arXiv:2304.05486v1 [cs.DC] 11 Apr 2023

一种通过几何化研究子迭代即时快照消息对手的拓扑及其在集合一致性中的应用

Yannis Coutouly Laboratoire d'Informatique et Systèmes - 艾克斯-马赛大学 法国国家科学研究中心

Emmanuel Godard Laboratoire d'Informatique et Systèmes - 艾克斯-马赛大学 法国国家科学研究中心

摘要

迭代即时快照模型（IIS）是消息对手场景中的一个核心模型。我们考虑一般消息对手，其执行是 IIS 消息对手的执行的任意子集。我们提出了一种针对这类一般消息对手的新拓扑方法，该方法建立在几何单纯复形之上。我们能够直接在所考虑的执行集合上定义拓扑，从而以更简单且更强大的方式运用拓扑研究分布式可计算性。

作为这一新框架的应用，我们给出了一般子 IIS 消息对手下求解集合一致性的完备刻画和下界。

2012年 ACM 学科分类分布式算法、可计算性

关键词和短语拓扑方法、几何单纯复形、集合一致性

数字对象标识符10.4230/LIPIcs...

1 引言

自 Herlihy-Shavit、Borowsky-Gafni 和 Saks Zaharoglou 的开创性研究以来，[HS99, SZ00, BG93b], 拓扑方法已被证明对分布式计算，尤其是分布式可计算性，非常有效。自这些早期成果以来，拓扑框架不断得到完善，以便以更有效的方式呈现。特别是，迭代即时快照模型（IIS_n）是一种特殊的消息对手模型，已被提出作为研究分布式可计算性的核心模型。在本文中，我们提出一种改进的拓扑方法表示，以研究比 IIS_n 更一般的消息对手的分布式可计算性和复杂性。

迭代写快照是一种共享内存模型。进程可以访问单写多读寄存器。通常，寄存器的数量与进程数相同，并排列成一个一次性数组。与 [BG93a], 中一样，可以假设存在一种 `writeSnapshot()` 原语，使进程能够以原子方式向其寄存器写入值，并读取整个数组的内容。每次并发访问都可以读取与调用进程对应的值，以及同一轮中其他进程先前写入的值。在给定的一轮中，对 `writeSnapshot()` 的所有可能调用交错顺序都是允许的。

该模型的主要优势在于，它具有简单、同步且规整的结构；[BG97] 证明了，有界无色任务能够在经典读写模型中以无等待方式解决，当且仅当它能在迭代写快照模型中解决。因此，该模型与共享内存具有相同的计算能力，但在此模型中使用拓扑工具更为简单（参见 [HRR12] 中的教程以及 [HKR13]中的详尽论述）。1

XX:2 面向子迭代即时快照消息对手及集合一致性的几何化拓扑

后来，人们引入了迭代即时快照模型，它是迭代写快照模型在消息传递中的对应模型。进程可能永远不会失败，但是，一个“快速”的正确进程可能永远看不到另一个正确进程。使用标准共享内存模型所获得的通信结构通常是边传递的：在一轮中，如果进程 p “看见”了一个也“看见”进程 q的进程 p'，那么 p 也会“看见” q。考虑消息传递系统时，这一条件实际上并非必要；在 [AG13], 中引入了“消息对手”这一术语，其中通过考虑各种有向图族，放弃了这一条件，因为其中的瞬时图并不具有传递性。在[AG13], 中，Afek和 Gafni证明了：如果瞬时有向图是锦标赛图，那么可以解决与标准异步共享内存中相同的任务。因此，某些具有特定非完全底层通信图的消息对手，可能拥有与经典共享内存相同的计算能力。

随后，Raynal 和 Stainer 在 [RS13]中证明，可以考虑各种消息对手（它们并非全都是迭代的）：对可能场景集合施加进一步限制，也就是采用更弱的对手，对应于加入故障检测器的知名异步共享内存模型。一般的消息对抗者模型似乎非常丰富，而且有时十分方便（某些消息对手的协议复形非常简单），可从可计算性的角度描述分布式系统。因此，研究尽可能一般的消息对手非常有意义，因为它们能够对多种故障进行建模，而自身实际上并无故障。

我们考虑迭代即时快照消息对手（IIS_n）这一设置，其中系统包含 $n+1$ 个进程，其消息交换满足即时性和包含性（见第 2.2 节）。本文研究任意子 IIS 消息对手，也就是其执行集合为 IIS_n 消息对手的执行集合的任意子集的消息对手。我们提出一种新的拓扑方法，可针对任意 n，直接在 IIS_n的执行集合上定义拓扑。我们利用对这一新拓扑所作的精确描述，完整刻画了能够解决经典集合一致问题的子 IIS 消息对手。

1.1 动机与贡献

为了正确处理一般消息对手，与分布式计算中拓扑方法通常关注的对象不同，我们主要将单纯复形视为几何 单纯复形。接着，我们证明可以通过一个自然的 geo 映射，将 IIS_n 的任意无限执行关联到标准欧几里得空间 $\mathbb{R}^N$中的一个点。执行集合上的拓扑于是是由映射 geo 从标准拓扑诱导而来的拓扑：开集是 R^N中开集 Ω 的原像 geo^{-1}(Ω)。标准欧几里得拓扑简单且广为人知；然而，由于 geo 不是单射，为了充分理解这一新拓扑，有必要描述所谓的“不可分离集”。在拓扑学中，如果对于两个不同的元素 x, y，任取其邻域 Ω_x 和 Ω_y，都有 $\Omega_x \cap \Omega_y \neq \emptyset$，则称它们不可分离。在我们的设定中，当两个执行经映射 geo后具有相同的像时，它们不可分离。因此，在第 4 节中，我们首先考察 $\mathbb{R}^N$中给定点的 geo 原像集。

标准色彩细分是立即快照模型一轮执行的组合拓扑表示。其简单而规则的结构使拓扑推理颇具吸引力。本文介绍一种新的通用算法，并展示它与标准色彩细分之间的简单关系，这种关系在几何

单纯复形框架下得以显现。该新算法在每个节点使用特定权重向量对$\mathbb{R}^N$ 进行平均。我们将此平均算法称为色彩平均算法。在 IIS_n 模型中运行色彩平均算法，可以在 $\mathbb{R}^N$ 中为 IIS_n 的任意给定执行提供一个自然的几何对应。将IIS_n 的执行映射到 R^N 中点的映射称为几何化 geo。

我们在定理29中给出了不同类型的原像集 $geo^{-1}(x)$（带有 $x \in \mathbb{R}^N$）的完整组合描述，因此它描述了 IIS_n中的所有不可分离集。有趣的是，我们证明了它们只有三种可能的大小：1、2 和无限大。

由于在我们的设定中确实存在不可分离集，这表明标准的抽象单纯复形方法实际上并不总是可以直接使用，因为已知抽象单纯复形具有可分拓扑。这意味着，我们可能首次必须明确使用单纯复形的几何版本，才能全面研究一般的分布式可计算性，尤其是对于非迭代消息对抗者。我们将此处定义的拓扑称为几何化拓扑，以强调这种范式转变。

k–集合一致问题是分布式计算中的一个标准问题，且已知它是检验拓扑方法的良好基准。 k–集合一致问题是一项分布式任务，其中进程必须对不超过 k 个不同的初始值达成一致。集合一致问题是针对 $k+1$ 个进程的 k–集合一致问题。在共享内存模型中，对于超过 $k+1$个进程的情况，无等待 k–集合一致不可能实现，这是分布式计算中拓扑方法最重要的成就之一[HS99, SZ00, BG93b]。

我们运用这一技术，为解决集合一致性问题的一般消息对手推导出一种刻画及其下界。定理 30 的刻画指出，对于 $\mathcal{M} \subset IIS_n$ ，当且仅当 $\mathcal{M}$ 的几何化存在一个“洞”时，集合一致性才可解；也就是说 $geo(\mathcal{M})$ 不覆盖 S^n 的凸包，即维数为 n的单纯形。

这种新的拓扑方法首次使我们能够以一般方式高效处理非迭代消息对手。正如其在集合一致性问题中的应用所示，我们有可能研究新的现象。此外，与通常的理解不同，处理一般对手似乎并非真正取决于紧致性，而更多取决于可分性。本文给出的刻画同样适用于非紧消息对抗者，也可直接应用于此类对手。

1.2 相关工作

我们在上一节中已经表明，此处考虑的模型在许多方面都非常重要。这种同步通信模型实际上以不同名称被多次提出。我们简要介绍移动遗漏模型[SW89], 、较新的“Heard-of”模型 [CBS09], 、迭代快照模型 [BG93a], 以及其最终演变形式 —— 消息对手 模型 [AG13]。对于无色任务，人们已证明这些同步模型表示与异步模型之间存在某些等价关系 [BG97]。还请注意，在动态网络中，只要通信原语是（向当前邻居）广播，也可以使用这一模型。

在 [GKM14], Gafni、Kuznetsov 和 Manolescu 研究了迭代即时快照模型的子集所构成的模型。他们引入了专门构造的辅助无限单纯复形，称为终止细分。我们相信，我们的工具可以提供一个更简单且不易出错的框架，用于研究子 IIS 模型的分布式可计算性。

一系列研究探讨了用于解决共识问题宽松版本（包括近似共识）的平均算法。在 [CFN15], Charron-Bost、Függer 和 Nowak 采用以矩阵为基础的方法，证明了不同平均算法的收敛性。本文使用类似的随机矩阵技术来证明色彩平均算法的收敛性。在 [FNS21], Függer、Nowak 和 Schwarz 为在相当一般的消息对手下解决近似共识和渐近共识给出了紧界。

在 [NSW19], Nowak、Schmid 和 Winkler 为所有消息对手提出了基于知识的拓扑。随后，他们利用这些拓扑刻画能够解决共识问题的消息对手。不过， [NSW19] 的研究范围比本文更广；然而需要注意的是，不同于那些由局部知识不可区分性隐式 定义的拓扑，这里的几何化拓扑由定理 29 显式定义并得到了完整描述。此外，这种基于知识的框架尚未研究集合一致性。

k–集合一致性问题是一个经典且重要的协调问题。它也是众多模型中分布式可计算性的理论基准。Raynal 的综述见 [Ray16]。集合一致性是较弱的版本，即 仅涉及 $k+1$ 个进程。

在 [GP20], 中，Godard 和 Perdereau 针对任意子 IIS 模型，研究了“两将军问题”，也就是两个进程的共识问题。鉴于两个进程的共识实际上就是集合一致问题，本文给出的集合一致问题可解性刻画，将 [GP20] 的结果推广到了任意数量的进程。

1.3 概述

第 2 节介绍消息对手的标准定义和本文所用的记号。第 3 节首先在几何背景下重述分布式计算中使用组合拓扑的标准定义，随后介绍 IIS_n 的几何化拓扑。第 4 节将准确描述并证明几何化拓扑的性质。第 5 节运用我们的框架，推导集合一致性的新的可计算性刻画和下界。最后，第 6 节提出一些开放问题。

2 模型与定义

2.1 消息对手

这里介绍并给出本文所用的记号。设 $n \in \mathbb{N}$，考虑包含 $n+1$ 个进程的系统。我们用 $\Pi_n = [0,..,n]$ 表示进程集合。由于发送消息是一种非对称操作，我们将使用有向图。下面回顾主要的标准定义。

我们使用标准的有向图记号：给定 G, $V(G)$ 是集合 o f 顶点， $A(G) \subset V(G) \times V(G)$ 是弧的集合。

▶**定义 1.** 我们用 G_n 表示顶点属于 Π_n 的有向图集合。

一个动态图$\mathbf{G}$ 是一个序列 $G_1, G_2, \cdots G_r, \cdots$，其中 G_r 是一个在 Π_n中具有顶点的有向图。我们也将有向图 G_r记作$\mathbf{G}(r)$ 。一个消息对手 是动态图的集合。

由于该 n 在全文中基本固定，在没有歧义时，我们用 Π 表示进程集合，用$\mathcal{G}$ 表示顶点为 Π 的图集合。

直观而言，序列中位置 r 处的图描述了在第 r 轮发送的某些消息是否会被传输。场景下执行的形式化定义将在第 2.4 节给出。

为了更简洁地描述我们的消息对手 [PP04]，我们将使用以下标准记号。一个序列可视为字母表 $\mathcal{G}$ 上的一个字。空字记作 ε。

▶ 定义 2. </style>给定 $A \subset G$， A^* 表示由 A 中元素构成的所有有限序列的集合， A^ω 表示所有无限序列的集合，而 $A^\infty = A^* \cup A^\omega$.

给定 $G \in G^\omega$，若 $G = HK$，其中 $H \in G_n^*$，$K \in G_n^\omega$，则称 H 为 G 的前缀，K 为后缀。$Pref(G)$ 表示 G 的前缀集合。形如 A^ω 的对手称为无状态对手或迭代对手。$M \subset G^\omega$ 中的一个字称为消息对手 M 的通信场景（简称场景）。给定一个字 $H \in G^*$，称其为部分场景， $len(H)$ 表示该字的长度。长度为 r 的 G 的前缀记作 G^r （不要与 $G(r)$ 混淆，后者是 G 的第 r 个字母，即时间 r 上的有向图）。

以下定义给出了在考虑有向图上的无限字时因果性的概念。

▶**定义 3** ([CFQS12]). 设 $\mathbf{G}$ 为一个序列 $G_1, G_2, \cdots G_r, \cdots$。设 $p, q \in \Pi$。若存在一个序列 $p_0, p_1, \ldots, p_t \in \Pi$，以及一个序列 $r \leq i_0 < i_1 < \cdots < i_t \in \mathbb{N}$，使得在时刻 r，$\mathbf{G}$ 中存在一条从 p 到 q的路径，则称存在一条路径，其中

$p_0 = p, p_t = q$，对于每个 $0 < j \leq t$，$(p_{j-1}, p_j) \in A(G_{i_j})$记作 $p \overset{r}{\underset{\mathbf{G}}{\rightsquigarrow}} q$。我们还称 p 从第 r 轮起在$\mathbf{G}$中对 q 产生因果影响。

2.2 迭代即时快照消息对手

若对所有 $a, b, c \in V(G)$, $(a, b), (b, c) \in A(G)$ 都有 $(a, c) \in A(G)$，则称图 G 具有即时性。若对所有 $a, b \in V(G)$, $(a, b) \in A(G)$ 或 $(b, a) \in A(G)$，则称图 G 具有包含性。

▶**定义 4** ([AG13, HKR13]). 我们定义 $IS_n = \{G \in G_n \mid G$ 具有即时性和包含性$\}$。
对于 $n+1$ 个进程，迭代即时快照消息对手是消息对手 $IIS_n = IS_n^\omega$。

迭代即时快照模型最初作为一种（共享）内存模型被提出，随后被证明等价于上述消息对手：首先表现为锦标赛和迭代锦标赛 [BG97, AG13], ，然后表现为这一消息对手 [HKR13, HRR12]。另请参见 [Raj10] ，其中综述了这些分层模型中所涉及的归约。

2.3 示例

不过，我们并不将研究限制在正则语言上；然而，我们所知的所有消息对手都是正则的，正如以下示例所示，在这些示例中，正则表达式非常方便。我们展示了如何在我们的框架中便捷地描述标准故障环境。

▶ **示例5**。考虑一个消息传递系统，其中有 n 个进程，在每一轮中，所有消息都可能丢失。其关联的消息对手是$\mathcal{G}_{n-1}^\omega$。

▶ **示例 6**。 考虑一个包含两个进程 $\{\circ \bullet\}$ 的系统，其中每轮最多只能丢失一条消息。相应的消息对手为 $\{\circ\leftrightarrow\bullet, \circ\leftarrow\bullet, \circ\rightarrow\bullet\}^\omega$。这就是 IIS_1。

2.4 分布式算法的执行

给定一个消息对手 $\mathcal{M}$ 和一组初始配置$\mathcal{I}$，我们定义了给定算法 $\mathcal{A}$ 在初始化为 $\mathcal{I}$的情况下受 $\mathcal{M}$ 约束的执行。一次执行由一个初始化步骤以及消息交换和相应本地状态更新的（可能是无限的）轮序列构成。当初始化根据上下文是明确的时，我们将交替使用场景 和执行 。

在场景 $w \in$和初始配置 $\iota \in$下执行算法 $\mathcal{A}$ ，如下所述。此执行记作 $\iota.w$。首先， ι 为 Π 的所有进程设置初始状态。

一轮分为三个步骤：发送、接收和更新本地状态。在第 $r \in \mathbb{N}$ 轮，进程使用 `SendAll()` 原语发送消息。使用 `Receive()` 原语执行相应的接收操作能否成功，取决于 $G = w(r)$ ； G 称为第 r 轮的 即时图。

设 p， $q \in \Pi$。当弧 $(p,\ q) \in A(G)$ 时， p 发送给其所有邻点的消息会被 q 接收。随后，所有进程根据接收到的值和$\mathcal{A}$更新其状态。注意，通常假设 p 总能收到自己的值，即对于所有 p 和 G，均有 $(p,\ p) \in A(G)$。

令 $w \in \mathcal{M}$ $\iota \in \mathcal{I}$。给定 $u \in Pref(w)$，我们用 $\mathbf{s}_p(\iota.u)$ 表示进程 p 在算法 $\mathcal{A}$ 的场景 w 下、采用初始化 ι 时第 $len(u)$ 轮的状态。特别地，这意味着 $\mathbf{s}_p(\iota.\varepsilon)$ 表示 ι 中 p 的初始状态，其中 ε 表示空字。

一个任务由一组$\mathcal{I}$ 初始配置、一组输出值 Out 以及一个关系 Δ（即初始配置与输出配置[1]之间的规范）给出。我们称一个进程决定 ，当它输出 $\emptyset$ 中的一个值时。最后，按照经典定义，

▶**定义 7**。 如果对于消息对手 M，任意 $\iota \in I$ 和任意场景 $w \in M$，都存在 u 的一个前缀，使得进程的状态 $out = (\mathbf{s}_0(\iota.u)\ ..\ ,\ \mathbf{s}_n(\iota.u))$ 满足任务的规约，即 $\iota \Delta out$，则称算法 A 求解了任务 $(I\ \ Out, \Delta)$ 。

3 一种通过几何化构造的拓扑

本文提出一种研究分布式可计算性的新拓扑方法。该方法将基于单纯复形的经典方法从有限执行扩展到无限执行，而无需像 [GKM14] 那样考虑无限多个额外复形。这使我们能够直接在标准迭代即时快照模型 IIS_n 的执行集合上定义拓扑。

3.1 组合拓扑定义

3.1.1 几何单纯复形

在第 3.2.2 节给出几何化拓扑的定义之前，我们先介绍单纯复形的定义，但并不像分布式计算中通常所做的那样，先将其定义为抽象复形，而是主要将其视为 $\mathbb{R}^N$ 中的几何对象。这就是我们将此定义称为几何化拓扑的原因。直观地说，我们将通过几何化映射 geo，为每个执行关联 $\mathbb{R}^N$ 中的一个点。几何化拓扑是由 geo^{-1} 从 $\mathbb{R}^N$ 中的标准拓扑诱导出的拓扑。这也使 geo

[1] 请注意，拓扑学中的标准定义涉及我们在此不予考虑的载体映射，因为我们只考虑一个特定任务：集合一致性问题

根据定义是连续的。在标准方法中也会使用几何单形，但它们是作为抽象单纯复形的几何实现引入的。后文将会看到，在处理无限复形时，这些单形的标准拓扑无法处理分布式任务的可计算性，因为我们需要定义另一种拓扑。我们证明，标准拓扑教材中定义的无限复形上的拓扑，与我们在此证明适用于分布式可计算性的拓扑不同。参见第??节。请注意，为了正确理解，我们构造的拓扑定义在无限执行的集合上，而非与有限执行相对应的复形上。

以下定义是代数拓扑中的标准定义 [Mun84]。在本部分中，我们固定一个整数 $N \in \mathbb{N}$。我们将 $||x||$ 记为 $\mathbb{R}^N$中的欧几里得范数。对于有界子集 $X \subset \mathbb{R}^n$，我们将 $diam(X)$ 记作其直径。

▶ **定义 8**。令 $n \in \mathbb{N}$。有限集 $\sigma = \{x_0, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}^N$被称为维数为 n的单纯形，如果向量 $\{x_1 - x_0, \ldots, x_n - x_0\}$是线性无关的。我们将 σ的凸包记为 $|\sigma|$。

▶ **定义 9** ([Mun84])。A 单纯复形 是一个集合 C 由单形 组成，满足：
(a) 如果 $\sigma \in C$ 且 $\sigma' \subseteq \sigma$，那么 $\sigma' \in C$，**(b)** 如果 σ，$\tau \in C$且 $|\sigma| \cap |\tau| \neq \emptyset$那么存在 $\sigma' \in C$使得 $|\sigma| \cap |\tau| = |\sigma'|$，$\sigma' \subset \sigma$，$\sigma' \subset \tau$.

我们将$\wr C \wr = \bigcup_{S \in C} |S|$记为，这是几何化 C。

注意，这些定义并不要求复形是有限个单形的集合。维数为 0（单元素集合）的 C 称为顶点，我们将 $V(C)$ 记为 C的顶点集合。复形在维数 n 上是纯的，如果所有极大单形的维数都是n。在这种情况下，维数为 $n-1$ 的单纯形称为面。单纯形$\sigma =$的边界 是维数为 $n-1$的纯复形$\bigcup_{i \in [0,n]} \{x_j \mid j \in [0,n], i \neq j\}$。它记为 $\delta(\sigma)$，是 σ 的各个面的并集。

设 A 和 B 为单纯复形。映射 f: $V(A) \to V(B)$若保持单形，即对 A的每个单形 σ，其像 $f(\sigma)$都是 B的一个单形，则称为单纯映射。通过重心坐标的线性组合，f 可扩展为线性单纯映射f: $\wr A \wr \to \wr B \wr$，该映射是连续的。参见 [Mun84，引理 2.7]。

我们还有带颜色的单纯复形。这些是单纯复形 C 以及一个函数 $\chi : V(C) \to \Pi$，使得将 χ 限制在 C 的任意极大单形上时都是一个双射。保持颜色的单纯映射称为染色映射。

最后，S^n 将表示维度为 n的“该”单纯形。本文中，我们假设在 $\mathbb{R}^N$中为 $S^n = (x_0^*, \ldots, x_n^*)$ 固定了一个嵌入。我们还假设其直径 $diam$（S^n）为 1。

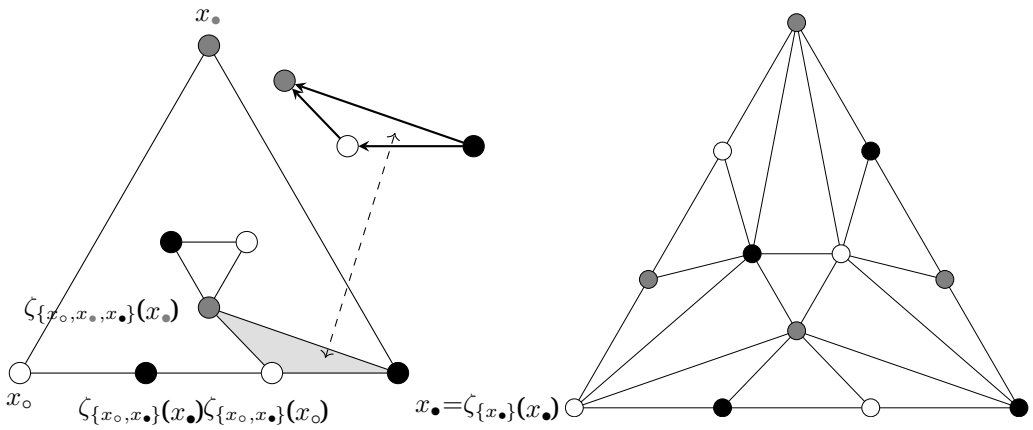
3.1.2 标准色彩细分

这里我们将标准色彩细分、[HKR13]和 [Koz08], 表示为几何复形。我们从细分和色彩细分开始。

▶**定义 10**（细分）。单纯形 S 的细分是一个单纯复形 C，其具有 $\wr C \wr = |S|$。

▶ 定义 *11*（色彩细分）。给定一个色彩单纯形 (S, P)，S 的色彩细分是一个色彩单纯复形 (C, P_C)，满足C 是 S的细分（即 $\wr C \wr = |S|$），$\forall x \in V(S)$，$P_C(x) = P(x)$。

XX:8 一种通过几何化构造的用于子迭代即时快照消息对手及应用的拓扑



(a) 由 ζ_V针对各种 $V \subset \{\circ\ \bullet,\ \bullet\}$。 **(b)** $Chr(S^2)$

图1 维度2的标准色彩细分构造。左侧展示了 IS_2 （顶部）的一个即时图与C$hr(S^2)$的一个单纯形（灰色区域）之间的关联。

注意，此处无需假设 $V(S) \subset V(C)$，因为单纯形 S 的顶点是极点，所以必然属于 $V(C)$。

我们首先定义单形的一些几何变换（此处将其视为集合 o f 点）。系数的选择将在稍后得到论证。

▶**定义12**。 考虑集合 $V = (y_0, \ldots, y_d)$，其大小为 $d+1$，且属于 $\mathbb{R}^N$。我们定义函数ζ_V：$V \longrightarrow \mathbb{R}^N$，其定义如下，对所有 $j \in [0,d]$

$$\zeta_V(y_j) = \frac{1 - \frac{d}{2d+1}}{d+1} y_j + \sum_{i \neq j} \frac{1 + \frac{1}{2d+1}}{d+1} y_i$$

我们现在以几何方式定义带颜色的标准色彩细分单纯形 $(S,\ \mathcal{P})$，其中 $S = \{x_0,\ x_1、\ \ldots、\ x_n\}$ 以及 $\mathcal{P}(x_i) = i$。

对于彩色单纯形 $S = \{x_0, \ldots, x_n\}$，色彩细分 C$hr(S)$ 是由顶点集 $V(\mathrm{C}hr(S)) = \{\zeta_V(x_i) \mid i \in [0,n], V \subset V(S)\ x_i \in V\}$. 定义的单纯复形。

对于每一对 (i, V)，$i \in [0,n]$ 和 $V \subset V(S)$，都有一个与之关联的顶点 y，属于C$hr(S)$；反之，每个顶点都有一个与之关联的有序对。(i, V) 的颜色 为 i。集合 V称为视图。我们将顶点 y, $\Phi(y) = (\mathcal{P}(y)\ V_y)$的以下表示 定义为 Φ，其中$\mathcal{P}(y) = i$ 和 $V_y = V$。

C$hr(S)$ 的单形是由以下集合构成的： $d+1$ 点$\{\zeta_{V_0}(x_{i_0}),\ \cdots\ \zeta_{V_d}(x_{i_d})\}$，其中存在一个置换 π 作用于 $[0,d]$，使得 $V_{\pi(0)} \subseteq \cdots \subseteq V_{\pi(d)}$。若 $i_j \in \mathcal{P}(V_\ell)$，则 $V_j \subset V_\ell$。

在图 1 中，我们展示了 C$hr(S^2)$ 的构造。为方便起见，我们关联 $\circ$ $\bullet$、$\bullet$分别对应进程 0、1、2。在图 1a 中，我们考虑 $\mathbb{R}^2$ 中的三角形 $x\circ$ $x_\bullet$、$x_\bullet$，其中 $x\circ = (0,0)$、$x_\bullet = (1,0)$ $x_\bullet = (1\,2, \frac{\sqrt{3}}{2})$。我们有$\zeta_{\{x\circ\ x_\bullet\}}(x_\bullet) = (1\,3, 0)$、$\zeta_{\{x\circ\ x_\bullet\}}(x\circ) = (2\,3, 0)$，以及 $\zeta_{\{x\circ\ x_\bullet、\ x_\bullet\}}(x_\bullet) = (1\,2, \frac{\sqrt{3}}{5})$。即时图（顶部）与单纯形 $\left\{(2\,3, 0)、(1, 0)、(1\,2, \frac{\sqrt{3}}{5})\right\}$（灰色区域）之间的关系将在下一节详细介绍。

接下来，我们将关注 $Chr(S^n,\ \mathcal{P})$ 的迭代。色彩细分定义中的最后一条性质意味着，我们可以省略复形 C 着色中的 C 索引，并用 $\mathcal{P}$ 表示所有步骤中的着色。鉴于它的特殊作用，我们称之为

进程颜色，并在下文中，对于 $Chr(S,\ \mathcal{P})$ 中 $Chr(S^n)$ 的所有迭代的单形S，省略 $\mathcal{P}$，使用 $Chr(S)$。

在 [Koz12], Kozlov 中，Kozlov 展示了标准色彩细分复形与施莱格尔图（交叉多胞体的特殊投影）之间的关系，并利用这一关系证明标准色彩细分实际上确实是一种细分。

在 [HKR13 的第 3.6.3], 节中，给出了由 $\epsilon \in \mathbb{R}$ 参数化的 R^n 中标准色彩细分的一般嵌入。这里的几何化是通过选择 $\epsilon = \frac{d}{2d+1}$ 来实现的，以便绘图“平衡得当”。

3.2 编码迭代即时快照配置

3.2.1 迭代即时快照模型中的算法

众所周知，例如参见 [HKR13，第 3&4 章，定义 3.6。3]，色彩细分中的每个极大单形 $S=\{\zeta_{V_0}(x_{i_0}),\cdots\ \zeta_{V_n}(x_{i_n})\}$都可以与 S^n 的一个图相关联，该图记为 IS_n $\Theta(S)$。我们有 $V(\Theta(S)) = \Pi_n = [0,n]$，并设 $\Theta(\zeta_{V_j}(x_{i_j})) = \mathrm{P}(x_{i_j})$。弧使用点的表示 Φ 来定义，即 $A(\Theta(S)) = \{(i,j) \mid i \neq j, V_i \subseteq V_j\}$。映射 θ 将表示 Θ^{-1}。我们可以将这一表示转换为一种平均算法，称为色彩平均算法，该算法见算法 1。

算法 1 进程 i 的色彩平均算法

```
1 x ← x_i^*;2 循环永远3    SendAll((i, x));4    V ←Receive() // 所有已
接收消息的集合；5    d ←sizeof(V) − 1 // i 接收到的消息，包括其
自身的消息；6    x = (1 − d/(2d+1)) x + Σ_{(j,x_j)∈V, j≠i} (1 + 1/(2d+1)) x_j;
```

执行色彩平均算法中即时图 G 的循环的一轮，进程 i 的状态是 $x_i' = \zeta_{V_i}(x_i^*)$，其中 V_i 是 i 在这一轮中的视图，即它所接收到的 (j, x_j) 的集合；其中 $\Theta(\{\zeta_{V_0}(x_0^*),\cdots\ \zeta_{V_n}(x_n^*)\}) = G$。例如，见图1a，灰色区域的单纯形对应于视图的有序序列$\{x_\bullet\} \subset \{x_\bullet, x_\circ\} \subset \{x_\bullet, x_\circ, x_\bullet\}$，该序列与右上方所示的有向图相关联。对于给定的 i，邻接对应于包含 x_i的最小子集。通过迭代，色彩细分$\mathsf{C}hr^r(S^n)$由色彩平均算法所有可能的 r 轮下的全局状态给出。有限轮次给出了迭代色彩细分（因此得名）。这是一种并不旨在终止的算法（类似于全信息协议）。下面将使用无限运行来定义 IIS_n 上的拓扑。

因此，色彩平均算法是与 $\mathsf{C}hr$ [HKR13] 相关联的全信息协议在几何上的对应形式。特别地，任何算法都可以表示为色彩平均算法，加上一个终止条件和一个以 x 为输入的输出函数。

对于典范的 S^n，这一轮变换实际上适用于 $\mathbb{R}^N$ 中任意维数为 n 的单纯形S。对于 $G \in IS_n$，我们将 $\mu_G(S)$ 记作几何单纯形，它是 S 在即时图 G 下经过一轮色彩平均算法后所得的像。

上一节中的定义大多可视为教科书式内容（如[HKR13]所述），或属于民间共识。据我们所知，色彩平均算法作为

这样一种算法是新的，且此前尚无关于色彩平均算法与迭代标准色彩细分之间联系的完整证明。不过需要指出的是，人们通常实际上是用色彩平均算法来绘制标准色彩细分的。

3.2.2 IIS_n 的一种拓扑

令 $w \in IIS_n, w = G_1G_2\cdots$。对于大小为 r 的 w 的前缀， S 一个维数为 n 的单纯形，我们定义 $geo(w|r)(S) = \mu_{G_r} \circ \mu_{G_{r-1}} \circ \cdots \circ \mu_{G_1}(S)$。最后，我们令 $geo(w) = \lim_{r\to\infty} geo(w|r)(S^n)$。我们将在下一节证明这实际上是收敛的。

我们通过将 $\mathbb{R}^N$的开集 Ω 的逆像 $geo^{-1}(\Omega)$视为开集，定义空间 IIS_n 上的 几何化拓扑 。当一个集合族中的任意并集仍属于该集合族，且该集合族中任意有限个集合的交集仍属于该集合族时，该集合族可以定义一个拓扑。对于满足这些性质的集合族的逆像所构成的集合族，这一点是显然的。

点 x 的一个邻域是包含 x的开集。在拓扑空间中，一对不同的点 x， y 称为不可分离，如果不存在分别包含这两个点的两个不相交邻域。不是单元素集合的原像 $geo^{-1}(x)$是不可分离集。我们将看到，不可分离集总是存在，并且它们对任务可解性起着重要作用。

子集 IIS_n 将继承子空间拓扑，也就是说，对于$\mathcal{M} \subseteq IIS_n$，开集是形如 $geo^{-1}(\Omega) \cap \mathcal{M}$ 的集合，其中 Ω 是 $\mathbb{R}^N$的开集。我们将 $\wr\mathcal{M}\wr = geo(\mathcal{M})$称为$\mathcal{M}$的几何化。

请注意，几何化不应与标准几何实现混淆。在集合层面上，两者相同，但在拓扑层面上并不相同。这是众所周知的，例如参见 [Koz08]。有时，为了强调这种区别，对于单纯形 $S \subset \mathbb{R}^N$，我们也会用 $\wr S\wr$ 代替 $|S|$。 C的几何化记作 $\wr C\wr$，即 C的单形 σ 的凸包 $|\sigma|$ 之并，并赋予来自 $\mathbb{R}^N$的标准拓扑。我们也将这个拓扑空间记作 $\wr C\wr$。

▶ 备注 13. 考虑嵌入在 $\mathbb{R}^N$ 中的输入复形时，几何化拓扑可以应用于所有单形，从而为所谓的协议复形提供一种新的拓扑框架。这可以通过应用色彩平均算法来实现。此处不作详细说明，因为我们不需要借此研究集合一致性。此外，请注意，该构造也适用于任何对应网格收缩细分的模型。

3.2.3 凸性和度量结果

在研究几何化拓扑之前，我们先给出一些关于色彩细分中顶点的度量结果。特别地，我们证明序列 $geo(w|r)(S)$ 收敛于某一点。

下述引理源自 μ_G 变换的凸性。

▶ **引理14**。 令 w a 运行，令 $r, r' \in \mathbb{N}, r < r'$ 则 $|geo(w|r')(S^n)| \subset |geo(w|r)(S^n)|$.

证明。 只考虑一步。我们有 $\frac{1-\frac{d}{2d+1}}{d+1} + d \times \frac{1+\frac{1}{2d+1}}{d+1} = \frac{1-\frac{d}{2d+1}+d+\frac{d}{2d+1}}{d+1} = 1$。因此，色彩平均值的一步操作会在每个进程上产生一个系数非负且总和为 1 的线性组合，因此它是在轮开始时单纯形各点上的重心组合。因此，这是一个凸映射

单纯形。由于凸映射的复合仍是凸映射，且 S^n 是凸集，故由递推可得结果。◀

▶ **引理15。** 存在实数 $0 < K' < K < 1$，使得对于所有 G 中的 IS_n，所有 $p, q \in V(S)$，$p', q' \in V(\mu_G(S))$，使得 $P(p) = P(p')$ 且 $P(q) = P(q')$，我们有

$$K'||p - q|| \leq ||p' - q'|| \leq K||p - q||.$$

证明。 这是 μ_G 变换在 $G \in IS_n$为凸变换的结果。它对应于一个随机矩阵（非负系数且每行系数之和为一），该矩阵是混合的（存在一行不含零系数），因此具有压缩性。参见 例如 [Har98，第 1]，其中给出了任意给定 G 的 IS_n的定义和证明。

那么， K （分别为 K'）是所有 $G \in IS_n$ 中此类界的最大值（分别为最小值）。 ◀

在迭代色彩细分时，我们注意到相应的直径
对应的单形是可收缩的。根据引理 15，我们有

▶ **引理 16。** 设 S 是 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$的一个单纯形，则 $diam(\mu_{G_r} \circ \mu_{G_{r-1}} \circ \cdots \circ \mu_{G_1}(S)) \leq K^r diam(S)$，其中 K 是前一个引理中的常数。

由于单形被 μ_G 函数压缩，$(geo(^w|_r(S))_{r\in\mathbb{N}^*}$ 的等重心序列具有柯西性质，因此该序列收敛于某个点 $x \in \mathbb{R}^N$。由于单形的直径收敛于0，因此可以说单形的极限是点 x。注意，也可以在 $\mathbb{R}^N$ 的凸子集上形式化地定义一个度量，并考虑单形在该空间中的收敛性。

4 几何化等价性

正如稍后将要展示的，几何化对于理解可能的执行集合与分布式任务可解性之间的关系起着至关重要的作用。在本节中，我们将更精确地描述原像集，即 IIS_n 中形如 $geo^{-1}(x)$（对于 $x \in |S^n|$）的子集。特别地，我们将得到不可分离的执行集合的描述。

4.1 定义

我们称两个执行 $w, w' \in IIS_n$ 是 *geo*-等价 的，如果 $geo(w) = geo(w')$。所有满足 $geo(w) = geo(w')$ 的 w' 的集合称为 w 的等价类。由于我们感兴趣的 $\wr IIS_n\wr$ 的拓扑是由标准可分空间 $\mathbb{R}^N$ 通过 geo^{-1} 映射诱导的，因此很容易看出，不可分离集恰好是并非单元素集合的几何等价类。在本节中，我们将描述所有等价类，并证明这些集合可能的大小只有有限种。

我们定义 IS_n 的子集，即集合 $Solo(P)$，它们对应这样的即时图：其中 $P \subset \Pi$ 中的进程不会从 P 之外的进程接收传入消息。我们有$Solo(\Pi) = IS_n$。

▶ **定义 17.** 在复形 $Chr(S^n)$中， $P \subset \Pi$, $Solo(P)$ 是单形集$T \in Chr(S^n)$，满足 $\forall (p, q) \in A(\Theta(T))$ $q \in P \Rightarrow p \in P$。

我们用$\mathcal{K}_\Pi$ 表示在 Π上完备的即时图。

当且仅当 $w \in Solo(P)^\omega$，且对于所有 $p,q \in P$,$\forall r \in \mathbb{N}$，我们有 $p \overset{r}{\rightsquigarrow} q$ 时，执行 w 称为对 P, $w \in Fair(P)$ 公平。对于 P 而言，公平性意味着 P 中的进程只受 P 中的进程影响，并且任何进程都会无限多次地影响其他进程。我们还有一个等价且可构造的定义：

▶ **命题 18**。设 $w \in Solo(P)^\omega$。执行 w 是 $Fair$ 当且仅当 w 在 $\bigcup_{Q\neq\emptyset,Q\subsetneq P} Solo(Q)^\omega$ 中没有后缀。

证明。假设我们有 s 的 w 后缀，位于 $Solo(Q)^\omega$ 中，且满足 $Q \subsetneq P$。令 $p \in P\setminus Q$，并令 r 为该后缀的起始索引。那么 $\forall q \in Q$，根据 P的公平性定义，我们必有 $p \overset{r}{\rightsquigarrow} q$。$_w$记 q_0 为 Q 中第一个在某个时刻 $t \geq r$受到 p 因果影响的元素。因此， q_0在时刻 t从某个 $p' \in \Pi$接收了一条消息， $p' \neq q_0$。由于 $s \in Solo(Q)^\omega$，这意味着 q_0 只能接收来自 Q中的进程的消息。因此 $p' \in Q$，且 p' 在时刻 $t-1$受到了 p 的影响。这与 q_0的极小性矛盾。因此 w不在 $Fair(P)$中。

反过来，假设 $w \notin Fair(P)$。那么 $\exists p,\ q \in P,\ \exists s,\ \forall r \geq s, \neg p \overset{r}{\underset{w}{\rightsquigarrow}} q$。我们将 Q定义为因果影响 q （对所有 $r \geq s$）的进程集合。由此可得 $p \notin Q$，因此 $Q \subsetneq P$。我们记 s_0为这样的时刻：此时 $\Pi\setminus Q$ 中没有进程会影响 Q 中的进程。根据构造，第 s_0 步的后缀属于 $Solo(Q)^\omega$。◀

4.2 几何化的初步结果

我们首先给出一系列关于几何化的结果。引理 14 可直接推出以下推论。

▶ **推论 19**。设 w 是 IIS_n 中的一次运行，则 $\forall r \in \mathbb{N}$, $geo(w) \in |geo(^{w}|_r)(S^n)|$.

▶ **命题 20**。设 w, w' 是 IIS_n 中两次 *geo*-等价的运行，则 $\forall r \in \mathbb{N}$, $geo(^{w}|_r)(S^n) \cap geo(w'_{|r})(S^n) \neq \emptyset$。

证明。几何化 $|geo(^{w}|_r)(S^n)|$ 和 $|geo(w'_{|r})(S^n)|$ 的交集根据前面的推论至少包含 $geo(w)$。由于单形 $geo(^{w}|_r)(S^n)$ 和 $geo(w'_{|r})(S^n)$ 属于复形 $Chr^r(S^n)$，它们也作为单形相交。◀

▶**命题 21**。设 S 为色彩细分 $ChrS^n$ 中的一个极大单形，且不属于$\theta(K(\Pi))$。那么存在 $P \subsetneq \Pi$，使得 $\Theta(S) \in Solo(P)$。

反过来，我们可以更精确地描述 $Solo(P)$。我们用 $\delta(S^n,\ P)$ 表示 S^n 中对应于 $P \subset \Pi$ 的子单纯形。这是 P 中相对于 S^n 的边界，并且有$\bigcup_{P\subsetneq\Pi} \delta(S^n,\ P) = \bigcup_{p\in\Pi} \delta(S^n, \pi\setminus p) = \delta(S^n)$。

▶ **命题 22** (Chr 的边界为 $Solo$)。设 P 是 Π. 的子集。那么 $Solo(P) = \{S \mid S$ 是$Chr(S^n)$ $|S| \cap |\delta(S^n, P)| \neq \emptyset\}$。

证明。记 q 使得 $\Pi = P \cup \{q\}$。那么根据构造， $Solo(P)$ 恰好对应于如下单形：其中 P 中的进程未从 q 接收到任何消息，即与边界相交的单纯形 $\delta(S^n, P)$。◀

对于给定大小 s 的 P， $Solo$ 集彼此不相交，然而这并不构成Chr的一个划分。最后，通过迭代前一个命题， S^n 的边界由$Solo(P)^\omega$描述。

▶ **命题 23.** 设 P 是 Π 的子集。我们有 $o Solo(P)^\omega o = |\delta(S^n, P)|$.

现在我们可以陈述将几何公平执行与相应单形联系起来的主要结果：在公平执行中，由凸性包含的相应单形最终必须严格包含于内部。

▶ **命题 24 (** $Fair$的几何解释**).** 设 w 是一个关于 Π的 $Fair$ 执行，则 $\forall s \in \mathbb{N}, \exists r > s \in \mathbb{N}$，使得 $\delta(geo(^{w}|_{s})(S)) \cap geo(^{w}|_{r})(S) = \emptyset$.

证明。令 $s \in \mathbb{N}$，以及一次执行 w。我们记作 $T = geo(^{w}|_{s}$。考虑一个进程 $p \in \Pi$，对于所有进程 $q \neq p$ 我们有 $p \overset{s}{\rightsquigarrow} q$。由于 w 在 Π中是公平的，我们可以考虑 $r > s$ 时间 w，此时 p 从轮 s 开始影响所有 q。在此步骤中，对于所有 $q \neq p$，相对于颜色为 p 的 $geo(^{w}|_{r}(S)$ 的顶点，颜色为 q 的 $geo(^{w}|_{r}(S)$的顶点的重心坐标严格为正。这意味着 $geo(^{w}|_{r}(S)$不与 $\delta(T, \Pi \setminus p)$ 相交。

由于 w 在 Π中是公平的，我们可以对任意 $p \in \Pi$重复这一论证。我们将 r^{*}记为最大的此类 r并且由于 $\bigcup_{p \in \Pi} \delta(T, \Pi \setminus p) = \delta(T)$，我们有 $\delta(geo(^{w}|_{s})(S)) \cap geo(^{w}|_{r^{*}})(S) = \emptyset$. ◀

4.3 几何等价的刻画

我们首先给出关于几何等价类大小的简单但实用的充分条件。

▶ **命题 25** ($Fair(\Pi)$ 是可分的)。令 $w \in IIS_{n}$，表示 Σ w 的几何类。若 w 在 Π 上是 $Fair$，则 $\#\Sigma = 1$。

证明。令 $w' \in \Sigma$。我们将证明 w' 共享 w的所有前缀。令 $r \in \mathbb{N}$。由命题 24 和引理 14 可得，$geo(w)$ 不属于 $geo(^{w}|_{r})(S)$ 的边界，也不属于 $geo(w'_{|r})(S)$ 的边界。假设 w 和 w' 没有相同的大小为 r 的前缀，即 $geo(^{w}|_{r})(S) \neq geo(w'_{|r})(S)$。由命题 20 $geo(^{w}|_{r})(S)$，$geo(w'_{|r})(S)$ 必须相交（作为单形），且由于它们不同，只能在边界上相交。这意味着 $geo(w)$ 会属于边界，矛盾。

因此，它们具有相同的前缀和 $w' = w$。 ◀

▶ **命题 26** （无限基数）。设 $n \geq 2$。设 w, w' 是两个不同的执行，使得$geo(w) = geo(w')$，并且存在 $s \in \mathbb{N}$ 使得 $\forall r > s \exists T geo(^{w}|_{r})(S) \cap geo(w'_{|r})(S) = T$，其中 T 是一个维数为 $k \leq n-2$ 的单纯形。那么，w 的几何等价类大小为无限。

证明。设 w, w' 是两个执行，满足 $geo(w) = geo(w')$，且 $\forall r > s$，$geo(^{w}|_{r})(S) \cap geo(w'_{|r})(S) = T$，其中 T 的维数为 $k \leq n-2$。记 P 为 T 的颜色。由于 $k \leq n-2$，我们至少有 $p_{1} \neq p_{2} \in \Pi \setminus P$。$w$ 中长度为 s 的后缀属于 $Solo(P)$。

因此，对于 P 中的进程，在运行于 w 或 w'时，无法根据 $\{p_{1}, p_{2}\}$ 区分关于诱导子图的这 3 种情况，在瞬时图中：$p_{1} \leftarrow p_{2}$、$p_{1} \leftrightarrow p_{2}$ 和 $p_{1} \rightarrow p_{2}$。

因此 $\forall r > s$，我们有 3种可能的方式来完成进程在 P中于 $G \in Solo(P)$所诱导的子图上正在发生的情况。因此，我们有无穷多个不同的执行，w 的 geo-类的基数是无限的。◀

让我们考虑剩余的情况。令 $w \in IIS_{n}$，表示 Σ 的 w 几何类。

▶ **命题 27 (** S^{n} 的边界可分)。若 w 是 $Fair$ 在 $\Pi \setminus \{p\}$ 对某个 $p \in \Pi$成立，则 $\#\Sigma = 1$。

XX：14 面向子迭代即时快照消息对手的几何化拓扑及其在集合一致性中的应用

证明。 记 $Q = \Pi \setminus \{p\}$。我们将命题 25 应用于 $n-1$ 至 w' 的限制 w 到进程集合 Q (根据 $Fair$ 的定义，这是可行的： Q 中没有进程从 Q 之外接收消息）。由于 w' 满足命题 25 的条件（根据 Fair 的定义），这意味着 w' 的 geo-类大小为 1。

由于将限制在 Q 上的执行补全为 $Solo$ 中的一个执行（添加 $(q,\ p)\ \forall q \in Q$）只有一种唯一方式，因此等价类中只有 w。◀

字 w 的后缀若不等于 w，则称其为严格后缀。

▶ **命题 28。** 若 w 在某个 $p \in \Pi$ 上只有一个严格后缀，且该后缀是 $Fair$ 于 $\Pi \setminus \{p\}$，则$\#\Sigma = 2$;

证明。 我们记 $Q = \Pi \setminus \{p\}$。我们可以写成 $w = uav$ 其中 $u \in IS_n^*$， $a \in IS_n$ 且 v 在 Q 上公平， av 但并非如此。我们可以选择 u 使得 u 具有最短长度。

我们考虑 w' 使得 $geo(w') = geo(w)$。令 r 为 ua的长度。我们将 T 表示为具有颜色 Q的 $geo(ua)(S^n)$的面。由于 v 对 Q是公平的，我们可以将命题24中 v 对 Q 的限制应用于 $v_{|Q}$ 。因此， $geo(w)$不在 T 的边界上，这意味着根据命题20，要么 $geo(w'_{|r})(S^n) = geo(w_{|r})(S^n)$，要么 $geo(w'_{|r})(S^n) \cap geo(w_{|r})(S^n) = T$。

在这两种情况下，我们都可以将命题25 应用于 v' w 在 Q上的限制。这意味着在 Q中只有一个受限执行。由于完成到 p只有一种方式，因此该类中的元素数量与在第 r 轮包含 T 的单形数量相同。由于我们有一个细分，因此恰好有两个单形共享面 T。

在第一种情况下，这意味着 $w'_{|r} = ua$ 和 $w = w'$。

在第二种情况下，对于某个 $b \neq a$，我们有 $w'_{|r} = ub$。我们指出，如果 $w'_{|r-1} \neq u$，这将与 u 的极小性矛盾。事实上，长度为 $r-1$ 的前缀彼此不同，这意味着 av 对于 Q是公平的。◀

利用前面的命题，并注意到对于任意 w，都存在 P，使得 w在 $Fair(P)$ 中有一个后缀，我们现在可以给出关于几何等价类完整分类的主要结果。设 $n \in \mathbb{N}$，且 Σ 是 S^n上的一个几何等价类。那么 Σ 可能的基数恰好有 3 种（当 $n = 1$时只有 2 种，即[GP20]的情形）：

▶ **定理 29.** 设 $w \in IIS_n$，记 Σ 为 w的几何类。

C_1 :如果 w 是 $Fair$ 在 Π 上或在 $\Pi \setminus \{p\}$上对于某个 $p \in \Pi$，那么$\#\Sigma = 1$;C_2 : w 只有一个严格后缀，该后缀对于某个 $p \in \Pi$ 是在 $\Pi \setminus \{p\}$上 $Fair$，那么 $\#\Sigma = 2$; C_∞ : 否则 Σ是无限的。

5 集合一致性问题

对于所有 n，集合一致问题 由以下性质 [Lyn96]定义。给定 $[0, n]$ 中的初始 $init$ 值，每个进程输出一个值，使得

一致性 输出值集合的大小至多为 n，**有效性** 输出值是某些进程的初始值，**终止性** 所有进程都终止。

在本部分中，我们将考虑子IIS 消息对手 $\mathcal{M}$，即$\mathcal{M} \subseteq IIS_n$。众所周知，在 IIS_n 上无法解决集合一致性问题，我们证明如下刻画。

▶ **定理 30。** 设 $M \subset IIS_n$。当且仅当 $oMo \neq |S^n|$ 时，才能在 M 上解决集合一致性。

5.1 不可能性结果

在证明不可能性时，我们将证明一个关于非静默算法的更强版本。如果一个算法永远发送消息，就称其为非静默 算法。这里，这意味着进程可能已经决定了一个值，但仍在参与算法。

▶ **定理 31.** 设 $M \subset IIS_n$。如果 $oMo = oIIS_no = |S^n|$，那么即使使用非静默算法，也无法在 M 上解决集合一致性。

我们将需要组合拓扑中的以下定义。

▶ **定义 32** (Sperner 标记). 考虑一个单纯复形 C，它是一个色彩单纯形 (S, χ)的细分。一个标记 $\lambda: V(C) \longrightarrow \Pi$ 是 Sperner 标记，如果对于所有$x \in V(C)$，对于所有 $\sigma \subset S$，都有 $x \in |\sigma| \Rightarrow \lambda(x) \in \chi(\sigma)$。

▶ **引理 33** （Sperner 引理 [Spe28]）。设单纯复形 C 是色彩单纯形（S, χ）的一个细分，并带有 *Sperner* 标记 λ。那么存在 $\sigma \in C$，使得λ（σ） $= \Pi$.

使用全部 Π 种颜色进行标记的单纯形 σ 称为全色。

定理 31 的证明。反设存在一个非静默算法 $\mathcal{A}$ （以全信息协议形式）解决 $\mathcal{M}$上的集合一致性问题。我们在初始输入 $init$（i） $= i$上运行该算法。我们将全信息协议转换为色彩平均值的非静默形式： i 的初始值为 x_i^*；给出决策值后，我们仍会永远计算并发送色彩平均值。我们还可以假设算法采用“规范化”版本：当进程从邻居处收到决策值时，它将立即决定采用该值。由于集合一致性是无色任务，这种规范化不会影响算法的正确性。

该证明将使用 Sperner 引理，并以算法最终决定的值作为标记。不过，不能直接对“在 $\mathcal{M}$ 下的完整细分 ”（我们不会对此作出定义）使用 Sperner 引理，因为这种细分可能是无限的。下面的证明将使用柯尼希引理来得到一个等价命题。

给定 $t \geq 0$，我们在初始值为 $init(i) = i$ 的算法下考虑 $Chr^t(S^n)$。对于任意顶点，我们定义如下标记 λ_t：如果进程 i 在时间 t 时尚未终止，且处于状态 $x \in V(Chr^t(S^n))$，则 Sperner 标记 $\lambda_t(x)$ 为 $= i$；否则，它就是已决定的值。由于已决定的值仅取决于局部状态，因此顶点在时间 t 的标记与导向该顶点的执行无关。接下来要证明的是，存在一个不属于 $\mathcal{M}$ 的完整几何等价类。

根据完整性性质，我们有， S^n 上由进程 $i_1, \ldots, i_n$构成的一个面所决定的值，即 $Solo(i_1, \ldots, i_n)^\omega$，取自 $i_1, \ldots, i_n$。根据命题 23，对于任意 t，因此该标记定义了 S 的一个（色）细分的 Sperner 标记。

我们考虑集合 $\mathcal{S}$ 中所有维数为 n 的单形 S，它们属于 $Chr^t(S^n)$，对所有 t 而言。对于给定的 t，根据Sperner 引理，至少存在一个 $Chr^t(S^n)$，中的单形是全色的。因此，在 $\mathcal{S}$ 中存在无限多个全色的单形 S。现在我们考虑$\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$，即由满足以下条件的单形 $T \in \mathcal{S}$ 组成的集合：存在无限多个全彩单纯形 S 使得 $|S| \subset |T|$。注意， T 不一定是全色的。由于对于给定的 t， $Chr^t(S^n)$ 中的单形数量是有限的，因此 $Chr^t(S^n)$ 中至少存在一个单形属于 $\mathcal{T}$。因此，集合 $\mathcal{T}$ 是无限的。

我们在$\mathcal{T}$ 上构建一个有根树结构：根是 S^n （确实，它属于$\mathcal{T}$），当 $T' \in Chr(T)$ 时，T 与 T' 之间的父子关系被定义。我们有一个无限

有限分支树。根据柯尼希引理，我们有一条从根出发的无限简单路径。我们将 T_t 称为该路径上层级为 t 的顶点。我们有 $|T_{t+1}| \subset |T_t|$，并且（T_t）$_{t\in\mathbb{N}}$收敛到某个 $y \in |S^n|$（与第3.2.3节末尾的论证相同）。对应于 T_t 的递增前缀定义了一次执行 w，属于 IIS_n。

现在我们将考虑两种不同的情况，判别依据不是 $w \in \mathcal{M}$ 是否成立，而是$\mathcal{A}$ 在执行 w 中的结果。

对于第一种情况，假设算法$\mathcal{A}$ 在运行 w 中的某个时刻 t_0 已经最终对所有进程作出决定。由于可能存在 $w \notin \mathcal{M}$，我们还不能得出结论。但由于所有进程都已作出决定，它们在后续步骤中不会改变其标签。根据定义，$T_{t_0} = geo(^{w|_{t_0}}(S^n)$ 包含无限多个泛色单形，也就是说，至少包含一个。因此，单纯形 $geo(^{w|_{t_0}}(S^n)$ 是泛色的。由此，任何以前缀 $^{w|_{t_0}}$ 开始的运行都不可能属于$\mathcal{M}$，因为$\mathcal{A}$ 在$\mathcal{M}$上解决了集合一致性问题。因此，$w' = w_{|t_0}\mathcal{K}_{\Pi}^{\omega}$（其中$\mathcal{K}_{\Pi}$ 是完全图）是一个不属于$\mathcal{M}$的公平执行。它的整个几何等价类是单元素集，也不属于$\mathcal{M}$。

第二种情况是：算法 $\mathcal{A}$ 在运行 w 中最终并未让所有进程作出决定。因此 $w \notin \mathcal{M}$。现在我们证明，w' 的几何类中的所有元素 w 也不属于 $\mathcal{M}$。反之，假设 $\mathcal{A}$ 在 w' 上终止。根据命题20，在任意 t，与 $w'_{|t}$ 对应的单纯形都会与 T_t 相交于一个维数更小的单纯形，且该单纯形的几何化包含 y。考虑 t_0，使得在这一轮中执行已对 w' 作出决定。现在考虑 T_{t_0+1}，它与 $Chr^{t_0}(S^n)$ 中对应于 w' 的已决定单纯形相交，这意味着与交集对应的进程在 $w'(t_0+1)$ 和 $w(t_0+1)$ 中都是独行进程。当一个进程不属于该轮的独行进程集合时，它会接收这些进程的全部值。因此，根据算法$\mathcal{A}$的规范化性质，这意味着在 T_{t_0+1} 中，所有进程都已作出决定。这与 $\mathcal{A}$ 在运行w中未让所有进程作出决定这一事实矛盾。◀

这个不可能性结果意味着，存在许多 IIS_n 的真子集 $\mathcal{M}$，在其中无法解决集合一致性问题，包括 $IIS_n \setminus \mathcal{M}$ 为无限大小的情况。

5.2 用于集合一致性的算法

在本节中，我们考虑形如 $IIS_n \setminus geo^{-1}(y)$ 的消息对手$\mathcal{M}$，其中 $y \in |S^n|$ 是给定的。我们注意到 $w \in IIS_n$，使得 $geo(w) = y$。我们有 $w \notin \mathcal{M}$。换句话说，$\mathcal{M} = IIS_n \setminus \mathcal{C}$，其中 $\mathcal{C} = geo^{-1}(geo(w))$是 w 的等价类。我们还将 $\sigma_y(r)$ 记作单纯形 $geo(^{w|_r})(S^n)$。

5.2.1 从 Sperner 引理到集合一致性算法

请注意，时间 r 的协议复形正好是 $Chr^r(S^n)$，对于这样的$\mathcal{M}$，有限时间内不会有洞“出现”。根据 Sperner 引理，S^n 的细分的任何Sperner标记都至少包含一个全色单纯形。为了解决集合一致性，算法2 的思路是尝试将 $Chr^t(S^n)$ 中那个全色的、棘手但不可避免的单纯形限制在 $\sigma_y(r)$ 内。由于 w 的几何类不在 $\mathcal{M}$中，任何执行最终都会偏离 $\sigma_y(r)$，并以一个非全色单纯形结束。现在我们定义标准色彩细分的Sperner 标记的一个特殊情形，该情形恰好允许一个给定的单纯形为全色。

我们考虑一般的带颜色单纯形 (S, χ)，其中 $S = (x_0, \ldots, x_n)$，且着色函数为 χ，它可能与 $\mathcal{P}$ 不同。我们考虑复形 $Chr(S)$ 的标记。

算法 2 算法$\mathcal{A}_w$ 进程 i。

$x \leftarrow x_i^*$; $r \leftarrow 0$; **循环** 当 $x \in V(geo(^{w}|_{r})(S^n)$

  $r \leftarrow r+1$; $Send((i, x))$;

  $V \leftarrow$Receive() // 所有已接收消息的集合;

  $d \leftarrow sizeof(V) - 1$ // i 接收 $d+1$ 条消息;

  $x = \frac{1-\frac{d}{2d+1}}{d+1} x + \sum_{(j,\ x_j)\in V,\ j\neq i} \frac{1+\frac{1}{2d+1}}{d+1} x_j$;

输出: $\Psi_w(r)(x)$;

▶ **定义34**。 令 $\tau \in Chr(S,\chi)$。 f: $V(Chr(S,\chi)) \longrightarrow \Pi$ 是一个 Sperner τ–全标记，当且仅当: f 是 (S,χ) 上的 *Sperner* 标记；对于所有单纯形 $\sigma \in Chr(S)$, $f(\sigma) = \Pi$ 当且仅当$\sigma = \tau$。

▶ **命题35**。 设 τ是 $Chr(S,\chi)$ 的一个极大单形，则存在一个 τ–全标记 λ，其定义在 $Chr(S,\chi)$ 上。

这一关键命题将在下一节证明。将 $\lambda_\tau(S,\chi)$ 记作 $Chr(S,\chi)$ 的一个此类斯佩纳τ–标记。

在陈述算法之前，我们先说明如何为 $Chr^r(S^n)$ 构造一个泛标记序列。令 $r \in \mathbb{N}$，我们将 $\Psi_w(r)$ 记为由以下递推定义的标记。

直观地说，这就是如下标记。在 $Chr^r(S^n)$ 中，我们有$\sigma_y(r)$，它是全色的，其余单形至多使用 n 种颜色。在 $Chr^{r+1}(S^n)$ 中，我们将不属于 $\sigma_y(r)$ 细分的顶点标记为步骤 r 中使用的标记。对于来自 $Chr\sigma_y(r)$ 的顶点，我们使用 $\lambda_{\theta(w(r+1))}$ 与 $\theta(w(r+1))$ 相关联的 Sperner τ–全色标记，来补全标记，使给定单形至多使用 n 种颜色，但在 $\sigma_y(r)$ 处除外。为简化记号，我们也将 λ_G 标记记为 $\lambda_{\theta(G)}$。当然，我们应用 $\lambda_{w(r+1)}$ 时，将来自 $\Psi_w(r)$ 的颜色作为输入（角点）颜色。这样，在 $\sigma_y(r)$ 的邻点上，标记是相容的。

我们将 $\gamma_r(x)$ 称为 $x \in V(Chr^{r+1}(S^n))$的 r 级前驱，即 x 所起源的 $V(Chr^r(S^n))$ 中的顶点。

▶ **定义 36**。 我们定义 $\Psi_w(1)(x) = \lambda_{w(1)}(S^n,P)(x)$ 对于所有 $x \in V(Chr^r(S^n))$，以及对于$r \in \mathbb{N}^*$

$$\Psi_w(r+1)(p) = \begin{array}{l} \Psi_w(r)(\gamma_r(x)) \text{ if } x \notin |geo(w_{|r})(S^n)| \\ \lambda_{w(r+1)}(\Psi_w(r)(\sigma_y(r))(x) \text{ if } x \in |geo(w_{|r})(S^n)| \end{array}$$

▶ **命题 37.** 对所有 r, $\Psi_w(r)$ 是一个 *Sperner* τ–*pan*标记，定义在 $Chr^r(S^n)$ 上，对于 $\sigma_y(r)$。

证明。证明通过递推完成。情形 $r = 1$ 是命题 35。假设 $\Psi_w(r)$ 是一个 Sperner $\sigma_y(r)$–泛标记$Chr^r(S^n)$。

现在考虑 $Chr^{r+1}(S^n)$ 中的 $\Psi_w(r+1)$。根据构造和递推假设，全彩单纯形只能位于 $|\sigma_y(r)|$ 中。由于 $\lambda_{w(r+1)}$ 是 Sperner全标记，且 σ_y 的角点颜色取自 $\Psi_w(r)$，因此 $\sigma_y(r)$ 是 $Chr^{r+1}(S^n)$ 中唯一的全彩单纯形。◀

现在证明 $\mathcal{A}_w$ （算法 2 中给出）的正确性。考虑一次执行$v \in \mathcal{M}$。关于终止性：由于 w 的几何类中的元素不在 $\mathcal{M}$ 中，因此存在某一轮 r，使得对于所有 $w' \in geo^{-1}$， $v_{|r} \neq w'_{|r}$ ($geo(w)$，即 第 2 行的条件对于所有进程均为假，算法终止。关于一致性：在第 r 轮终止时，i 不在 $\sigma_y(r)$ 中，根据循环条件，又由于 $\Psi_w(r)$ 仅在 $\sigma_y(r)$ 上是全彩的，因此决定值的数量小于 n。完整性源于 $\Psi_w(r)$ 是一个 Sperner 标记。

5.2.2 标准色彩细分的 Sperner 全标记

本节中， n 固定。我们展示如何构造标准色彩细分的 Sperner 全标记。我们考虑一般的有色单纯形（S， χ），其中 $S = (x_0, \ldots\ldots, x_n)$，且着色函数为 χ，它可能不同于 $\mathcal{P}$。我们考虑有色复形 $Chr(S, \chi)$ 的标记。

我们给出关于 Sperner 标记的以下组合结果。

▶ **定理 38**。设 τ 是 $Chr(S, \chi)$ 的一个极大单纯形，则存在 τ–全标记λ，使得 $Chr(S, \chi)$。

我们先给出一些定义，以便证明上述定理。对于 $Chr(S)$ 的任意单纯形 σ，都可以关联一个定义在 Π 上的预序 $\succ$，它对应于关联图 $\Theta(\sigma)$：当 $(i, j) \in A(\Theta(\sigma))$ 时， $i \succ j$。我们将 $\Theta(\sigma)$ 的等价类称为由 $i \succ j \wedge j \succ i$ 定义的等价关系的等价类。实际上，它对应于有向图 $\Theta(\sigma)$ 的强连通分量。

我们定义点的进程视图 。它是标准色彩细分中顶点 (i, V) 的视图 V 中各点的颜色。

▶ **定义 39** (进程视图)。 点 $x = (\chi(x)\ V) \in V(Chr(S, \chi))$ 的进程视图 定义为： $V_x = \{\chi(y) \mid y \in V\}$。

对于 $\tau \in Chr(S, \chi)$，我们还定义进程 p 相对于 τ 的进程视图，记作V_p^τ。它是 τ 中颜色为 p 的点的进程视图。它与预序 $\succ$ 相关联：我们有 $V_p^\tau = \{q \mid q \succ p\}$。

令 τ 是 $Chr(S)$的一个固定的极大单形。我们展示如何构造一个 τ–泛标记。我们选择一个置换 φ on Π，使其在 $\Theta(\tau)$的等价类上定义循环置换。令 $p \in \Pi$，给定 $W \subset V_p^\tau$使得 $p \in W$，我们将 $min^*(p, W)$记为 $= \min\{i \in \mathbb{N}^* \mid \varphi^i(p) \in W\}$。注意，由于 φ 是一个置换，存在 $j > 0$ 使得$\varphi^j(p) = p$，并且由于 $p \in W$，最小值是在一个非空集合上取得的。最后我们设$\varphi^*(p, W) = \varphi^{min^*(p,W)}(p)$。这是 φ中 p的轨道内的 W的第一个点。

▶ **定义 40.** 我们定义 $\lambda_\tau : V(Chr(S)) \to V(S)$，对于 $x \in V(Chr(S))$，我们设

$$\lambda_\tau(x) = \begin{cases} q & \text{if } \exists q \in V_x \text{ and } q \notin V^\tau_{\chi(x)} \\ \varphi^*(\chi(x), V_x \cap V^\tau_{\chi(x)}) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

直观地说，对于 $Chr(S)$ 中一个视图为 V 的给定顶点，如果该进程在 τ 中看到另一个进程 q，那么它就由这个 q 标记；否则，它将选择 φ 的循环轨道中位于其视图内的第一个进程。

▶ **命题 41.** 标记 λ_τ 是一个 τ–泛标记。

证明。首先我们证明它确实是一个Sperner 标记。在定义的两种情况下，$\lambda_\tau(x)$ 属于 V_x。对于 $x \in V(Chr(S))$，对于 $\sigma \subset S$， $x \in |\sigma|$，其中 σ 对此取最小值

性质，这意味着 x 的表示为 $\Phi(x) = (i, \sigma)$，其中存在某个 x_i，使得 $x_i \in V(\sigma)$ 且 $\chi(x_i) = i$。

现在我们证明唯一的全彩单纯形是 τ。根据构造，由于在此情况下 $x \in V(\tau)$,$\varphi^*(\chi(x) V_x) = \varphi(\chi(x))_{(x)}$，因此 τ 通过 λ_τ 是全彩的。

现在我们考虑 $\sigma \neq \tau$。我们有两种可能的情况：

1. $\exists x \in V(\sigma)\ q \in V_x, q \notin V^\tau_{\chi(x)}$,
2. $\forall x \in V(\sigma)\ V_x \subseteq V^\tau_{\chi(x)}$.

我们从第一种情况开始，记 C 为满足以下条件的最高类：对于 $\succ$ 中的 σ，存在 C 中的 x 满足子句 (1)。我们证明 $\#\lambda_\tau(C) \cap C < \#C$，其中 # 表示集合的基数。根据 C 的定义，$\lambda_\tau^{-1}(C) \subseteq C$。由于 $\lambda_\tau(x) \notin C$，这意味着 $\#\lambda_\tau(C) \cap C \neq \#C$。根据假设，所有高于 C 的类 C' 都选取 C' 中的颜色，因此 σ 在 λ_τ 下不是全色的。

现在，我们假设不存在情形（1），这意味着 $\forall x \in V(\sigma)\ \lambda_\tau(x) = \varphi^*(\chi(x)\ V_x)$。由于 $\sigma \neq \tau$，存在 $x \in V(\sigma) V_x \subsetneq V^\tau_{\chi(x)}$。我们为 $\succ$ 在 τ中选择满足条件的最小 x。我们考虑 C_x 在 σ中所属的 x 类。我们证明 $\#\lambda_\tau(C_x) < \#C_x$。

我们将 $\chi(x)$ 在 τ 中的颜色类记为 C^τ_x。首先我们证明 $C_x \subseteq C^\tau_x$。事实上，假设存在 $y \in C_x$ 使得 $y \notin C^\tau_x$。由于同一类中元素的视图相同，这意味着 $\chi(x) \in V_y$，并且 y 将满足性质 1。这与我们正在考虑的情形矛盾。对于所有 $y \in C_x$，结论均成立。

现在我们证明 $C_x \subsetneq C^\tau_x$。我们有 $V_x \subsetneq V^\tau_{\chi(x)}$。令 $y \in V^\tau_{\chi(x)} \setminus V_x$。若 $y \notin C^\tau_x$，由同样的前述论证可得矛盾。因此 $y \in C^\tau_x$，进而 $C_x \subsetneq C^\tau_x$。

我们记作 $p = \varphi^*(\chi(x)\ C^\tau_x \setminus C_x)$。我们注意到 $p' = \varphi^{-1}(p)$。根据$\varphi^*(., C^\tau_x \setminus C_x)$的定义，我们有 $p' \in C_x$，因此 $C_{\chi^{-1}_{|\sigma}(p')} = C_x$。现在我们设 $p'' = \varphi^*(p', C_x)$。颜色p'' 在该标记中至少有两个前驱：根据构造，p'（因为对于 $\succ$，x 被选为最低的，所以 $V_{\chi^{-1}_{|\sigma}(p')} = V^\tau_{p'}$），以及 $p''' = \varphi^{-1}(p'')$，后者不是 p'，因为 $\varphi(p') = p \notin C_x$。

因此 $\#\lambda_\tau(\chi^{-1}_{|\sigma}(V^\tau_x)) < \#V^\tau_x$，且 $\lambda_\tau(\sigma) \neq \Pi$。 ◀

5.2.3 下界

可以利用不可能性结果证明以下下界。因此，对于公平的 w，算法 2 是最优的。

▶**定理 42**。 设 A 是一个在 $M = IIS_n|geo^{-1}(geo(w))$上解决集合一致性的算法，且满足 $w \in IIS_n$。那么，对于任意执行 $v, t \in \mathbb{N}$，若 $v_{|t} = w'_{|t}$ 对于某个 $w' \in geo^{-1}(geo(w))$成立，则 A 尚未在 t 终止。

证明。 假设 $\mathcal{A}$ 已在 t 上为所有进程作出决定，其中 $v_{|t} = w'_{|t}$ 对某个 $w' \in geo^{-1}(geo(w))$ 成立。因此 $\mathcal{A}$ 在 w' 上解决了集合一致性。这与定理 31 矛盾，因为 $\wr\mathcal{M} \cup \{w'\}\wr = |S^n|$。 ◀

6 结论与开放问题

在本文中，我们介绍了如何直接在 IIS_n 迭代即时快照消息对手的执行集合上构造一种拓扑。尽管由于存在不可分点，这并非通常所见的简单教科书式拓扑，但我们给出的刻画使我们能够全面理解它。作为首个应用，我们首次得以刻画 IIS_n 集合一致性可解的一般子集。我们还相信，这种新方法也可以成功应用于其他分布式任务和分布式模型。

另一个有趣的开放问题是，将几何化拓扑与 [NSW19] 中定义的基于知识的拓扑进行比较。

参考文献

AG13 Yehuda Afek和 Eli Gafni。从同步到异步，第225–239页。计算机科学讲义第7730卷。SpringerBerlin Heidelberg，2013年。BG93a E.Borowsky 和 E.Gafni。即时原子快照和快速重命名。载于：第12届年度ACM分布式计算原理研讨会论文集，1993年。BG93bElizabethBorowsky 和 Eli Gafni。t-容错异步计算的广义FLP不可能性结果。载于 STOC '93：第二十五届年度ACM计算理论研讨会论文集，第91–100页，美国纽约州纽约市，1993年。ACM出版社。BG97ElizabethBorowsky和Eli Gafni。无等待计算的一个简单的基于算法推理的刻画（扩展摘要）。载于：第十六届年度ACM分布式计算原理研讨会论文集，PODC '97，第189–198页。ACM，1997年。CBS09 Bernadette Charron-Bost和André Schiper。Heard-of模型：具有良性故障的分布式系统中的计算。《分布式计算》，22(1)：49–71，2009年。CFN15 Bernadette Charron-Bost、MatthiasFügger 和 Thomas Nowak。高度动态网络中的近似共识：平均算法的作用。载于ICALP（2），计算机科学讲义第9135卷，第528–539页。Springer，2015年。CFQS12 Arnaud Casteigts、Paola Flocchini、WalterQuattrociocchi和NicolaSantoro。时变图与动态网络。《国际并行、涌现与分布式系统期刊》，27(5)：387–408，2012年。FNS21 Matthias Függer、ThomasNowak 和 ManfredSchwarz。渐近共识与近似共识的紧界。《ACM期刊》，68(6)：46:1–46:35，2021年。GKM14 Eli Gafni、PetrKuznetsov和 Ciprian Manolescu。广义异步可计算性定理。载于 MagnúsM.Halldórsson和 Shlomi Dolev 编，ACM分布式计算原理研讨会，PODC'14，法国巴黎，2014年7月15–18日，第222–231页。ACM，2014年。GP20 Emmanuel Godard和 Eloi Perdereau。回到协调攻击问题。《数学结构与计算机科学》，30(10)：1089–1113，2020年。Har98Darald J. Hartfiel。马尔可夫集合链中的行为。载于 Darald J. Hartfiel 编，《马尔可夫集合链》，数学讲义，第91–113页。Springer，柏林、海德堡，1998年。HKR13 Maurice Herlihy、Dmitry N. Kozlov和 Sergio Rajsbaum。通过组合拓扑研究分布式计算。Morgan Kaufmann，2013年。HRR12 Maurice Herlihy、Sergio Rajsbaum 和 Michel Raynal。分布式计算中的可计算性：教程。SIGACT News，43(3)：88–110，2012年。HS99Maurice Herlihy 和 Nir Shavit。异步可计算性的拓扑结构。《ACM期刊》，46(6)：858–923，1999年。Koz08 Dmitry N. Kozlov。组合代数拓扑，数学中的算法与计算第21卷。Springer，2008年。Koz12Dmitry N.Kozlov。单纯复形的色彩细分。《同调、同伦及其应用》，14(2)：197–209，2012年。Lyn96 Nancy A. Lynch。《分布式算法》。Morgan Kaufmann出版社，旧金山，美国加利福尼亚州，1996年。Mun84 James R. Munkres。《代数拓扑基础》。Addison Wesley出版公司，1984年。NSW19 Thomas Nowak、UlrichSchmid和Kyrill Winkler。一般消息对手下共识的拓扑刻画。载于 PODC，第218–227页。ACM，2019年。PP04 J.E. Pin 和 D. Perrin。《无限字》，纯粹与应用数学第141卷。Elsevier，2004年。

Raj10Sergio Rajsbaum。迭代共享内存模型。载于 Alejandro López-Ortiz 编，*LATIN 2010*：理论信息学，第 407–416 页，柏林、海德堡，2010 年。Springer Berlin Heidelberg。Ray16Michel Raynal。 集合一致性，第 1956–1959 页。Springer New York，纽约，纽约州，2016 年。RS13Michel Raynal 和 Julien Stainer。消息对手削弱的同步性与故障检测器限制的异步性。在 Panagiota Fatourou 和 Gadi Taubenfeld 编，*PODC*，第 166–175 页。ACM，2013 年。Spe28Emanuel Sperner。关于维数和区域不变性的新证明。汉堡大学数学研讨会，6：265–272，1928 年。SW89NicolaSantoro 和 Peter Widmayer。时间并非万能良药。载于 *STACS 89*，第 349卷，计算机科学讲义，第 304–313–313 页。Springer Berlin / Heidelberg，1989 年。SZ00M. Saks 和 F.Zaharoglou。“无等待 k-集合一致不可能：公共知识的拓扑。*SIAM* 计算学报，29：1449–1483，2000 年。