具有常时滞和非零初始函数的 Sturm–Liouville 型反问题

谢尔盖·布特林[1] 和谢尔盖·瓦西列夫[2]

摘要：本文提出了常时滞 Sturm–Liouville 型算子的一种新型逆谱问题表述。该反问题旨在根据具有一个共同边界条件的两个边值问题的谱，恢复相应方程中时滞项的系数（通常称为势）。然而，这一方向的所有研究都聚焦于初始函数为零的情形，即假设势在相应子区间上恒为零。本文放弃这一假设，转而考虑连续匹配的初始函数，由此使方程中出现一个带冻结自变量的附加项。对于由此产生的新反问题，我们特别关注其中一个谱仅部分给定的情形。本文获得了唯一确定势所需的相应子谱的充分条件和必要条件，并给出了求解该反问题的一种构造性方法。此外，我们还刻画了初始函数为零且共同边界条件为 Neumann 条件时的谱，发现与共同边界条件为 Dirichlet 条件的情形相比，该谱还须满足一项额外限制。

arXiv:2304.05487v1 [math.SP] 11 Apr 2023

关键词：Sturm–Liouville 型算子、泛函微分算子、常时滞、初始函数、冻结自变量、逆谱问题

2010年数学主题分类：34A55 34K29

1. 引言与主要结果

近年来，人们对从泛函微分方程中恢复可积或平方可积势 $q(x)$ 的反问题产生了浓厚兴趣

$$-y''(x)+q(x)y(x-a)=\lambda y(x),\quad 0<x<\pi, \tag{1}$$

具有常时滞 $a\in(0,\pi)$，已知具有一个公共边界条件的方程（1）的两个边值问题的谱（见 [1–16] 及其中的参考文献）。对于 $a=0$，根据Borg [17–19], ，该问题变为经典的反问题，但非局部情形$a>0$ 需要采用不同的方法。此外，与经典情形相比 $a=0.$，它揭示了求解反问题时一些本质上不同的效应 [12–14], 。正如最近在 [12–14], 中所确立的那样，如果 $a\in(0,2\pi/5)$，反问题的解可能是不唯一的。

自上世纪以来，带时滞的各种方程因其众多应用而受到广泛研究（例如，参见 [20–26]）。对于 $a>0$的方程（1），其一个特殊之处在于它是不适定的，因为未知函数 $y(x)$的自变量可能超出区间 $[0,\pi].$ 。为解决这一问题，可以指定一个初始函数，即假设对于 $x\in(-a,0]$，有 $y(x)=f(x)$，其中 $f(x)$是已知的。或者，也可以假设在$(0,a)$上 $q(x)=0$，这实际上相当于指定 $f=0.$ 。不过，我们有意区分这两种方式。事实上，将方程（1）改写为

$$-y''(x)+q^{+}(x)y(x-a)=\lambda y(x)-r(x),\quad 0<x<\pi, \tag{2}$$

[1]俄罗斯萨拉托夫国立大学数学系，电子邮箱：buterinsa@sgu.ru[2]俄罗斯萨拉托夫国立大学数学系，电子邮箱：i@vasilev-s-v.ru

其中 $r(x) = q^-(x)f(x-a)$，且

$$q^-(x) = \begin{cases} q(x), & x \in (0,a), \\ 0, & x \in (a,\pi), \end{cases} \qquad q^+(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0,a), \\ q(x), & x \in (a,\pi), \end{cases} \tag{3}$$

表明 $f \neq 0$ 会导出非齐次方程，而 $f = 0$ 处理相应的齐次方程。因此，为了构造特征值问题，自然会选择后者，即假设 $q(x) = 0$ 在 $(0,a)$ 上。特别是，先前关于 (1) 的逆问题研究恰恰聚焦于这一情形，即 $q(x)$ 的重构实际上仅在 (a,π) 上进行，因为在 $(0,a)$ 上它先验地被假设为等于零。

与此同时，允许非零的 f 也可能是适当的，但应处理一个“线性”的初始函数，即当 f 与 y 线性相关时，例如，

$$f(x) = y(0)g(x), \quad -a < x < 0. \tag{4}$$

从一般理论的观点来看，这个例子是十分自然的 [22] 因为当 $g(x) \in C[-a,0]$且 $g(0) = 1.$ 时，它确保了解 $y(x)$在 $[-a,0)$ 上的连续延拓。然而，这种延拓并不总是必要的（参见，例如， [25]）。因此，可以考虑更一般形式的初始函数，例如 $f(x) = Ly(x)$，其中线性算子 L 从 $L_2(0,\pi)$映射到 $L_\infty(-a,0)$。那么，为了将 L 保持在扰动框架内，一个自然的要求是：它关于二阶微分的最小算子是相对紧的 [27] 。特别地，可以取 $Ly(x) = F(y)g(x)$，其中 $F(y)$ 是关于该算子相对有界的线性泛函。例如， $F(y) =y(b)$或 $F(y) = y'(b)$，其中某个 $b \in [0,\pi].$。然而，我们将集中讨论特殊情形（4）。

本文研究方程 (1) 的反问题，不采用通常的假设 $q(x) = 0$ a.e. on $(0,a)$，而是指定形式为 (4) 的“线性”初始函数。于是，方程 (1) 可改写为含有所谓冻结自变量的形式：

$$-y''(x) + q^+(x)y(x-a) + p(x)y(0) = \lambda y(x), \quad 0 < x < \pi, \quad p(x) := q^-(x)g(x-a).$$

由于函数 $q^-(x)$ 和 $g(x-a)$ 仅以乘积 $p(x)$ 的形式出现，因此无法根据任何谱信息同时恢复它们。此外，只有当 $g(x) \neq 0$ a.e. on $(\alpha - a, \beta - a)$ 时，才可能在任意子区间 $(\alpha,\beta) \subset (0,a)$ 上重构 $q^-(x)$。因此，不失一般性，我们考虑规范情形，即 $g(x) \equiv 1.$

对于 $j = 0$，令 $\{\lambda_{n,j}\}_{n\geq 0}$ 为方程 (1) 在复值势 $q(x) \in L_2(0,\pi)$ 下、满足边界条件的问题 $B_j(q)$ 的谱

$$y'(0) = y^{(j)}(\pi) = 0$$

以及在初始函数条件下

$$y(x) = y(0), \quad -a < x < 0.$$

考虑以下反问题。

反问题 1. 已知 $\{\lambda_{n,0}\}_{n\geq 0}$ 和 $\{\lambda_{n,1}\}_{n\geq 0}$，求 $q(x)$。

本文的主要结果（定理 1–3）仅适用于 $a \geq \pi/2.$。根据 [13,14], ，当 $a \in (0, 2\pi/5)$ 时，逆问题 1 的解可能不唯一；而 $a \in [2\pi/5, \pi/2)$ 的情形则需要进一步研究。不过，为便于今后参考，我们将标出下文中那些证明可自动推广至比 $[\pi/2,\pi)$ 更宽的 a 范围的辅助断言。

下文中，同一符号 $\{\varkappa_n\}$ 将表示 l_2.中的不同序列。下面的定理给出了逆问题 1 可解的基本必要条件。

定理 1. 对于 $j = 0, 1$，以下渐近式成立

$$\lambda_{n,j} = \rho_{n,j}^2, \quad \rho_{n,j} = n + \frac{1-j}{2} + \frac{\omega}{\pi n}\cos\left(n + \frac{1-j}{2}\right)a + \frac{\varkappa_n}{n}, \quad \omega \in \mathbb{C}. \tag{5}$$

这里，常数 ω 由公式确定

$$\omega = \frac{1}{2}\int_a^\pi q^+(x)\,dx. \tag{6}$$

此外，如果 谱 $\{\lambda_{n,0}\}_{n\geq 0}$ 和 $\{\lambda_{n,1}\}_{n\geq 0}$ 对应于同一个 $q^-(x)$，那么

$$i\theta_0(-ir) - \theta_1(-ir) = o(e^{(\pi-a)r}), \quad r \to +\infty, \tag{7}$$

其中

$$\theta_0(\rho) = \rho(\Delta_0(\rho^2) - \cos\rho\pi) - \omega\sin\rho(\pi - a), \quad \theta_1(\rho) = \Delta_1(\rho^2) + \rho\sin\rho\pi - \omega\cos\rho(\pi - a), \tag{8}$$

而函数 $\Delta_0(\lambda)$ 和 $\Delta_1(\lambda)$由以下公式确定

$$\Delta_0(\lambda) = \prod_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda_{n,0} - \lambda}{(n + 1/2)^2}, \quad \Delta_1(\lambda) = \pi(\lambda_{0,1} - \lambda)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{n,1} - \lambda}{n^2}. \tag{9}$$

条件（7）实际上意味着，逆问题 1 仍然像在情形$q^- = 0$ （见 [6,15]）中那样是超定的。如下文所示，只需给定一个完整谱和另一个谱的适当部分即可。例如，我们还考虑以下问题。

逆问题 2. 给定 $\{\lambda_{n_k,0}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 和 $\{\lambda_{n,1}\}_{n\geq 0}$，求 $q(x)$。

这里， $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是一个非负整数递增序列。下一个定理给出了关于 $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 的充分条件以及必要条件，以确保 $q(x)$的唯一性。

定理 2. (i) 如果系统 $\sigma_0 := \{\sin(n_k + 1/2)x\}_{k\in\mathbb{N}}$在 $\mathcal{H} := L_2(0, \pi - a)$ 中是完备的，则反问题 2 中的势 $q(x)$ 被唯一确定。

(ii) 反之，如果 $\{\lambda_{n_k,0}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 和 $\{\lambda_{n,1}\}_{n\geq 0}$ 的规定唯一确定了 $q(x)$，那么 σ_0 的亏格不超过 1，即 $\dim(\mathcal{H} \ominus \sigma_0) \leq 1$.

由于系统 $\{\sin(n + 1/2)x\}_{n\geq 0}$ 在 $L_2(0, \pi)$ 中完备，显然，该定理意味着可由逆问题 1 中的两个完整谱唯一确定 $q(x)$。

我们注意到，定理 2 中充分条件与必要条件之间的差距，实际上是由施加共同的 Neumann 边界条件（在 0 处）造成的。出于同样的原因，定理 1 中的条件不足以保证逆问题 1 的可解性。

对于 Dirichlet 共同条件的情形，相应反问题可解的充要条件已在 [15] when $q^- = 0$. 中得到。这里，我们针对相同情形 $q^- = 0$，但共同条件为 Neumann 条件，给出这类条件；这使得条件中增加了一项。具体而言，有如下定理。

定理3. 形式为(5)且共享同一个 $\omega \in \mathbb{C}$ 的任意复数序列 $\{\lambda_{n,0}\}_{n\geq 0}$ 和 $\{\lambda_{n,1}\}_{n\geq 0}$，分别是问题 $B_0(q)$和 $B_1(q)$的谱，且$q(x)$在$(0, a)$上几乎处处等于 $= 0$，当且仅当由(8)和(9)确定的函数 $\theta_0(\rho)$和 $\theta_1(\rho)$的指数型不超过 $\pi - a$，并且满足以下关系：

$$\lambda_{0,1}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{n,1}}{n^2} = \frac{2\omega}{\pi}. \tag{10}$$

后一个关系是一个附加的刻画条件，在狄利克雷情形 [15]下则是不必要的。我们注意到，两种情形之间的相关差异已在 [12] 中指出（见其中的注 2）。

最后还可以提到，最近出现了各种致力于恢复具有纯冻结自变量的算子这一问题的研究。

$$\ell y := -y''(x) + q(x)y(b), \quad y^{(\alpha)}(0) = y^{(\beta)}(\pi) = 0,$$

由其谱，其中 $b \in [0, \pi]$ 和 α、$\beta \in \{0, 1\}$（参见 [28–36] 及其中的参考文献）。特别是，其唯一可解性取决于 b 的值，以及 α 和 β.。我们注意到，与逆问题 1 相关的两种情形： $b = 0$、 $\alpha = 1$、$\beta = 0$ 和 $b = 0$、 $\alpha = \beta = 1$均属于所谓的非退化情形，此时解是唯一的（例如，参见 [28, 30, 33]）。

本文安排如下。在下一节中，我们为式 (2) 中齐次方程的一组基本解构造变换算子，即当$r(x) = 0$. 时。在第 3 节中，构造了零初始条件下式 (2) 非齐次方程柯西问题的格林函数。在第 4 节中，我们研究问题 $B_j(q)$ 的特征函数，并证明定理 1。第 5 节给出了定理 2 和定理 3 的证明，以及求解逆问题的构造性步骤。

2. 变换算子

令 $C(x, \lambda)$ 以及 $S(x, \lambda)$ 是式（2）中齐次方程的解，即方程

$$-y''(x) + q^+(x)y(x - a) = \lambda y(x), \quad 0 < x < \pi, \tag{11}$$

在初始条件

$$C(0, \lambda) = S'(0, \lambda) = 1, \quad C'(0, \lambda) = S(0, \lambda) = 0.$$

与局部情形 $a = 0$ 一样，它们构成方程（11）的基本解系统。全文中， f' 和 $f^{(j)}$ 表示关于第一个自变量的导数:

$$f'(x_1, \dots, x_m) := \frac{d}{dx_1} f(x_1, \dots, x_m), \quad f^{(j)}(x_1, \dots, x_m) := \frac{d^j}{dx_1^j} f(x_1, \dots, x_m).$$

在本节中，我们将得到函数 $C(x, \lambda)$ 和 $S(x, \lambda)$ 的表示式，其中涉及所谓的变换算子。这些变换算子将它们与具有零势的最简单方程的相应解联系起来。具体而言，有如下引理。

引理 1. 设函数 $a \geq \pi/2$. The $S(x, \lambda)$ 和 $C(x, \lambda)$ 可表示为

$$S(x, \lambda) = \frac{\sin \rho x}{\rho} + \int_a^x P(x, t) \frac{\sin \rho(x - t)}{\rho} \, dt, \tag{12}$$

$$C(x, \lambda) = \cos \rho x + \int_a^x K(x, t) \cos \rho(x - t) \, dt, \tag{13}$$

其中 $\rho^2 = \lambda$ 和

$$P(x, t) = \frac{1}{2} \int_{\frac{a+t}{2}}^{x + \frac{a-t}{2}} q^+(\tau) \, d\tau, \tag{14}$$

$$K(x, t) = \frac{1}{2} \int_a^{\frac{a+t}{2}} q^+(\tau) \, d\tau + \frac{1}{2} \int_a^{x + \frac{a-t}{2}} q^+(\tau) \, d\tau. \tag{15}$$

证明。关于 $S(x,\lambda)$的断言是 [15] 中引理 1 的特例。因此我们只证明(13) 和(15)。容易看出，关于 $C(x,\lambda)$ 的柯西问题等价于积分方程

$$C(x,\lambda)=\cos\rho x+\int_a^x\frac{\sin\rho(x-t)}{\rho}q^+(t)C(t-a,\lambda)\,dt.$$

考虑到 $a\geq\pi/2$，我们计算得

$$\int_a^x\frac{\sin\rho(x-t)}{\rho}q^+(t)C(t-a,\lambda)\,dt=\int_a^x\frac{\sin\rho(x-t)}{\rho}q^+(t)\cos\rho(t-a)\,dt$$

$$=\int_a^x q^+(t)\cos\rho(t-a)\,dt\int_0^{x-t}\cos\rho\tau\,d\tau$$

$$=\frac{1}{2}\int_a^x q^+(t)\,dt\int_0^{x-t}\Big(\cos\rho(t-a+\tau)+\cos\rho(t-a-\tau)\Big)\,d\tau$$

$$=\frac{1}{2}\int_a^x q^+(t)\,dt\int_a^{2(x-t)+a}\cos\rho(x-\tau)\,d\tau=\frac{1}{2}\int_a^{2x-a}\cos\rho(x-t)\,dt\int_a^{x+\frac{a-t}{2}}q^+(\tau)\,d\tau$$

$$=\frac{1}{2}\int_a^x\Big(\int_a^{x+\frac{a-t}{2}}q^+(\tau)\,d\tau+\int_a^{\frac{a+t}{2}}q^+(\tau)\,d\tau\Big)\cos\rho(x-t)\,dt,$$

由此完成证明。 □

注1. 尽管限制条件 $a\geq\pi/2$ 对式 (14) 和 (15) 至关重要，但表示式 (12) 和 (13) 对所有更小的 $a\geq0$ 仍然成立，只是核更为复杂。特别地，[15] 中的引理 1 给出了适用于所有 $a\in[0,\pi/2)$ 的 $P(x,t)$ 的一个积分方程。此外，它将表示式 (12) 推广到了具有两个时滞的二次铅笔。

通过直接计算可以容易地验证以下推论。

推论1. 以下表示式成立：

$$C(x,\lambda)=\cos\rho x+\omega(x)\frac{\sin\rho(x-a)}{\rho}+\int_a^x K_0(x,t)\frac{\sin\rho(x-t)}{\rho}\,dt,\tag{16}$$

$$C'(x,\lambda)=-\rho\sin\rho x+\omega(x)\cos\rho(x-a)+\int_a^x K_1(x,t)\cos\rho(x-t)\,dt,\tag{17}$$

其中

$$\omega(x)=\frac{1}{2}\int_a^x q^+(t)\,dt,\quad K_j(x,t)=\frac{1}{4}\Big(q^+\Big(\frac{a+t}{2}\Big)-(-1)^jq^+\Big(x+\frac{a-t}{2}\Big)\Big),\ \ j=0,1.\tag{18}$$

3. 柯西算子的格林函数

这里，我们求得在零初始条件下，具有任意自由项 $r(x)$ 的非齐次方程 (2) 的柯西问题的解 $z(x,\lambda)=z(x,\lambda;\,r)$

$$z(0,\lambda)=z'(0,\lambda)=0.\tag{19}$$

I在下一节中，我们将需要 $z(\pi,\lambda;\,q^-)$ 和 $z'(\pi,\lambda;\,q^-$ 的表示式).

与局部情形 $a=0$ 一样，函数 $z(x,\lambda)$ 预期具有如下形式

$$z(x,\lambda)=\int_0^x G(x,t,\lambda)r(t)\,dt, \tag{20}$$

其中， $G(x,t,\lambda)$ 是相应的格林函数。下面求出它的显式公式。

下面的引理对任意 $a\in[0,\pi]$. 均成立

引理 2. 对每个固定的 $t\in[0,\pi)$，该函数

$$y_t(x):=G(x+t,t,\lambda),\quad 0\le x\le \pi-t, \tag{21}$$

是柯西问题的一个解。

$$-y_t''(x)+q_t(x)y_t(x-a)=\lambda y_t(x),\quad 0<x<\pi-t,\quad y_t(0)=0,\quad y_t'(0)=1, \tag{22}$$

其中

$$q_t(x):=\begin{cases}0, & 0<x<\min\{a,\pi-t\},\\ q^+(x+t), & a<x<\pi-t.\end{cases} \tag{23}$$

证明。由于函数 $G(x,t,\lambda)$ 由表示 (20) 唯一确定，因此有权对其施加任何限制条件，而这些限制最终将导致 (20)。特别地，自然可以假设 $G(x,t,\lambda)$ 充分光滑并满足条件

$$G(x,x,\lambda)=0,\quad G'(x,x,\lambda)=1. \tag{24}$$

然后将（20）代入（2），并考虑到 $r(x)$ 的任意性，可得以下关系式

$$\begin{aligned}-G''(x,t,\lambda)&=\lambda G(x,t,\lambda),\quad 0<t<x<a,\\ -G''(x,t,\lambda)+q^+(x)G(x-a,t,\lambda)&=\lambda G(x,t,\lambda),\quad 0<t<x-a<\pi-a,\\ -G''(x,t,\lambda)&=\lambda G(x,t,\lambda),\quad 0<x-a<t<x<\pi,\end{aligned}$$

这些关系式与（24）一起，反过来保证（20）是问题（2）和（19）的一个解。将 $x+t$ 代入上述三个关系式以替代 x，可得

$$-G''(x+t,t,\lambda)=\lambda G(x+t,t,\lambda),\quad 0<x<a-t<a, \tag{25}$$

$$-G''(x+t,t,\lambda)+q^+(x+t)G(x+t-a,t,\lambda)=\lambda G(x+t,t,\lambda),\quad a<x<\pi-t<\pi, \tag{26}$$

$$-G''(x+t,t,\lambda)=\lambda G(x+t,t,\lambda),\quad \max\{0,a-t\}<x<\min\{a,\pi-t\}. \tag{27}$$

结合（25）和（27），并考虑到（21），我们将其改写为:

$$-y_t''(x)=\lambda y_t(x),\quad 0<x<\min\{a,\pi-t\},$$

而（26）则呈现为

$$-y_t''(x)+q^+(x+t)y_t(x-a)=\lambda y_t(x),\quad a<x<\pi-t<\pi.$$

利用记号（23）以及初始条件（24），可得到（22）。

最后，注意到，以标准方式求解柯西问题(22)后（例如，参见 [14]），容易看出， $G(x,t,\lambda)$ 关于所有自变量都是连续函数。因此，(20)中的积分存在，并给出了柯西问题 (2) 和 (19) 的一个解。□

引理 3. 令 $a \geq \pi/2$. 则以下表示式成立:

$$G(x,t,\lambda) = \frac{\sin\rho(x-t)}{\rho}, \quad \max\{0, x-a\} \leq t \leq x \leq \pi, \tag{28}$$

and

$$G(x,t,\lambda) = \frac{\sin\rho(x-t)}{\rho} + \frac{1}{2}\int_{a+t}^{x} \frac{\sin\rho(x-\tau)}{\rho}\, d\tau \int_{\frac{a+t+\tau}{2}}^{x+\frac{a+t-\tau}{2}} q^+(\eta)\, d\eta \tag{29}$$

当 $0 \leq t \leq x-a \leq \pi - a$.

证明。根据 (22) 和引理 1，我们得到如下表示

$$y_t(x) = \frac{\sin\rho x}{\rho} + \frac{1}{2}\int_{a}^{x} \frac{\sin\rho(x-\tau)}{\rho}\, d\tau \int_{\frac{a+\tau}{2}}^{x+\frac{a-\tau}{2}} q_t(\eta)\, d\eta, \quad 0 \leq x \leq \pi - t,$$

根据 (21) 和 (23)，由此得到 (28) 和 (29)。 □

代入 (28) 和 (29) 到 (20) 中，并改变积分次序，我们得到

$$z(x,\lambda) = \int_0^x \Big(r(t) + \frac{1}{2}\int_0^{t-a} r(\tau)\, d\tau \int_{\frac{a+t+\tau}{2}}^{x+\frac{a+\tau-t}{2}} q^+(\eta)\, d\eta\Big) \frac{\sin\rho(x-t)}{\rho}\, dt, \quad 0 \leq x \leq \pi, \tag{30}$$

其中 $r(x) = 0$ 对于 $x < 0$.

此外，对 x 求 (28) 和 (29) 的导数，可得到以下公式

$$G'(x,t,\lambda) = \cos\rho(x-t), \quad \max\{0, x-a\} \leq t \leq x \leq \pi,$$

and

$$G'(x,t,\lambda) = \cos\rho(x-t) + \frac{1}{2}\int_{a+t}^{x} \Big(\int_{\frac{a+t+\tau}{2}}^{x} q^+(\eta)\, d\eta + \int_{x+\frac{a+t-\tau}{2}}^{x} q^+(\eta)\, d\eta\Big) \cos\rho(x-\tau)\, d\tau$$

只要 $0 \leq t \leq x-a \leq \pi - a$. 将它们代入

$$z'(x,\lambda) = \int_0^x G'(x,t,\lambda) r(t)\, dt,$$

类似地，我们得到如下表示

$$\begin{aligned} z'(x,\lambda) = \int_0^x \Big(r(t) + \frac{1}{2}\int_0^{t-a} \Big(\int_{\frac{a+t+\tau}{2}}^{x} q^+(\eta)\, d\eta \\ + \int_{x+\frac{a+\tau-t}{2}}^{x} q^+(\eta)\, d\eta\Big) r(\tau)\, d\tau\Big) \cos\rho(x-t)\, dt. \end{aligned} \tag{31}$$

4. 特征函数

考虑整函数

$$\Delta_j(\lambda) := C^{(j)}(\pi,\lambda) + z^{(j)}(\pi,\lambda; q^-), \quad j = 0, 1. \tag{32}$$

下一个引理对任意 $a \in [0,\pi]$. 都成立

引理 4. 对于 $j=0,\quad B_j(q)$ 这一问题的特征值与 $\Delta_j(\lambda)$ 的零点重合。

证明。由于和 $C(x,\lambda)+z(x,\lambda;\,q^-)$ 不可能恒等于零，$\Delta_j(\lambda)$ 的任何零点都是问题 $B_j(q)$ 的特征值，而该问题在我们的设定下又具有如下形式

$$-y''(x)+q^+(x)y(x-a)+q^-(x)y(0)=\lambda y(x),\quad y'(0)=y^{(j)}(\pi)=0. \tag{33}$$

反之，设 λ 为 $B_j(q)$ 的一个特征值，且 $y(x)$ 为相应的特征函数，即方程 (33) 的一个非平凡解。于是 $y(0)\neq 0$，因为显然，否则 $y(x)\equiv 0$。不失一般性，可以假设 $y(0)=1$，这将由于柯西问题解的唯一性而意味着 $y(x)=C(x,\lambda)+z(x,\lambda;\,q^-)$。因此，$\Delta_j(\lambda)=y^{(j)}(\pi)=0.$ □

按照惯例，我们称 $\Delta_j(\lambda)$ 为问题 $B_j(q)$ 的特征函数。下面的引理基于前两节，给出了两个特征函数的表示。

引理5. 特征函数可表示为

$$\Delta_0(\lambda)=\cos\rho\pi+\omega\frac{\sin\rho(\pi-a)}{\rho}+\int_0^\pi w_0(x)\frac{\sin\rho x}{\rho}\,dx,\quad w_0(x)\in L_2(0,\pi), \tag{34}$$

$$\Delta_1(\lambda)=-\rho\sin\rho\pi+\omega\cos\rho(\pi-a)+\int_0^\pi w_1(x)\cos\rho x\,dx,\quad w_1(x)\in L_2(0,\pi). \tag{35}$$

此外，常数 ω 由式 (6) 和.....确定

$$w_0(\pi-x)=w_1(\pi-x)=q^-(x),\quad 0<x<a, \tag{36}$$

而对于 $a<x<\pi$：

$$w_0(\pi-x)=\frac{1}{4}\Big(q^+\Big(\frac{a+x}{2}\Big)-q^+\Big(\pi+\frac{a-x}{2}\Big)\Big)+\frac{1}{2}\int_0^{x-a}q^-(t)\,dt\int_{\frac{a+x+t}{2}}^{\pi+\frac{a+t-x}{2}}q^+(\tau)\,d\tau, \tag{37}$$

$$\begin{aligned}w_1(\pi-x)=&\frac{1}{4}\Big(q^+\Big(\frac{a+x}{2}\Big)+q^+\Big(\pi+\frac{a-x}{2}\Big)\Big)\\&+\frac{1}{2}\int_0^{x-a}\Big(\int_{\frac{a+x+t}{2}}^{\pi}q^+(\tau)\,d\tau+\int_{\pi+\frac{a+t-x}{2}}^{\pi}q^+(\tau)\,d\tau\Big)q^-(t)\,dt.\end{aligned} \tag{38}$$

Proof. 将 $x=\pi$ 代入式 (16) 和 (17)，并利用式 (6) 和 (18)，可得

$$C(\pi,\lambda)=\cos\rho\pi+\omega\frac{\sin\rho(\pi-a)}{\rho}+\int_0^{\pi-a}u_0(x)\frac{\sin\rho x}{\rho}\,dx, \tag{39}$$

$$C'(\pi,\lambda)=-\rho\sin\rho\pi+\omega\cos\rho(\pi-a)+\int_0^{\pi-a}u_1(x)\cos\rho x\,dx, \tag{40}$$

其中

$$u_j(\pi-x)=K_j(\pi,x)=\frac{1}{4}\Big(q^+\Big(\frac{a+x}{2}\Big)-(-1)^jq^+\Big(\pi+\frac{a-x}{2}\Big)\Big),\quad a<x<\pi,\quad j=0,1. \tag{41}$$

此外，将$r=q^-$ 和 $x=\pi$ 代入（30）和（31），可得

$$z(\pi,\lambda;q^-)=\int_0^\pi v_0(x)\frac{\sin\rho x}{\rho}\,dx,\quad z'(\pi,\lambda;q^-)=\int_0^\pi v_1(x)\cos\rho x\,dx, \tag{42}$$

其中

$$v_0(\pi - x) = v_1(\pi - x) = q^-(x), \quad 0 < x < a, \tag{43}$$

$$v_0(\pi - x) = \frac{1}{2}\int_0^{x-a} q^-(t)\,dt \int_{\frac{a+x+t}{2}}^{\pi+\frac{a+t-x}{2}} q^+(\tau)\,d\tau, \quad a < x < \pi, \tag{44}$$

$$v_1(\pi - x) = \frac{1}{2}\int_0^{x-a} \Big(\int_{\frac{a+x+t}{2}}^{\pi} q^+(\tau)\,d\tau + \int_{\pi+\frac{a+t-x}{2}}^{\pi} q^+(\tau)\,d\tau \Big) q^-(t)\,dt, \quad a < x < \pi. \tag{45}$$

根据 (32)、(39)、(40) 和 (42)，我们得到 (34) 和 (35)，其中

$$w_j(x) = u_j(x) + v_j(x), \quad j = 0, 1, \tag{46}$$

其中 $u_0(x) = u_1(x) = 0$ 在 $(\pi - a, \pi)$ 上。最后，将 (41) 和 (43)–(45) 代入 (46)，得到 (36)–(38)。□

本节其余部分将介绍关于任意形如 (34) 和 (35) 的函数的辅助事实，并给出定理 1 的证明。

下面的引理 6–8 对任意固定的 $a \in [0, 2\pi]$. 均成立。采用涉及 Rouch´e 定理的标准方法（例如参见 [18, 37]），可以证明以下结论。

引理 6. 对于 $j = 0$，1，任意 $\Delta_j(\lambda)$ 都有无穷多个形如 (5) 的零点 $\{\lambda_{n,j}\}_{n\geq 0}$。

关于 $a = 0$ 的下一个结论可见于 [18]，但只要 a 取值于 $[0, 2\pi]$.内，证明便与其取值无关。

引理 7. 形式为 (34) 和 (35) 的任意函数都由其零点唯一确定。此外，(9) 中的表示式成立。

现在，我们可以证明定理 1 了。

定理 1 的证明。(5) 中的渐近式是引理 5 和引理 6 的直接推论。还需指出，由 (8)、(34)、(35) 以及引理 7 可得

$$i\theta_0(\rho) - \theta_1(\rho) = i\int_0^{\pi} w_0(x)\sin\rho x\,dx - \int_0^{\pi} w_1(x)\cos\rho x\,dx = \frac{\theta_+(\rho) - \theta_-(\rho)}{2},$$

其中，根据 (36),

$$\theta_+(\rho) = \int_0^{\pi-a} (w_0 - w_1)(x)\exp(i\rho x)\,dx, \quad \theta_-(\rho) = \int_0^{\pi} (w_0 + w_1)(x)\exp(-i\rho x)\,dx,$$

这便推出 (7)。□

与下一个引理类似的命题常用于寻找逆问题可解的必要和充分条件，即对谱数据的刻画（参见 [37] 中的注 2）。在证明中，我们将沿用 [37] 中提出的一种简单的新思路。

引理8.对于 $j = 0$,1，令 $\{\lambda_{n,j}\}_{n\geq 0}$ 为形式为(5) 的任意复数序列。则由 (9) 中相应公式构造的函数 $\Delta_j(\lambda)$ 分别具有形式或 (35)。 *(34)*

证明。由于引理关于 $j = 0$ 的断言可由 [15], 中的引理 6 形式上直接推出，我们着重讨论 $j = 1.$ 的情形。设给定一个形如（5）的序列 $\{\lambda_{n,1}\}_{n\geq 0}$。首先，设所有值 $\lambda_{n,1}$ 均互不相同，且 $\lambda_{0,1} = 0.$ 记 $\rho_{-n,1} := -\rho_{n,1}$，其中 $n \geq 1.$。根据 [37], 中的引理 2，系统 $\{\exp(i\rho_{n,1}x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 是 $L_2(-\pi, \pi)$ 中的 Riesz基。此外，

渐近式（5）意味着 $\{\theta(\rho_{n,1})\}_{n\in\mathbb{Z}} \in l_2$，其中 $\theta(\rho) := \rho \sin \rho\pi - \omega \cos \rho(\pi - a)$，而 ω 如（5）中所述。因此，存在一个唯一函数 $W_1(x) \in L_2(-\pi, \pi)$，满足以下关系

$$\theta(\rho_{n,1}) = \int_{-\pi}^{\pi} W_1(x) \exp(i\rho_{n,1}x)\, dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

显然，$W_1(x)$ 是偶函数。因此，$\lambda_{n,1} = (\rho_{n,1})^2$，$n \geq 0$ 是由 (35) 确定的函数 $\Delta_1(\lambda)$ 的零点，其中 $w_1(x) = 2W_1(x)$。根据引理 6，$\Delta_1(\lambda)$ 没有其他零点；而根据引理 7，它满足 (9) 中的第二种表示，这就完成了对包含零元素的简单序列 $\{\lambda_{n,1}\}_{n\geq 0}$ 的证明。

对于一般情形，只需注意将 $\Delta_1(\lambda)$ 与任意函数相乘

$$h(\lambda) := \prod_{n\in A} \frac{\lambda - \tilde{\lambda}_{n,1}}{\lambda - \lambda_{n,1}}, \quad A \subset \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \#A < \infty,$$

保持形式 (35) 不变，只改变 $w_1(x)$。事实上，我们有

$$h(\lambda)\Delta_1(\lambda) = -\rho \sin \rho\pi + \omega \cos \rho(\pi - a) + H(\lambda),$$

其中

$$H(\lambda) = (1 - h(\lambda))\Big(\rho \sin \rho\pi - \omega \cos \rho(\pi - a)\Big) + h(\lambda) \int_0^{\pi} w_1(x) \cos \rho x\, dx.$$

函数 $H(\lambda)$ 是整函数，只要 $\lambda_{n,\,1}$ 是 $\Delta_1(\lambda)$ 的零点。此外，在 ρ 平面中，显然有 $H(\rho^2) \in L_2(-\infty, +\infty)$，且 $H(\rho^2) = o(\exp(|\mathrm{Im}\, \rho|\pi))$，当 $\rho \to \infty$. 因此，根据 Paley–Wiener定理（参见例如 [38]），它具有以下形式

$$H(\lambda) = \int_0^{\pi} \tilde{w}_1(x) \cos \rho x\, dx, \quad \tilde{w}_1(x) \in L_2(0, \pi),$$

从而完备地完成了证明。 □

最后，我们再给出一个辅助断言，该断言将用于定理 2 的证明。设 $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 为非负整数的递增序列。不妨设子谱 $\{\lambda_{n_k,0}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 中的多个元素彼此相邻，即

$$\lambda_{n_k,0} = \lambda_{n_{k+1},0} = \ldots = \lambda_{n_{k+m_k-1},0},$$

其中，m_k 是该子谱中值 $\lambda_{n_k,0}$ 的重数。令

$$\mathcal{S} := \{1\} \cup \{k : \lambda_{n_k,0} \neq \lambda_{n_{k-1},0},\, k \geq 2\}$$

并考虑函数系 $\sigma := \{s_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$，其中

$$s_{k+\nu}(x) = (n_k + 1)\frac{d^{\nu}}{d\lambda^{\nu}} \frac{\sin \rho x}{\rho}\Big|_{\lambda=\lambda_{n_k,0}}, \quad k \in \mathcal{S}, \quad \nu = \overline{0, m_k - 1}.$$

引理 9. 系统 σ 在 $\mathcal{H}_b := L_2(0, b)$ 中完备（是一个 Riesz基）当且仅当系统 σ_0. 也是如此。此外，它们具有相同的亏格，即 $\dim(\mathcal{H}_b \ominus \sigma_0) = \dim(\mathcal{H}_b \ominus \sigma)$。

证明。引理的第一个断言与 [6] 中引理 1 的第二个断言一致。为证明第二个断言，设存在 d 线性无关的整函数$h_\nu(\lambda)$ $\nu = 1, d$，其形式为

$$h_\nu(\lambda) = \int_0^b f_\nu(x) \frac{\sin \rho x}{\rho}\, dx, \quad f_\nu(x) \in L_2(0, b),$$

其零点具有公共部分 $\{(n_k+1/2)^2\}_{k\in\mathbb{N}}$. 考虑亚纯函数

$$F(\lambda) := \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n_k,0}-\lambda}{(n_k+1/2)^2-\lambda}.$$

然后，函数 $h_\nu(\lambda) := F(\lambda)h_\nu(\lambda)$ 也具有该形式

$$\tilde{h}_\nu(\lambda) = \int_0^b \tilde{f}_\nu(x)\frac{\sin\rho x}{\rho}\,dx, \quad \tilde{f}_\nu(x)\in L_2(0,b). \tag{47}$$

事实上，与 [37], 中引理 2 的证明类似，可以证明，只要

$$|\rho \pm (n_k+1/2)| \geq \delta, \quad k\in\mathbb{N},$$

对每个固定的 $\delta > 0$. 显然，函数 $h_\nu(\lambda)$去除奇点后是整函数，并且根据后一个估计，我们有 $|\rho h_\nu(\rho^2)| \leq C_\delta|\rho h_\nu(\rho^2)| \in L_2(-\infty+i\delta,\infty+i\delta)$在 ρ平面上。此外，解析函数的最大模原理意味着$\rho h_\nu(\rho^2) = o(\exp(|\operatorname{Im}\rho|b))$ 当 $\rho\to\infty$. 因此，根据Paley–Wiener定理 [38], 我们有（47）。

构造的函数 $1, d$ 显然线性无关，且它们的零点在计入重数后有共同部分 $\{\lambda_{n_k,0}\}_{k\in\mathbb{N}}$。因此，$\dim(\mathcal{H}\ominus\sigma_0) \leq \dim(\mathcal{H}\ominus\sigma)$。反向不等式可类似证明。□

5. 逆问题的解

当函数 $w_0(x)$ 和函数 $w_1(x)$被指定后，关系式 (36)–(38)可视为关于 $q(x) = q^-(x) + q^+(x)$ 的非线性积分方程。下面的引理实际上蕴含了其唯一可解性。

引理10. 对于任意函数 $w_0(x)$ $w_1(x)$ $q^-(x) \in L_2(0,\pi-a)$，由 (37) 和 (38) 构成的线性方程组具有唯一解 $q^+(x) \in L_2(a,\pi)$。

证明。添加于 in 将方程（37）和（38）相加，然后用一个减去另一个，我们得到

$$\left.\begin{aligned} 2(w_1+w_0)(\pi-x) &= q^+\Big(\frac{a+x}{2}\Big) + 2\int_0^{x-a} q^-(t)\,dt \int_{\frac{a+x+t}{2}}^{\pi} q^+(\tau)\,d\tau, \\ 2(w_1-w_0)(\pi-x) &= q^+\Big(\pi+\frac{a-x}{2}\Big) + 2\int_0^{x-a} q^-(t)\,dt \int_{\pi+\frac{a+t-x}{2}}^{\pi} q^+(\tau)\,d\tau, \end{aligned}\right\} \quad a<x<\pi.$$

通过变量代换，我们得到关系式

$$2(w_1+w_0)(\pi+a-2x) = q^+(x) + 2\int_0^{2(x-a)} q^-(t)\,dt \int_{x+\frac{t}{2}}^{\pi} q^+(\tau)\,d\tau, \quad a<x<\frac{a+\pi}{2},$$

$$2(w_1-w_0)(2x-\pi-a) = q^+(x) + 2\int_0^{2(\pi-x)} q^-(t)\,dt \int_{x+\frac{t}{2}}^{\pi} q^+(\tau)\,d\tau, \quad \frac{a+\pi}{2}<x<\pi.$$

Then 交换最后两个公式中的积分次序，我们得到系统。

$$\begin{aligned} 2(w_1+w_0)(\pi+a-2x) = q^+(x) &+ 2\int_x^{2x-a} q^+(t)\,dt \int_0^{2(t-x)} q^-(\tau)\,d\tau \\ &+2\int_{2x-a}^{\pi} q^+(t)\,dt \int_0^{2(x-a)} q^-(\tau)\,d\tau, \quad a<x<\frac{a+\pi}{2}, \end{aligned}$$

$$2(w_1-w_0)(2x-\pi-a)=q^+(x)+2\int_x^\pi q^+(t)\,dt\int_0^{2(t-x)}q^-(\tau)\,d\tau,\quad \frac{a+\pi}{2}<x<\pi.$$

采用这些符号表示

$$W(x):=\begin{cases}2(w_1+w_0)(\pi+a-2x), & a<x<\dfrac{a+\pi}{2},\\ 2(w_1-w_0)(2x-\pi-a), & \dfrac{a+\pi}{2}<x<\pi,\end{cases}\tag{48}$$

$$Q(x,t):=\begin{cases}2\displaystyle\int_0^{2(x-a)}q^-(\tau)\,dt, & a<2x-a<t<\pi,\\ 2\displaystyle\int_0^{2(t-x)}q^-(\tau)\,dt, & a<x<t<\min\{2x-a,\pi\},\end{cases}\tag{49}$$

可以将后一个系统改写为 Volterra积分方程

$$W(x)=q^+(x)+\int_x^\pi Q(x,t)q^+(t)\,dt,\quad a<x<\pi,\tag{50}$$

它存在唯一解 $q^+(x)\in L_2(a,\pi)$。 □

定理 2 的证明。首先注意，由于 (5)，只要通过公式指定 $\{\lambda_{n,1}\}_{n\ge0}$， ω 的值便总是确定的

$$\omega=\pi\lim_{k\to\infty}\tilde n_k\frac{\rho_{\tilde n_k,1}-\tilde n_k}{\cos\tilde n_k a},\tag{51}$$

其中，自然数列 $\{\tilde n_k\}$ 的选取使得 $|\cos\tilde n_k a|\ge c>0.$。或者，根据 (35)，也可以使用公式

$$\omega=\lim_{n\to\infty}\Big(\Delta_1(\xi_n^2)+\xi_n\sin\xi_n\pi\Big),\quad \xi_n=\frac{2\pi n}{\pi-a},\tag{52}$$

其中， $\Delta_1(\lambda)$ 由 (9) 中的第二种表示构造。

(i) 设系统 σ_0 在 $\mathcal{H}.$ 中完备。根据引理 7，特征函数 $\Delta_1(\lambda)$ 由其零点唯一确定，因此 (35) 中的 $w_1(x)$ 也唯一确定。由 (36) 可知，函数 $w_0(x)$ 与 $w_1(x)$ 在 $(\pi-a,\pi)$ 上几乎处处相同，也就是说，它也随之确定。

对 (34) 求导 $\nu=0\,m_k-1$ 次，并将 $k\in\mathcal{S}$ 替换为 $\lambda=\lambda_{n_k,\,0}$，得到以下关系式

$$\beta_n=\int_0^{\pi-a}w_0(x)s_n(x)\,dx,\quad n\in\mathbb{N},\tag{53}$$

其中 m_k $\mathcal{S}$ 和 $s_n(x)$ 已在引理 9 前定义，且

$$\beta_{k+\nu}=-(n_k+1)\,\frac{d^\nu}{d\lambda^\nu}\Big(\cos\rho\pi+\omega\frac{\sin\rho(\pi-a)}{\rho}+\gamma(\lambda)\Big)\Big|_{\lambda=\lambda_{n_k,0}},\ \ k\in\mathcal{S},\ \ \nu=\overline{0,m_k-1},\tag{54}$$

$$\gamma(\lambda)=\int_{\pi-a}^{\pi}w_1(x)\frac{\sin\rho x}{\rho}\,dx.\tag{55}$$

因此，根据引理 9，函数 $w_0(x)$在 $(0,\pi-a)$ 上也被唯一确定。因此，只需回顾表示式 (3) 和 (36)，并应用引理 10。

(ii) 假设 $q(x)$ 由 $\{\lambda_{n_k,0}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 和 $\{\lambda_{n,1}\}_{n\geq 0}$ 唯一确定，并反设 $\dim(\mathcal{H}\ominus\sigma_0) > 1$. 那么，根据引理 9，我们有 $\dim(\mathcal{H}\ominus\sigma) > 1$，即至少存在两个线性无关函数 $f_1(x)$ $f_2(x) \in L_2(0,\pi-a)$，使得

$$\int_0^{\pi-a} f_\nu(x)s_n(x)\,dx = 0, \quad n\in\mathbb{N}, \quad \nu = 1,2. \tag{56}$$

考虑一个函数

$$\tilde{w}_0(x) = w_0(x) + \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) \in L_2(0,\pi-a), \quad \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{C}. \tag{57}$$

Let $\tilde{q}$将左端替换为 $^+(x)$ 后，成为方程 (50) 的一个解。

$$\tilde{W}(x) = W(x) + \alpha_1 F_1(x) + \alpha_2 F_2(x), \tag{58}$$

其中

$$F_\nu(x) := \begin{cases} 2f_\nu(\pi+a-2x), & a < x < \dfrac{a+\pi}{2}, \\ -2f_\nu(2x-\pi-a), & \dfrac{a+\pi}{2} < x < \pi. \end{cases} \tag{59}$$

换言之，$\tilde{q}^+(x) = q^+(x) + \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x)$，其中

$$g_\nu(x) = F_\nu(x) + \int_x^\pi \tilde{Q}(x,t)F_\nu(t)\,dt, \quad \nu = 1,2,$$

˜而 $Q(x,t)$是核 $Q(x,t)$ 的预解核。选取 α_1 和 α_2，使得它们不同时为零，并且

$$\frac{1}{2}\int_a^\pi \tilde{q}^+(x)\,dx = \omega. \tag{60}$$

由于函数 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$线性无关，因此 $g_1(x)$ 和 $g_2(x)$也线性无关。因此，$\tilde{q}^+ \neq q^+$. 将 $\tilde{q}^+(x)$在 $(0,a)$ 上延拓为零，并考虑函数 $\tilde{q}(x) = q^-(x) + \tilde{q}^+(x)$。˜ ˜根据(60) 和引理 5，问题$B_0(\tilde{q})$ 和 $B_1(\tilde{q})$ 的特征函数 $\Delta_0(\lambda)$ 和 $\Delta_1(\lambda)$ 分别具有以下形式

$$\tilde{\Delta}_0(\lambda) = \cos\rho\pi + \omega\frac{\sin\rho(\pi-a)}{\rho} + \int_0^\pi \tilde{w}_0(x)\frac{\sin\rho x}{\rho}\,dx,$$

$$\tilde{\Delta}_1(\lambda) = -\rho\sin\rho\pi + \omega\cos\rho(\pi-a) + \int_0^\pi \tilde{w}_1(x)\cos\rho x\,dx.$$

比较 (48)、(50)、(58) 和 (59) 可知，$\tilde{w}_1(x) = w_1(x)$。因此，$B_1(\tilde{q})$ 和 $B_1(q)$ 的谱重合。此外，根据 (53 57 $\{\lambda_{n_k,0}\}_{k\in\mathbb{N}}$)–( )，该序列是 $\Delta_0(\lambda)$ 的零点子序列。因此，该序列是问题$B_0(\tilde{q})$ 的一个子谱。由此，我们得到另一个势 $\tilde{q}\neq q$，其谱数据 $\{\lambda_{n_k,0}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 和 $\{\lambda_{n,1}\}_{n\geq 0}$ 与 q 的相同。这一矛盾完成了证明。□

现在，我们可以给出求解逆问题 1 的构造性步骤。

算法 1. 给定谱 $\{\lambda_{n,0}\}_{n\geq 0}$ 和 $\{\lambda_{n,1}\}_{n\geq 0}$。然后：(i) 根据公式 (9) 构造函数 $\Delta_0(\lambda)$ 和 $\Delta_1(\lambda)$；(ii) 根据 (51) 或 (52) 求出 ω 的值；

(iii) 通过对相应的傅里叶变换进行逆变换，计算 (34) 和 (35) 中的函数 $w_0(x)$ 和 $w_1(x)$:

$$w_0(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \quad w_1(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos nx,$$

其中

$$a_n = n(\Delta_0(n^2) - (-1)^n) + \omega(-1)^n \sin na, \ \ n \geq 1, \quad b_n = \Delta_1(n^2) - \omega(-1)^n \cos na, \ \ n \geq 0;$$

（iv）通过（36）中的任一关系求出 $q^-(x) \in L_2(0,a)$，并令 $q^-(x) = 0$ 作为 $x \in (a,\pi)$;

（v）分别利用公式（48）和（49）构造函数 $W(x)$ 和 $Q(x,t)$，并通过求解 Volterra积分方程（50）求出 $q^+(x) \in L_2(a,\pi)$;

（vi）最后，构造 $q(x) = q^-(x) + q^+(x)$，其中 $q^+(x) = 0$ 在（$0,a$)上。

如果 $\{\sin(n_k+1/2)x\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是 $L_2(0,\pi-a)$ 中的 Riesz基，则该算法也可轻易扩展到逆问题 2。于是，根据引理 9，系统 $\{s_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$. 也是 Riesz基。因此，在步骤（iii）中，可根据（53）由公式构造函数 $\omega_0(x)$

$$w_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n s_n^*(x), \quad 0 < x < \pi - a,$$

其中，系数 β_n 由关系式 (54)和(55) 确定，而$\{s_n^*(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是基 $\{s_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$. 的双正交基。需要指出的是，根据(36)，关于$(\pi-a,\pi)$ 上的 $w_0(x)$的知识是多余的，因为 $w_1(x)$ 已经完备地求出。

定理3的证明。我们先从必要性部分开始。根据（8）、（34）和（35），我们有

$$\theta_0(\rho) = \int_0^{\pi} w_0(x)\sin\rho x\, dx, \quad \theta_1(\rho) = \int_0^{\pi} w_1(x)\cos\rho x\, dx.$$

因此，根据(3)和(36)， $\theta_0(\rho)$和 $\theta_1(\rho)$的指数型不超过 $\pi-a$.。最后，将 $\lambda = 0$ 代入(35)和(9)中的第二个公式后，由引理5和引理7可得关系式(10)。事实上，根据(36)和(38)，假设 $q^- = 0$ 意味着

$$\int_0^{\pi} w_1(x)\, dx = \frac{1}{4}\int_a^{\pi}\Big(q^+\Big(\frac{a+x}{2}\Big) + q^+\Big(\pi + \frac{a-x}{2}\Big)\Big)\, dx = \frac{1}{2}\int_a^{\pi} q^+(x)\, dx = \omega. \tag{61}$$

对于充分性，我们使用给定序列 $\{\lambda_{n,0}\}_{n\geq 0}$ 和 $\{\lambda_{n,1}\}_{n\geq 0}$. ，通过公式 (9) 构造函数 $\Delta_0(\lambda)$ 和 $\Delta_1(\lambda)$。根据引理 8，这些函数分别具有形式 (34) 和 (35)，其中存在某些 $w_0(x)$ $w_1(x) \in L_2(0,\pi)$；反过来，根据第一个条件和 Paley–Wiener定理 [38]，它们在 $(\pi-a,\pi)$ 上几乎处处为零。

根据引理 10，存在系统和（38）的唯一解 $q^+(x) \in L_2(a,\pi)$，且满足 $q^-(x) = 0$. 。如（ (37) 61）所示，我们计算得出

$$\tilde{\omega} := \int_0^{\pi-a} w_1(x)\, dx = \frac{1}{2}\int_a^{\pi} q^+(x)\, dx$$

因此，

$$\Delta_1(0) = \omega + \tilde{\omega}. \tag{62}$$

另一方面，(9)中的第二个公式和条件(10)意味着 $\Delta_1(0) = 2\omega$，这与 (62) 一起给出 $\tilde{\omega} = \omega$. 考虑带有势

$$q(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0,a), \\ q^+(x), & x \in (a,\pi). \end{cases}$$

根据引理5， $\Delta_0(\lambda)$和 $\Delta_1(\lambda)$分别是它们的特征函数。因此， $\{\lambda_{n,j}\}_{n\geq 0}$是 $B_j(q)$关于 $j=0$、1. □的谱

资助。本研究得到俄罗斯科学基金会的资助，项目编号：22-21-00509，https://rscf.ru/project/22-21-00509/

致谢。作者感谢 Maria Kuznetsova 阅读手稿并提出宝贵意见。

参考文献

[1] Pikula M. 根据两个谱确定带时滞自变量的 Sturm–Liouville 型微分算子，Mat. Vestnik 43 (1991) 第3–4期，159–171。[2] Freiling G. 和 Yurko V.A. 带常时滞的 Sturm–Liouville 微分算子的逆问题，Appl. Math. Lett. 25 (2012) 第11期，1999–2004。[3] Yang C.-F. 带常时滞的 Sturm–Liouville 算子的逆节点问题，J. Diff. Eqns. 257 (2014) 第4期，1288–1306。[4] Ignatiev M.Yu. 关于带偏移自变量的 Sturm–Liouville 算子的一个逆 Regge 问题，J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci. 22 (2018) 第 2 期，203–211。[5] Bondarenko N. 和 Yurko V. 带偏移自变量的 Sturm–Liouville 微分算子的一个反问题，Appl. Math. Lett. 83 (2018) 140–144。[6] Buterin S.A. 和 Yurko V.A. 大时滞 Sturm–Liouville 算子的一个逆谱问题，Anal. Math. Phys. 9 (2019) 第1期，17–27。[7] Pikula M.、Vladiˇci´c V. 和 Vojvodi´c B. 时滞小于区间长度一半且满足 Robin 边界条件的常时滞 Sturm–Liouville 算子的逆谱问题，Results Math. (2019) 74:45。[8] Djuri´c N. 和 Vladiˇci´c V. 带常时滞的 Sturm–Liouville 型微分方程的不完备逆问题，Results Math. (2019) 74:161。[9] Sat M. 和 Shieh C.-T. 带常时滞的积分微分算子的逆节点问题，J. Inverse Ill-Posed Probl. 27 (2019) 第4期，501–509。[10] Wang Y.P.、Shieh C.T. 和 Miao H.Y. 利用双重稠密节点子集重构带常时滞的 Sturm–Liouville 方程，Inv. Probl. Sci. Eng. 27 (2019) 第5期，608–617。[11] Djuri´c N. 带时滞的 Sturm–Liouville 型算子的逆问题：对称情形，Appl. Math. Sci. 14 (2020) 第11期，505–510。[12] Djuri´c N. 和 Buterin S. 关于恢复带时滞的 Sturm–Liouville 型算子这一未决问题，Appl. Math. Lett. 113 (2021) 106862。[13] Djuri´c N. 和 Buterin S. 关于恢复带时滞的 Sturm–Liouville 算子的非唯一性，Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 102 (2021) 105900。[14] Djuri´c N. 和 Buterin S. 小时滞 Sturm–Liouville 型算子的等双谱势，Nonlin. Anal.: Real World Appl. 63 (2020) 文章编号 103390。

[15] Buterin S.A.、Malyugina M.A. 和 Shieh C.-T. 带两个时滞的二阶泛函微分铅笔的一个逆谱问题，Appl. Math. Comput. 411 (2021) 126475。[16] Wang Yu.P.、Keskin B. 和 Shieh C.-T. 带常时滞的非自伴 Sturm–Liouville 算子的一个部分逆问题，J. Inverse Ill-Posed Probl. (2023) https://doi.org/10.1515/jiip-2020-0058。[17]Borg G. Sturm–Liouville 特征值问题的一种逆转，Acta Math. 78 (1946) 1–96。[18] Freiling G. 和 Yurko V.A.《逆 Sturm–Liouville 问题及其应用》，NOVA 科学出版社，纽约，2001。[19] Buterin S.A. 和 Kuznetsova M.A. 关于非自伴 Sturm–Liouville 算子的 Borg 方法，Anal. Math. Phys. 9 (2019) 2133–2150。[20] Myshkis A.D.《带时滞自变量的线性微分方程》，Nauka 出版社，莫斯科，1951。[21] Bellman R. 和 Cooke K.L.《微分差分方程》，兰德公司 R-374-PR，1963。[22] Norkin S.B.《带时滞自变量的二阶微分方程》，Nauka 出版社，莫斯科，1965。[23] Hale J.《泛函微分方程理论》，施普林格出版社，纽约，1977。[24]Skubachevskii A.L.《椭圆型泛函微分方程及其应用》，Birkh¨auser，巴塞尔，1997。[25] Azbelev N.V.、Maksimov V.P. 和 Rakhmatullina L.F.《泛函微分方程理论导论：方法与应用》，Hindawi 出版社，纽约，2007。[26] Muravnik A.B. 非局部问题与泛函微分方程：理论方面及其在数学建模中的应用，Math. Model. Nat. Phenom. 14 (2019) 601。[27] Kato T.《线性算子扰动理论》，Springer，柏林，1980。[28] Bondarenko N.P.、Buterin S.A. 和 Vasiliev S.V. 带冻结自变量的 Sturm–Liouville 算子的一个逆谱问题，J. Math. Anal. Appl. 472 (2019) 1028–1041。[29] Buterin S.A. 和 Vasiliev S.V. 关于恢复冻结自变量与区间长度成有理比例的 Sturm–Liouville 型算子，J. Inv. Ill-Posed Probl. 27 (2019) 第3期，429–438。[30] Buterin S. 和 Kuznetsova M. 关于冻结自变量 Sturm–Liouville 型算子的反问题：有理情形，Comp. Appl. Math. (2020) 39:5，15页。[31] Wang Y.P.、Zhang M.、Zhao W. 和 Wei X. 无理情形下带冻结自变量的 Sturm–Liouville 算子的重构，Appl. Math. Lett. 111 (2021) 106590。[32] Bondarenko N. 带冻结自变量的逆 Sturm–Liouville 问题的有限差分逼近，Appl. Math. Comput. 413 (2022) 126653。[33] Tsai T.-M.、Liu H.-F.、Buterin S.、Chen L.-H. 和 Shieh C.-T. 带冻结自变量和切比雪夫多项式的 Sturm–Liouville 型算子，Math. Meth. Appl. Sci. 45 (2022) 第16期，9635–9652。

[34] Dobosevych O. 和 Hryniv R. 冻结自变量微分算子的重构，Axioms 11 (2022) 第1期，文章编号24。[35] Kuznetsova M.A. Sturm–Liouville 冻结自变量算子谱的必要和充分条件，Appl. Math. Lett. 131 (2022) 108035。[36] Kuznetsova M.A. Sturm–Liouville 冻结自变量算子重构的统一稳定性，arXiv:2304.02090 [math.SP], 2023。[37] Buterin S.A. 渐近分离零点的正弦型函数重构的统一稳定性，Matem. Zametki 111 (2022) 第3期，339–353；英文译本见 Math. Notes 111 (2022) 第3期，343–355。[38] Levin B.Ya.《整函数讲义》，AMS，罗得岛州普罗维登斯，1996年。