arXiv:2304.05480v1 [math.AG] 11 Apr 2023

¨作用于超凯勒流形模空间的群

FRANCESCA RIZZO

Abstract. K¨ahler 流形的周期态射将每个 K3$^{[m]}$ 型极化超 K¨ahler 流形模空间的连通分支嵌入其周期空间中，而该周期空间是厄米对称域在一个算术群作用下的商。继 Stellari 和 Gritsenko-Hulek-Sankaran 的工作之后，我们研究由某些等距变换群的作用所产生的这些周期空间之间的覆盖映射的分歧。

Introduction

在 [Ste08], Stellari 研究了一个群在极化K3 曲面的模空间上的作用。更确切地说，设 h 是与 K3曲面的第二整数上同调群相关联的酉模格 Λ_{K3} 中平方为 $2d$ 的本原向量。次数为 $2d$ 的极化 K3 曲面的周期态射是一个开嵌入

$$\wp : M_{2d} \longhookrightarrow \mathscr{F}_{2d} = \mathscr{D}_{h^\perp}/O(\Lambda_{K3}, h)$$

从极化 K3 曲面的模空间 M_{2d} 到周期空间 $\mathscr{F}_{2d}$的映射。周期空间是与格 $h^\perp$ 相关联的周期域 $\mathscr{D}_{h^\perp}$ （一个二次曲面的开解析子集）在保持向量 h不变的格 Λ_{K3} 的等距变换算术群作用下的商。群 $O(\Lambda_{K3}, h)$ 是 $h^\perp$的等距变换群 $O(h^\perp)$ 的正规子群，并且群 $G = O(h^\perp)/O(\Lambda_{K3}, h)$ 在周期空间 $\mathscr{F}_{2d}$上有一个自然作用。因此，群 G （这是一个指数为 2 的阿贝尔群）诱导出一个伽罗瓦覆盖

$$\rho : \mathscr{F}_{2d} \longrightarrow \mathscr{F}_{2d}/G$$

并在模空间 M_{2d}上双有理作用。

Stellari 刻画了覆盖 ρ的分歧的除子分支。本文旨在将 Stellari 的结果推广到某些极化超 K¨ahler 流形的模空间。

我们考虑以下更一般的情形。固定一个符号差为 $(2, n_-)$ 的偶格 Λ ，其中有 $n_- \geq 2$, 以及有限指数子群 $\Gamma < O(\Lambda)$，我们考虑周期空间$\mathscr{D}_\Lambda/\Gamma$，其中 $\mathscr{D}_\Lambda$ 是一个厄米对称域，群 $O(\Lambda)$ 对格 Λ 的等距变换具有自然作用。周期空间 $\mathscr{D}_\Lambda/\Gamma$ 是正规拟射影簇[Huy16，定理 6.1。13]。

When Γ 是 $O(\Lambda)$ 的某个子群 O 的正规子群，我们得到一个伽罗瓦覆盖

$$\rho : \mathscr{D}_\Lambda/\Gamma \longrightarrow \mathscr{D}_\Lambda/O.$$

我们的目标是研究 ρ 的分歧除子分支。

Heegner 除子是超曲面 $\mathbb{P}(\beta^\perp)\cap\mathscr{D}_\Lambda$ 在 $\mathscr{D}_\Lambda/\Gamma$ 中的像，其中 $\beta\in\Lambda$ 是某个负自交数向量。我们用 $\mathcal{H}_{\beta^\perp}$ 表示该除子。

我们称非零向量 $\beta\in\Lambda$ 定义了一个反射，如果存在一个等距变换 $r_\beta\in O$，它在 $\beta^\perp$ 上是恒等变换，并在 $\mathbb{Z}\beta$上作用为 –id。如果 β 是定义了反射的负自交数向量，则 Heegner 除子 $\mathcal{H}_{\beta^\perp}$ 由 $[r_\beta]\in O/\Gamma$固定。

沿用 [GHS07], 中的定理 3.5，我们刻画符号差为 $(2,n_-)$ 的偶格 Λ 上 ρ 的分歧的除子分支，其中 $n_-\geq 2$，以及所有使 $\mathscr{D}_\Lambda/\Gamma$ 不可约的有限指数正规子群$\Gamma\lhd O$。特别地，我们证明，ρ 的分歧的除子分支是 Heegner 除子 $\mathcal{H}_{\beta^\perp}$，对应于定义了伽罗瓦群 O/Γ 中非平凡类 $[\pm r_\beta]$ 的负自交数本原向量 $\beta\in\Lambda$。

我们将这些结果应用于以下几何情形。K3$^{[m]}$ 型超 K¨ahler 流形，是 K3 曲面上 m 次点的希尔伯特概形的光滑变形。给定一个 K3$^{[m]}$ 型超 K¨ahler 流形 X，阿贝尔群 $H^2(X,\mathbb{Z})$ 是秩为 23 的自由群，并带有 Beauville–Bogomolov–Fujiki 形式 q_X，这是一个取值于 $\mathbb{Z}$ 的非退化二次型，符号差为 (3, 20)。带有二次型 q_X 的群 $H^2(X,\mathbb{Z})$ 是一个偶格，同构于

$$\Lambda_{K3^{[m]}}=\Lambda_{K3}\oplus\mathbb{Z}\ell, \tag{1}$$

其中 ℓ 是一个平方为 $q(\ell)=-2(m-1)$ 的向量。

X 上的极化是一个充足线丛在 X 上的类 H，它在格 $H^2(X,\mathbb{Z})=\Lambda_{K3^{[m]}}$ 中是本原的。(X,H) 的极化类型是类 H 的 $O(\Lambda_{K3^{[m]}})$-轨道。极化类型为 $\tau=O(\Lambda_{K3^{[m]}})h$ 的 K3$^{[m]}$ 型光滑极化超 K¨ahler 流形 (X,H) 具有一个可能可约的拟射影粗模空间 ${}^{[m]}M_\tau$。极化类型为 τ 的极化超 K¨ahler 流形的周期态射为态射

$$\wp:{}^{[m]}M_\tau\longrightarrow\mathscr{D}_{h^\perp}/\widehat{O}(\Lambda_{K3^{[m]}},h),$$

其中 $\widehat{O}(\Lambda_{K3^{[m]}},h)$ 是 $\Lambda_{K3^{[m]}}$ 的等距变换群，它们固定向量 h，并在 $\Lambda_{K3^{[m]}}$的判别群上作为 $\pm$id 起作用。周期态射 $\wp$ 在 ${}^{[m]}M_\tau$的每个连通分支上都是开嵌入。

在第4节中，我们研究 $O(h^\perp)$ 的子群 $\widehat{O}(\Lambda_{K3^{[m]}},h)$ 的正规性。当子群 $\widehat{O}(\Lambda_{K3^{[m]}},h)$ 为正规子群时，群 $G=O(h^\perp)/\widehat{O}(\Lambda_{K3^{[m]}},h)$ 作用于周期空间 $\mathscr{D}_{h^\perp}/\widehat{O}(\Lambda_{K3^{[m]}},h)$，因此也双有理地作用于模空间 ${}^{[m]}M_\tau$。我们可以应用定理 3.5 来刻画伽罗瓦覆盖的除性分歧分量。

$$\rho:\mathscr{D}_{h^\perp}/\widehat{O}(\Lambda_{K3^{[m]}},h)\longrightarrow\mathscr{D}_{h^\perp}/O(h^\perp).$$

它们是与向量 β 相关联的 Heegner 除子，其中 $[\pm r_\beta]$ 是伽罗瓦群 G 的非平凡元素。在定理 5.2 中，我们针对极化类型的整除度为 1 的情形，给出了这些向量的数值特征。

在 4 维情形中，极化类型仅取决于平方 $h^2:=q(h)$ 以及 h 的整除度，其中 h 是理想 $h\cdot\Lambda_{K3^{[2]}}\subset\mathbb{Z}$ 的正生成元。在这种情况下，我们的结果可表述为以下定理。

定理 0.1. 设 h 是平方为 $2d$ 且整除度为 1 的极化。伽罗瓦覆盖的分歧的除子分量

$$\rho : \mathscr{D}_{h^\perp}/\widehat{O}(\Lambda_{K3^{[2]}}, h) \longrightarrow \mathscr{D}_{h^\perp}/O(h^\perp)$$

a关于 Heegner 除子 $\mathcal{H}_{\beta^\perp}$，其中 β 是本原的并满足该条件 s

a) $\beta^2 \mid 2\mathrm{div}(\beta)$;
b) $\beta^2 \neq -2$ *and if* $\beta^2 = -2d$, *then* $2d \nmid \beta \cdot \ell$.

情形 $\boldsymbol{d = 1}$。具有平方为 2 的极化的 K¨ahler 四维一般超 K3$^{[2]}$ahler 流形属于 K [型（整除度自动为 1），是双 EPW 六次体 06]O'G ρ。伽罗瓦覆盖 [的次数为 2，相关的对合称为"对偶对合"。利用 19] DM ρ 关于周期映射像的结果，我们的定理表明，$\mathscr{D}_4$ 有唯一的分歧除子 $\mathscr{D}_4$，且 $\mathscr{D}_4$ 与周期映射的像相交。在平方为 2 的超 K¨ahler 四维流形模空间上由 诱导的除子，与双 EPW 六次体的开轨迹不相交。

致谢。本文重新整理了我硕士论文中的一些结果。感谢我的导师 Olivier Debarre 向我提出这个问题，并在写作期间密切指导我，提出了许多修改意见和建议。

1. An introduction to lattice theory

格 Λ 是一个有限秩自由 $\mathbb{Z}$-模，带有非退化整数对称双线性型 q。若 q 只取偶数值，则称格 Λ 为偶格。对于每个包含 $\mathbb{Q}$的域 K，记向量空间 $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} K$为 Λ_K。该空间带有双线性型 q的延拓 q_K，它仍然是非退化的。Λ 的符号差是 $q_{\mathbb{R}}$的符号差，记为 (n_+, n_-)。若 n_+ 或 n_- 为零，则称该格为定号格；否则，Λ 为不定号格。格 Λ 的对偶格为

$$\Lambda^\vee := \{x \in \Lambda_{\mathbb{Q}} \mid \forall y \in \Lambda \quad x \cdot y \in \mathbb{Z}\} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \mathbb{Z}).$$

显然，存在 一个包含关系 $\Lambda \hookrightarrow \Lambda^\vee$。$\Lambda$ 的判别群是有限阿贝尔群

$$A_\Lambda = \Lambda^\vee/\Lambda.$$

我们用 disc(Λ) 表示 A_Λ 的基数。若 A_Λ 是平凡群，或等价地，若 $\Lambda^\vee = \Lambda$，则称该格为酉模格。对于每个非零的 $x \in \Lambda$， x 的整除度记为 div(x)，它是理想 $x \cdot \Lambda \subset \mathbb{Z}$ 的正生成元。因此，元素 $x_* = \left[\frac{x}{\mathrm{div}(x)}\right]$ 是 A_Λ 的一个元素，其阶为 div(x)。格 ~~Λ的长~~度记为 ℓ(Λ)，是其判别群的生成元的最少个数。

当 Λ 是偶格时，我们在判别群 A_Λ 上得到一个取值于 $\mathbb{Q}/2\mathbb{Z}$ 的二次型 q_Λ，其定义为：对所有 $x \in \Lambda^\vee$， $q_\Lambda([x]) \equiv q_{\mathbb{Q}}(x)$（模 $2\mathbb{Z}$）。A_Λ 的等距变换群记为 $O(A_\Lambda)$，它是保持 q_Λ 不变的 A_Λ 的群自同构群。

我们将用 $\mathbb{Z}$ 表示交矩阵为 1 的秩 1 格。更一般地，对于所有 $n > 0$，我们将用 $\mathbb{Z}(n)$ 表示交矩阵为 n 的秩 1 格；若该格由向量 k生成，则记作$\mathbb{Z}(n) = \mathbb{Z}k$。此外，我们令 U（双曲平面）表示由两个向量 e 和 f 生成的偶酉模格，且满足 $e^2 = f^2 = 0$和 $e \cdot f = 1$。存在唯一一个秩为 8 的正定偶酉模格，我们

记作 E_8。我们用 $E_8(-1)$ 表示通过反转 E_8上的二次型符号得到的格。

注意，每个 f 的 Λ 等距变换都会诱导判别群 A_Λ 的一个等距变换，其定义为 $r(f)([x]) = [f_{\mathbb{Q}}(x)]$，对所有 $[x] \in A_\Lambda$ 均成立。

定理 1.1（[Nik80，定理 1.14.2]）。设 Λ 是一个偶不定格，且 $\ell(\Lambda) + 2 \leq \mathrm{rk}(\Lambda)$。则态射 $r : O(\Lambda) ! O(A_\Lambda)$ 是满射。

我们将此态射的核记为 $O(\Lambda)$，并称其为稳定正交群。我们还定义群

$$\widehat{O}(\Lambda) = \{f \in O(\Lambda) \mid \bar{f} = \pm\mathrm{id} \in O(A_\Lambda)\}.$$

显然，$O(\Lambda)$ 是 $O(\Lambda)$ 的一个子群，其指数至多为 2；而 $O(\Lambda)$ 和 $O(\Lambda)$ 都是 $O(\Lambda)$ 的正规子群。

我们将使用以下结果，该结果证明见 [Eic74，命题 10.4]。

引理 1.2（Eichler）。设 Λ 是一个包含两个双曲平面直和的偶格。h 的 $\widetilde{O}(\Lambda)$-轨道由整数 h^2 和 A_Λ 的元素 $h_* = [h/\mathrm{div}(h)]$ 唯一确定。

1.1. 子格等距变换的延拓。设 M 是偶格 L 的本原子格。我们按照 [Nik80，第 1.5] 节的做法，刻画可延拓为 L 的等距变换的 $M^\perp$ 的等距变换。

我们定义

$$O(L, M) = \{f \in O(L) \mid f|_M = \mathrm{id}\},$$

作用于 L 且在 M上为恒等的等距变换群。类似地，我们定义群

$$\widetilde{O}(L, M) = O(L) \cap \widetilde{O}(L, M) \text{以及} \widehat{O}(L, M) = O(L) \cap \widehat{O}(L, M)。$$

显然，$O(L, M)$ 中的每个等距变换都限制为 $M^\perp$ 的等距变换；也就是说，我们有一个限制态射

$$\mathrm{res} : O(L, M) \longrightarrow O(M^\perp).$$

如果一个等距变换属于此限制态射的像，我们就说它从 $O(M^\perp)$ 延拓为 $O(L, M)$ 的等距变换。

考虑子格链

$$M \oplus M^\perp < L < L^\vee < M^\vee \oplus (M^\perp)^\vee, \tag{2}$$

由此我们得到子群

$$H := L/(M \oplus M^\perp) < (M^\vee \oplus (M^\perp)^\vee)/(M \oplus M^\perp) = A_M \times A_{M^\perp}.$$

此外，我们考虑投影

$$p : H \hookrightarrow A_M \times A_{M^\perp} \twoheadrightarrow A_{M^\perp} \qquad \text{and} \qquad p' : H \hookrightarrow A_M \times A_{M^\perp} \twoheadrightarrow A_M.$$

由于 M 在 L 中是本原的，态射 p 是单射的。事实上，每个 $\ell \in L$ 都可以写成 $\ell = rm + sm'$，其中 r、$s \in \mathbb{Q}$和 m以及 m' 向量分别属于 M 和 $M^\perp$。由于$\ell \cdot L \subset \mathbb{Z}$，我们得到 rm 是 $M^\vee$中的一个元素，而 sm' 是 $(M^\perp)^\vee$ 中的一个元素。因此，

$$p([\ell]) = [sm'] = 0 \in A_{M^\perp} \qquad \text{implies} \qquad sm' \in M^\perp.$$

因此，向量 $\ell - sm' = rm$ 位于 L 中。由于 M 是本原的，这意味着 $rm \in M$，因此 $\ell \in M \oplus M^{\perp}$。类似地，我们证明态射 p' 是单射的。

通过计算链（2）中的指标，我们得到

$$\operatorname{disc}(M)\operatorname{disc}(M^{\perp}) = |H|^2 \operatorname{disc}(L). \tag{3}$$

此外， p 和 q 的单射性蕴含 $|H| \leq \operatorname{disc}(M^{\perp})$和 $|H| \leq \operatorname{disc}(M)$。

命题 1.3（[Nik80，推论 1.5.2]）。等距变换 $g \in O(M^{\perp})$ 可以延拓为 $O(L, M)$，当且仅当 $\bar{g}|_{p(H)} = \mathrm{id}$。

证明。我们在 L 的某个本原向量 h 满足 $M = \mathbb{Z}h$ 的情形下证明该命题。在这种情形下，我们将群 $O(L, \mathbb{Z}h)$ 记为 $O(L, h)$。

每个等距变换 $g \in O(h^{\perp})$ 都唯一延拓为等距变换 $\tilde{g} \in O(L_{\mathbb{Q}}, h)$，由$\tilde{g}(h) = h$ 和 $\tilde{g}|_{h_{\mathbb{Q}}^{\perp}} = g$定义。等距变换 g 可延拓为 $O(L, h)$，当且仅当 $\tilde{g}(\ell) \in L$ 对所有$\ell \in L$.成立。

注意到每个向量 $\ell \in L$ 都可以写成 $\ell = rh + sv$，其中 $v \in h^{\perp}$ 和 r， $s \in \mathbb{Q}$。因此， $\tilde{g}$（ℓ）$= rh + sg$（v）。

由于 $\ell \cdot h^{\perp} \subset \mathbb{Z}$，我们得到 $b = s\operatorname{div}(v)$ 是一个整数。另请注意，$\operatorname{div}(g(v)) = \operatorname{div}(v)$，因为 g 是 $h^{\perp}$的一个等距变换。因此，我们得到

$$p([\ell]) = [sv] = b\left[\frac{v}{\operatorname{div}(v)}\right] \in A_{h^{\perp}} \qquad \text{and} \qquad \bar{g}(p([\ell])) = [sg(v)] = b\left[\frac{g(v)}{\operatorname{div}(g(v))}\right] \in A_{h^{\perp}}.$$

注意， $\bar{g}(p([\ell])) = p([\ell])$当且仅当 $s(g(v) - v) \in h^{\perp}$，这等价于

$$\tilde{g}(\ell) - \ell \in h^{\perp} = h_{\mathbb{Q}}^{\perp} \cap L. \tag{4}$$

由于 $\ell \in L$ 和 $\tilde{g}(\ell) - \ell \in h_{\mathbb{Q}}^{\perp}$，方程 (4) 等价于 $\tilde{g}(\ell) \in L$。 □

因此，

$$O(L, h) = \{g \in O(h^{\perp}) \mid \bar{g}|_{p(H)} = \mathrm{id}\}. \tag{5}$$

命题 1.4. 对于每个本原向量 $h \in L$，存在包含关系 $\widetilde{O}(h^{\perp})$ ‹! $\widetilde{O}(L, h)$。

证明。由于 $p(H) < A_{h^{\perp}}$，命题 1.3 表明每个等距变换 $g \in \widetilde{O}(h^{\perp})$ 都可延拓为 $O(L, h)$ 的一个等距变换，我们仍用 g 表示它。根据 $\widetilde{O}(h^{\perp})$ 的定义，等距变换 g 满足 $\bar{g}|_{A_{h^{\perp}}} = \mathrm{id}$。此外 $g|_{\mathbb{Z}h} = \mathrm{id}$，因此 $\bar{g}$ 在 $A_{\mathbb{Z}h} \times A_{h^{\perp}}$ 上是恒等变换，进而在 A_L 上也是恒等变换，因为 A_L 是 $A_{\mathbb{Z}h} \times A_{h^{\perp}}$ 的一个子商（使用 (2)）。

最后，态射 $\widetilde{O}(h^{\perp})$! $\widetilde{O}(L, h)$ 是单射，因为限制映射是左逆。 □

我们有以下包含链。

$$\widetilde{O}(h^{\perp}) \xhookrightarrow{i_1} \widetilde{O}(L, h) \xhookrightarrow{i_2} \widehat{O}(L, h) \xhookrightarrow{i_3} O(L, h) \xhookrightarrow{i_4} O(h^{\perp}), \tag{6}$$

其中， i_2 的指数整除 2，且包含关系 i_3 和 $i_3 i_2$ 定义了$O(L, h)$的正规子群。

2. Period domains of type IV

设 Λ 是一个符号差为$(2, n_-)$的偶不定格，满足 $n_- \geq 2$。在 $\Lambda_{\mathbb{C}}$ 上诱导的二次型的零轨迹是 $\mathbb{P}(\Lambda_{\mathbb{C}})$ 中的一个光滑二次曲面。这个开解析子集

$$\mathscr{D}_\Lambda = \{[x] \in \mathbb{P}(\Lambda_{\mathbb{C}}) \mid x \cdot x = 0, \quad x \cdot \bar{x} > 0\}$$

这个二次曲面是一个复流形，称为周期域。我们有

$$\mathscr{D}_\Lambda = \mathscr{D}_\Lambda^+ \sqcup \mathscr{D}_\Lambda^-.$$

这两个连通分支彼此微分同胚，并由复共轭互换。

~备注 2.1.如果 Λ 同构于某个格 Λ'的 $U \oplus \Lambda'$，则存在一个等距变换 $g \in O(\Lambda)$，它交换 $\mathscr{D}_\Lambda$ 的两个连通分支（参见 [Dol96，命题 5.6]）。

由于 Λ 的每个等距变换都作用于 $\mathbb{P}(\Lambda_{\mathbb{C}})$ 并保持 $\mathscr{D}_\Lambda$，我们得到 $O(\Lambda)$ 在 $\mathscr{D}_\Lambda$ 上的作用，该作用是恰当不连续的 [Huy16, Remark 6.1.10]。回顾 Borel–Baily 的以下定理。

定理2.2（[Huy16，定理6.1.13]）。对于 $O(\Lambda)$的所有有限指数子群 Γ，商 $\mathscr{D}_\Lambda/\Gamma$ 是一个正规拟射影簇。

此外，如果存在 $g \in \Gamma$ 交换 $\mathscr{D}_\Lambda$ 的两个分支，则簇 $\mathscr{D}_\Lambda/\Gamma$ 是不可约的。

3. Ramification divisors of covers of period spaces

令 Λ 为一个符号差为 $(2, n_-)$ 的偶不定格，且有 $n_- \geq 2$。我们固定一个有限指数子群$\Gamma < O(\Lambda)$。定理 2.2 表明，

$$\mathscr{D}_\Lambda/\Gamma$$

是一个拟射影簇；如果存在 Γ 中的一个元素交换 $\mathscr{D}_\Lambda$ 的两个连通分支，则它是不可约的。在下文中，我们将假设 Γ 中存在这样的一个元素。注意，$-\mathrm{id}$ 在 $\mathscr{D}_\Lambda$ 上平凡作用，因此也在 $\mathscr{D}_\Lambda/\Gamma$上平凡作用。令 $\bar{\Gamma}$ 为由 Γ 和 $-\mathrm{id}$ 生成的群：于是 $\mathscr{D}_\Lambda/\Gamma = \mathscr{D}_\Lambda/\bar{\Gamma}$。

令我们固定另一个有限指数子群 $O < O(\Lambda)$，使得

$$\Gamma \lhd O < O(\Lambda).$$

由于 $-\mathrm{id}$ 属于 $O(\Lambda)$ 的中心，因此群 $\bar{\Gamma}$ 是 O 的正规子群。该群

$$G = \bar{O}/\bar{\Gamma}$$

是一个作用于 $\mathscr{D}_\Lambda/\Gamma$ 上的有限群。

注释 3.1. 元素 $[x] \in \mathscr{D}_\Lambda/\Gamma$ 被 $g \in G$ 固定，当且仅当存在一个等距变换 $f \in O$，使得 $[f] = g$，且 x 是 $f_{\mathbb{C}}$ 的特征向量。
事实上，如果 $[x] \in \mathscr{D}_\Lambda/\Gamma$ 被 $g = [f]$ 固定，那么 $[f(x)] = [x] \in \mathscr{D}_\Lambda/\Gamma$。这意味着存在 $\tilde{f} \in \bar{\Gamma}$，使得直线 $f_{\mathbb{C}}(x)\mathbb{C}$ 和 $\tilde{f}_{\mathbb{C}}(x)\mathbb{C}$ 相等。将 f 替换为 $\tilde{f}^{-1}f$，我们得到 x 是 $f_{\mathbb{C}}$ 的特征向量。反过来，根据定义，$f_{\mathbb{C}}$ 的每个特征向量都定义了一条被 $[f]$ 固定的直线。

The因此， G 在 $\mathscr{D}_\Lambda/\Gamma$ 上的作用（非常）一般是忠实的：考虑下述 t

$$X = \bigcup_{g\in G\setminus\{\mathrm{id}\}} \bigcup_{\substack{g=[f]\\ \lambda\in \mathrm{Sp}(f)}} V_\lambda(f),$$

$\mathscr{D}_\Lambda$ 的一个可数闭子簇并，其余维大于或等于 1。因此，对于未包含在 X 中的 x， $[x]$ 在 $\mathscr{D}_\Lambda/\Gamma$ 中的稳定子群是平凡的。

因此， G 在 $\mathscr{D}_\Lambda/\Gamma$ 上的作用给出一个伽罗瓦覆盖

$$\rho : \mathscr{D}_\Lambda/\Gamma \longrightarrow \mathscr{D}_\Lambda/O \tag{7}$$

其伽罗瓦群为 G。

簇 $\mathscr{D}_\Lambda/\Gamma$ 和 $\mathscr{D}_\Lambda/O$ 是正规簇。将态射 ρ 限制到 $\mathscr{D}_\Lambda/O$的光滑轨迹的原像上，分支轨迹纯性 [Gro05，Exp. X，定理 3.1] 蕴含分支轨迹的余维为 1。我们希望刻画覆盖 ρ的分歧除子，即包含在 G的非平凡元素的不动点集中的 $\mathscr{D}_\Lambda/\Gamma$的不可约代数除子。

3.1. Heegner 除子与反射。设 β 是具有 $\beta^2 < 0$ 的 Λ 的一个向量。由于格 $\beta^\perp$ 的符号差为 $(2, n_- - 1)$，我们注意到

$$\mathscr{D}_{\beta^\perp} = \mathscr{D}_\Lambda \cap \mathbb{P}(\beta_{\mathbb{C}}^\perp) = \{[x] \in \mathbb{P}(\beta_{\mathbb{C}}^\perp) \mid x\cdot x = 0, \quad x\cdot \bar{x} > 0\}$$

非空，并且它是 $\mathscr{D}_\Lambda$ 的一个超曲面。此外，

$$\mathcal{H}_{\beta^\perp} = \mathrm{Im}\left(\mathscr{D}_{\beta^\perp} \longrightarrow \mathscr{D}_\Lambda/\Gamma\right)$$

是 $\mathscr{D}_\Lambda/\Gamma$ [的一个代数除子 Has00，定理 3.14]。我们注意到 $\mathcal{H}_{\beta^\perp}$ 是不可约的。事实上，$\mathscr{D}_{\beta^\perp}$ 有 2 个连通分支，它们通过复共轭相互交换，因此分别包含于 $\mathscr{D}_\Lambda$ 的两个不同分支中。这意味着它们在商中被识别。

定义 3.2。 $\mathscr{D}_\Lambda/\Gamma$ 的一个 Heegner 除子是形如 $\mathcal{H}_{\beta^\perp} \subset \mathscr{D}_\Lambda/\Gamma$ 的除子，其中 $\beta \in \Lambda$ 满足 $\beta^2 < 0$。

引理 3.3。设 β 和 γ 是 Λ 中具有负自交数的本原向量。当且仅当 β 和 γ 属于同一个 Γ-轨道时， $\mathscr{D}_\Lambda/\Gamma$ 的除子 $\mathcal{H}_{\beta^\perp}$¯ 和 $\mathcal{H}_{\gamma^\perp}$ 相等。

证明。令 π : $\mathscr{D}_\Lambda$! $\mathscr{D}_\Lambda/\Gamma$ 为典范投影。对于每个定义 Heegner 除子的向量 β ，除子 $\mathcal{H}_{\beta^\perp}$ 是周期域 $\mathscr{D}_{\beta^\perp} \subset \mathscr{D}_\Lambda$经由 π 的像。 $\mathscr{D}_{\beta^\perp}$的连通分支为 $\mathscr{D}^+_{\beta^\perp} = \mathscr{D}^+_\Lambda \cap \mathscr{D}_{\beta^\perp}$和 $\mathscr{D}^-_{\beta^\perp} = \mathscr{D}^-_\Lambda \cap \mathscr{D}_{\beta^\perp}$。

注意到

$$\pi^{-1}(\mathcal{H}_{\beta^\perp}) = \bigcup_{g\in\bar{\Gamma}} \mathscr{D}_{g(\beta)^\perp}.$$

¯显然，若 β 和 γ 属于同一个 Γ-轨道，则它们定义相同的 Heegner 除子。

反之，若 $\mathcal{H}_{\gamma^\perp} = \mathcal{H}_{\beta^\perp}$，则 $\mathscr{D}_{\gamma^\perp}$ 包含于 $\pi^{-1}(\mathcal{H}_{\beta^\perp})$ 中，特别是

$$\mathscr{D}^+_{\gamma^\perp} \subset \pi^{-1}(\mathcal{H}_{\beta^\perp}) \cap \mathscr{D}^+_\Lambda = \bigcup_{g\in\bar{\Gamma}} \mathscr{D}^+_{g(\beta)^\perp}.$$

由于 $\mathscr{D}^+_{\gamma^\perp}$ 不可约，存在 $g \in \bar{\Gamma}$，使得 $\mathscr{D}^+_{\gamma^\perp} = \mathscr{D}^+_{g\,(\beta)^\perp}$。复共轭交换 $\mathscr{D}^+_\Lambda$ 和 $\mathscr{D}^-_\Lambda$，由此得到 $\mathscr{D}_{\gamma^\perp} = \mathscr{D}_{g(\beta)^\perp}$。

我们证明这意味着 $g(\beta)^\perp = \gamma^\perp$。否则，闭子簇 $\mathbb{P}(g(\beta)^\perp_{\mathbb{C}}) \cap \mathbb{P}(\gamma^\perp_{\mathbb{C}})$ 是 $\mathbb{P}(\gamma^\perp_{\mathbb{C}})$ 的超曲面，且包含 $\mathscr{D}_{\gamma^\perp}$。因此，它包含其闭包 $\{[x] \in \mathbb{P}(\gamma^\perp_{\mathbb{C}}) \mid x^2 = 0\}$，后者是一个不可约二次曲面，因而不包含于任何超曲面中。由于 γ^-和 β 是本原的，这意味着 $g(\beta) = \pm\gamma$，因此 γ 和 β 属于同一个 Γ-轨道。□

对于每个向量 $\beta \in \Lambda$ 满足 $\beta^2 \neq 0$，关于 $\beta^\perp$ 在 $\Lambda_{\mathbb{Q}}$ 中的反射由公式给出

$$\forall x \in \Lambda \qquad r_\beta(x) = x - \frac{2x \cdot \beta}{\beta^2}\beta.$$

当 β 为本原时，r_β 属于 $O(\Lambda)$当且仅当 $\beta^2 \mid 2$整除β。

定义 3.4. 若本原向量 $\beta \in \Lambda$ 满足 $\beta^2 < 0$，则其在 G 中定义一个非平凡反射，当且仅当 $\beta^2 \mid 2\mathrm{div}(\beta)$，反射 r_β 属于群 $\bar{O}$，且 $[r_\beta] \in G$ 非平凡。

如果 β 在 G中定义了一个非平凡反射，则 Heegner 除子 $\mathcal{H}_{\beta^\perp} \subset \mathscr{D}_\Lambda/\Gamma$ 包含于r_β的不动点集中。

3.2. ρ 的分歧除子：$\mathscr{D}_\Lambda/\Gamma$ ！ $\mathscr{D}_\Lambda/O$。下一个定理推广了[Ste08，命题 3.8]，，并遵循 [GHS07，推论 2.13]：在情形 (7) 中，我们证明 ρ 的分歧的除子分支是与 G中的非平凡反射相关联的 Heegner 除子。

定理 3.5. 设 Λ 是一个符号差为 $(2, n_-)$、具有 $n_- \geq 2$ 的偶格，并设 Γ 和 O 是 $O(\Lambda)$ 的有限指数子群，使得 $\Gamma \lhd O$，且 Γ 包含一个将 $\mathscr{D}_\Lambda$ 的两个连通分支互换的等距变换。我们设 $G := O/\Gamma$。

不可约除子 $D \subset \mathscr{D}_\Lambda/\Gamma$ 包含于非平凡元素 g 的G 的不动点集当且仅当它是 Heegner除子 $\mathcal{H}_{\beta^\perp}$，其中 β 是本原的，满足 $\beta^2 < 0$，在 G 中定义了一个非平凡反射，并且 $g = [r_\beta]$。

此外，$\mathscr{D}_\Lambda/\Gamma$ 的每个不可约除子都包含在至多一个非平凡元素的不动点集中 $g \in G$。

证明。注释 3.1 表明，$\mathscr{D}_\Lambda/\Gamma$ 中被 $g \in G$ 固定的点集是

$$\mathrm{Fix}(g) = \pi\left(\bigcup_{[f]=g} \bigsqcup_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f_{\mathbb{C}})} \mathbb{P}(V_\lambda(f_{\mathbb{C}})) \cap \mathscr{D}_\Lambda\right),$$

其中 $\pi : \mathscr{D}_\Lambda$ ！ $\mathscr{D}_\Lambda/\Gamma$ 是典范投影，$V_\lambda(f_{\mathbb{C}})$ 是 $f_{\mathbb{C}}$ 对应于特征值 λ的特征子空间。

注意，如果Fix(g) 包含一个不可约除子 D，则存在一个等距变换 $f \in O$，满足 $[f] = g$，以及 $f_{\mathbb{C}}$ 的一个特征值 λ，使得 $V_\lambda(f_{\mathbb{C}})$ 的余维为 1。事实上，D 具有

余维 1 在 $\mathscr{D}_\Lambda$ 和

$$\begin{aligned} D &= \pi\left(\pi^{-1}(D)\cap\bigcup_{[f]=g}\bigsqcup_{\lambda\in \mathrm{Sp}(f_{\mathbb{C}})}\mathbb{P}(V_\lambda(f_{\mathbb{C}}))\cap\mathscr{D}_\Lambda\right)\\ &= \bigcup_{\substack{[f]=g\\ \lambda\in\mathrm{Sp}(f_{\mathbb{C}})}}\pi\left(\pi^{-1}(D)\cap\mathbb{P}(V_\lambda(f_{\mathbb{C}}))\right), \end{aligned}$$

由于 Γ 是可数的，故该并集是可数集上的并。因此，至少有一部分 $\pi(\pi^{-1}(D)\cap\mathbb{P}(V_\lambda(f_{\mathbb{C}})))$ 的余维为 1，从而 $\pi^{-1}(D)\cap\mathbb{P}(V_\lambda(f_{\mathbb{C}}))$ 的余维也为 1，这就证明了所要论断。

此外，由于 D 是不可约的，我们得到

$$D=\pi(\mathbb{P}(V_\lambda(f_{\mathbb{C}}))\cap\mathscr{D}_\Lambda).$$

对于每个实算子，相对于特征值 λ 的特征子空间与相对于 λ 的特征子空间维数相同。由于 $f_{\mathbb{C}}$ 是实等距变换，且 $V_\lambda(f_{\mathbb{C}})$ 的余维为 1，因此可得 $\lambda=\pm1$。将 f 改为 $-f$ 后，不妨设 $\lambda=1$。

由于 $\mathrm{codim}(V_1(f_{\mathbb{Q}}))=\mathrm{codim}(\ker(\mathrm{id}-f_{\mathbb{Q}}))=\mathrm{codim}(V_1(f_{\mathbb{C}}))=1$，存在本原的 $\beta\in\Lambda$，使得

$$V_1(f_{\mathbb{Q}})=\beta^\perp \text{ and } f_{\mathbb{Q}|_{\beta^\perp}}=\mathrm{id}.$$

此外，注意到 $\beta^2<0$。事实上，如果 $x\in\mathscr{D}_\Lambda\cap\mathbb{P}(V_1(f_{\mathbb{C}}))$，那么 $f_{\mathbb{C}}(\bar{x})=\bar{x}$，因此 $P=\mathrm{Re}(x)\mathbb{R}\oplus\mathrm{Im}(x)\mathbb{R}\subset V_1(f_{\mathbb{C}})$。由于 P是定号的，可以推出 $n_+(V_1(f_{\mathbb{C}}))=2$，从而 $\beta^2<0$。因此，f满足 $f|_{\beta^\perp}=$id 且 $f(\beta)=-\beta$，即 $f_{\mathbb{Q}}$是关于 β 的反射，而 $[r_\beta]=[f]=g\in G$ 是非平凡的。因此，D 是一个Heegner 除子，且 β在 G中定义了一个非平凡的反射。

假设存在 g 和 g' 属于 G，使得 $D\subset\mathrm{Fix}(g)\cap\mathrm{Fix}(g')$。我们已经证明，存在向量 β和 γ 定义非平凡反射，使得 $D=[\mathcal{H}_{\beta^\perp}]=[\mathcal{H}_{\gamma^\perp}]^-$，其中 $g=[r_\beta]$ 和 $g'=[r_\gamma]$。引理3.3 意味着，对于某个 $g\in\Gamma$，有 $\gamma=g\beta$。因此，由于$r_{g\beta}=gr_\beta g^{-1}$，可知 $g'=[r_{g\beta}]=[r_\beta]=g$。□

因此，态射 ρ: $\mathscr{D}_\Lambda/\Gamma\,!\,\mathscr{D}_\Lambda/O$ 的分歧除子由定义 O/Γ 中非平凡反射的向量 $\beta\in\Lambda$ 的 Γ-轨道参数化。

我们注意到，给定 $g\in G$，不动点集Fix(g)可能包含多个除子分支，即我们可能有 $g=[r_\beta]$，对于若干个不属于同一 Γ-轨道的向量 β。

4. Groups of isometries of some lattices

现在，我们将第 3节的结果应用于K3$^{[m]}$-型极化超 K¨ahler 流形的模空间。正如引言中所述，我们有一个覆盖

$$\rho:\mathscr{D}_{h^\perp}/\widehat{O}(\Lambda_{K3^{[m]}},h^\perp)\longrightarrow\mathscr{D}_{h^\perp}/O(h^\perp), \tag{8}$$

其中，$\mathscr{D}_{h^\perp}/\widehat{O}(\Lambda_{K3^{[m]}},h^\perp)$ 是具有 h 类型极化的K3$^{[m]}$-型极化超K¨ahler 流形的周期空间。为了将定理 3.5 应用于覆盖 (8)，我们需要

研究子群 $\widehat{O}(\Lambda_{K3^{[m]}}, h)$ 关于 $O(h^\perp)$ 的正规性。

我们考虑一种稍微一般化的情形。给定正整数 t，令 L_{2t} 为偶格

$$L_{2t} = M \oplus U \oplus \mathbb{Z}\ell, \tag{9}$$

其中，M 是偶酉模格，且 $\ell^2 = -2t$。判别群 $A_{L_{2t}}$ 是一个由 ℓ_*生成的、阶为 $2t$ 的循环群。格 $\Lambda_{K3^{[m]}}$ 是类型为 $L_{2(m-1)}$的格。

设 h 是 L_{2t} 中平方为 $2d > 0$ 且整除度为 γ 的本原向量。回顾（6）中的子群链

$$\widetilde{O}(h^\perp) \xhookrightarrow{i_1} \widetilde{O}(L_{2t}, h) \xhookrightarrow{i_2} \widehat{O}(L_{2t}, h) \xhookrightarrow{i_3} O(L_{2t}, h) \xhookrightarrow{i_4} O(h^\perp), \tag{10}$$

其中，我们可以如（5）所述描述群 $O(L_{2t}, h)$。

我们研究格 $h^\perp$ 以及群 $A_{h^\perp}$，遵循 [GHS10]。此外，我们在某些情况下描述了$\widehat{\ }$ $O(L_{2t}, h)$ 在 $O(A_{h^\perp})$ 中的像。更准确地说，

- 在命题 4.2 中，我们描述格 $h^\perp$，
- 记 ω 为$\frac{2t}{\gamma}$ 与 γ 的最大公因数，– 我们计算 $\omega = 1$ 的判别群 $A_{h^\perp}$（命题 4.4）；$\widehat{\ }$– 我们描述群 $O(L_{2t}, h)$ 在 $O(A_{h^\perp})$ 中的像，该像由定理 1.1 中引入的态射r： $O(h^\perp)$! $O(A_{h^\perp})$ 给出（对于 $t = 1$ 或$\gamma > 2$ ，见命题 4.5；对于 $\gamma \in \{1, 2\}$ 和 $\omega = 1$，见命题 4.6）；– 我们讨论 $\widehat{O}(L_{2t}, h)$ 在 $O(h^\perp)$ 中的正规性，并证明若 $(t, d) = 1$，则$\widehat{O}(L_{2t}, h) \lhd O(h^\perp)$（推论 4.9）。

4.1. 格 $h^\perp$。格 L_{2t} 中的本原向量 h 可写为 a s

$$h = am + c\ell$$

其中 $m \in M \oplus U$ 是本原向量，a、c 是互素整数。h 的整除度为 $\gamma = (a, 2tc) = (a, 2t)$。特别地，$\gamma \mid 2t$，因此我们可以对某个 $a_1 \in \mathbb{Z}$ 写作 $a = \gamma a_1$。此外注意，由于 $\gamma \mid a$，我们有 $(c, \gamma) = 1$。最后，

$$h_* = \left[\frac{h}{\mathrm{div}(h)}\right] = \bar{c}\frac{2t}{\gamma}\ell_* \in A_{L_{2t}}, \tag{11}$$

在 $A_{L_{2t}}$ 中阶为 γ。类 $\bar{c} \in \mathbb{Z}/\gamma\mathbb{Z}$ 由 h_* 唯一确定。

通过计算 h 的平方，我们得到 $2d = h^2 = \gamma^2 a_1^2 m^2 - 2tc^2$，其中 m^2 是偶整数。因此，商 $\frac{d+tc^2}{\gamma^2}$ 是一个整数，我们将其记为 b。

给定 U 的标准基 (e, f)，我们考虑向量

$$\tilde{h} = \gamma(e + bf) + c\ell. \tag{12}$$

其整除度为（$\gamma, 2tc$），即 γ，因为 $\gamma \mid 2t$，其平方为 $2\gamma^2 b - 2tc^2 = 2d$，且

$$\tilde{h}_* = \left[\frac{\tilde{h}}{\mathrm{div}(\tilde{h})}\right] = \bar{c}\frac{2t}{\gamma}\ell_* = h_* \in A_{L_{2t}}.$$

由于根据 Eichler 引理， h 的 $\widetilde{O}(L_{2t})$-轨道由 h^2 和 h_* 决定，而我们只关心 h 的 $O(L_{2t})$-轨道，因此可以假设向量 h 具有形式 (12)。

注意， $A_{L_{2t}}$ 的元素 h_* （见（11））由 c （模 γ）确定。如果 $c=\gamma n+c'$，那么，对于 $b'=b+tn^2-\frac{2t}{\gamma}nc$，向量

$$h'=\gamma(e+b'f)+c'\ell$$

有平方

$$2\gamma^2b'-2tc'^2=2\gamma^2b+2t\gamma^2n^2-4t\gamma nc-2t(\gamma^2n^2-2\gamma nc+c^2)=2\gamma^2b-2tc^2=2d,$$

以及 $h'_*=h_*$ 中的 $A_{L_{2t}}$。

因此，我们总可以假设 $0\le c<\gamma$ 且 $(c,\gamma)=1$。

注4.1。如果 h 是 L_{2t} 的本原向量，整除度为 γ 且平方为 $2d$，那么

$$\gamma^2\mid d+tc^2. \tag{13}$$

因此，一般而言，并非所有对 $(2d,\gamma)$都能对某个本原向量 $h\in L_{2t}$ 实现为 $(h^2,\mathrm{div}(h))$。

例如，如果 $\gamma=1$ ，条件 (13) 始终成立。如果 $\gamma=2$，那么 c 必定为 1，且 d 必须满足 $d+t\equiv 0$ （模 4）。因此，对于 $\gamma\in\{0,1\}$， h 的轨道由 γ、d 唯一确定。在这些情形下，我们用 ${}^{[m]}\mathcal{M}_{2d}^{(\gamma)}$ 和 ${}^{[m]}\mathcal{P}_{2d}^{(\gamma)}$ 分别表示 K¨ahler 流形的模空间和周期空间，其中流形属于 K3$^{[m]}$ 型，且带有平方为 $2d$ 、整除度为 γ 的极化。

命题4.2（[GHS10，命题3.6.(iv)]）。设 h 是 L_{2t} 的一个平方为$2d$ 且整除度为 γ的本原向量，并设 c 是满足 $0\le c<\gamma$ 且$(c,\gamma)=1$ 在 (12) 中定义的整数。然后，

$$h^\perp=M\oplus\begin{pmatrix}-\dfrac{2d+2c^2t}{\gamma^2} & c\dfrac{2t}{\gamma}\\ c\dfrac{2t}{\gamma} & -2t\end{pmatrix}.$$

在抛物线上特别地，在 L_{2t}的等距变换下，我们可以假设 $h=\gamma(e+bf)+c\ell$。该向量 s

$$h_1=e-bf\quad and\quad h_2=c\frac{2t}{\gamma}f+\ell$$

构成 $h^\perp$的非酉模部分的基。

注 4.3.如果 $\gamma=1$，那么 $h_*=0\in A_{L_{2t}}$。因此 $c=0$，格 B 是对角的，并且存在一个同构

$$h^\perp\simeq M\oplus\mathbb{Z}(-2d)\oplus\mathbb{Z}(-2t),$$

其中，若取 $h=e+df$， $h^\perp$ 的非酉模部分的一组基由 $k=e-df$ 和 ℓ 给出。

4.2. 群 $\widetilde{O}(L_{2t},h)$ 和 $\widehat{O}(L_{2t},h)$. 由 (5)，我们有

$$O(L_{2t},h)=\{g\in O(h^\perp)\mid \bar{g}|_{p(H)}=\mathrm{id}\},$$

其中 H 是群 $L_{2t}/(\mathbb{Z}h\oplus h^\perp)$，而 p 是投影 $H\hookrightarrow A_{\mathbb{Z}h}\times A_{h^\perp}\to A_{h^\perp}$。

给定命题 4.2 中的 h_1 和 h_2，每个 $v\in L_{2t}=M\oplus U\oplus\mathbb{Z}\ell$ 都可写成$v=m+a_1h_1+a_2h_2+df$，其中 $m\in M$且 $a_1,a_2,d\in\mathbb{Z}$，并且这样的向量 v与 h 正交，当且仅当 $d=0$。因此我们得到

$$H=L_{2t}/(\mathbb{Z}h\oplus h^\perp)=\langle[f]\rangle.$$

我们描述像 $p(H)$，它由 $p([f])$生成。向量

$$k_1=\frac{\gamma}{2d}h-f \tag{14}$$

属于 $(h^\perp)^\vee$。事实上，我们可以计算 $k_1\cdot h_1=-1$和 $k_1\cdot h_2=k_1\cdot M=0$。此外，注意到 $\bar{\ }:A_{h^\perp}\to A_{h^\perp}$，$p([f])=-k_1$。因此，群 $p(H)$由 $k_1\in A_{h^\perp}$生成。

因此，群 $\widetilde{O}(L_{2t},h)=O(L_{2t})\cap O(L_{2t},h)$ 和 $\widehat{O}(L_{2t},h)=O(L_{2t})\cap O(L_{2t},h)$ 可以描述为

$$\widetilde{O}(L_{2t},h)=\{g\in O(h^\perp)\mid \bar{g}(\bar{k}_1)=\bar{k}_1\in A_{h^\perp}\ \text{ and }\ \bar{g}(\ell_*)=\ell_*\in A_{L_{2t}}\} \tag{15}$$

and

$$\widehat{O}(L_{2t},h)=\{g\in O(h^\perp)\mid \bar{g}(\bar{k}_1)=\bar{k}_1\in A_{h^\perp}\ \text{ and }\ \bar{g}(\ell_*)=\pm\ell_*\in A_{L_{2t}}\}. \tag{16}$$

4.3. 判别群 $A_{h^\perp}$。我们研究判别群 $A_{h^\perp}$。由等式（3）可得

$$\mathrm{disc}(\mathbb{Z}h)\,\mathrm{disc}(h^\perp)=|H|^2\,\mathrm{disc}(L_{2t}), \tag{17}$$

其中 $\mathrm{disc}(\mathbb{Z}h)=2d$、$\mathrm{disc}(L_{2t})=2t$，且 $\mathrm{disc}(h^\perp)=|A_{h^\perp}|$。

注意，在（14）中定义的元素 $\bar{k}_1$ 在 $A_{h^\perp}$中的阶为 $\frac{2d}{\gamma}$。事实上，给定整数$n\in\mathbb{Z}$，向量 nk_1 属于 $h^\perp=h^\perp_{\mathbb{Q}}\cap L_{2t}$ 当且仅当 $n\frac{\gamma}{2d}h\in L_{2t}$，因此当且仅当$n\frac{\gamma}{2d}\in\mathbb{Z}$。

我们在第 1.1 节证明了态射 p 是单射，因此我们得到

$$|H|=|p(H)|=\frac{2d}{\gamma}.$$

由公式（17）可得

$$2d\cdot|A_{h^\perp}|=2t\left(\frac{2d}{\gamma}\right)^2,$$

由此我们得到，$A_{h^\perp}$ 是一个基数为 $\frac{2d}{\gamma}\frac{2t}{\gamma}$ 的阿贝尔群。

最后，请注意，

$$\omega:=\left(\frac{2t}{\gamma},\frac{2d}{\gamma},\gamma\right)=\left(\frac{2t}{\gamma},\gamma\right).$$

事实上，由 (12) 可设 $h=\gamma(e+bf)+c\ell$，因此

$$2d=h^2=2b\gamma^2-2tc^2=\gamma\left(2b\gamma-\frac{2t}{\gamma}c^2\right). \tag{18}$$

因此，$(\frac{2t}{\gamma},\gamma) \mid \frac{2d}{\gamma}$。下一个结果表明，对于 $\omega=1$，判别群$A_{h^\perp}$ 的结构尤其简单。

命题4.4（[GHS10，命题 3.12]）。设 $h\in L_{2t}$ 为一个本原向量，满足 $h^2=2d$且 $\mathrm{div}(h)=\gamma$。如果 $\omega=(\frac{2t}{\gamma},\gamma)=1$，则存在一个等距变换

$$A_{h^\perp}\simeq \mathbb{Z}/\tfrac{2d}{\gamma}\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/\tfrac{2t}{\gamma}\mathbb{Z} \tag{19}$$

使得子群 $p(H)<A_{h^\perp}$ 对应于因子 $\mathbb{Z}/\frac{2d}{\gamma}\mathbb{Z}$，且 $A_{h^\perp}$上的交形式由 $q(1,0)=-\frac{\gamma^2}{2d}$和 $q(0,1)=-\frac{\gamma^2}{2t}$定义。

关键在于，对于 $\omega=1$，这些向量的类

$$k_1=\frac{\gamma}{2d}h-f \quad\text{and}\quad k_2=cf+\frac{\gamma}{2t}\ell$$

生成判别群 $A_{h^\perp}$。

4.4. $\widehat{O}(L_{2t},h)$ 在 $O(h^\perp)$ 中的正规性。如 (6) 所示，我们考虑子群链

$$\widetilde{O}(h^\perp)\xhookrightarrow{i_1}\widetilde{O}(L_{2t},h)\xhookrightarrow{i_2}\widehat{O}(L_{2t},h)\xhookrightarrow{i_3}O(L_{2t},h)\xhookrightarrow{i_4}O(h^\perp), \tag{20}$$

其中的包含关系 $i_4i_3i_2i_1$ 和 i_3i_2 定义了正规子群。

我们希望了解何时 $\widehat{O}(L_{2t},h)$ 是 $O(h^\perp)$ 的正规子群。后续结果的总结见注 4.10。

命题 4.5（[BBBF，引理 3.5，命题 3.6]）。包含关系 i_1 是平凡的，而包含关系

$$i_2:\widetilde{O}(L_{2t},h)\longhookrightarrow\widehat{O}(L_{2t},h)$$

当 $t=1$ 或 $\gamma>2$时，其指数为 1；否则指数为 2。

因此，如果 $t=1$ 或 $\gamma>2$，则群 $\widehat{O}(L_{2t},h)$ 等于 $\widetilde{O}(h^\perp)$，从而它是 $O(h^\perp)$ 的正规子群。

命题 4.6。如果 $\omega=1$ 和 γ 是 1 或 2，则有

$$\widehat{O}(L_{2t},h)=r^{-1}\left(\{\mathrm{id},s\}\right),$$

其中，态射 $O(h^\perp)\ ^r!\ O(A_{h^\perp})$ 在定理 1.1 中定义，而 s 是$O(A_{h^\perp})$ 的元素，在分解 (19) 中充当 $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$。

^证明。我们证明，如果γ是 1或2，则等距变换 $s\in O(A_{h^\perp})$属于像 $r(O(L_{2t},h))$。整数 c 与 γ 互素且模 γ确定，对于 $\gamma=1$ 为0，对于 $\gamma=2$为 1。在此情况下，向量 $y=ctf+\ell$ 在 L_{2t} 上定义了一个反射 r_y，使得 $r_y(\ell_*)=-\ell_*\in A_{L_{2t}}$。事实上，向量 y 的平方为 $-2t$，且整除度等于$(ct,2t)$。因此，它在 L_{2t}上定义了一个反射，因为 $-2t\mid 2(ct,2t)$，并且

$$r_y\left(\frac{\ell}{2t}\right)=\frac{\ell}{2t}-\frac{2}{2t}\frac{y\cdot\ell}{y^2}y=\frac{\ell}{2t}-\frac{2}{2t}(ctf+l)\equiv-\frac{\ell}{2t}\pmod{L_{2t}}.$$

~命题 4.5 表明，如果 $g\in O(L_{2t},h)$，那么 $\bar{g}:=r(g)=\mathrm{id}$。设 g 是$\widehat{O}(L_{2t},h)\setminus\widetilde{O}(L_{2t},h)$的一个等距变换，也就是说，$g$满足 $\bar{g}(\bar{k}_1)=\bar{k}_1$，且 $g(\frac{\ell}{2t})=-\frac{\ell}{2t}+m$，其中 $m\in L_{2t}$ ¯ ¯（见 (16)）。我们证明 $\bar{g}(k_2)=-k_2$；这意味着 $\bar{g}=s$。

对于 $\gamma = 1$，整数 c 为 0，且向量 $\frac{\ell}{2t}$ 与 $h = e + bf$ 正交。因此，由于 g 是 L_{2t} 的等距变换且固定 h，向量 $g(\frac{\ell}{2t})$ 与 $g(h) = h$ 正交，这意味着 $m \in h^\perp$。此外，在这种情况下，$k_2 = \frac{\ell}{2t}$，因此我们有 $\bar{g}(\bar{k}_2) = -\bar{k}_2$。

对于 $\gamma = 2$，整数 c 是 1，并且我们有 $h = 2(e + bf) + \ell$。由 $g(k_1) \equiv k_1$ (模 $h^\perp$)，可得

$$\frac{\gamma}{2d}h - f = k_1 \equiv g(k_1) = g\left(\frac{\gamma}{2d}h - g(f)\right) = \frac{\gamma}{2d}h - g(f) \pmod{h^\perp},$$

因此 $g(f) \equiv f$ (模 $h^\perp$)。由 $g(h) = h$ 可知

$$2(e + bf) + \ell = h = g(h) \equiv 2(g(e) + bf) - \ell + 2tm \pmod{h^\perp},$$

这意味着 $2tm \equiv 2e + 2\ell - 2g(e)$（模 $h^\perp$）。注意，向量 $h_1 = e - bf$ 属于格 $h^\perp$，因此 $g(h_1)$ 也属于 $h^\perp$，于是我们有 $g(e) \equiv bg(f) \equiv bf$ (模 $h^\perp$)。因此，可得

$$2tm \equiv 2e + 2\ell - 2g(e) \equiv 2e + 2\ell - 2bf \equiv 2\ell \equiv 2(\ell + tf) - 2tf \equiv -2tf \pmod{h^\perp},$$

这里用到了 $y = \ell + tf$ 与 h 正交。因此，向量 $m + f$ 是一个属于格 $h^\perp$ 的整数向量，故我们有 $m \equiv -f$ (模 $h^\perp$)。

最后，通过计算 $k_2 = f + \frac{\ell}{t}$ 的像，我们得到

$$g(k_2) \equiv f - \frac{\ell}{t} + 2m \equiv f - \frac{\ell}{t} - 2f \equiv -k_2 \pmod{h^\perp}.$$

如上所述，这证明了 $\bar{g} = s$。 □

定理1.1表明，如果 M 的酉模部分 $h^\perp$ 的秩至少为2（ $L_{2t} = \Lambda_{K3^{[t+1]}}$的情形正是如此），则态射 $O(h^\perp) \overset{r}{\to} O(A_{h^\perp})$是满射。特别地，在此情形下，并且在前一个命题的假设下，群 $O(L_{2t}, h)$ 在$O(h^\perp)$ 中正规，当且仅当群

$$K = \{\mathrm{id}, s\}$$

是 $O(A_{h^\perp})$ 的正规子群。

例 4.7. 群 K 不总是 $O(A_{h^\perp})$ 的正规子群。例如，对于 $t = 9$、$\gamma = 2$ 和 $d = 15$，群 $A_{h^\perp}$ 的形式为

$$A_{h^\perp} = \mathbb{Z}/15\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$$

其二次型由 $q(1, 0) \equiv -\frac{2}{15}$ (模 $2\mathbb{Z}$) 和 $q(0, 1) \equiv -\frac{2}{9}$ (模 $2\mathbb{Z}$) 定义（参见命题 4.4）。

由矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ 定义的态射 g 是$A_{h^\perp}$的等距变换：事实上它是一个对合，并且对于每个 $(x, y) \in A_{h^\perp}$，我们可以计算

$$q(g(x, y)) = q((x + 10y, 6x + 2y)) \equiv -\frac{2}{15}x^2 - \frac{2}{9}y^2 = q(x, y) \pmod{2\mathbb{Z}}.$$

然而，

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

因此，在这种情况下，K 不是 $O(A_{h^\perp})$的正规子群。

引理 4.8. 设 A为群

$$A = \mathbb{Z}/\tfrac{2d}{\gamma}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\tfrac{2t}{\gamma}\mathbb{Z}.$$

如果 t 和 d 是互素整数，且 γ 是 1 或 2，那么 $K = \{\mathrm{id}\ s\}$ 是 Aut(A) 的正规子群。

证明.若 $\gamma = 2$，则 $A = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/t\mathbb{Z}$ 与（t，d）$= 1$。因此 $A \simeq \mathbb{Z}/td\mathbb{Z}$，并根据 [Sca87，引理3.6。1], 我们看到Aut(A)是阿贝尔群，特别地可得 $K \lhd$Aut(A)。
现在考虑 $\gamma = 1$的情形，因此 $A = \mathbb{Z}/2d\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2t\mathbb{Z}$。设 $g = \begin{pmatrix} a & e \\ b & f \end{pmatrix}$ 是 A的一个自同构。(a, b) 在 A 中的阶等于 (1, 0) 在 A中的阶 $2d$，因此我们得到

$$\operatorname{lcm}\left(\frac{2d}{(a, 2d)}, \frac{2t}{(b, 2t)}\right) = \operatorname{ord}_A(a, b) = 2d,$$

因此 $2t \mid 2d(b, 2t)$。由于 t 和 d 互质，可知 $t \mid b$，我们可以写成 $b = tb'$。类似地，我们可以写成 $e = de'$。因此，我们可以计算

$$gs = \begin{pmatrix} a & de' \\ tb' & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -de' \\ tb' & -f \end{pmatrix}$$

and

$$sg = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & de' \\ tb' & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & de' \\ -tb' & -f \end{pmatrix}.$$

由于 $tb' \equiv -tb'$（模 $2t$）且 $de' \equiv -de'$（模 $2d$），我们得到 $sg = gs$，从而得到 $g^{-1}sg = s$。在这两种情况下，我们都证明了 $K \lhd$Aut(A)。□

由于 $O(A_{h^\perp})$是包含 K 的 Aut($A_{h^\perp}$) 的子群，我们得到以下推论。

推论 4.9。设 $h \in L_{2t}$ 为一个平方为 $2d$ 的本原向量，使得$(t, d) = 1$。群$\widehat{O}(L_{2t}, h)$是 $O(h^\perp)$的正规子群。

证明。由于 γ 的整除度 h 整除$(2t, 2d)$，如果 t 和 d 互素，则可知 γ 要么为 1，要么为2。此外，由 $(t, d) = 1$ 我们得到 $\omega = (\frac{2t}{\gamma}, \frac{2d}{\gamma}, \gamma) = 1$。命题 4.4 提供了一个同构

$$A_{h^\perp} \simeq \mathbb{Z}/\tfrac{2d}{\gamma}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\tfrac{2t}{\gamma}\mathbb{Z}$$

其中 t、d 和 γ 满足引理 4.8 的假设。因此，群 K 是 Aut($A_{h^\perp}$) 的正规子群，从而也是 $O(A_{h^\perp})$的正规子群。由于 $K = r^{-1}(\widehat{O}(L_{2t}, h))$，我们得到 $\widehat{O}(L_{2t}, h)$是 $O(h^\perp)$的正规子群。□

注 4.10。综上，我们证明了以下结论。

- 如果 $t = 1$ 或 $\gamma > 2$，那么 $\widehat{O}(L_{2t}, h) = \widetilde{O}(h^\perp)$（命题 4.5），因此 $\widehat{O}(L_{2t}, h)$是 $O(h^\perp)$的正规子群。
- 若 $t > 1$，且 $\omega = 1$和 $\gamma \in \{1, 2\}$，则 $\widehat{O}(L_{2t}, h) = r^{-1}\left(\left\{\mathrm{id}\ s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}\right)$.

  此外，当 $(t, d) = 1$时，群 $\widehat{O}(L_{2t}, h)$ 是 $O(h^\perp)$ 的正规子群。

5. Vectors β that define nontrivial reflections

If $\widehat{O}(\Lambda_{K3^{[m]}}, h) \lhd O(h^\perp)$，覆盖 ρ 在 (8) 中描述，是一个群为.....的分歧伽罗瓦覆盖

$$G \simeq O(h^\perp)/\langle \widehat{O}(\Lambda_{K3^{[m]}}, h), -\mathrm{id}\rangle,$$

由注 4.10（用于 $t = -m-1$）可知，

- 如果 $m = 2$，或 $\gamma > 2$，那么 $G \simeq O(A_{h^\perp})/\{\pm \mathrm{id}\}$;
- 若 $\omega = \left(\underbrace{2}_{(m-1)\gamma},\ \gamma\right) = 1$ 其中 $\gamma \in \{1, 2\}$ 且 $m > 2$，并且我们假设 $\widehat{O}(\Lambda_{K3^{[m]}}, h) \lhd O(h^\perp)$，则 $G \simeq O(A_{h^\perp})/\langle s, -\mathrm{id}\rangle$。例如，$(m-1, d) = 1$ 就是这种情况。

在定理 3.5中，我们证明了 ρ 的分歧除子由定义 G中非平凡反射的向量$\beta \in h^\perp$ 参数化。正如在 [Ste08], 中所研究的极化 K3 曲面情形一样，我们希望刻画这些向量 β，至少在某些情况下如此。

For $\gamma > 2$，以下结果使我们能够刻画 ρ.

命题 5.1（[GHS07，命题 3.1]）。设 $\beta \in \Lambda$ 是定义一个反射的本原向量。当且仅当 $\beta^2 = -2$ 时，等距变换 r_β 在判别群 $\beta^\perp$ 上作用为恒等变换。

现在假设 $\gamma = 1$。我们的第一个结果定理 5.2 刻画了定义平凡反射的向量 β。随后，推论 5.3 给出了（8）的 G-伽罗瓦覆盖 ρ的所有除子分支的列表。

如第4节所述，我们考虑一个格 $L_{2t} = M \oplus U \oplus \mathbb{Z}\ell$ 以及一个平方为 $2d$、整除度为 $\gamma = 1$的向量 $h \in L_{2t}$。在这种情况下，格 $\Lambda = h^\perp$ 同构于

$$M \oplus \mathbb{Z}k \oplus \mathbb{Z}\ell,$$

其中 $k = e - df$，并且 $k^2 = -2d$ 和 $\ell^2 = -2t$（见注记 4.3）。命题 4.4 表明，判别群 A_Λ 同构于

$$A_\Lambda \simeq \langle \bar{k}_1\rangle \times \langle \bar{k}_2\rangle \simeq \mathbb{Z}/2d\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2t\mathbb{Z},$$

其中 $k_1 = \frac{e+df}{2d} - f = \frac{e-df}{2d} = k_*$ 和 $k_2 = \frac{\ell}{2t} = \ell_*$。

每个本原向量 $\beta \in \Lambda$ 都可写为

$$\beta = am + bk + c\ell$$

其中 a、b、c是互素整数，且 $m \in M$是本原向量。这样的向量 β的整除度 $\mathrm{div}(\beta) = (a, 2db, 2tc)$，其平方为

$$\beta^2 = a^2m^2 - 2db^2 - 2tc^2. \tag{21}$$

该 v 向量 β 定义了一个反射，当且仅当 $\beta^2 \mid 2\mathrm{div}(\beta)$。注意，这意味着

$$\beta^2 \mid 4db \qquad \text{and} \qquad \beta^2 \mid 4tc. \tag{22}$$

由于 $\beta \cdot k_* = -b$，我们得到

$$\begin{aligned}[r_\beta(k_*)] &= \left[k_* - 2\frac{\beta \cdot k_*}{\beta^2}\beta\right] \\ &= \left[k_* + 2\frac{b}{\beta^2}(2dbk_* + 2tc\ell_*)\right] \\ &= \left[\left(1 + \frac{4db^2}{\beta^2}\right)k_* + \frac{4tcb}{\beta^2}\ell_*\right]\end{aligned}$$

在 A_Λ 中，类似的计算得出 $[r_\beta(\ell_*)]$。因此，$[r_\beta] \in O(A_\Lambda)$ 是矩阵

$$\begin{pmatrix} \left[1 + \frac{4db^2}{\beta^2}\right]_{2d} & \left[\frac{4dbc}{\beta^2}\right]_{2d} \\ \left[\frac{4tcb}{\beta^2}\right]_{2t} & \left[1 + \frac{4tc^2}{\beta^2}\right]_{2t} \end{pmatrix} \in O(\mathbb{Z}/2d\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2t\mathbb{Z}), \tag{23}$$

其中，矩阵 (23) 的元素根据 (22) 均为整数。

若 $O(L_{2t}, h) \lhd O(h^\perp)$，则群 G 与 $O(A_\Lambda)/\{\pm s, \pm\mathrm{id}\}$ 同构，其中 $s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$。下一个定理刻画了定义反射 r_β 在 G 中平凡的向量 β。

定理 5.2. 设 $\beta \in M \oplus \mathbb{Z}(-2d) \oplus \mathbb{Z}(-2t)$ 是一个满足 $\beta^2 < 0$ 的本原向量。设 k 是因子 $\mathbb{Z}(-2d)$ 的一个生成元，并设 ℓ 是因子 $\mathbb{Z}(-2t)$ 的一个生成元。
向量 β定义了反射r_β，使得 $[r_\beta]$ 包含于群 $\{\pm s, \pm\mathrm{id}\}$ 当且仅当 β 满足以下两个条件:

a) $\beta^2 \mid 2\mathrm{div}(\beta)$;
b) *one has*
- *either* $\beta^2 = -2$;
- *or* $\beta^2 = -2t$ *and* $2td \mid \beta \cdot k$;
- *or* $\beta^2 = -2d$ *and* $2td \mid \beta \cdot \ell$;
- *or* $\beta^2 = -2td$, $(t, d) = 1$, *and* $2td \mid (\beta \cdot k, \beta \cdot \ell)$.

证明。向量 β 定义反射当且仅当 $\beta^2 \mid 2$ 整除 β。我们有

$$\mathrm{div}(\beta) = (a, 2db, 2tc) \mid 2\,\mathrm{lcm}(t, d)(a, b, c) = 2\,\mathrm{lcm}(t, d), \tag{24}$$

其中，最后一个等式成立是因为 β 是本原的。因此，

$$\beta^2 \mid 4\,\mathrm{lcm}(t, d). \tag{25}$$

我们希望刻画满足以下条件的向量 β。

$$[r_\beta] \in \left\{\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \pm\mathrm{id}\right\}, \tag{26}$$

其中矩阵 $[r_\beta]$ 在公式（23）中给出。

假设（26）成立。此时非对角项为零，即 $2t\beta^2 \mid 4tbc$ 和 $2d\beta^2 \nmid 4dbc$，或者等价地

$$\beta^2 \mid 2bc. \tag{27}$$

至于对角项，我们希望了解它们何时等于 ± 1。对于第一个条目，我们有

(A) $1+\frac{4db^2}{\beta^2}\equiv 1$ （模 $2d$）当且仅当 $2d\beta^2 \mid 4db^2$，或等价地，当 $\beta^2 \mid 2b^2$。（B）$1+\frac{4db^2}{\beta^2}\equiv -1$ （模 $2d$）当且仅当 $2d\beta^2 \mid 2(\beta^2+2db^2)$，也就是说，当且仅当

$$d\beta^2 \mid \beta^2+2db^2, \tag{28}$$

这就得到 $d \mid \beta^2$ 和 $\beta^2 \mid 2db^2$。我们证明必有 $2d \mid \beta^2$。事实上，若非如此，β^2和 d 在 2 处的赋值相同，因此 d 为偶数，并由 $\beta^2 \mid 2db^2$可得$\beta^2 \mid db^2$。因此，根据 (28)，偶数 d整除奇数 $1+2\frac{db^2}{\beta^2}$，这显然不可能。综上，$1+\frac{4db^2}{\beta^2}\equiv -1$ (模 $2d$) 蕴含 $2d \mid \beta^2$ 和 $\beta^2 \mid 2db^2$。

将同一论证应用于第二个对角项，可得到类似结果，其中分别以 t 和 c 替换 d 和 b。具体而言，我们有

(A') $1+\frac{4tc^2}{\beta^2}\equiv 1$ (模 $2t$)当且仅当 $\beta^2 \mid 2c^2$。(B') $1+\frac{4db^2}{\beta^2}\equiv -1$ (模 $2d$) 当且仅当

$$t\beta^2 \mid \beta^2+2tc^2. \tag{29}$$

此外，最后一个条件意味着 $2t \mid \beta^2$ 和 $\beta^2 \mid 2tc^2$。

综上所述，我们可以刻画本原向量 β 满足 a) 且使得$[r_\beta]\in\{\pm\mathsf{id}\ \pm s\}$。

- $[r_\beta]=[\mathsf{id}]$ 当且仅当 $\beta^2=-2$。显然，对于 $\beta^2=-2$，矩阵 (23) 是单位矩阵。反之，如果 $[r_\beta]=[\mathsf{id}]$, 两个对角项都等于 1，则 (A) 和 (A') 给出

$$\beta^2 \mid 2b^2 \qquad \text{and} \qquad \beta^2 \mid 2c^2.$$

此外 $\beta^2 \mid 2\mathsf{div}(\beta) \mid 2a$。由于 $(a,b,c)=1$，我们得到 $\beta^2 \mid 2$因此唯一的可能性是 $\beta^2=-2$，正如我们所假设的 $\beta^2<0$。

- $[r_\beta]=s$ 当且仅当 $\beta^2=-2t$ 且 $t \mid \beta\cdot(k/2d)$。
事实上，如果 $[r_\beta]=s$，第二个对角项必须等于 -1，因此由 (B') 可得

$$\beta^2=2ti \text{ for some negative integer } i, \text{ with } \quad 2ti=\beta^2 \mid 2tc^2,$$

因此 $i \mid c^2$。此外，由于第一个对角项为1，(A) 蕴含 $2ti=\beta^2 \mid 2b^2$，从而 $i \mid b^2$。最后，我们还有 $2ti=\beta^2 \mid 2\mathsf{div}(\beta) \mid 2a$，因此

$$i \mid (a,b^2,c^2)=1.$$

因此我们得到 $\beta^2=-2t$。数 β^2 同时整除 $2b^2$ 和 $2a$。由于根据(27)，β^2 也整除 $2bc$，我们得到 $-2t=\beta^2 \mid 2(a,b^2,bc) \mid 2b$，这意味着

$$t \mid -b=\beta\cdot(k/2d).$$

反过来，对于满足 $\beta^2 \mid 2\mathsf{div}(\beta)$ 和 $t \mid b=\beta\cdot(k/2d)$ 的 $\beta^2=-2t$，我们证明 $[r_\beta]$ 等于 s。事实上，唯一需要验证的是证明 $\left[1+\frac{4tc^2}{\beta^2}\right]_{2t}$ 等于

$[-1]_{2t}$。根据等式 (29)，该条件可以改写为 $t\beta^2 \mid \beta^2 + 2tc^2$。根据等式 (21)，我们有

$$\beta^2 + 2tc^2 = a^2m^2 - 2db^2,$$

其中 $2t = -\beta^2 \mid 2\mathrm{div}(\beta) \mid 2a$、 $t \mid b$ 根据假设成立，且 m^2 为偶数。因此，我们得到 $t\beta^2 = -2t^2 \mid a^2m^2 - 2db^2 = \beta^2 + 2tc^2$，这正是我们所需的条件。

- 类似地， $[r_\beta] = -s$ 当且仅当 $\beta^2 = -2d$ 且 $d \mid \beta \cdot$ （$\ell/2t$）。
- $[r_\beta] = -\mathrm{id}$ 当且仅当 $\beta^2 = -2td$ 且 $\beta^2 \mid (\beta \cdot k, \beta \cdot l)$。

若 $[r_\beta] = -\mathrm{id}$，则对角项必须等于 -1。由 (B) 和 (B’) 我们得到

$$\begin{aligned} 2d \mid \beta^2 \qquad &\text{and} \qquad \beta^2 \mid 2db^2, \\ 2t \mid \beta^2 \qquad &\text{and} \qquad \beta^2 \mid 2tc^2. \end{aligned}$$

因此，我们得到$2\mathrm{lcm}(t, d) \mid \beta^2$，而根据(25)，它又整除$4\mathrm{lcm}(t, d)$，所以 β^2 要么是 $-2\mathrm{lcm}(t, d)$，要么是 $-4\mathrm{lcm}(t, d)$。

我们排除 $\beta^2 = -4\mathrm{lcm}(t, d)$ 的情形。事实上，在这种情况下，由 $\beta^2 \mid 2db^2$ 可得到 $\frac{4\mathrm{lcm}(t,d)}{2d} \mid b^2$，从而有 $2 \mid b^2$；类似地，由 $\beta^2 \mid 2tc^2$ 可得到 $2 \mid c^2$。由于我们还有 $2 \mid a$，且 $\beta^2 \mid 2\mathrm{div}(\beta) \mid 2a$，因此得到矛盾，因为 β 是本原。

因此 $\beta^2 = -2\mathrm{lcm}(t, d)$ 。如果我们将 z 表示为数(t, d)，并写作$t = z\tau$和 $d = z\delta$，那么$(\tau, \delta) = 1$ 且$\mathrm{lcm}(t, d) = z\tau\delta$。我们证明，在仍假设 $[r_\beta] = -\mathrm{id}$ 的情况下，有 $z = 1$。

条件 (28) 等价于 $1 + \dfrac{2db^2}{\beta^2} \equiv 0$ （模 d）。因此，

$$1 - \frac{2z\delta b^2}{2z\tau\delta} \equiv 0 \pmod{z}, \qquad \text{hence} \qquad \frac{b^2}{\tau} \equiv 1 \pmod{z}.$$

特别地，我们可以写成 $b^2 = \tau b_1$，其中 $(b_1, z) = 1$。类似地，利用 (29)，我们证明存在与 z 互素的 c_1 ，使得 $c^2 = \delta c_1$。非对角项消失这一条件（见方程 (27)）给出

$$2z\tau\delta = -\beta^2 \mid 2bc.$$

因此，对于每个整除 z 的素数 q ，我们有

$$v_q(z) + v_q(\tau\delta) = v_q(z\tau\delta) \leq v_q(bc) = \frac{v_q(b^2c^2)}{2} = \frac{v_q(\tau b_1 \delta c_1)}{2} = \frac{v_q(\tau\delta)}{2}, \tag{30}$$

其中，在最后一个等式中，我们利用了$v_q(b_1) = v_q(c_1) = 0$ ，因为 $q \mid z$ 和 z 与 b_1 和 c_1都互质。方程（30）意味着$v_q(z) \leq 0$，这是荒谬的，因为$q \mid z$。因此 $z = 1$。

因此，我们有 $(t, d) = 1$ 和 $\beta^2 = -2td$。整除度关系 $\beta^2 \mid 2\mathrm{div}(\beta) \mid 4db$ 和 $\beta^2 \mid 2db^2$ 意味着

$$-2td = \beta^2 \mid (4db, 2db^2) = 2d(2b, b^2),$$

从而 $t \mid (2b, b^2)$。此外，由公式 (27)，我们有 $-2td = \beta^2 \mid 2bc$，因此得到

$$t \mid (bc, 2b, b^2) = b(c, 2, b).$$

我们证明这意味着 $t \mid b$。如果 $(c, 2, b) = 1$，则结论显然。否则，由于 $2 \mid (b, c)$ 且 β 是本原的，因此 $2 \nmid a$。因此，由于 $-2td = \beta^2 \mid 2\mathrm{div}(\beta) \mid 2a$，我们得到 t 是奇数，从而如果 t 整除 $2b$，那么它也整除 b。

类似地，我们得到 $d \mid c$。由于 $\beta \cdot k = -2db$ 和 $\beta \cdot \ell = -2tc$，我们得到所需条件 $\beta^2 \mid (\beta \cdot k, \beta \cdot \ell)$。

反之，与情形 $[r_\beta] = s$ 一样，直接计算表明，若 β 是一个定义了平方为 $\beta^2 = -2td$ 的反射的本原向量，并且满足 $\beta^2 \mid (\beta \cdot k, \beta \cdot \ell)$，则 $[r_\beta] = -\mathrm{id}$。首先注意到，上述条件蕴含 $(t, d) = 1$。事实上，我们有 $\beta \cdot k = -2db$ 和 $\beta \cdot \ell = -2dc$。因此，$\beta^2 \mid (\beta \cdot k, \beta \cdot \ell)$ 等价于 $2td \mid 2db$ 和 $2td \mid 2tc$，也即等价于 $t \mid b$ 和 $d \mid c$。由于 $\beta^2 \mid 2\mathrm{div}(\beta) \mid 2a$，可知 (t, d) 整除 a。根据前面的观察，它也整除 b 和 c。由于 β 是本原的，这意味着 $(t, d) = 1$。

最后，方程（27）很容易验证，而方程（28）和（29）的计算与 $[r_\beta] = s$ 的情形相同。

□

我们注意到，在 β 上得到的条件在 $O(\Lambda_{K3^{[m]}}, h)$ 的作用下保持不变。事实上，若 $g \in O(\Lambda_{K3^{[m]}}, h)$，则对于某些 $n, n' \in \Lambda$，有 $g(l) = \pm l + 2tn$ 且 $g(k) = k + 2dn'$。因此，若 $\beta^2 = -2d$，则 $2td \mid \beta \cdot l$ 当且仅当 $2td \mid g(\beta) \cdot l$。事实上，

$$\beta \cdot l = g(\beta) \cdot g(l) = g(\beta) \cdot (\pm l) + 2tg(\beta) \cdot n,$$

并且，由于 $-2d = \beta^2 \mid 2\mathrm{div}(\beta) = 2\mathrm{div}(g(\beta))$，我们有 $2td \mid 2tg(\beta) \cdot n$。其他条件的不变性也可以用类似的方法，通过 $g(k) = k + 2dn'$ 来证明。

下一个推论是我们的主要结果：对于极化类型的平方为 $2d$且整除度为 1 的极化超 K¨ahler 流形，我们确定伽罗瓦覆盖 (8) 的分歧除子。特别地，当 $(m-1, d) = 1$ 时也适用（见注 4.10）。

推论 5.3. 设 $h \in \Lambda_{K3^{[m]}}$ 是一个平方为 $2d$ 且整除度为 1 的本原向量，并满足$\widehat{O}(\Lambda_{K3^{[m]}}, h)$ 是 $O(h^\perp)$ 的正规子群。 $\rho\colon \mathscr{D}_{h^\perp}/\widehat{O}(\Lambda_{K3^{[m]}}, h^\perp) \dashrightarrow \mathscr{D}_{h^\perp}/O(h^\perp)$ 的分歧轨迹的除子分支是满足以下两个条件的 Heegner 除子 $\mathcal{H}_{\beta^\perp}$，其中 β 是本原向量：

a) $\beta^2 \mid 2\mathrm{div}(\beta)$; b)
β^2 满足：

- $\beta^2 \neq -2$;
- 若 $\beta^2 = -2(m-1)$，则 $2(m-1)d \nmid \beta \cdot k$;
- 若 $\beta^2 = -2d$，则 $2(m-1)d \nmid \beta \cdot \ell$;
- 如果 $\beta^2 = -2(m-1)d$，则 $2(m-1)d \nmid (\beta \cdot k, \beta \cdot \ell)$】【。

6. Hyper-Kähler fourfolds

现在我们将讨论范围限制在极化类型为 $\tau = O(\Lambda_{K3^{[2]}})h$的超凯勒四维簇 $m = 2$ 的情形，其中 h 是平方为 $2d$ 且整除度为 γ的本原向量。由于 $\gamma \mid 2(m-1)$，，我们得出 γ 只能是1或2。在这种情形下，群$O(\Lambda_{K3^{[2]}})$是$O(h^\perp)$的正规子群，并定义了伽罗瓦覆盖。

$$\rho : \mathscr{D}_{h^\perp}/\widehat{O}(\Lambda_{K3^{[2]}}, h^\perp) \longrightarrow \mathscr{D}_{h^\perp}/O(h^\perp),$$

具有伽罗瓦群 $G = O(A_{h^\perp})/\{\pm \mathrm{id}\}$。

推论 5.3 表明，当 $\gamma = 1$ 时， ρ 的分歧轨迹的除子分支是满足以下条件的 Heegner 除子 $\mathcal{H}_{\beta^\perp}$： β 是本原的，并且满足这些条件
a) $\beta^2 \mid 2\mathrm{div}(\beta)$; b) $\beta^2 \neq -2$ 且若
$\beta^2 = -2d$，则 $2d \nmid \beta \cdot \ell$。
注意，由方程（25）可知，如果 β 定义了一个反射，那么 $\beta^2 \mid 4d$。

在 [DM19], Debarre和Macrì 刻画了平方为 $2d$ 且整除度为 γ的极化超凯勒四维簇的周期态射的像。我们希望刻画那些与其像相交的分歧除子：由于在这种情况下周期态射是一个嵌入（见 [Son22，命题 3.2]），它们在模空间上诱导出一个非零除子。

对于每个包含向量h的符号差为(1, 1)的本原秩二子格 K 的 $\Lambda_{K3^{[2]}}$，作者将由余维二子空间 $\mathbb{P}(K_{\mathbb{C}}^\perp) \subset \mathbb{P}((\Lambda_{K3^{[2]}})_{\mathbb{C}})$切出的 $\mathscr{D}_{h^\perp}/\widetilde{O}(h^\perp)$ 的除子记为 $\mathscr{D}^{(1)}_{2d,K}$。也就是说，如果 $K \cap h^\perp = \mathbb{Z}\beta$对于某个本原向量 $\beta \in h^\perp$成立，则除子 $\mathscr{D}^{(1)}_{2d,K}$ 就是 Heegner 除子 $\mathcal{H}_{\beta^\perp}$。此外，对于每个正整数 D，作者设定

$$\mathscr{D}^{(1)}_{2d,D} \coloneqq \bigcup_{\mathrm{disc}(K^\perp)=D} \mathscr{D}^{(1)}_{2d,K} \subset \mathscr{D}_{h^\perp}/\widetilde{O}(h^\perp).$$

周期态射的像

$$^{[2]}\wp : {}^{[2]}M^{(1)}_{2d} \hookrightarrow \mathscr{D}_{h^\perp}/\widetilde{O}(h^\perp)$$

对于由平方为 $2d$ 且整除度为 1 的向量 h 所定义的极化类型的带极化超K¨ahler四维簇，其结构在 [DM19 的定理 6.1] 中有所描述。特别是，他们证明了以下结论成立。

命题 6.1（[DM19，定理 6.1]）。周期态射 $\wp_{K3^{[2]}}$ 的像是某些不可约海格纳除子的补集，这些除子包含在超曲面 $\mathscr{D}^{(1)}_{2d}$，$2d$,$\mathscr{D}_{(1)2d,\ 8d}$, $\mathscr{D}_{(1)2d,\ 10d}$和 $\mathscr{D}^{(1)}_{2d}$，$\frac{2d}{5}$中，其中最后一种情形仅在 $d \equiv \pm 5$（模 25）时出现。

现在我们确定海格纳除子 $\mathcal{H}_{\beta^\perp}$ 何时包含在这些超曲面之一中，其中 $\beta \in h^\perp$ 是定义反射的负自交数本原向量。

Prop命题 6.2。设 β 是定义反射的本原向量，并且满足

- $\beta^2 \neq -2, \beta^2 \neq -8$;
- 并且若 $d \equiv \pm 5$（模 25），则 $\beta^2 \neq -10$ 且 $\beta^2 \neq -45$。

$Then$ Heegner 除子 $\mathcal{H}_{\beta^\perp}$ 在模空间 $^{[2]}M^{(1)}_{2d}$ 中诱导出一个非零除子。

证明。注意，如果对于某个负自交数向量 β 有 $K \cap h^\perp = \mathbb{Z}\beta$，则格 $K^\perp$ 和 $\langle h、\beta\rangle^\perp$ 相等。特别地，利用 [GHS13，引理 7。2], 我们可以计算

$$\mathrm{disc}(K^\perp) = \mathrm{disc}(\langle h, \beta\rangle^\perp) = \frac{-\beta^2 \,\mathrm{disc}\,(h^\perp)}{\mathrm{div}(\beta)^2} = \frac{-4d\beta^2}{\mathrm{div}(\beta)^2}, \tag{31}$$

其中我们使用了 disc $(h^{\perp}) = |A_{h^{\perp}}| = 2d \cdot 2$。
因此，Heegner 除子$\mathcal{H}_{\beta^{\perp}}$ 包含于轨迹 $\mathscr{D}^{(1)}_{2d}$，$\frac{-4d\beta^2}{\text{v}\ \circ\ (\beta)^2}$di

若 β 是定义反射的负自交数本原向量，则 $\beta^2 \mid 2\text{div}(\beta)$；又由于 div($\beta$)总是整除 β^2，整数 β^2 等于 $-$div(β) 或 -2div(β)。因此，

- 当 $\beta^2 = -\text{div}(\beta)$ 时，公式 (31) 得出

$$\operatorname{disc}(\langle h, \beta\rangle^{\perp}) = -\frac{4d}{\beta^2},$$

其中 $-\beta^2 = \text{div}(\beta) \mid 2d$。因此，Heegner 除子 $\mathcal{H}_{\beta^{\perp}}$ 包含于轨迹$\mathscr{D}^{(1)}_{2d}$，$-2\frac{2d}{\beta^2}$。命题 6.1 意味着，若

$$-2\frac{2d}{\beta^2} \notin \left\{2d, 8d, 10d, \frac{2d}{5}\right\},$$

其中，最后一种情况仅在 $d \equiv \pm$ （模25）时发生，Heegner 除子 $\mathcal{H}_{\beta^{\perp}}$ 与 $^{[2]}\wp$ 的像相交。即，

$$\text{if } \beta^2 \neq -2 \text{ and, for } d \equiv \pm 5 \pmod{25},\ \beta^2 \neq -10,$$

除子 $\mathcal{H}_{\beta^{\perp}}$ 定义了模空间 $^{[2]}M^{(1)}_{2d}$ 中的一个非零除子。

- 当 $\beta^2 = -2\text{div}(\beta)$ 时，公式 (31) 给出

$$\operatorname{disc}(\langle h, \beta\rangle^{\perp}) = -\frac{16d}{\beta^2},$$

其中 $-\beta^2 = 2\text{div}(\beta) \mid 4d$。因此，Heegner 除子 $\mathcal{H}_{\beta^{\perp}}$ 包含于轨迹$\mathscr{D}^{(1)}_{2d}$，$-2\frac{8d}{\beta^2}$。命题 6.1 表明，如果

$$-2\frac{8d}{\beta^2} \notin \left\{2d, 8d, 10d, \frac{2d}{5}\right\},$$

其中，最后一种情形仅在 $d \equiv \pm 5$ (模 25) 时出现，Heegner 除子 $\mathcal{H}_{\beta^{\perp}}$ 与 $^{[2]}\wp$ 的像相交。也就是说，

$$\text{if } \beta^2 \neq -2,\ \beta^2 \neq -8, \text{ and, for } d \equiv \pm 5 \pmod{25}, \text{ if } \beta^2 \neq -45,$$

除子 $\mathcal{H}_{\beta^{\perp}}$ 定义了模空间 $^{[2]}M^{(1)}_{2d}$ 的一个非零除子。

□

6.1. 极化平方为 2 的超 K¨ahler 四维流形。我们考虑由平方为 2 的向量 h 所定义的极化类型（$d = 1$）。在这种情况下，γ 为 1（见注 4.1），$A_{h^{\perp}}$ 的等距变换群为

$$O(A_{h^{\perp}}) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

并且，由于 $-$id和 id 在 $A_{h^{\perp}}$ 上定义相同的等距变换，我们有 $G \simeq Z/2\mathbb{Z}$。

若我们写作 $h^{\perp} = M \oplus \mathbb{Z}k \oplus \mathbb{Z}\ell$，其中 $k^2 = -2$ 且 $\ell^2 = -2$，向量 $\gamma = k + \ell$ 是一个平方为 -4 的向量，它在 G 中定义了一个非平凡反射，因此 $G = [r_{\gamma}]$。

推论 6.3. 设 $h \in \Lambda_{K3^{[2]}}$ 是一个平方为 2 的本原向量。该双覆盖的分歧除子

$$\rho : {}^{[2]}\mathcal{P}_2^{(1)} = \mathscr{D}_{h^\perp}/\widehat{O}(\Lambda_{K3^{[2]}}, h^\perp) \longrightarrow \mathscr{D}_{h^\perp}/O(h^\perp)$$

是不可约的，并与周期态射的像相交

$${}^{[2]}\wp_2^{(1)} : {}^{[2]}\mathcal{M}_2^{(1)} \hookrightarrow {}^{[2]}\mathcal{P}_2^{(1)}.$$

证明。 ρ 的分歧除子的各个分支是$\mathscr{D}_{h^\perp}/\widetilde{O}$中 D 的不可约除子$h^\perp$，且包含在 G的某个非平凡元素的不动点集中。

G 的唯一非平凡元素是 $[r_\gamma]$，其中 $\gamma = k + l$。定理 3.5 表明，若 D 是包含在 Fix($[r_\gamma]$) 中的不可约除子，则存在一个向量 β，它在 G中定义一个非平凡反射，使得$D = \mathcal{H}_{\beta^\perp}$且 $[r_\gamma] = [r_\beta]$。现在，由于 $[r_\beta]$是非平凡的，我们有$\beta^2 \neq -2$，因此 $\beta^2 = -4$ （见 (25)）。我们证明，所有平方为~ -4 且定义反射的本原向量 $\beta \in \Lambda$，都可由 $O(\Lambda)$的某个元素共轭。特别地，这意味着$\mathcal{H}_{\beta^\perp} = \mathcal{H}_{\gamma^\perp}$，因此 ρ 的分歧除子是不可约的。

˜根据 Eichler 引理 1.2，我们知道，向量 β 的 $O(\Lambda)$-轨道由 β^2 和 $\beta_* \in A_{h^\perp}$唯一确定。注意，对于每个平方为 -4 且定义反射的本原向量 β，div(β) $= 2$。事实上，方程 (24) 蕴含 div(β) $\mid 2$，而 $-4 = \beta^2 \mid 2$div(β)，因为 β 定义了反射。

我们写作 $\beta = am + bk + cl$，其中 a、b、c为整数，且 $m \in M$为本原向量。回顾一下，$A_{h^\perp} = \langle k_* \rangle \times \langle l_* \rangle$，其中 $k_* = \left[\frac{k}{2}\right]$和 $l_* = \left[\frac{l}{2}\right]$。因此，

$$\beta_* = \left[\frac{\beta}{\mathrm{div}(\beta)}\right] = \bar{b}k_* + \bar{c}l_* \in A_{h^\perp}.$$

¯我们证明 $b = \bar{c} = 1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，从而得到 $\beta_* = k_* + l_*$。这足以完成证明。

由于 div(β) $= (a, 2b, 2c) = 2$，我们可以将 $a = 2a_1$ 写成某个整数 a_1。通过计算 β 的平方

$$-4 = \beta^2 = (2a_1)^2 m^2 - 2b^2 - 2c^2$$

我们得到 $2 \mid b^2 + c^2$，由此可得 b和 c具有相同的奇偶性。由于 a 为偶数且 a、b、c 互质，因此可知 b 和 c 均为奇数。

最后，命题 6.2 表明 $\mathcal{H}_{\gamma^\perp}$ 与 ${}^{[2]}\wp_2^{(1)}$ 的像相交。 □

模空间 ${}^{[2]}M_2^{(1)}$ 包含一个稠密开子集 $U_{2,1}$，它是双 EPW 六次体的模空间（见 [Deb22, Example 3.5]）。对合 $[r_\gamma] \in G$ 在 $U_{2,1}$ 上定义了一个对合，该对合正是 O'Grady 在 [O'G08,Theorem 1.1] 中研究的双EPW六次体的对偶对合。注意，相关分歧除子 $\mathcal{H}_{\gamma^\perp} = \mathscr{D}_4$ 不与U_2的像相交,1 （见 [O'G15]）。

正如 [Deb22, 第 3 节9], 所述，商 $\mathscr{D}_{h^\perp}/O(h^\perp)$ 确实是 K3[3]-型、极化平方为 4 且整除度为 2 的极化超 K¨ahler 流形的周期空间[3]$\mathcal{P}_4^{(2)}$。事实上，给定一个平方为 4 且整除度为 2 的本原向量 $h_2 \in \Lambda_{K3^{[3]}}$，格 $h_2^\perp$ 同构于 $h^\perp$，直接计算可得 $\widehat{O}(\Lambda_{K3^{[3]}}, h_2) = O(h_2^\perp)$。 [KKM] 证明，覆盖 ρ 将双 EPW 六次曲面对应到相应的双 EPW 三次曲面。

References

[BBBF] Ignacio Barros、Pietro Beri、Emma Brakkee 和 Laure Flapan。《超 K¨ahler 簇模空间的 Kodaira 维数》。预印本 arxiv:2212.12586。[Deb22] Olivier Debarre。《超 K¨ahler 流形》。 *Milan J. Math.*, 90(2):305–387，2022。[DM19] Olivier Debarre 和 Emanuele Macr

` ¨ *Int.* ı。《极化 *Math. Res. Not. IMRN* 22 6887 6923, 2019

超 Kähler 四维流形的周期映射》。, ( ): – 。[Dol96] I. V. Dolgachev。《格极化曲面的镜像对称》。第 81 卷，第 2599–2630 页。1996。代数几何，4。[Martin Eichler。 *Quadratische Formen und orthogonale Gruppen*。数学科学基础丛书，第 63 卷。Springer-Verlag，柏林—纽约，1974。第二版。[GHS07] V. A. Gritsenko、K. Hulek 和 G. K. Sankaran。曲面模空间的 Kodaira 维数。*Invent. Math.*，169(3):519–567，2007。[GHS10] V. Gritsenko、K. Hulek 和 G. K. Sankaran。不可约辛流形的模空间。*Compos. Math.*，146(2):404–434，2010。[GHS13] V. Gritsenko、K. Hulek 和 G. K. Sankaran。K3 曲面与不可约辛流形的模空间。载于 *Handbook of moduli. Vol. I*，第 24 卷（ *Adv. Lect. Math. (ALM)*），第 459–526 页。Int. Press，马萨诸塞州萨默维尔，2013。[Gro05] Alexandre Grothendieck。

Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1) / Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie 1960-61 ; un séminaire dirigé par A. Grothendieck ; augmenté de deux exposés de Mme M. Raynaud 。数学文

献。法国数学会，巴黎，2005。[Has00] Brendan Hassett。特殊三次四维簇。 *Compositio Math.*，120(1):1–23，2000。[Huy16] Daniel Huybrechts。 *Lectures on K3 surfaces*。剑桥高等数学研究丛书。剑桥大学出版社，剑桥，2016。[KKM] Grzegorz Kapustka、Michal Kapustka 和 Giovanni Mongardi。EPW 六次曲面与 EPW 三次曲面。预印本 arXiv:2202.00301。[Nik80] V V Nikulin。整对称双线性形式及其若干应用。 *Mathematics of the USSR. Izvestiya* 14 1 103 167, 1980 , ( ): – 。[

O'G06] Kieran G. O'Grady。不可约辛

4 *Duke Math.* 维簇与 *J.* 134 1 99 137, 2006

Eisenbud-Popescu-Walter 六次曲面。, ( ): – 。[O'G08] Kieran G. O'Grady。对偶双 EPW 六次曲面及其周期。 *Pure Appl. Math. Q.*，4(2，特刊：献给 Fedor Bogomolov。第 1 部分):427–468，2008。[O'G15] Kieran G. O'Grady。双 EPW 六次曲面的周期。 *Math. Z.*，280(1-2):485–524，2015。[Sca87] Francesco Scattone。代数曲面模空间的紧化。, ( ):x , 。[Son22] Jieao Song。K 型超 K

¨ $3^{[m]}$ *Int.* ahler 流 *Math. Res. Not.* 2022

形极化周期映射的像。, 即将出版 ( )。[Ste08] Paolo Stellari。作用于 K3 曲面模空间的有限群。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，360 12 6631( ): –6642，2008。

Université Paris Cité, IMJ - PRG, 75013 Paris, France
Email address: francesca.rizzo@imj-prg.fr