抽取额外的探索点，以提高命中圆内区域的概率。一旦发现至少一个来自不安全区域的点，该方法便会像前一个示例一样，通过利用自动细化失效面。下一个数值示例将重点介绍这一补救方法。

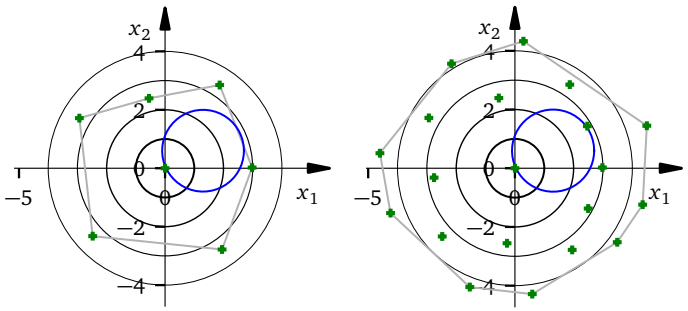


图 15：方法在封闭不安全区域上的失效。左：经过$N_{\text{sim}} = 7$ 极限状态评估后；右：$N_{\text{sim}} = 20$。

7.8. 修正拉斯特里金函数

研究了以下示例，其中强非线性极限状态函数导致出现许多分散的失效区域 [26, 90]

$$g(x_1, x_2) = 10 - \sum_{i=1}^{2} \left(x_i^2 - 5\cos(2\pi x_i)\right). \tag{31}$$

安全区域内有二十四个封闭失效区域；其外则有一个开放失效区域，其中散布着许多封闭安全区域。所提算法几乎肯定无法命中较小的封闭圆形失效域。为克服这一困难并提高发现封闭区域的机会，有必要留出部分点数预算用于筛查；不过，筛查可以利用已构建的三角剖分。在此示例中，我们规定每新增十个点，就选取一个点采用全局空间填充准则，即从任意单纯形中选取，不论其分类如何（失效/安全/混合）。仿真结果见图16，其中可以看到，在扩展凸包并细化先前发现的混合单纯形时，许多封闭失效区域最初都被遗漏了。识别出大多数封闭区域需要相当多的极限状态函数评估：直到大约 $N_{\text{sim}} = 2500$，才命中了最居中的十六个失效“气泡”。这相当于 250 个筛查样本。如图16所示，筛查策略尚未完全

在此示例中成功，且失效概率较高$p_{\mathcal{F}} = 7.34{\cdot}10^{-2}$。闭合分散失效区域对所提算法构成了挑战。所提全局敏感度被正确识别为相同：$t_1^2 = t_2^2 = 0.5$。

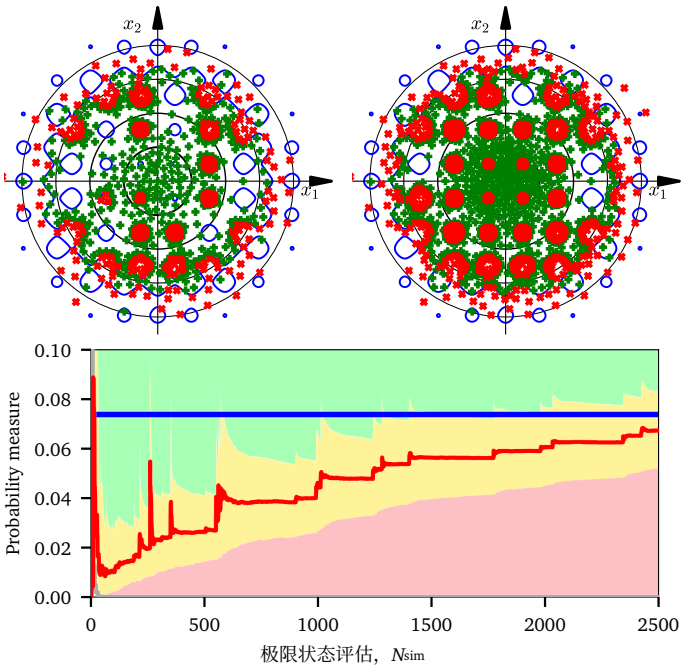


图16：该方法在闭合散布区域中的性能。左上：经过$N_{\text{sim}} = 1000$ 次极限状态函数评估后的情况；右上：$N_{\text{sim}} = 2500$。

7.9. 车辆悬架：三维工程示例

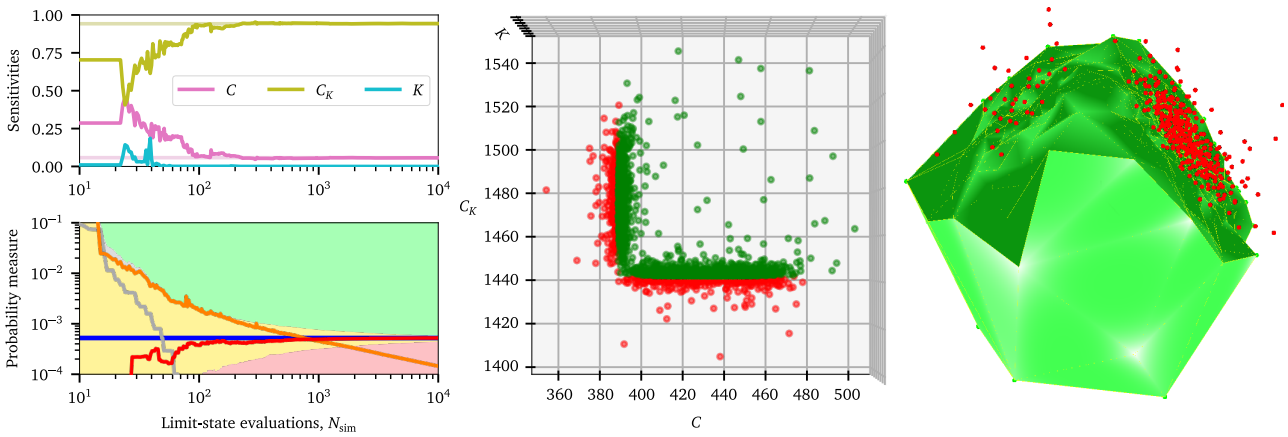


图17：方程（33）中的三维车辆悬架示例。左：灵敏度和概率估计值（双对数）收敛图。中：展示经过$N_{\text{sim}} = 10000$ 次评估后的状态。右：$\mathrm{N}_{\text{sim}} = 1\,000$对应的彩色单形。浅绿色的面由仅包含安全点的三角形构成。深绿色的面与混合单纯形相接。

这个说明性三维示例源于一个真实工程问题的设计优化，即被动式车辆悬架 [54]。目标是最小化车身的垂直振动加速度。近期的一项研究 [70] 将该问题进行了推广，并在基于可靠性的设计优化背景下对其进行求解：最优设计应在目标失效概率水平下满足物理约束。存在各种物理约束，用于表达不利状态发生的条件。它们通过四个极限状态函数进行表述，分别对应于：车辆道路保持能力的超限（g_1）、侧倾角的超限（g_2）、保险杠碰撞（g_3）以及超出

表2：第7.9 节车辆悬架示例的输入变量（包括确定性变量和正态分布变量）7.9。

	变量	Unit	μ	σ
A	路面系数	rad·cm²/m	0.15915	–
b_0	载荷系数	–	0.27	–
V	车辆速度	m/s	10	–
M	簧载质量	kg/cm/s²	3.2633	–
m	非簧载质量	kg/cm/s²	0.8158	–
g	重力加速度	cm/s²	981	–
C	悬架刚度	千克/厘米	431.7221	10
C_K	轮胎刚度	千克/厘米	1475.5503	10
K	阻尼系数	千克/厘米/秒	55.0406	10

所需轮胎寿命最小值（g_4）

$$
\begin{aligned}
g_1(\boldsymbol{x}) &= 1-\frac{\pi m V A}{b_0 K g^2}\left[\left(\frac{C_K}{m+M}-\frac{C}{M}\right)^2+\frac{C^2}{mM}+\frac{C_K K^2}{mM^2}\right]\\
g_2(\boldsymbol{x}) &= 4000\cdot C\,(Mg)^{-1.5}-8.6394\\
g_3(\boldsymbol{x}) &= 2\sqrt{Mg\left(\frac{K^2 C_K}{C\,(m+M)}+C\right)}-1\\
g_4(\boldsymbol{x}) &= C_K-[g\,(M+m)]^{0.877}\,.
\end{aligned}
\tag{32}
$$

四个极限状态函数中涉及的确定性变量或高斯变量的物理含义和数值列于表中。2。由于所有约束必须同时满足，车辆悬架构成一个串联系统，因此整个系统的极限状态函数可以写为

$$
g(\boldsymbol{x})=\min\left[g_1(\boldsymbol{x}),g_2(\boldsymbol{x}),g_3(\boldsymbol{x}),g_4(\boldsymbol{x})\right].
\tag{33}
$$

我们采用了 10^6 次使用重要抽样法进行的极限状态函数评估，以准确估计精确的失效概率：$p_{\mathcal{F}}\approx 5.2\cdot 10^{-4}$。所提算法得出了以下点估计值($\cdot 10^{-4}$)：$p^{(100)}{}_{\mathrm{f,v}}=3.76$，$p^{(1000)}{}_{\mathrm{f,v}}=4.91$，以及 $p^{(10000)}{}_{\mathrm{f,v}}=5.16$；见图 17。显然，随着点数增加，每个后续点带来的概率增益都会降低。事实上，在本例中，当 N_{sim} 超过约 100 次仿真后，该算法表现出指数（幂律）收敛；这可从图 17的双对数图中看出，对应于混合单纯形的概率形成一条直线。

所构建的几何表示为该问题提供了更多有价值的见解。它揭示出实际上存在两个主要的失效区域，分别对应于悬架C和轮胎刚度C_K的最小值，即图17中标记为x_1 和 x_2 的变量。事实上，由于本例中各个函数 g_i 的解析表达式均已知，我们可以确认：当悬架刚度 $C\le 391.212$（g_2为负）或轮胎刚度 $C_K\le 1442.64$（g_4为负）时会发生失效。对于任何现实的输入组合，函数g_3 都不会导致失效；此外，由于阻尼力系数K出现在分母中，当其恰好取极小的正值时，g_1 也可能变为负值。请注意，[54, 70] 中的问题表述方式意味着，K为负并不表示 g为负。这种可能性表现为出现了三个与 K 的低值相关的失效事件，见图17 的右上部分。如果我们忽略K 的低正值对失效概率这一可忽略的贡献，同时也忽略 $g_3<0$的可能性，那么剩下的就是由$g_2=0$ 和 $g_4=0$形成的失效面的两个部分，即在标准高斯空间中具有以下设计点的两个正交平面：$\beta_1=|1442.64-1475.5503|/10\approx 3.29$,$\beta_2=|391.212-431.7221|/10\approx 4.05$。由于这两种失效模式之间不存在相互作用，对系统失效概率进行简单的 FORM分析可得 $p_{f,\mathrm{FORM}}=\Phi(-\beta_1)+\Phi(-\beta_2)-\Phi(-\beta_1)\Phi(-\beta_2)=5.25001\cdot 10^{-4}$。

针对两个主导变量 C 和C_K 的建议全局敏感度为 $t^2{}_{C}=\varphi(\beta_2)\Phi(\beta_1)/T\approx 0.058$ 和 $t^2{}_{C_K}=\varphi(\beta_1)\Phi(\beta_2)/T\approx 0.942$，其中$T=\varphi(\beta_1)\Phi(\beta_2)+\varphi(\beta_2)\Phi(\beta_1)$。它们各自的值

表 3：第 7.10 节中非线性振子示例的输入变量。

变量	分布	μ	σ
m	正态分布	1	0.05
k_1	正态分布	1	0.1
k_2	正态分布	0.1	0.01
r	正态分布	0.5	0.05
t_1	正态分布	1	0.2
F_1	正态分布	0.45	0.075

由数值算法获得 $ttt^2 = \{t^2_C, t^2_{CK}, t^2_K\} \approx \{0.057, 0.943, 8 \cdot 10^{-6}\}$；见图 17左上。

值得注意的是，所提算法可以共享所有计算得到的 $g(xxx)$不同概率分布之间的输出 $f_{\boldsymbol{X}}(xxx)$ 并且可能适用于基于可靠性的设计优化。然而，对于该示例，我们仅采用了表 2中列出的输入变量分布的一个特定情况，来自 [70]。

7.10. 非线性振子的动态响应

以下 6D极限状态函数受到结构可靠性领域经典“可靠性基准”的启发，该基准在 [17, 27, 93, 94]中进行了研究。图 18展示了一个非线性无阻尼单自由度系统。极限状态定义为

$$g(\boldsymbol{x}) = 3r_y - \left| \frac{2F_1}{m\omega_0^2} \sin\left(\frac{\omega_0 t_1}{2}\right) \right|, \tag{34}$$

其中，$\omega_0 = \sqrt{(k_1 + k_2)/m} = \sqrt{\tilde{k}/m}$，$r_y$ 是其中一个弹簧屈服时的位移，而绝对值括号中的项是最大位移响应。在这里，我们通过将表示弹簧刚度之和的两个独立正态随机变量之和替换为单个随机变量 $\tilde{k} \sim N(\mu_{k_1} + \mu_{k_2}, \sigma^2_{k_1} + \sigma^2_{k_2}) \sim N(1.1, 0.0101)$，进行了降维。因此，我们实际上是在分析一个五维问题。

该问题的原始表述导致极高的失效概率（$\approx 3 \cdot 10^{-2}$），因此不能被视为可靠性方法的现实基准。在本文提出的修改方案中，对随机力 F_1 的均值和标准差进行了修改，以将失效概率降低至 10^{-8}的数量级。独立高斯变量的参数列于表 3中。我们采用重要抽样法，通过 10^7 次极限状态函数评估来准确估计精确的失效概率：$p_{\mathcal{F}} \approx 1.57 \cdot 10^{-8}$。所提算法在评估 $N_{\text{sim}} = 1000$ 个ED点后，得到失效概率的估计值 $0.941 \cdot 10^{-8}$；见图 18 左下方。

除了图中所示的通常的估计收敛 18 左下方之外，我们还在图中展示了各个 ED点的径向距离 ρ。图 18 右侧的背景以及右侧的次纵轴进一步揭示了在给定半径 ρ处可能出现何种事件。次纵轴与主纵轴相对应：它表示半径为 N_{var}的球内的概率含量，该半径通过方程（B.6）计算得到。背景中的黄色带表示所有现有混合单纯形的 ED点（顶点）的径向距离范围。深灰色带可能覆盖黄色带的一部分，表示径向距离 r 与 R之间的间隔，即高斯环带在距离最远的 ED点与凸包外最近节点之间的径向范围；见图3 右侧。图 18 右侧突出了 ED点所在的径向距离与临界径向距离 r之间的间隔，后者对应于凸包最近支撑超平面的偏移量。在评估了 $N_{\text{sim}} = 1000$ 个点之后，其中许多点位于最大为 9 的径向距离处，我们仍然只有 $r = 6.58$的临界半径。最靠近原点的面并非只有一个。在高维空间中，利用位于半径较大的 N_{var}球表面上的许多点构造的凸包，其各个面的到原点的距离会低得多。凸包外部的相应概率可能轻易地比外接 N_{var}球外部的概率大几个数量级。如果我们使用其他代理模型，凸包之外的所有区域都可能被视为潜在错误的外推。

通过数值算法获得的全局敏感度基于 $N_{\text{sim}} = 1000$ 个ED点，这些点构成了40481个混合单纯形。这些单纯形被1835个不同的超平面切分，这些超平面具有不同的法向量。数值评估得出 $ttt^2 = \{t^2{}_m, t^2{}_k, t^2{}_r, t^2{}_{t_1}, t^2{}_{F_1}\} \approx \{0.0069, 0.0836, 0.4526, 0.2464, 0.2105\}$。最大的组包含 32009 个混合单纯形，由一个超平面切分，其法向量（位于标准高斯空间中）如下：$nnn \approx \{-0.0732, -0.2698, -0.6661, 0.5158, 0.4605\}$。该法向量大致对应于上述敏感度。总计有843个ED点被该超平面分隔，这些点构成相应单纯形的顶点。严格分隔失效点与安全点的平面的偏移量范围为 (5.53995至5.5413)。基于“中间”平面对失效概率进行粗略估计，可按FORM的方式得到 $\Phi(-5.54) = 1.512 \cdot 10^{-8}$，与上述大样本分析结果相当接近。所提出的方法提供的几何洞见表明，失效面几乎是线性的（具有给定位置和已知法向量的分隔平面），因此，坐标旋转后，六维LSF的有效维数为一。

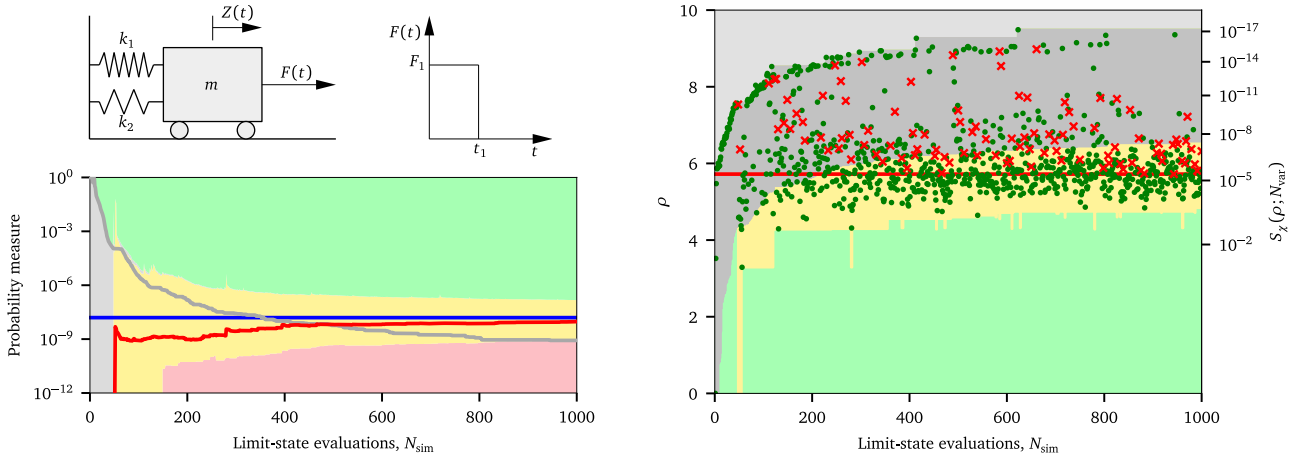


图 18：该方法在非线性振子问题中的性能。左上：单自由度弹簧质量振子的示意图。左下：收敛图。右侧：标准高斯空间中的径向投影。

8. 高维高斯空间

所提出的方法框架已证明在低维问题中非常稳健且高效。然而，一个直接的问题是，该方法在问题维度增加时的扩展性如何，因为中维和高维问题在实际应用中同样备受关注。一个明显的局限来自维护单形结构所需的计算几何。每个单纯形所关联的几何对象（节点、直线、平面、超平面等）的数量会随着定义域维度的增加而迅速增长；因此，计算复杂度也呈指数级增长。如本节中的数值算例所示，该方法适用于维度为 $N_{\text{var}} \leq 8$ 的问题。对于无法将问题维度降至八维的极限状态函数，依赖精确几何的所提方法无法对其进行有效分析。

在本节中，我们介绍五个不同的极限状态函数 $g(xxx)$ 它们在任意维度的高斯空间中形成几何或拓扑相似的失效面。失效面由（超）平面或（超）球面组成，并且可以解释为表示具有加性独立分量的系统、串联系统（最弱环节系统）、具有并联分量的系统，或旋转不变问题的函数。所有函数的定义方式均确保解析解存在，并将失效概率精确调整为 $p_{\mathcal{F}} = 10^{-6}$。图 19 展示了维度 $N_{\text{var}} = 2$下的失效面。

8.1. 线性失效面

由随机变量之和构成单一超平面失效边界，是结构可靠性领域中最常见且研究最为广泛的示例

$$g_{\text{lin}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\nu=1}^{N_{\text{var}}} x_\nu - C_{\text{lin}}\,, \tag{35}$$

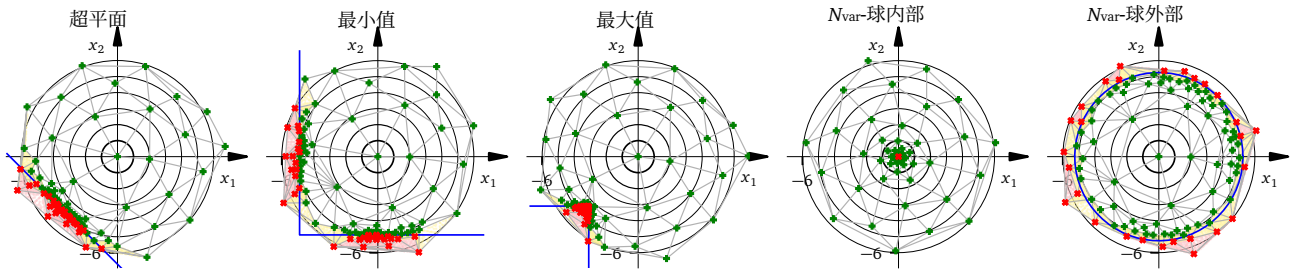


图 19：在自适应顺序添加$N_{\text{sim}} = 100$ 后，$N_{\text{var}} = 2$维情况下五个测试用例的状态示意图。

其中常数 $C_{\text{lin}} = \Phi^{-1}(p_{\mathcal{F}}) \cdot \sqrt{N_{\text{var}}}$是 β指数与区域维数平方根的乘积。由于由线性边界分隔的高斯密度部分的概率含量可以基于最靠近中心的失效 β 点转换为一元问题，因此失效概率可以直接求解。基于梯度的方法能够轻松定位设计点，并构建失效面的近似。g_{lin} 函数的值可为到失效面的距离提供可靠信息。

所提出的方法仅使用二元信息，并使用“混合单纯形”对近似失效面进行细化。失效面是线性的（一个超平面），而各个单纯形的边界也都是线性的，即由超平面构成。因此，在这一特定情况下，只要某个单纯形的顶点具有相同的分类，整个单纯形就会继承正确的分类，因为失效是线性的。各种域维度下的收敛图显示在图20的最左列中。可以看出，在固定 N_{sim} 时，混合单纯形中的概率含量随着域维度的增加而增长，N_{var}。

8.2. 最小值函数——串联系统

考虑一个由N_{var} 个独立且同分布的组件组成的系统，当其 任一个N_{var} 组件发生故障时，系统便会失效。因此，这种串联系统中最弱的组件将起决定性作用，且其性能必须与某个阈值进行比较

$$g_{\min}(\boldsymbol{x}) = \min_{\nu=1,\ldots,N_{\text{var}}} (x_\nu) - C_{\min}, \tag{36}$$

其中，$C_{\min} = \Phi^{-1}\left(1 - {}^{N_{\text{变量}}}\sqrt{1-p_{\mathcal{F}}}\right)$ 是每个单独变量的“安全阈值”（我们对$C_{\min}$进行高精度算术求值）。

从原点出发的所有可能方向中，只有 $1/2^{N_{\text{var}}}$ 不会指向失效区域。这种布局的结果是，失效面中概率密度较高部分的范围很大，并且会随着定义域维度的增加而扩大。因此，要充分细化边界的重要部分，在更高维度下需要大量 ED点。同样，随着极限状态函数评估次数的增加，与混合单纯形相关的概率下降得非常缓慢，见图20。

8.3. 最大值函数——并联系统

考虑一个由N_{var} 个独立同分布的组件构成的系统，当全部N_{var} 个组件都失效时，系统才会失效。因此，系统失效发生在最强组件失效时。

$$g_{\max}(\boldsymbol{x}) = \max_{\nu=1,\ldots,N_{\text{var}}} (x_\nu) - C_{\max}, \tag{37}$$

其中阈值为 $C_{\max} = \Phi^{-1}\left({}^{N_{\text{var}}}\sqrt{p_{\mathcal{F}}}\right)$。从某种意义上说，这个问题与前一个$g_{\min}$ 函数互为对应。失效区域仅限于所有 $2^{N_{\text{var}}}$ “象限”中的一个（“黑天鹅”事件）。开始时，扩展算法必须“命中”失效区域中的一个点。由于没有关于有希望的搜索方向的线索，而且必须从原点向所有可能的方向逐步探索空间，因此这可能需要大量极限状态函数调用。在高维情况下，首次命中失效事件更加困难，因为潜在方向的数量更多；而且在探索阶段，首次出现失效事件究竟发生在第几次极限状态函数评估中，取决于运气。

这使得该问题与其余数值算例有所不同，因为估计量给出首个答案时所需的样本量分散程度更大。然而，大部分失效概率集中在一个 β 点附近；一旦揭示了这个失效“角落”，在该点附近通过三角剖分细化边界只需少量极限状态函数评估。随后，估计量便能迅速给出准确答案，而“混合”单形所占的概率含量非常小，见图20。

8.4. N_{var} 球内部

考虑一种较为特殊的情况，其中均值（高斯空间原点）会导致失效。原点是一个单一失效区域的中心点，该区域呈半径为 r_{int} 的 N_{var}-球形状。

$$g_{\text{int}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\nu=1}^{N_{\text{var}}} x_\nu^2 - r_{\text{int}}^2, \tag{38}$$

其中 $r_{\text{int}} = r(p_{\text{in}};\ N_{\text{var}})$ 根据方程（B.7），使得内部概率 $p_{\text{in}} = p_{\mathcal{F}} = 10^{-6}$。偏离均值且在任意方向上超过 r_{int} 的情况都是安全的。

根据 LSF 的这一界定，情况有些特殊，因为失效区域并未向无穷远延伸，而是有界且体积极小。对于概率 $p_{\mathcal{F}}$，这种局部失效区域的边界范围可能达到最小。从这个意义上说，这是一个反例；所提算法之所以有效，仅仅是因为第一次极限状态函数评估的位置落在失效区域内。因此，不存在将失效区域包围在所谓安全单形中的风险。

重要抽样 或渐近抽样的标准方法中，抽样密度相较于原始密度会增大方差，因此其效率甚至低于朴素蒙特卡罗。FORM 和二阶可靠度理论方法完全无法给出合理的 p_{f} 估计值。所提出的扩展算法成功地细化了点状失效区域周围的三角剖分。在标准设置下，该算法相当激进，也就是说，有许多探索点位于离原点相当远的位置。尽管如此，估计量仍非常迅速地收敛到真实的失效概率；见图 20。

8.5. N_{var}球外部

考虑这样一种情况：如果某点与均值的距离超过预先定义的半径 r_{out}，则会发生失效。

$$g_{\text{out}}(\boldsymbol{x}) = r_{\text{out}}^2 - \sum_{\nu=1}^{N_{\text{var}}} x_\nu^2, \tag{39}$$

其中半径 $r_{\text{out}} = r(p_{\text{out}};\ N_{\text{var}})$ 根据方程（B.9）设定，使得外部概率 $p_{\text{out}} = p_{\mathcal{F}} = 10^{-6}$。

在失效概率估计和失效面细化的背景下，这是所述算法面临的最困难情形。原因在于，对于给定的失效概率，失效面的范围达到最大。失效面上的所有点概率相同，因此必须以相同的点密度细化N_{var}-球的整个表面，该球半径为r_{out}。FORM 和二阶可靠度理论都难以应对，因为不存在唯一的“设计点”。当设计点搜索找到失效面上的任意一点时，FORM 会将$p_{\mathcal{F}} = \Phi^{-1}(r_{\text{out}})$设为安全侧的值，从而低估真实失效概率。图20右侧列展示了在高维空间中，“混合”单形中的概率仅以非常缓慢的速度下降。

8.6. 结果讨论

图 21 展示了算法在八维空间中对全部五个函数的行为。该图以与此前图 18 相同的方式呈现各个 ED 点的径向距离。

如本节引言部分所述，在当代计算机上，对于维数大于 8 的情况，由单形构成的“脚手架”的精确几何结构难以计算。在包含多达数百个 ED点的高维空间中，通常

凸包的大部分区域都由混合单形占据。这是因为，纯安全单形或失效单形必须包含所有$N_{\text{var}}+1$ 个同一结果类型的顶点，而这在高维空间中比在低维空间中更难实现。

另一方面，将新 ED 点放置在权重最高的混合单纯形的外接圆/球中心，可生成非常优秀的空间填充设计。当 LSF 函数光滑时，这些 ED 点可为光滑代理模型提供出色的支撑。虽然在更高维度下，利用二元信息估计失效概率的效率会降低，但将光滑代理模型与我们的 ED 点结合使用，能显著提高效率。

9. 相关和/或非高斯边缘分布

到目前为止，分析仅限于相互独立的正态分布输入随机变量。同样，可靠性理论中的大多数重要结果及相关高级工具，包括经典的 FORM/SORM 可靠性方法，都适用于这些联合高斯随机向量。然而，许多实际工程应用中的随机变量具有相关性和/或非高斯性。构造联合概率密度有两种常用方法：通过条件分布乘积进行 Rosenblatt 变换，[71, 59] 以及 Nataf 模型 [61, 44]（有时也称为高斯 Copula 方法，[62]）。本节旨在展示如何将 Nataf 变换（见图22）与所提出的技术结合使用。

联合分布以及极限状态函数 $g(xxx)$ 定义在一个具有相关边缘分布的潜在非高斯空间中，该空间称为真实空间、原始空间或物理空间，$\mathscr{R}$；参见图 22左侧部分的插图。在该空间中对系统状态进行评估，因为极限状态函数在此处定义。该空间的概率维度等于输入随机变量的数量，即 N_{var}。

在 $\mathscr{R}$ 空间右侧，我们描绘了 copula 空间（累积分布函数之间的依赖模式），即具有 $\mathscr{P}$ N_{var} 个均匀分布边缘、定义在区间 $[0,1]$ 上的空间。逐分量变换通过各个边缘分布已知的分布函数执行。$\mathscr{P}$ 空间中的分布函数提供了一种简单的方法，可通过转换过程将它们逐一映射到相关的/相关标准高斯变量空间 $\mathscr{G}^{\text{c}}$，这一过程有时称为无记忆等概率变换。在此空间中，Nataf 模型包含底层高斯变量对之间经过修正的相关性；这些相关性必须通过求解简单的二元积分进行数值计算，并且已有一些半经验公式 [44]。如果对所有变量对求得的 $\mathscr{G}^{\text{c}}$ 相关矩阵是有效的正定矩阵，那么相关标准高斯空间 $\mathscr{G}^{\text{c}}$ 中的向量就可以映射到标准非相关高斯边缘分布空间 $\mathscr{G}$。

不同于之前所有既具有逐分量性质又有唯一确定形式的变换，去相关是不可分的，并且可以通过无限多种方式实现——即使我们将自身限制在线性映射的范围内；见 [64]。我们采用在 $\mathscr{G}$c 与 $\mathscr{G}$ 之间进行线性映射这一常见假设，并从所有可能的此类映射中列出文献中常用的两种映射，即特征分解（也称为主成分分析、正交分解、Karhunen-Loève 展开、协方差矩阵的正交变换）和 Cholesky 分解。目前的实现采用 Cholesky 分解，其中第一个分量 x_1，在两个高斯空间中均相同，而所有其他分量都是前面分量的线性组合。不过，我们注意到，主成分分析可能是更好的替代方案，因为与原始维度 $\mathscr{G}^{\text{c}}$ 相比，它通过忽略方差贡献（特征值）最小的分量 $\mathscr{G}$，提供了一种有效降低维度的方法 [64, 89]。这种从 N_{var} 降至 N_{r} 的降维，可能是提高所提出方法以及许多其他方法有效性的关键。

最后介绍的空间是 $\mathscr{U}$ 各个边缘分布相互独立且均匀的空间；参见图22 右侧。该空间具有独立性 *Copula*。通过在 $\mathscr{G}$ 空间中计算各个边缘分布的高斯分布函数的反函数，即可得到坐标。因此，任何随机向量都服从单位超立方体 $\mathscr{U} \equiv [0,1]^{N_{\text{r}}}$上的均匀单位概率密度。

对于非高斯相关随机向量，一种直接的解决方案是将非相关高斯空间 $\mathscr{G}$ 用于所有任务：空间分解、求积计算，以及为极限状态函数评估选择下一个实验设计点。敏感度应在各个变量具有明确含义的实际空间中计算。以下数值示例说明了使用 Nataf 变换来访问 $\mathscr{G}$ 的方法。

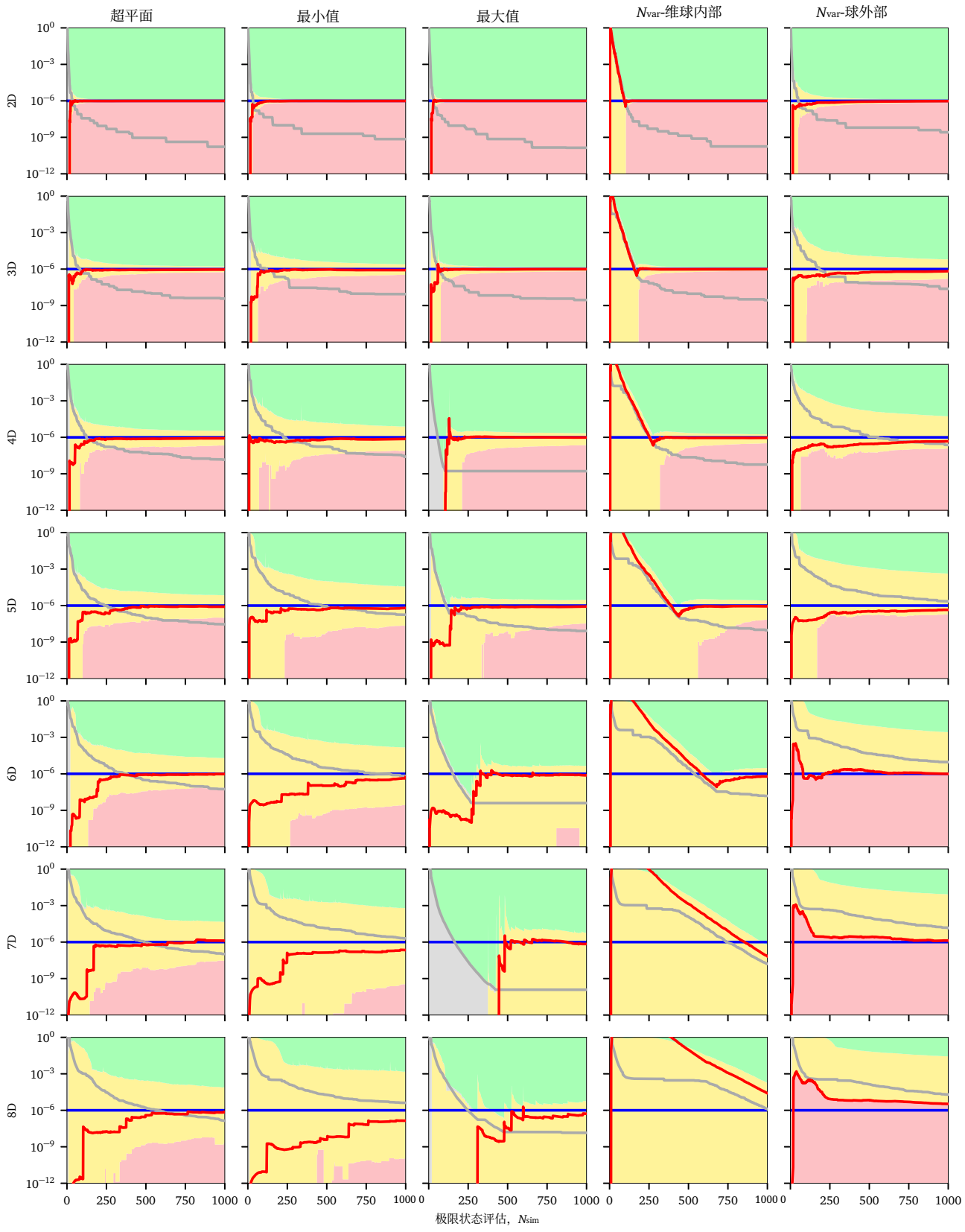


图 20：一般维度问题的收敛图。

现考虑一个涉及两个相关非高斯变量的线性极限状态函数

$$g(x_1, x_2) = 7 - x_1 - 2x_2. \tag{40}$$

边际 x_1 具有 Gumbel（右偏，即“最大值”）分布，也称为 I 型 Fisher-Tippett 分布，其尺度参数等于 1，众数为 0（位置参数）。第二个边际

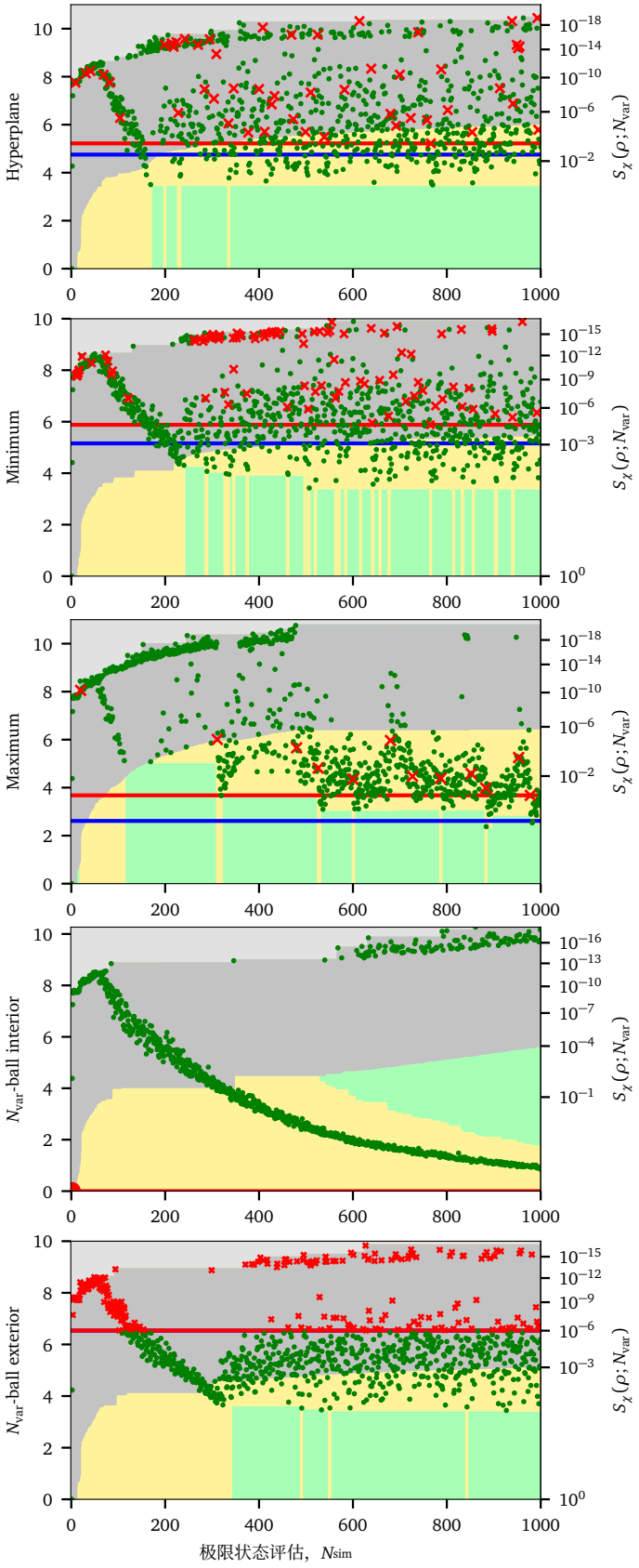
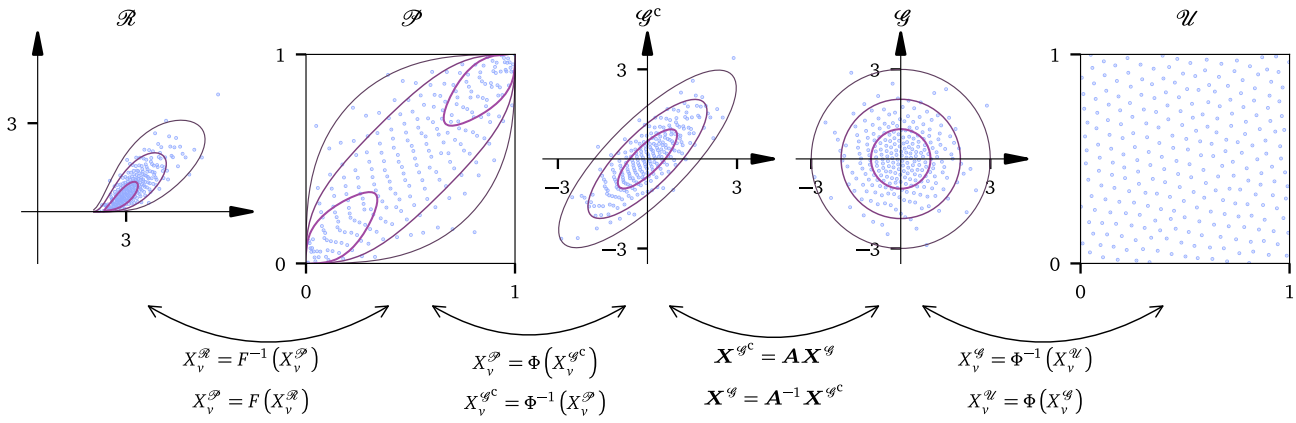


图21：相应八维问题的径向图

x_2 服从威布尔（“最小值”）分布，单位尺度参数和形状参数（称为威布尔模数的指数）均为 1.5。这个双参数威布尔变量的左边界为零下界。这些非高斯变量之间的皮尔逊相关系数等于 −0.708，失效事件由 $g < 0$ 指示。

失效的真实概率无法唯一确定，因为联合概率密度$f_{\boldsymbol{X}}(xxx)$未定义。然而，我们假设$f_{\boldsymbol{X}}(xxx)$由Nataf模型构造的密度是真实的。通过对各个边缘分布进行等概率变换得到的底层联合高斯向量，其相关性为 −00.8。在高斯空间 $\mathscr{G}$进行的大样本分析提供了参考失效概率$p_{\mathcal{F}} \approx 10.14 \cdot 10^{-3}$。图23 上部和中部的对比展示了标准高斯空间 $\mathscr{G}$ （上部）的空间分解如何变换到原始空间 $\mathscr{R}$ （中部），以及 $\mathscr{R}$ 中的线性失效面在 $\mathscr{G}$中可能发生多大程度的扭曲。图23 下部记录了失效概率估计值向精确解收敛，以及外部概率和混合概率的衰减过程。

$\mathscr{R}$ 空间中的线性失效面对应的简单灵敏度为 $t_1^2 = 0.2$ 和 $t_2^2 = 0.8$。这些由算法在 $\mathscr{R}$ 空间中得到的值对应于直线 $1/2$ 的斜率，该直线具有



Fig图 22：Nataf模型中涉及且本文所考虑的空间与变换链。

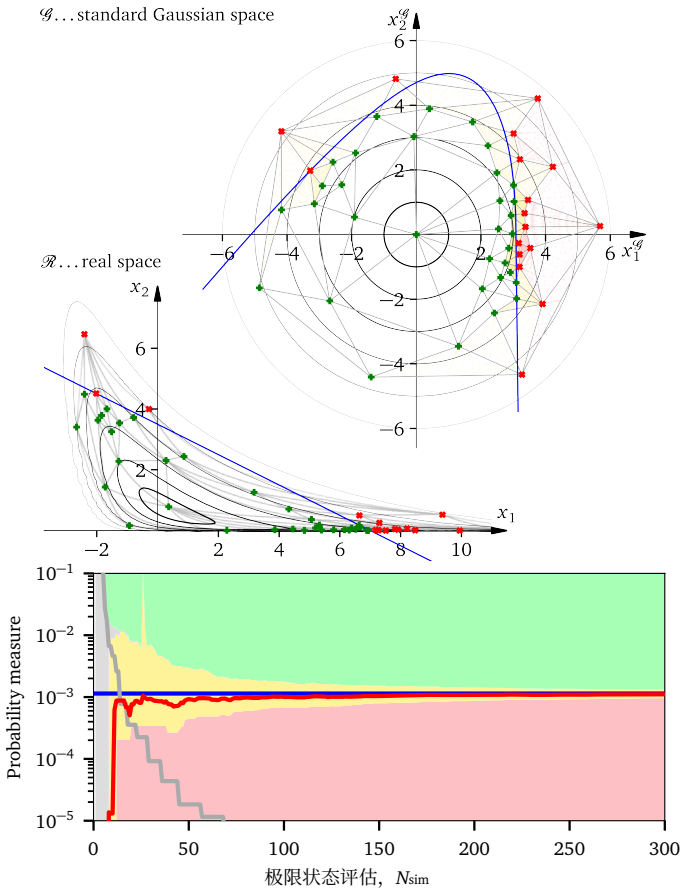


图 23：$N_{\mathrm{sim}} = 50$ ED点中的状态分类，以及方程 (40)所给问题对应的空间分解。上：标准高斯空间 $\mathscr{G}$。中：原始（真实）空间 $\mathscr{R}$。下：收敛图。

一个正态分布 $\{1, 2\}$. 这些灵敏度可用于降低原始输入变量的维度。

中的敏感度 $\mathcal{G}$ 取决于所选的线性变换，该变换位于 $\mathcal{G}^c$ 与 $\mathcal{G}$ [64]之间。本示例中使用的 Cholesky 变换使 x_1 在两个空间中保持相同，而主成分分析会旋转坐标；请参见 [90]中的相同数值示例。在我们的案例中，图 23 上部所示的旋转使得高斯特征空间中各坐标的敏感度相当不均衡： $t_1^2 = 0.993$ 和 $t_2^2 = 0.007$。我们指出， $\mathcal{G}^c$ 与 $\mathcal{G}$ 之间的变换可能提供降维的可能性；对于线性变换的情况，可通过主成分分析中的特征值对其进行明确定义。特征空间中所提出的敏感度 $\mathcal{G}$ 为该空间潜在的降维提供了额外信息。

我们指出，图 22 中展示的最右侧空间看起来似乎也适用于本文所述的任务。人们可能会试图在 $\mathcal{U}$ 空间中构建空间分解，理由是体积直接等于与子域相关的概率，因此估计部分会更容易。我们想强调的是，$\mathcal{U}$ 空间尤其不适用于实际应用，因为在这类应用中，失效事件对应的概率很小，即在 $\mathcal{U}$ 中，这些微小区域非常靠近单位超立方体的边界 $\mathcal{U}$。对这些边界区域进行数值描述颇具难度。

10. 结论

本文提出了用于估计计算机模型中稀有事件（失效）概率的方法和算法。这些模型根据随机输入变量表示产品的适用性。该“黑箱”极限状态函数可能高度非线性、隐式、含噪声或不连续，也可能仅提供二元输出；其评估成本预计会非常高。由于采用了计算几何，所提出的方法仅适用于低维问题（维度不超过八）。

设计域的局部分解方法尚未应用于结构可靠性领域，本文提出将设计域划分为单形。不断扩展和细化的几何结构能够有效分类其中的预期事件（代理模型），并支持确定下一次极限状态函数评估的位置，同时还能有效地对概率密度进行积分，最终目标是估计失效概率。所提出的自适应算法完全不依赖梯度，因为它只使用性能函数的类别型输出：失效或成功。这使得该算法对所分析函数中的噪声和波动具有很强的鲁棒性，并且在问题重新表述和重新参数化下保持不变。该算法能够自动发现多个设计点，并根据概率密度按比例离散化不同的失效面。与许多现有的基于统计抽样的方法相比，其主要区别在于获得了对问题几何表示及其细化结果的近似认知。这些信息能够深入揭示问题的结构，并为更充分地利用此前从昂贵计算机模型的评估中获得的宝贵点值信息提供了巨大潜力。模拟方法中体现的纯统计策略忽略了随机变量空间中的问题结构。

所提算法专注于两项任务：（i）通过向实验设计中添加新点来<实际不可见扩展>实验设计，使几何结构的扩展与其在失效面周围的细化之间保持平衡；（ii）估计离散为单形的结构内部及其外部的概率。扩展通过逐次一次添加一个点来完成，同时根据新获得的信息调整结构分解。概率的估计通过以下方式实现：在单形内部使用确定性求积规则，对包含凸包的超球外部区域使用解析表达式，以及通过应用散度定理进行有效积分。

此外，定义了新的全局敏感度，用于反映沿失效面从安全状态到失效状态的状态转变。因此，它们非常适用于二元极限状态函数。它们是所提出框架中构建几何结构的副产物。

致谢

这项工作得到了由捷克教育、青年和体育部资助的内部项目编号FAST-K-21-6943，以及“BUT 质量内部资助项目（KInG BUT）”项目的支持，

注册号 CZ.02.2.69/0.0/0.0/19_073/0016948，由 OP RDE 资助。

CRediT 作者贡献声明

Aleksei Gerasimov: 概念化、方法、软件、调查、数据整理、撰写——初稿、可视化，**Miroslav Vo˘rechovský:** 概念化、方法、验证、撰写——初稿、撰写——审阅与编辑、监督、可视化、项目管理

附录 A：凸包几何的确定

点集的凸包（有时称为凸包络或凸闭包）是包含该点集的最小凸集。N_{var}维欧几里得空间中的凸包由顶点和超平面面（N_{var}-1 维单形）构成。因此，凸包可视为若干半空间的交集，也可以仅使用一组超平面来构造。本文使用 QHull 库（作为 SciPy 软件包的一部分）构造凸包。空间维数为 $N_{var} \geq 4$ 时，Quickhull 算法的最坏情况时间复杂度为 $O(n_P n_f / n_r)$，其中 n_P 是输入点的数量，n_r 是已处理点的数量 [6]。由于复杂度与面数 n_f 成正比，Quickhull 的渐近复杂度为 $O(n^{N_{var}/2} p)$ [77]（不同于二维和三维情形，此时 Quickhull 的最坏情况时间复杂度为 $O(n_P \log n_r)$）。对于高维问题，当使用 QHull 进行精确计算几何分析变得难以处理时，可以使用凸包近似 [30]。

已知 $xxx_1, xxx_2, \ldots, xxx_k$ 是一个面的顶点坐标，该面所在超平面的方程可表示为以下矩阵的行列式，其中坐标扩展后添加了第一行和一列 1

$$H = \begin{vmatrix} \boldsymbol{x}, & 1 \\ \boldsymbol{x}_1, & 1 \\ \boldsymbol{x}_2, & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{x}_k, & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{A.1}$$

该方程可表示为向量形式：

$$H = \boldsymbol{a}\boldsymbol{x} + b = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_k x_k + b = 0, \tag{A.2}$$

其中aaa 是单位法向量，b 是相对于原点的偏移量。每个面都界定了凸包的内部 和外部 。所谓“内部”，是指位于所有面同一侧的点所限定的部分。假设有n^f 个面构成凸包的边界。每个面都有其单位外法向量，即一个包含N_{var} 个坐标的向量。这些法向量可排列成矩阵AAA，相应的偏移量可存储在向量bbb 中，适用于所有n^f 个面。点xxx^* 位于凸包内部的条件是满足以下所有不等式

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{0}. \tag{A.3}$$

内切于凸包的球的半径r 为 $r = \min_{i=1,\ldots,n_f}(-b_i)$。

附录B. 标准高斯空间中的球坐标与N_{var}维球

本节回顾基于高斯空间标准球坐标表示的一些实用工具。

高斯空间中任意一点$xxx = \{x_1, \ldots, x^{N_{var}}\}$ 处的联合密度是各个边缘分布的一元高斯密度的乘积，因此可以大大简化

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \prod_{\nu=1}^{N_{var}} \varphi(x_i) \equiv \varphi(\rho; N_{var}) = \frac{1}{(2\pi)^{N_{var}/2}} \exp\left\{\left(-\frac{\rho^2}{2}\right)\right\}, \tag{B.1}$$

其中， $\varphi(x)=(2\pi)^{-1/2}\exp\{(-x^2/2)\}$ 是标准一元高斯密度，而 ρ 是xxx到原点的欧几里得距离： $\rho=\|xxx\|=\sqrt{xxx^{\intercal}xxx}=\sqrt{\sum_{v=1}^{N_{\text{var}}}vx_v^2}, v=1,..,N_{\text{var}}$。

所提方法中的一个重要几何实体是半径为 ρ、以坐标系原点为中心的N_{var}球。该N_{var}球的体积和表面积记作$B_\rho\in\mathbb{R}^{N_{\text{var}}}$，其表达式为

$$\text{Vol}\left[B_\rho\right]=\frac{\pi^{N_{\text{var}}/2}}{\Gamma\left(\frac{N_{\text{var}}}{2}+1\right)}\rho^{N_{\text{var}}}, \tag{B.2}$$

$$\text{Sur}\left[B_\rho\right]=\frac{2\pi^{N_{\text{var}}/2}}{\Gamma\left(\frac{N_{\text{var}}}{2}\right)}\rho^{N_{\text{var}}-1}. \tag{B.3}$$

所提算法中的另一个重要要素是高斯空间中随机距离 ρ 的分布函数。假设随机选取一点xxx。该点到原点的欧几里得距离服从自由度为N_{var} 的 χ （卡方）分布。距离 $\rho>0$的概率密度函数为

$$f_\chi(\rho;N_{\text{var}})=\frac{2^{1-N_{\text{var}}/2}}{\Gamma\left(\frac{N_{\text{var}}}{2}\right)}\rho^{N_{\text{var}}-1}\exp\left(-\frac{\rho^2}{2}\right) \tag{B.4}$$

$$=\varphi(\rho;N_{\text{var}})\cdot\text{Sur}\left[B_\rho\right], \tag{B.5}$$

其中， $\Gamma(\cdot)$ 是标准（完全）伽马函数。相应的累积分布函数定义为$F_\chi(\rho;\ N_{\text{var}})=\int_0^\rho f_\chi(t,\ N_{\text{var}})\text{d}t$，其表达式为

$$F_\chi(\rho;N_{\text{var}})=\frac{2^{1-N_{\text{var}}/2}}{\Gamma\left(\frac{N_{\text{var}}}{2}\right)}\int_0^\rho t^{N_{\text{var}}-1}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\text{d}t=P_\circ\left(\frac{N_{\text{var}}}{2},\frac{\rho^2}{2}\right), \tag{B.6}$$

其中 $P_\circ(s,x)=\gamma(s,x)/\Gamma(s)$ 是 正则化下不完全伽马函数。 $P_\circ(s,x)$ 是“特殊函数”之一，也是各种数学库中的标准组成部分，例如 `SciPy` [88], ，它可在`Python` 中使用（函数`gammainc(·,·)`）。

半径为r 的N_{var}维球内部 对应的概率含量为$p_{\text{in}}(r,N_{\text{var}})=F_\chi(r;N_{\text{var}})\equiv P_\circ(N_{\text{var}}/2,r^2/2)$。

正则化下不完全伽马函数P^{-1}。的反函数可用于计算球$B\rho$ 的半径 ρ ， 该球包含一个点的概率为指定概率p_{in}

$$\rho(p_{\text{in}};N_{\text{var}})\equiv F_\chi^{-1}(p_{\text{in}};N_{\text{var}})=\sqrt{2\left[P_\circ^{-1}(N_{\text{var}}/2,p_{\text{in}})\right]}, \tag{B.7}$$

其中$F_\chi^{-1}(p_{\text{in}};N_{\text{var}})$是服从 χ分布的随机距离的反分布函数。

现在我们单独讨论半径为 ρ 的N_{var}维球$B_\rho\in\mathbb{R}^{N_{\text{var}}}$ 的外部 。点落在半径为 ρ 的N_{var}维球外部的概率为

$$p_{\text{out}}(r;N_{\text{var}})=1-p_{\text{in}}(\rho;N_{\text{var}})=1-F_\chi(\rho;N_{\text{var}}) \tag{B.8}$$

$$=S_\chi(\rho;N_{\text{var}})\equiv Q_\circ(N_{\text{var}}/2,\rho^2/2),$$

其中$S_\chi(\rho;N_{\text{var}})=1-F_\chi(\rho;N_{\text{var}})$是自由度为$N_{\text{var}}$的 χ分布的生存函数 。虽然可以通过将N_{var}维球的内部概率从1中扣除，来计算其外部概率，但由于有限精度的浮点运算，这种方法可能在数值上不稳定。我们建议使用另一种标准“特殊函数”：正则化上不完全伽马函数，在此记作$Q_\circ(\cdot,\ \cdot)$，参见`gammaincc(·,·)`，见`SciPy`。

与方程（B.7）类似，正则化上不完全伽马函数的逆函数Q^{-1}。可用于计算$B\rho$ 的半径，使其外部区域的概率为指定概率p_{out}

$$\rho(p_{\text{out}};N_{\text{var}})\equiv S_\chi^{-1}(p_{\text{out}};N_{\text{var}})=\sqrt{2\left[Q_\circ^{-1}(N_{\text{var}}/2,p_{\text{out}})\right]}, \tag{B.9}$$

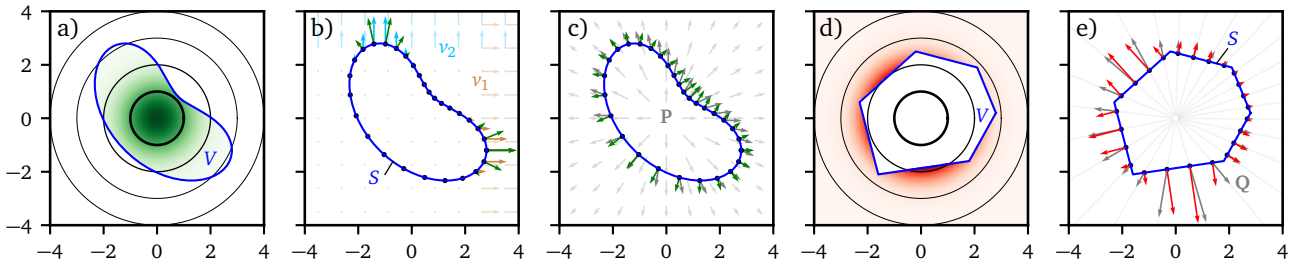


图 C.24：散度定理在概率估计中的应用。a) 封闭区域内的概率（空间体积 V）。b) 两个正交向量场及其与包围积分体积的表面 S 法向量的点积。c) 用于对内部概率进行积分的径向向量场。d) 封闭区域外的概率（空间体积 V）。e) 用于对外部概率进行积分的径向向量场。

其中$S_{\chi}^{-1}(p_{\text{out}};\ N_{\text{var}})$ 是 χ 分布的逆生存函数。

A附录 C. 用于概率积分的散度定理（高斯—奥斯特罗格拉德斯基定理）

向量 XXX 的联合概率密度函数 $f_{\boldsymbol{X}}(xxx) \equiv \prod^{N_{\text{var}}}{}_{v=1} f_v(x_v)$ 为联合高斯分布，其单变量边缘概率密度彼此独立且相同：$f_v(x_v)$、$v = 1$、……、N_{var}。每个变量 v 都有相应的累积分布函数 $F_v(x_v)$。

我们提出使用散度定理来计算 Ω中封闭区域内的概率。给定密度 $f(xxx)$ 以及定义于 Ω中的可微向量场 $\mathbf{F}(xxx)$，子域 V 上的体积积分可以转换为沿包围体积 V的表面S 所取的轮廓积分

$$\iiint_V \nabla \cdot (f(\boldsymbol{x})\mathbf{F}(\boldsymbol{x}))\,\mathrm{d}V = \oiint_S f(\boldsymbol{x})\mathbf{F}(\boldsymbol{x}) \cdot \mathbf{n}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}S\,, \tag{C.1}$$

其中 $\mathbf{n}(xxx)$ 是闭合曲面的外法向，见图 C.24。纳布拉算子与概率密度和向量场的乘积点乘后得到一个标量，该标量在左端积分。对体积 V 的该积分可以替换为右端的积分，该积分仅在维数为 $N_{\text{var}} - 1$ 的曲面上进行。被积函数是向量场，其分量投影到（与之点乘）外法向 $\mathbf{n}$ 上，并乘以局部密度 $f(xxx)$。体积 V 中的概率密度积分实际上被转换为对一个维数更低的曲面的积分，而且，对向量场 $\mathbf{F}(xxx)$ 的明智选择可以通过右端显著提高数值估计的准确性。

对于位于高斯空间一般位置的闭区域 V 内的概率求积，我们提出一个具有 Nvar 个分量的向量场 F $_{N_{\text{var}}}(\text{xxx})$，其各方向上的分量由分布函数与概率密度之比构成：$\mathrm{F}_{N_{\text{var}}}(\text{xxx}) = \Big[\,\mathrm{F}_1(\mathrm{x}_1)\,\mathrm{f}_1(\mathrm{x}_1)$、$\mathrm{F}_2(\mathrm{x}_2)\,\mathrm{f}_2(\mathrm{x}_2)$、……、$\mathrm{F}_{N_{\text{var}}}(\mathrm{x}_{N_{\text{var}}})\Big]\mathrm{f}_{N_{\text{var}}}(\mathrm{x}$。方程 (C.1) 中的曲面积分因此包含 Nvar 个分量，且每个分量的形式都很简单。任意第 v 个分量都是所有概率密度的乘积，但第 v 个变量对应的项为该变量的分布函数：$\mathrm{F}_v(\mathrm{x}_v)\prod^{N_{\text{var}}}\mathrm{j}=1,\mathrm{j}\neq$ v $\mathrm{f}_v(\mathrm{x}_v)$。这些向量场分量彼此正交；参见图 C.24 b 中浅金色和浅蓝色的向量场 $\mathrm{v}_1(\text{xxx})$ 和 $\mathrm{v}_2(\text{xxx})$。

该类项的v次项关于 x_v 微分后得到 $f_{\boldsymbol{X}}(xxx)$。因此，方程（C.1）的左端（lhs）等于 N_{var} 乘以体积 V 内部的概率含量，而相应的右端（rhs）则分解为 N_{var} 个简单的轮廓积分

$$\iiint_V \underbrace{\nabla \cdot \big(f(\boldsymbol{x})\mathbf{F}_{N_{\text{var}}}(\boldsymbol{x})\big)}_{N_{\text{var}} f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})}\,\mathrm{d}V = N_{\text{var}} p_V \qquad \text{(lhs)} \tag{C.2}$$

$$\oiint_S f(\boldsymbol{x})\ \underbrace{\mathbf{F}_{N_{\text{var}}}(\boldsymbol{x}) \cdot \mathbf{n}(\boldsymbol{x})}_{\sum_{v=1}^{N_{\text{var}}}\left(\frac{F_v(x_v)}{f_v(x_v)} n_v(\boldsymbol{x})\right)}\ \mathrm{d}S = \oiint_S \sum_{v=1}^{N_{\text{var}}} \left(F_v(x_v) n_v(\boldsymbol{x}) \prod_{j=1, j\neq v}^{N_{\text{var}}} f_j(x_j) \right) \mathrm{d}S = N_{\text{var}} p_V \qquad \text{(rhs)} \tag{C.3}$$

此计算考虑所有N_{var} 个正交分量，最终概率p_V 通过将右端的结果除以N_{var}得到。也可以通过考虑以下内容来简化向量场

仅取非零分量的一个子集。最简单的情况是，所选方向v:$\left[0,\ldots,F_v(x_v)f_v(x_v),\ldots,0\right]$上只有一个分量。此类向量场的散度仅在$v$个方向上产生非零贡献，因此，方程（C.1) 的左端简化为 $\iiint f_{\boldsymbol{X}}(xxx)\mathrm{d}V = pv$。相应的$v$右端变为

$$p_V = \oiint_S f(\boldsymbol{x})\left(\frac{F_v(x_v)}{f_v(x_v)}n_v(\boldsymbol{x})\right)\mathrm{d}S. \tag{C.4}$$

当封闭区域 V 的质心大致位于原点，且边界近似为球形时，如图 C.24c 和 d 所示，区域 V 内的概率含量可以通过另一个可微向量场 $\mathbf{v}$更好地积分。散度定理稍作改写后为

$$\iiint_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}V = \oiint_S \mathbf{v}(\boldsymbol{x})\cdot\mathbf{n}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}S. \tag{C.5}$$

向量场 $\mathbf{v}(xxx)$的一种合适选择是旋转对称的发散场 $\mathbf{P}(xxx)$，其在点 xxx处的方向为单位半径向量 $\mathbf{P}(xxx)$，强度也由距原点的距离给出， ρ

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{x}) = \frac{F_\chi(\rho;N_{\mathrm{var}})}{\mathrm{Sur}\left[B_\rho\right]}\vec{\rho}(\boldsymbol{x}), \tag{C.6}$$

其中 $F_\chi(\rho;\ N_{\mathrm{var}})$ 是方程（B.6）中定义的分布函数。向量场 $\mathbf{P}(xxx)$ 在图 C.24 c 中以浅灰色箭头表示。在任意一点，向量场都只有径向分量，其强度为 $F_\chi(\rho;\ N_{\mathrm{var}})/\mathrm{Sur}\left[B_\rho\right]$。利用方程（C.5）中的球坐标系，可以证明两边都等于体积 pV 内的概率含量 V。现在说明，这种向量场的选择可以直接用于求积。解析推导中的一个重要步骤是注意到，在球坐标系中，径向向量场的散度 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}(xxx)$等于

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\rho^{N_{\mathrm{var}}-1}}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^{N_{\mathrm{var}}-1}\mathbf{v}_\rho(\rho)\right), \tag{C.7}$$

其中 $\mathbf{v}_\rho(\rho)$ 是 $\mathbf{v}(xxx)$ 的径向分量，与角坐标无关。在我们讨论的 $\mathbf{v}(xxx)\equiv\mathbf{P}(xxx)$情形中，它是唯一的分量。将 $\mathbf{P}(xxx)$ 代入方程（C.7），可知方程（C.5）表示 V 内的概率含量。

本文提出的方法需要准确估计封闭区域 外部 的概率 V。具体而言，该封闭区域是由线性边界（线段、平面、超平面）围成的凸包，且外部概率非常小；参见图C.24d。凸包包围了给定抽样阶段的 N_{sim} 个ED点，其外部的概率含量记为 $p_{\mathcal{O}}^{(N_{\mathrm{sim}})}$。在这种情况下，最好在方程（C.5）中使用另一个向量场，以某种方式补充旋转对称场 $\mathbf{P}(xxx)$。唯一的区别在于，强度是根据 $F_\chi(\rho$ 的补集计算的；N_{var}），也就是 $S_\chi(\rho;\ N_{\mathrm{var}}) = 1 - F_\chi(\rho;\ N_{\mathrm{var}})$。向量场写作：

$$\mathbf{Q}(\boldsymbol{x}) = \frac{S_\chi(\rho;N_{\mathrm{var}})}{\mathrm{Sur}\left[B_\rho\right]}\vec{\rho}(\boldsymbol{x}). \tag{C.8}$$

将此向量场代入方程 ρ，其中xxx 是任意点到原点的距离，C.5 即可得到图C.24e所示的求值表达式。

$$p_{\mathcal{O}}^{(N_{\mathrm{sim}})} = \oiint_S \mathbf{Q}(\boldsymbol{x})\cdot\mathbf{n}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}S. \tag{C.9}$$

在实际计算中，构成凸包边界S 的各个面需要进行积分

分别使用第 3.1 节所述的完全相同的确定性求积规则。将求积用于 N_{var}维失效和混合单纯形的唯一区别在于，边界部分仅为 $N_{\text{var}}-1$ 维，因此必须使用相应的积分节点。

参考资料

[1] Afshari, S. S.、Enayatollahi, F.、Xu, X. 和 Liang,X.（2022），“基于机器学习的结构可靠性分析方法：综述”，《可靠性工程与系统安全》，219，108223。[2] Ameryan, A.、Ghalehnovi, M.和 Rashki,M.（2022），“AK-SESC：一种基于主动学习克里金法与序贯空间转换方法集成的新型可靠性程序”，《可靠性工程与系统安全》，217，108036。[3] Au, S.-K. 和 Beck, J. L.（2001），“通过子集模拟估计高维中的小失效概率”，《概率工程力学》，16，263–277。[4] Balesdent, M.、Morio,J.和Marzat,J.（2013），“用于稀有事件估计的基于克里金法的自适应重要抽样算法”，“Structural Safety”，44，1–10。[5] Bao,Y.、Xiang,Z. 和 Li, H.（2021），“基于自适应子集搜索的深度神经网络结构可靠性分析方法”，《可靠性工程与系统安全》，213，107778。[6] Barber,C.B.、Dobkin,D. P. 和 Huhdanpaa, H.（1996），“用于凸包的 Quickhull 算法”，ACM TRANSACTIONSON MATHEMATICAL SOFTWARE，22，469–483。[7] Beyer, H.-G.和 Sendhoff, B.（2007），“稳健优化——全面综述”，《应用力学与工程中的计算方法》，196，3190–3218。[8] Bjerager, P.（1988），“通过方向模拟进行概率积分”，《工程力学杂志》，114，1285–1302。[9] Borri, A. 和Speranzini, E.（1997），“使用标准确定性有限元代码进行结构可靠性分析”，“Structural Safety”，19，361–382。[10] Bourinet,J.-M.（2016），“利用自适应支持向量回归替代模型进行稀有事件概率估计”，《可靠性工程与系统安全》，150，210–221。[11] Bourinet,J.-M.、Deheeger, F.和Le maire, M.（2011），“结合子集模拟与支持向量机评估小失效概率”，“Structural Safety”，33，343–353。[12] Breitung,K. W.（1984），“多元正态积分的渐近近似”，《工程力学杂志》，110，357–366。[13] —（1994），《概率积分的渐近近似》，施普林格 BerlinHeidelberg。[14] —（2019），“极限状态函数图形的几何与子集模拟：反例”，《可靠性工程与系统安全》，182，98–106。[15] Breitung, K. W.和Hohenbichler, M.（1989），“多元积分的渐近近似及其在多元正态概率中的应用”，Journal ofMultivariate Analysis，30，80–97。[16] Bucher, C.（2009），“高维可靠性分析的渐近抽样”，《概率工程力学》，24，504–510。[17] Bucher, C.和 Bourgund, U.（1990），“结构可靠性问题的一种快速高效响应面方法”，Structural Safety，7，57–66。[18] Bucher, C. G.（1988），“自适应抽样——一种迭代式快速蒙特卡罗程序”，“Structural Safety”，5，119–126。[19] Cadini, F.、Santos,F. 和 Zio, E.（2014），“一种改进的基于自适应克里金法的重要抽样技术，用于抽取低概率的多个失效区域样本”，《可靠性工程与系统安全》，131，109–117。[20] Chen,J.、Chen,Z.、Xu,Y.和Li,H.（2021），“结合克里金法和带有两阶段收敛准则的子集模拟的高效可靠性分析”，《可靠性工程与系统安全》，214。[21] de Angelis, M.、Patelli, E. 和Beer, M.（2015），“用于高效稳健可靠性分析的高级直线抽样”，Str ucturalSafety，52，170–182。[22] De Loera,J.、Dutra,B.、Köppe, M.、Moreinis,S.、Pinto, G. 和 Wu, J.（2013），“多面体上多项式精确积分的软件”，Computational Geometry，46，232–252。[23] deSantana Gomes, W. J.（2019），“使用自适应人工神经网络进行结构可靠性分析”，ASCE-ASME Journal of Risk and Uncertainty in Engineering Systems,Part B: MechanicalEngineering，5。[24] Ditlevsen, O.（1979），“结构系统的窄可靠性界限”，Journal ofStructural Mechanics，7，453–472。[25] Ditlevsen, O. 和 Madsen, H. O.（1996），《结构可靠性方法》，John Wiley & Sons。[26] Echard,B.、Gayton, N.和Lemaire, M.（2011），“AK-MCS：结合克里金法与蒙特卡罗模拟的主动学习可靠性方法”，Structural Safety，33，145–154。[27] Echard, B.、Gayton,N.、Lemaire, M. 和Relun,N.（2013），“针对耗时数值模型的小失效概率的结合重要抽样与克里金可靠性方法”，《可靠性工程与系统安全》，111，232–240。[28] Eliáš, J.、Vo˘rechovský, M.和Sadílek, V.（2020），“用于蒙特卡罗积分的极小极大距离准则的周期版本”，《工程软件进展》，149，102900。[29] Fiessler,B.、Neumann, H.-J.和 Rackwitz, R.（1979），“结构可靠性中的二次极限状态”，Journal of the EngineeringMechanics Division，105，661–676。[30] Gerasimov,A.和Vo˘rechovský,M.（2021），“使用凸包近似估计抽样域概率”，载于《第31届欧洲安全与可靠性会议（ESREL2021）论文集》，Research Publishing(S) Pte. Ltd.，第2770–2776页。[31] Gomes, W.J. S.（2020），“用于结构可靠性分析的浅层和深层人工神经网络”，ASCE-ASME Journal of Risk and Uncertainty in Engineering Systems, Part B: Mechanical Engineering。

[32] Grundmann, A.和 Möller, H. M.（1978），“通过组合方法得到的 n-单纯形不变积分公式”，《SIAM 数值分析杂志》，15，282–290。[33] Guimarães, H.、Matos, J. C. 和 Henriques,A.A.（2018），“一种用于结构可靠性分析的创新自适应稀疏响应面法”，《Structural Safety》，73，12–28。[34] Hammer,P.C. 和 Stroud, A. H.（1956），“单纯形上的数值积分”，《数学表格及其他计算辅助工具》，10，137–139。[35] Harbitz, A.（1983），“利用重要抽样技术高效且准确地计算失效概率”，载于 4th 土壤与结构工程中统计学和概率应用国际会议，编者 Augusti,G.，佛罗伦萨大学（意大利），Pitagora出版社，博洛尼亚，意大利，第 3卷，第 825–836页。[36] Hasofer,A. M. 和 Lind,N.（1974），“精确不变的二阶矩规范格式”，美国土木工程师学会工程力学分会会刊，100，111–121。[37] Hohenbichler, M.、Gollwitzer,S.、Kruse, W. 和 Rackwitz, R.（1987），“一阶和二阶可靠性方法的新进展”，Structural Safety，4，267–284。[38] Hohenbichler, M.和 Rackwitz, R.（1986），“结构可靠性中的灵敏度与重要性度量”，《土木工程系统》，3，203–209。[39] —（1988），“通过重要抽样改进二阶可靠性估计”，《工程力学杂志》，114，2195–2199。[40] Huang, X.、Chen,J. 和Zhu,H.（2016），“利用 AK–SS 评估小失效概率：结合克里金法与子集模拟的主动学习方法”，《StructuralSafety》，59，86–95。[41] Isaac, T.（2020），“单纯形的递归、无参数、显式定义插值节点”，SIAM 科学计算杂志，42，A4046–A4062。[42] Jiang, C.、Qiu, H.、Yang, Z.、Chen,L.、Gao, L. 和Li,P.（2019），“一种用于基于代理模型的可靠性分析的通用失效追踪抽样框架”，《可靠性工程与系统安全》，183，47–59。[43] Johnson, M.、Moore,L.和 Ylvisaker,D.（1990），“极小极大与极大极小距离设计”，《统计规划与推断杂志》，2，131–148。[44] Kiureghian, A.D. 和Liu, P.-L.（1986），“不完备概率信息下的结构可靠性”，《工程力学杂志》，112，85–104。[45] Kurtz,N.和Song, J.（2013），“使用高斯混合的基于交叉熵的自适应重要抽样”，《Structural Safety》，42，35–44。[46] Lauffer, R.（1955），“多重积分插值”，《数学档案》，6，159–164。[47] Lee,S.（2021），“使用支持向量机和核密度进行失效概率估计的蒙特卡罗模拟”，《可靠性工程与系统安全》，209，107481。[48] Li, H.-S.、Lü, Z.-Z. 和Yue, Z.-F.（2006），“用于结构可靠性分析的支持向量机”，《应用数学与力学》，27，1295–1303。[49] Li, T.、Pan, Q. 和Dias, D.（2021），“用于可靠性分析的主动学习相关向量机”，《应用数学建模》，89，381–399。[50] Li,X.、Gong,C.、Gu, L.、Gao,W.、Jing,Z.和 Su, H.（2018），“一种基于径向基函数的可靠性分析序贯代理方法”，Structural Safety，73，42–53。[51] Lin,S. 和 Xie, Z.（2020），“单纯形上多项式积分的新递归公式”，《应用数学与计算》，376，125140。[52] Liu, P.-L. 和 Kiureghian, A. D.（1991），“结构可靠性的优化算法”，StructuralSafety，9，161–177。[53] Liu,W.-S.、Cheung, S. H.和 Cao,W.-J.（2019），“一种高效的代理辅助重要抽样可靠性分析框架”，《工程软件进展》，135，102687。[54] Lu,X.、Li,H.和 Papalambros,P.（1984），“车辆悬架优化的设计流程”，《国际车辆设计杂志》，5，129–142。[55] Luo, C.、Keshtegar, B.、Zhu, S.P.、Taylan, O.和 Niu,X.-P.（2022），“结合先进机器学习方法的混合增强蒙特卡罗模拟，用于准确高效的结构可靠性分析”，《应用力学与工程中的计算方法》，388，114218。[56] Madsen, H.、Krenk, S. 和 Lind,N.（1986），《结构安全方法》，Prentice-Hall，恩格尔伍德克利夫斯，新泽西州。[57] Madsen, H. O.（1988），“遗漏敏感度因子”，Structural Safety，5，35–45。[58] Marelli,S. 和Sudret, B.（2018），“一种结合稀疏多项式混沌展开与自助法的结构可靠性分析主动学习算法”，Structural Safety，75，67–74。[59] Melchers, R.E.和 Beck,A.T.（编）（2017），《结构可靠性分析与预测》，约翰·威立父子有限公司。[60] Naess, A.、Leira,B. 和 Batsevych, O.（2009），“通过增强蒙特卡罗模拟进行系统可靠性分析”，StructuralSafety，31，349–355。[61] Nataf, A.（1962），“边缘分布给定的概率分布的确定”，《法国科学院院报》，225，42–43。[62] Nelsen,R. B.（2006），《Copula导论》，《施普林格统计学丛书》第XIV 卷，施普林格，第 2版，最初作为“《统计学讲义》”丛书第 139 卷出版。[63] Nie, J.和 Ellingwood, B. R.（2000），“结构可靠性分析的方向方法”，StructuralSafety，22，233–249。[64] Novák,L.和 Voˇrechovský,M.（2018），“着色线性变换的推广”，《俄斯特拉发技术大学学报》，土木工程系列，18，31–35。[65] Pan,Q.和 Dias, D.（2017），“结合自适应支持向量机与蒙特卡罗模拟的高效可靠性方法”，Structural Safety，67，85–95。[66] Papaioannou, I.、Papadimitriou, C.和 Straub, D.（2016），“用于结构可靠性分析的序贯重要抽样 -

析》，Structural Safety，62，66–75。[67] Pronzato，L.（2017），《极小极大与极大极小空间填充设计：构造的一些性质与方法》，Journal de la Société Française de Statistique，158，7–36。[68] Rackwitz，R.（2001），《可靠性分析——综述与展望》，《结构安全》，23，365–395。[69] Rackwitz，R. 和 Fiessler，B.（1978），《组合随机荷载序列下的结构可靠性》，Computers & Structures，9，489–494。[70] Rashki，M.、Miri，M. 和 Moghaddam，M. A.（2014），《一种基于仿真的方法，用于具有高度非线性约束的可靠性设计优化问题》，Automation in Construction，47，24–36。[71] Rosenblatt，M.（1952），《关于多元变换的评述》，The Annals of Mathematical Statistics，23，470–472。[72] Roy，A. 和 Chakraborty，S.（2022），《基于三阶段序贯抽样自适应支持向量回归模型的结构可靠性分析》，《可靠性工程与系统安全》，219，108260。[73] Schlömer，N.、Papior，N.、Arnold，D.、Ancellin，M. 和 Zetter，R.（2020），《 nschloe/quadpy v0.16.5》，https://zenodo. org/record/4340036。[74] Schöbi，R.、Sudret，B. 和 Marelli，S.（2017），《使用多项式混沌克里金进行稀有事件估计》，ASCE-ASME Journal of Risk and Uncertainty in Engineering Systems，Part A：Civil Engineering，3。[75] Schuëller，G.、Pradlwarter，H. 和 Koutsourelakis，P.（2004），《对高维可靠性估计程序的批判性评估》，概率工程力学，19，463–474。[76] Schueremans，L. 和 Gemert，D. V.（2005），《样条和神经网络在基于仿真的结构可靠性分析中的优势》，Structural Safety，27，246–261。[77] Seidel，R.（1995），《多胞体的上界定理：其渐近版本的简易证明》，计算几何，5，115–116。[78] Shi，L.、Sun，B. 和 Ibrahim，D. S.（2019），《一种基于径向基函数和多个核函数的主动学习可靠性方法》，结构与多学科优化，60，211–229。[79] Shinozuka，M.（1983），《结构安全基本分析》，Journal of Structural Engineering，109，721–740。[80] Silvester，P.（1970），《单纯形的对称求积公式》，Math. Comp.，24，95–100。[81] Stroud，A. H.（1964），《单纯形的三次近似积分公式》，Mathematics of Computation，18，590–597。[82] Sun，Z.、Wang，J.、Li，R. 和 Tong，C.（2017），《LIF：一种新的基于克里金法的学习函数及其在结构可靠性分析中的应用》，《可靠性工程与系统安全》，157，152–165。[83] Sundar，V. 和 Shields，M. D.（2016），《用于识别隐式定义函数以进行可靠性分析的代理模型增强型随机搜索算法》，Structural Safety，62，1–11。[84] Teixeira，R.、Nogal，M. 和 O’Connor，A.（2021），《元模型可靠性分析中的自适应方法：综述》，Structural Safety，89，102019。[85] Tommaso，F. D. 和 Zerroudi，B.（2020），《关于 d 维单纯形上的一些数值积分公式》，Mediterranean Journal of Mathematics，17。[86] Tvedt，L.（1990），《正态空间中二次型的分布——在结构可靠性中的应用》，《工程力学杂志》，116，1183–1197。[87] Vahedi，J.、Ghasemi，M. R. 和 Miri，M.（2018），《使用增强型自适应克里金法进行结构可靠性评估》，Structural Engineering and Mechanics，66，677–691。[88] Virtanen，P.、Gommers，R.、Oliphant，T. E.、Haberland，M.、Reddy，T.、Cournapeau，D.、Burovski，E.、Peterson，P.、Weckesser，W.、Bright，J.、van der Walt，S. J.、Brett，M.、Wilson，J.、Millman，K. J.、Mayorov，N.、Nelson，A. R. J.、Jones，E.、Kern，R.、Larson，E.、Carey，C. J.、Polat，˙I.、Feng，Y.、Moore，E. W.、VanderPlas，J.、Laxalde，D.、Perktold，J.、Cimrman，R.、Henriksen，I.、Quintero，E. A.、Harris，C. R.、Archibald，A. M.、Ribeiro，A. H.、Pedregosa，F.、van Mulbregt，P. 和 SciPy 1.0 贡献者（2020），《SciPy 1.0：Python 科学计算的基础算法》，Nature Methods，17，261–272。[89] Vo˘rechovský，M.（2008），《通过级数展开方法仿真简单交叉相关随机场》，《结构安全》，30，337–363。[90] Vo˘rechovský，M.（2022），《通过检测失效面进行自适应序贯抽样，对离散状态性能函数开展可靠性分析》，《应用力学与工程中的计算方法》，401，115606。[91] Waarts，P. H.（2000），《使用有限元分析进行结构可靠性分析——对 DARS：方向自适应响应面抽样的评估》，博士论文，代尔夫特理工大学，代尔夫特，所属文集：TNO Publications。[92] Wagner，P.-R.、Marelli，S.、Papaioannou，I.、Straub，D. 和 Sudret，B.（2022），《使用随机谱嵌入进行稀有事件估计》，《结构安全》，96，102179。[93] Wang，J.、Li，C.、Xu，G.、Li，Y. 和 Kareem，A.（2021），《基于自适应贝叶斯支持向量回归的高效结构可靠性分析》，《应用力学与工程中的计算方法》，387，114172。[94] Wang，J.、Xu，G.、Li，Y. 和 Kareem，A.（2022），《AKSE：一种结合抽样区域方案与基于误差的停止准则的新型自适应克里金法，用于结构可靠性分析》，《可靠性工程与系统安全》，219，108214。[95] Wang，Y.、Xie，B. 和 E，S.（2022），《结合基于马尔可夫链的重要抽样的自适应相关向量机，用于可靠性分析》，《可靠性工程与系统安全》，220，108287。[96] 维基百科贡献者（2021），《元球》，[在线；访问日期：07-May-2022]。[97] Xiang，Z.、Bao，Y.、Tang，Z. 和 Li，H.（2020），《基于深度强化学习的结构可靠性评估抽样方法》，《可靠性工程与系统安全》，199，106901。[98] Xiong，Y. 和 Sampath，S.（2021），《一种基于 AK-MCS 的快速收敛可靠性分析算法》，《可靠性工程与系统安全》，213，107693。[99] Xue，G.、Dai，H.、Zhang，H. 和 Wang，W.（2017），《一种用于高效可靠性分析的新型无偏元模型方法》，《结构安全》，67，1–10。

[100] Yi, J., Zhou, Q., Cheng, Y., and Liu, J.（2020），“结合新型学习函数与基于误差停止准则的高效自适应克里金法可靠性分析”，结构与多学科优化，62，2517–2536。[101] Zhang, J., Xiao, M., and Gao, L.（2019），“结合对失效区域的探索与利用构建的克里金模型和子集模拟的主动学习可靠性方法”，《可靠性工程与系统安全》，188，90–102。[102] Zhang, X., Lu, Z., and Cheng, K.（2022），“基于冯·米塞斯-费舍尔混合模型的交叉熵方向重要抽样可靠性分析”，《可靠性工程与系统安全》，220，108306。[103] Zhang, X. and Quek, S. T.（2022），“用于低失效概率预测的主动学习克里金模型高效子集模拟”，概率工程力学，68，103256。[104] Zhang, X., Wang, L., and Sørensen, J. D.（2019），“REIF：一种面向结构可靠性分析的自适应克里金代理模型的新型主动学习函数”，《可靠性工程与系统安全》，185，440–454。[105] Zhou, T. and Peng, Y.（2022），“采用自适应多项式混沌克里金和概率密度演化方法进行可靠性分析”，《可靠性工程与系统安全》，220，108283。[106] Zhou, Y., Lu, Z., and Yun, W.（2020），“用于系统可靠性分析的主动稀疏多项式混沌展开”，《可靠性工程与系统安全》，202，107025。