arXiv:2304.05508v1 [math.LO] 11 Apr 2023

单线性剩余格：公理化、簇和有限嵌入性质

NIKOLAOS GALATOS 和 庄晓

Abstract. 我们刻画所有高度等于 3 的剩余格，并证明它们生成的簇具有连续统多个子簇。更一般地，我们研究单线性剩余格：它们的格是若干两两不可比较的链的不交并，并添加了界元。我们给出单线性剩余格的两种一般构造，为它们生成的簇提供一种公理化和一种证明论演算，并证明各种子簇具有有限模型性质。

1. Introduction

剩余格推广了各种众所周知的代数结构，例如格序群、含幺环的理想以及关系代数等。它们还构成了各种次结构逻辑的代数语义，例如经典逻辑、直觉主义逻辑、关联逻辑、线性逻辑和多值逻辑；因此，剩余格的其他例子还包括布尔代数、Heyting代数、MV代数和BL代数。关于剩余格和次结构逻辑的介绍，请参阅 [10] 。

大量研究集中于全序剩余格（剩余链）以及由其生成的簇（半线性剩余格）。在这里，我们从探索另一极端开始：其元素构成反链的剩余格，并添加两个界元以获得一个格。在第2节中，我们证明，高度为 3 的所有剩余格恰好由两部分组成：一个零消去幺半群和一个至多含三个元素的半群，并明确规定了将这两部分组合起来的过程。

在第3节中，我们为高度至多为三的剩余格的正通用类，以及由其生成的簇 M，给出一种公理化。更一般地，我们考察单线性剩余格的类URL：它们基于由两个额外界元扩充的、由不可比较链的不交并构成的结构。我们对正通用类URL及其生成的半单链剩余格簇SRL进行公理化。此外，我们证明，SRL的有限次直不可约成员恰好是单线性的。在M的特殊情形下，高度为3的格的简单性直接给出了M的半单性；但我们还进一步证明，包含使用含有界元的扩充语言的代数的簇 bM，是一个判别簇。我们以对该簇证明论的讨论结束本节

（N. Galatos） Department of Mathematics, University of Denver, Colorado, USA
(XiaoZhuang) Department of Mathematics, University of Denver, Colorado, USA
E-mail addresses: ngalatos@du.edu, xiao.zhuang@du.edu。
2020 *Mathematics Subject Classification.* 06F05；08B15，03G10。03B47，
Key words and phrases. 单线性剩余格，公理化，子簇，有限嵌入性质。

。特别地，我们为SRL提出一种具有切消去性质的超序列演算，从而得到一个适用于SRL的解析系统。

在第4节中，我们证明 M 有连续统多个子簇。实际上，这些是 $\mathsf{CM_G}$ 的子簇；$\mathsf{CM_G}$ 是由高度为3的单线性剩余格生成的簇，其中间层是阿贝尔群。事实上，我们证明 $\mathsf{CM_G}$ 的子簇与阿贝尔群的 $\mathsf{ISP_U}$-类相对应，并进一步给出了 $\mathsf{CM_G}$ 子簇格的完全组合刻画（完全不涉及群论）。我们进一步拓展了这一刻画：根据第2节中的刻画，允许剩余格的中间层也包含一些半群元素。

第5节证明了簇 $\mathsf{CM_G}$ 具有有限嵌入性质（有限嵌入性质），这与连续统多个子簇所带来的复杂性形成对照，同时也凸显了 $\mathsf{CM_G}$ 的全称理论是可判定的。我们还证明了 SRL 中更多子簇具有有限嵌入性质，而这些子簇不受高度为3的限制。更准确地说，SRL 中每个由乘法、并和1的语言中的方程公理化，并且满足任意弱交换公理及任意结规则的子簇，都具有有限嵌入性质；我们通过残余框架的方法建立了这一结果。

最后，在第6节中，我们重点研究单线性剩余格 R，其中 $M := R \setminus \{\bot, \top\}$ 是一个子幺半群，并且界元相对于 M中的元素是吸收的；我们称这样的单线性剩余格为紧致的。我们给出两种构造紧剩余格的方法，第一种源自有限循环幺半群。第二种方法中， M 是一个剩余链与一个消去幺半群的笛卡尔积，并由一个 2-余循环确定；因此，它是幺半群的半直积的一种推广。

接下来，我们介绍一些关于剩余格的预备知识。剩余格是一个代数 $(R, \wedge, \vee, \cdot, \backslash, /, 1)$，其中

- $(R, \wedge, \vee)$ 是一个格，
- $(R, \cdot, 1)$ 是一个幺半群，并且

对于所有 $x, y, z \in R$，• $xy \leq z$ 当且仅当 $y \leq x \backslash z$ 当且仅当 $x \leq z/y$。

上面的最后一个条件称为剩余化。给定偏序集 P 和 Q，若存在映射 $f^* : \mathrm{Q} \to \mathrm{P}$，使得映射 $f : \mathrm{P} \to \mathrm{Q}$ 满足

$$f(x) \leq y \text{ iff } x \leq f^*(y)$$

对所有 $x \in P$、 $y \in Q$均成立。

下面的结果是剩余映射理论中的一个经典结果。

引理 1.1. 函数 g 从偏序集 P 到偏序集 Q 是剩余映射，当且仅当集合 $\{x \in P : g(x) \leq y\}$ 对所有 $y \in Q$ 都有最大元，并且 g 是保序的。

证明。令 $S_y = \{x \in P : g(x) \leq y\}$，并假设 g 是具有剩余 g^*的剩余映射。注意到 $g^*(y) \leq g^*(y)$ 导出 $g(g^*(y)) \leq y$，因此 $g^*(y) \in S_y$。此外，对于所有 $x \in S_y$， $g(x) \leq y$，从而 $x \leq g^*(y)$。因此， $g^*(y) = \max S_y$。

若 $x_1 \leq x_2$，则由于 $g(x_2) \leq g(x_2)$ 得出 $x_2 \leq g^*(g(x_2))$，我们得到 $x_1 \leq g^*(g(x_2))$；因此 $g(x_1) \leq g(x_2)$。所以， g 是保序的。

现在假设 S_y 对所有 $y \in Q$ 都有最大值，并且 g 保序。我们定义 $g^* : Q \to P$，令 $g^*(y) = \max S_y$；显然， g^* 是保序的。如果对于某些 $x \in P$、 $y \in Q$， $g(x) \leq y$，那么根据定义， $x \in S_y$ 且 $x \leq g^*(y)$。反之，如果

$x \le g^*(y)$，那么 $g(x) \le g(g^*(y))$，因为 g 是保序的。此外， $g^*(y) \in S_y$，所以 $g(g^*(y)) \le y$；因此 $g(x) \le y$。□

我们指出，如果将假设 $\{x \in P\colon g(x) \le y\}$ 存在最大元替换为要求其存在并，那么仅有 g 保序并不足以推出剩余化。

注意，格序幺半群是剩余格，当且仅当左乘法和右乘法都是剩余化的。因此，引理 1.1 给出了以下事实。

推论 1.2. 格序幺半群 R 是剩余格的约化，当且仅当乘法保序，且对于所有 x、$z \in R$，集合 $\{y \in R\colon xy \le z\}$ 和 $\{y \in R\colon yx \le z\}$ 均存在最大元。在这种情况下，根据 $x\backslash z = \max\{y \in R\colon xy \le z\}$ 和 $z/x = \max\{y \in R : yx \le z\}$，扩张为剩余格是唯一的。

推论 1.3（[10] 的推论 3.12）。完备格序幺半群 R 是剩余格的约化，当且仅当乘法对任意并满足分配律。

特别地，如果空并存在，乘法对其满足分配律；因此，如果存在底元 $\bot$，那么 $x \cdot \bot = \bot = \bot \cdot x$，对所有 x 均成立。为方便起见，我们令 $x\backslash\backslash z := \{y \in R\colon xy \le z\}$ 并 $z/\!/x := \{y \in R\colon yx \le z\}$ 对于 $x, z \in R$。

注1.4.设 $\mathbf{P} = (P, \wedge, \vee, \cdot, \bot, \top)$ 是一个有界格序半群。由于 $\bot x = \bot$ 对所有 $x \in P$，我们有 $\bot\backslash\backslash x = P$，因此 $\bot\backslash x = \max \bot\backslash\backslash x = \top$ 对所有$x \in P$。此外，由于 $x\backslash\backslash\top = P$，$x\backslash\top = \top$ 对所有 $x \in P$。类似地， $x/\bot = \top$ 和$\top/x = \top$ 对所有 $x \in P$。

具有界元 $\bot$ 和 $\top$ 的剩余格称为严格紧致的，如果 $\top x = x\top = \top$ 对所有 $x \neq \bot$成立。在这种情况下，我们还可得 $xy = \bot \Rightarrow x = \bot$ 或 $y = \bot$，因为否则会得到 $x \neq \bot \neq y$，所以 $\bot = \bot\top = xy\top = x\top = \top$，这是一个矛盾。注意，在严格紧致剩余格中，我们有 $\bot\backslash x = x/\bot = \top = x\backslash\top = \top/x$、 $\top\backslash y = y/\top = \bot$、 $z\backslash\bot = \bot = \bot/z$，对所有 $x \in R$、 $y \neq \top$、$z \neq \bot$成立。

2. Residuated Lattices on $\mathbf{M}_X$

基于链的剩余格已得到广泛研究。我们首先考察基于反链、并额外包含顶元和底元的剩余格。

2.1. 性质。给定集合 X，我们将集合 $X \cup \{\bot, \top\}$ 上的格记为 $\mathbf{M}_X$，其中 $\top$ 是顶元， $\bot$ 是底元；对于不同的 x、$y \in X$， $x \vee y = \top$ 和 $x \wedge y = \bot$。

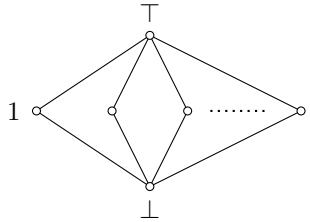

Figure 1. 定义在 M_X上的剩余格

基于 $\mathbf{M}_X$ 的所有剩余格的刻画（其中 X 非空且对乘法封闭）是已知的（[10]，第 205 页）： X 是消去幺半群， $\bot$ 在 M_X 中是吸收元，且 $\top$ 在 $X\cup\{\top\}$ 中是吸收元。我们将刻画基于 $\mathbf{M}_X$ 的所有剩余格，即使 X 对乘法不封闭。

回顾一下，在每个有界剩余格中，底元都是吸收元。此外，在基于 $\mathbf{M}_X$ 的剩余格中，对所有 x，都有 $\top x, x\top \in \{x,\top\}$，因为 $1\leq \top$ 蕴含 $x\leq \top x$ 和 $x\leq x\top$。

在 $\mathbf{M}_X$ 上的剩余格 R 中，我们定义

$$U_R=\{x\in R\setminus\{\bot,\top\} : x\top=\top\} \text{ and } Z_R=\{x\in R\setminus\{\bot,\top\} : x\top=x\},$$

对于 $\top$，表现为单位元的元素集合，以及对于 $\top$，表现为零元的元素集合；当上下文已明确所指的剩余格时，我们省略 U_R 和 Z_R 中的下标。注意， $1\in U$ 和 $U\cap Z=\emptyset$。

带有零元（吸收元）0 的幺半群 S 若对所有 $x,y,z\in S$ 都满足以下条件，则称为 0-可消去的,

$$xy=xz\neq 0 \Rightarrow y=z$$
$$yx=zx\neq 0 \Rightarrow y=z.$$

剩余格 R 中的元素 c 若对所有 $x\in R$ 都满足 $xc=cx$，则称其为中心元。此外，我们用 $\sqcup$ 表示不交并运算。

定理 2.1. 若 R 是基于 $\mathbf{M}_X$ 的剩余格，则

(1) $\top$ 在 R 中是中心的，且 $R=U\sqcup Z\sqcup\{\bot,\top\}$。(2) $U_\top=U\cup\{\top\}$ 是 R 的一个 $\top$-消去子幺半群。(3) $Z_\bot=Z\cup\{\bot\}$ 是 R 的一个以 $\bot$ 为零元的子半群， $|Z_\bot|\leq 3$，并且对所有互不相同的 x、$y\in Z_\bot$，都有 $xy=\bot$。此外， $Z_\bot$ 要么是幂等的，要么 $Z_\bot=\{b,\bot\}$ 且 $b^2=\bot$。(4) 对所有 $a\in U$ 和 $b\in Z$，都有 $ab=ba=b$。

证明。(1) 我们将证明，对所有 $x\in R$，都有 $\top x=x\top$。若 x 是 $\top$、$\bot$ 或 $\top$，则 $\top x$ 和 $x\top$ 分别都等于 $\top$、$\bot$、x。此外，若 x 与 1 不可比较，则 $x\vee 1=\top$，因此 $\top x=(1\vee x)x=x\vee x^2=x(1\vee x)=x\top$。

由于 $\top$ 是中心的，且 $x\top\in\{x,\top\}$ 对所有 x都成立，我们有：对于每个 $x\in R\setminus\{\bot,\top\}$，要么 $x\in U$，要么 $x\in Z$，但不能两者同时成立。

(2)如果 a、$b\in U_\top$，那么 $ab\cdot\top=a\cdot b\top=a\top=\top$，所以 $ab\in U_\top$。同样， $ba\in U_\top$ 和 $\top$ 是 $U_\top$ 的零元。

若 x、y、$z\in U_\top$和 $xy=xz\neq\top$，则 $x(y\vee z)=xy\vee xz=xy\neq\top$。因此 $y\vee z\neq\top$，因为 $x\top=\top$；特别地， $y\neq\top\neq z$。此外，由于 y、$z\in U_\top$ 和 $\bot\notin U_\top$，我们得到 $y\neq\bot\neq z$；因此 y、$z\in X$和 $y\vee z\neq\top$。由于R基于$\mathbf{M}_X$，我们得到 $y=z$。同理，我们可以得到 $\top$-消去性的另一个方向。

(3)如果 c， $d\in Z_\bot$，那么 $cd\cdot\top=c\cdot d\top=cd$。此外， $cd\leq c\top=c<\top$；因此 $cd\in Z_\bot$。显然， $\bot$ 是 $Z_\bot$ 的零元。

由于 $Z_\bot\subseteq X\cup\{\bot\}$，对于不同的 x、$y\in Z_\bot$，我们有 $xy=xy\wedge xy\leq x\top\wedge\top y=x\wedge y=\bot$。因此，如果存在互不相同的 x、y、$z\in Z$，那么 $y\vee z=\top$和$x=x\top=x(y\vee z)=xy\vee xz=\bot\vee\bot=\bot$，这就产生了矛盾。因此 $|Z_\bot|\leq 3$。

如果 b 是 $Z_\bot\subseteq X\cup\{\bot\}$中的非幂等元，那么 $b\neq\bot$ 和 $b^2\leq b\top=b$，因此 $b^2=\bot$。如果 c 是 $Z_\bot$ 中不同于 b 和 $\bot$的元素，那么 $b^2=b^2\vee\bot=b^2\vee bc=b(b\vee c)=b\top=b$，这就矛盾了。因此，如果 $Z_\bot$ 不是幂等的，那么$Z_\bot=\{b,\bot\}$ 和 $b^2=\bot$。

(4) 对于 $a \in U$ 和 $b \in Z$，利用 $\top$ 的中心性，我们得到

$$b = \top b = \top a \cdot b = \top \cdot ab = ab \cdot \top = a \cdot b\top = ab.$$

同样，我们得到 $ba = b$。 □

不难看出，定理 2.1(3) 中提到的子半群$Z_\perp$的可能选项正是图 2 中的那些。

	$\perp$
$\perp$	$\perp$

,

	$\perp$	b
$\perp$	$\perp$	$\perp$
b	$\perp$	b

,

	$\perp$	b
$\perp$	$\perp$	$\perp$
b	$\perp$	$\perp$

,

	$\perp$	b_1	b_2
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
b_1	$\perp$	b_1	$\perp$
b_2	$\perp$	$\perp$	b_2

.

FIGURE 2. 四张乘法表

请注意，如果基于 $\mathbf{M}_X$ 的剩余格是整性的（即满足 $x \leq 1$），那么 $U = \emptyset$。考虑到 $Z_\perp$ 的所有可能性，可知基于 $\mathbf{M}_X$ 的整性剩余格只有 2 元布尔代数、4 元布尔代数、3 元 Heyting 代数和 3 元 MV-代数。后两者与 3 元 Sugihara 幺半群，是仅有的 3 元剩余链。

2.2. 构造与刻画。现在我们证明定理 2.1 的逆命题。设 A 是带零元 $\top$ 的 $\top$-消去幺半群，B 是带零元 $\perp$ 的半群，其乘法表是图 2 中的一个。

我们在集合 $R = A \cup B$上定义格结构 $\mathbf{M}_X$，其中 $X = R \setminus \{\perp, \top\}$、$\perp$ 是底元，$\top$ 是顶元。此外，我们在 R 上定义一个乘法，通过以下方式延拓A 和B 上的乘法：$xy = yx = y$，对于所有 $x \in A$ 和 $y \in B$。我们将所得代数记为$\mathbf{R_{A,B}}$ 。

定理2.2。如果 A是一个 $\top$消去幺半群，带有零元 $\top$，而 B 是一个带有零元 $\perp$的半群，其乘法表是图 2 中的表之一，那么$\mathbf{R_{A,B}}$ 是基于 $\mathbf{M}_X$的剩余格的约化，其中 $X = (A \cup B) \setminus \{\perp, \top\}$。

证明。由于结合律在 A和B 中成立，并且 B 中的每个元素都是 A 的吸收元，因此 R 上的乘法满足结合律。

推论 1.3 保证，若在 $\mathbf{M}_X$ 上扩充幺半群结构，则它是剩余格当且仅当乘法对任意并满足分配律。由于 $\perp x = x\perp = \perp$ 对所有 $x \in R$ 都成立，乘法对空并满足分配律。此外，我们注意到每个无限并都等价于一个有限并，因此只需证明 $x(y \vee z) = xy \vee xz$，以及 $(y \vee z)x = yx \vee zx$ 对所有 x、y、$z \in R$ 和 $y \neq z$ 都成立。这里我们证明 $x(y \vee z) = xy \vee xz$。

若 $\perp \in \{x, y, z\}$，则不难验证该方程总是成立，因此我们假设 $\perp \notin \{x, y, z\}$。由于 $y \neq z$，可得 $y \vee z = \top$。现在我们来验证 $x\top = xy \vee xz$。

若 $x \in B$，则左侧为 x。此外，若 $y \in A$ 或 $z \in A$，则右侧为 $x \vee xz = x$ 或 $xy \vee x = x$，因为对所有 $u \in R$，都有 $xu \leq x$。若 y，$z \in B$，则由于 $|B| \leq 3$ 和 y、z、$\perp$互不相同，我们得到 $B = \{y, z, \perp\}$ 和 $x = y$ 或 $x = z$。在这种情况下，$xy \vee xz = x \vee \perp = x$，因此方程成立。

若 $x \in A$，则左边等于 $\top$。若 $y \in B$ 且 $z \in B$，则右边为 $y \vee z = \top$，因为 $y \neq z$。若 $y \in B$ 且 $z \in A$，则右边

为 $y \vee xz = \top$，因为 $y \in B$、$xz \in A$ 且 $\bot \notin \{x, y, z\}$。同样，若 $y \in A$ 且 $z \in B$，则右边为 $\top$。若 $y \in A$ 且 $z \in A$，则右边为 $xy \vee xz = \top$，因为 A 是 $\top$-消去的。

类似地，我们可以证明，对于所有 x、y、$z \in R$，$(y \vee z)x = yx \vee xz$。 □

根据推论 1.2，这些除法由方程 $x\backslash z = \max\{y \in R : xy \leq z\}$ 和 $z/x = \max\{y \in R : yx \leq z\}$ 唯一确定，下面给出其精确取值。

事实证明，$A \cup \{\bot\}$ 和 $B \cup \{\top\}$ 是 $\mathbf{R_{A,B}}$ 的子代数。特别地，$B \cup \{\top\}$ 是 2 元布尔代数、3 元 Heyting 代数、3 元 MV-代数或 4 元布尔代数，分别对应图 2 中的表。根据注 1.4，除法为

$$a_1\backslash a_2 = \begin{cases} a_3 & \text{if } a_1a_3 = a_2 \\ \bot & \text{otherwise} \end{cases} \qquad a_2/a_1 = \begin{cases} a_3 & \text{if } a_3a_1 = a_2 \\ \bot & \text{otherwise} \end{cases}$$

对于 a_1、a_2、$a_3 \in A$，其中 a_3 在存在时保证唯一。最后，对于 $a \in A \setminus \{\top\}$ 和 $b \in B$，a 与 b 之间的任意运算都与 1 和 b 之间的运算相同。例如，$b\backslash a = b\backslash 1$、$a \wedge b = 1 \wedge b$、$ab = 1b$ 等。

结合定理 2.1 和定理 2.2，我们得到以下刻画。

推论 2.3。基于 $\mathbf{M}_X$ 的剩余格恰好是形如 $\mathbf{R_{A,B}}$ 的剩余格，其中A是带零元 $\top$ 的 $\top$-消去幺半群，B 是带零元 $\bot$ 的半群，其乘法表是图 2 中的某一个。

3. Axiomatizations

在本节中，我们将为所考虑的各类结构提供公理化，并讨论它们的证明论。

3.1.基于 $\mathbf{M}_X$ 的剩余格的公理化。我们首先为由所有基于 $\mathbf{M}_X$ 的剩余格生成的簇M给出一个公理化，其中 X 是一个集合；参见推论3.4。由于格 $\mathbf{M}_X$ 是单的，当 $|X| \geq 3$ 时，基于 $\mathbf{M}_X$ 的剩余格也都是单的；如果 $|X| \leq 3$，则剩余格同样是单的。事实证明（推论3.7），这些恰好是簇M中的次直不可约代数，我们将为它们提供一个公理化。

实际上，我们也可以扩展剩余格的语言，加入取值为界元的常元。有界剩余格是在剩余格的基础上扩展得到的结构，其底层是有界格，并加入取值为这些界元的常元 $\bot$ 和 $\top$（因此 $\bot \leq x \leq \top$，对所有 x）。我们将同时考虑语言包含或不包含界元的两种情况，但选择使公理能够在无需界元的情况下表达。我们可以将所要考虑的公理安排为正全称句，这便于应用 [8] 中给出的对应关系。

若（有界）剩余格满足以下条件，则称其为单线性：

(URL) $\quad \forall u_1, u_2, z, w\ (u_1 \leq u_2 \text{ or } u_2 \leq u_1 \text{ or } (u_1 \wedge u_2 \leq w \text{ and } z \leq u_1 \vee u_2))$

注意，剩余格是单线性的，当且仅当它是线性的；否则，该格实际上是有界的，且任意一对不可比较元素的并都等于该

格的顶元，交都等于该格的底元。换言之，非线性剩余格由两个界元构成，其余部分是全不可比链的不交并；见图3。对于这些非线性单线性剩余格，即使语言中不包含表示这两个界元的常元，我们也将这两个界元记为 $\bot$ 和 $\top$。我们用 URL 和 bURL 分别表示单线性剩余格类和有界单线性剩余格类（正的全称类）。显然，$\mathbf{M}_X$ 上的（有界）剩余格都是单线性的。

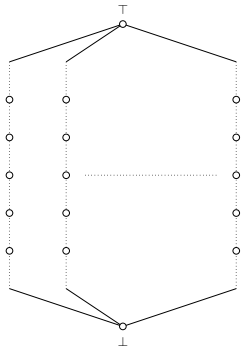

FIGURE 3. 一个非线性单线性剩余格

$\mathbf{M}_X$ 与其他格的区别在于其高度，因此我们对高度不大于给定数值的单线性剩余格进行公理化。我们谨慎地表述一阶句子，使其不包含蕴含，并且仍为正句子。

命题3.1. 给定一个自然数 n，一个（有界）单线性剩余格的高度至多为 n，当且仅当它满足

$$(h_n) \qquad \forall x_1, \ldots, x_{n+1} \big(\bigvee_{1 \le m \le n} x_1 \vee \cdots \vee x_m = x_1 \vee \cdots \vee x_{m+1} \big).$$

此外，它的宽度至多为 n 当且仅当它满足

$$(w_n) \qquad \forall x_1, \ldots, x_{n+1} \big(\bigvee_{1 \le i \ne j \le n+1} x_i \le x_j \big).$$

证明。高度至多为 n 等价于每个子链至多包含 n 个元素。现在，每个子链总是具有 $a_1 \le a_1 \vee a_2 \le a_1 \vee a_2 \vee a_3 \le \cdots \le a_1 \vee \cdots \vee a_k$的形式，其中 a_1、…、a_k 是格的元素，并且不等式中等号的数量决定了链中元素的数量。因此，高度至多为 n 等价于规定在每个链 a_1、$a_1 \vee a_2$、…、$a_1 \vee \cdots \vee a_{n+1}$中，至少有两个相邻元素相等。

宽度至多为 n 等价于至多有 n 个两两不可比元素。□

我们将由（h_n）公理化的 URL$_n$ 子类记为 URL。特别地，（h_3）是以下内容的全称闭包（我们通常省略该闭包）：

$$x_1 = x_1 \vee x_2 \text{ or } x_1 \vee x_2 = x_1 \vee x_2 \vee x_3 \text{ or } x_1 \vee x_2 \vee x_3 = x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4.$$

推论3.2. 基于某个 $\mathbf{M}_X$ 的（有界）剩余格，连同平凡代数，恰好属于类 URL$_3$ (bURL$_3$)。

3.2. M 的等式基。类 URL_3 可由正全称句公理化。我们注意到， [8] 提供了一种一般方法，可对由正通用类生成的剩余格簇进行公理化。具体而言，如果

$$1 \leq p_1 \text{ or } \cdots \text{ or } 1 \leq p_n$$

是一个正的全称公式，那么由满足该公式全称闭包的剩余格生成的簇可由以下无穷多个方程公理化

$$1 = \gamma_1(p_1) \vee \cdots \vee \gamma_n(p_n)$$

其中 γ_1，……， $\gamma_n \in \Gamma（Var）$，即所有迭代共轭的集合。a 关于 x 的左共轭项为 $x\backslash ax \wedge 1$，右共轭项为 $xa/x \wedge 1$；迭代共轭通过对变量集 Var 中的不同共轭元素反复应用左共轭和右共轭得到。若 ϕ 是正全称公式的集合，我们用 $\mathbf{V}\phi$ 表示由集合 Γ_ϕ 公理化的簇，其中包含 ϕ中正全称公式所对应的所有方程。

我们考虑由类 URL 生成的簇 SRL，并将其元素称为半单线性的。由于 URL 由

$$x \leq y \text{ or } y \leq x \text{ or } (x \wedge y \leq z \text{ and } w \leq x \vee y),$$

可写成这两个句子的合取

$$x \leq y \text{ or } y \leq x \text{ or } x \wedge y \leq z, \qquad x \leq y \text{ or } y \leq x \text{ or } w \leq x \vee y,$$

并进而作为

$1 \leq x\backslash y$ 或 $1 \leq y\backslash x$ 或 $1 \leq (x \wedge y)\backslash z$， $1 \leq x\backslash y$ 或 $1 \leq y\backslash x$ 或 $1 \leq w\backslash(x \vee y)$，

我们得到以下结果。

推论 3.3。半单线性剩余格的簇 SRL 由无穷多个方程公理化

$$1 = \gamma_1(x\backslash y) \vee \gamma_2(y\backslash x) \vee \gamma_3((x \wedge y)\backslash z)\, 1 = \gamma_4(x\backslash y) \vee \gamma_5(y\backslash x) \vee \gamma_6(w\backslash(x \vee y)),$$

其中 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6 \in \Gamma(Var)$.

推论3.4。由在一个 M_X 上的剩余格类URL_3，生成的簇M，相对于 SRL 可由以下内容公理化： $1 =$
$\gamma_1((x_1 \vee x_2)\backslash x_1) \vee \gamma_2((x_1 \vee x_2 \vee x_3)\backslash(x_1 \vee x_2)) \vee \gamma_3((x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4)\backslash(x_1 \vee x_2 \vee x_3))$
其中 γ_1、 γ_2、 $\gamma_3 \in \Gamma(Var)$。

我们用 bM 表示相应的有界剩余格簇。此外，我们还可以刻画这些簇中的有限次直不可约代数。

定理3.5。有限次子直不可约（FSI）半单线性剩余格恰好是单线性剩余格：$\mathrm{SRL}_{FSI} = \mathrm{URL}$。更一般地，如果 ϕ 是一组正全称句，那么 $\mathrm{SRL} \cap \mathbf{V}\phi$ 中的 FSI 恰好是满足 ϕ 的单线性剩余格。

证明。由 [8] 中定理 9.73(2) 的证明可知，一个 FSI 代数满足单线性条件，当且仅当它满足推论 3.3 的方程，也就是说，当且仅当它是半单线性的。因此，半单线性的 FSI 实际上是单线性的。

反过来，如果一个代数是单线性的，那么它的负锥 $\downarrow 1$ 是一条链。因此，负锥的凸正规子幺半群彼此嵌套，而 $\{1\}$ 不可能是两个非平凡凸正规子幺半群的交；参见 [10] 中的】【。

剩余格的负锥上的同余与凸正规子幺半群之间的对应关系。因此，平凡同余是交不可约的，且该代数是 FSI（并且是半单线性的，因为它是单线性的）。□

推论3.6. 每个半单线性剩余格都是单线性剩余格的次直积。

推论3.7. M 中的次直不可约对象，与 M 中的有限次直不可约对象以及 M 中的单对象相同；它们恰好是基于 $\mathbf{M}_X$ 的非平凡剩余格，其中 X 为某个元素。bM 中也同样成立。

M 和 bM 这两个簇中的每个次直不可约对象实际上都是单对象，这是因为它的负锥只有两个元素。因此，这些簇是半单的。对于 bM，我们还可以进一步说明。

我们定义以下术语

$$r(x) = (1 \vee x)(1 \wedge x) \wedge (1 \vee 1/x)(1 \wedge 1/x) \qquad x \leftrightarrow y = x \backslash y \wedge y \backslash x \wedge 1$$

$$t(x, y, z) = r(x \leftrightarrow y) \cdot z \vee (r(x \leftrightarrow y) \backslash \bot \wedge 1) \cdot x$$

引理3.8. bM 是一个判别簇，其判别项为 t。

证明。若 $\mathbf{R} \in \mathbf{bM}_{SI}$，则根据推论3.7，R 是一个以 $\mathbf{M}_X$ 为基础的非平凡有界剩余格，其中 X。注意，若 x 与 1 不可比较，则 $1/x$也与 1 不可比较，或等于 $\bot$，因此 $1 \wedge x = 1 \wedge 1/x = \bot$，故 $r(x) = \bot$。此外，若 $x \in \{\bot, \top\}$，则 $\{x, 1/x\} = \{\bot, \top\}$，所以 $1 \wedge x = \bot$ 或 $1 \wedge 1/x = \bot$，因此 $r(x) = \bot$。最后，由于 $1/1 = 1$，若 $x = 1$，则有 $r(x) = 1$；否则有 $r(x) = \bot$。

注意，对所有 x、$y \in R$，都有 $x \leftrightarrow y \leq 1$，即 $x \leftrightarrow y \in \{\bot, 1\}$。此外，$x \leftrightarrow y = 1$ 当且仅当 $1 = x \backslash y \wedge y \backslash x \wedge 1$，当且仅当 $1 \leq x \backslash y \wedge y \backslash x$，当且仅当（$1 \leq x \backslash y$ 且 $1 \leq \wedge y \backslash x$），当且仅当（$x \leq y$ 且 $y \leq x$），当且仅当 $x = y$。因此，若 $x = y$，则有 $x \leftrightarrow y = 1$；若$x \neq y$，则有 $x \leftrightarrow y = \bot$。

因此，$t(x, y, z) = r(1) \cdot z \vee (r(1) \backslash \bot \wedge 1) \cdot x = 1 \cdot z \vee (1 \backslash \bot \wedge 1) \cdot x = z \vee \bot \cdot x = z$，如果 $x = y$；并且 $t(x, y, z) = r(\bot) \cdot z \vee (r(\bot) \backslash \bot \wedge 1) \cdot x = \bot \cdot z \vee (\bot \backslash \bot \wedge 1) \cdot x = (\top \wedge 1) \cdot x = 1 \cdot x = x$，如果 $x \neq y$。□

3.3. 是否在签名中包含界元。注意，当对单线性剩余格的类进行公理化，并要求其中的非线性成员满足某个正全称句子时，通常在语言包含界元的常元的情况下，公理化看起来更加简洁。例如，其非线性成员满足 $\top x = x \top$ 的 URL 类可由正全称公式公理化

$$u \leq v \text{ or } v \leq v \text{ or } x(u \vee v) = (u \vee v)x.$$

对于非线性 bURL，此公式等价于

$$x \top = \top x.$$

为了便于阅读，我们姑且将这些句子中的第一个称为更赏心悦目的那个：

$$x \overline{\top} = \overline{\top} x.$$

如果一个（有界）单线性剩余格满足此公式，我们称其为 $\top$-中心的。

更一般地，如果 Φ 是句子 $\forall \vec{x}(\varphi(\vec{x}, \top, \bot))$，其中 φ 属于 URL 的语言，我们将句子记作 $\overline{\Phi}$

$$\forall \vec{x}\,(\varphi(\vec{x}, \overline{\top}, \overline{\bot})) := \forall u, \forall v, \forall \vec{x}\,(u \leq v \text{ or } v \leq u \text{ or } \varphi(\vec{x}, u \vee v, u \wedge v))$$

其中 u、v 是新变量。

同样，如果一个（有界）单线性剩余格满足公式 $\top$，我们就称它是 $\top$-幺的。

$$x = \overline{\bot} \text{ or } x\overline{\top} = \overline{\top} = \overline{\top}x,$$

因为在非线性模型中，每个非底元元素都充当顶元的幺元。请注意，对于非线性有界URL，$\top$-幺与严格紧致是等价的。

引理3.9。设 φ 是URL语言中的一个正全称公式，设 Φ 是 $\forall\vec{x}(\varphi(\vec{x},\top,\bot))$，并设 $\overline{\Phi}$ 是 $\forall\vec{x}(\varphi(\vec{x},\overline{\top},\overline{\bot}))$。

(1) 满足 Φ 的非线性有界URL，恰好是满足 $\overline{\Phi}$ 的非线性有界URL。(2) 满足 $\overline{\Phi}$ 的非线性URL，恰好是满足 $\overline{\Phi}$ 的非线性有界URL的去界约化。(3) 满足 $\overline{\Phi}$ 的线性（有界）URL，恰好是（有界）剩余链。

证明。(1) 若 R 是非线性的 bURL，则它满足 $\overline{\Phi}$ 当且仅当它对所有不可比元素 u,v 均满足该条件（因为对于可比元素 u,v，$\overline{\Phi}$ 自动成立），当且仅当它满足 Φ（因为当 u,v 不可比时，我们有 $u\vee v=\top$ 和 $u\wedge v=\bot$）。

(2) 可由以下事实推出：所有非线性URL都是有界的，设 b 和 t 是界元，并且对于有界的非线性URL，$\overline{\Phi}$ 等价于 $\forall\vec{x}(\varphi(\vec{x},t,b))$。

（3）由 $\overline{\Phi}$ 在所有全序代数中都成立这一事实得出。 □

我们注意到，可能存在满足 $\overline{\Phi}$ 但不满足 Φ 的线性有界URL。例如，当 Φ 是 $\top x = x\top$ 时，就会发生这种情况。

3.4.SRL的证明论。某些剩余格簇可以进行证明论分析，这种分析通常与其代数研究互为补充，并且常常能够得到有趣的结果。并非所有剩余格簇都可以采用证明论演算，但我们证明了SRL确实可以采用超序列演算。我们介绍该超序列系统，但在本文中不进一步探讨其应用。

作为一个示例，我们提及格的等式理论，它由半格的标准基和吸收律公理化。可以使用等式逻辑的推导系统从这些公理导出新的有效方程，该系统包含自反性、对称性、传递性和替换/同余规则。该系统不适用于逆向证明搜索分析，因为给定一个方程 $s=t$，要确定它是否可在系统中导出，不能只遍历所有可能以该方程为结论的推导规则应用并递归进行：传递性规则 $\frac{s=t\quad t=r}{s=r}$（向上读取时）会引入一个方程中未出现的新项。此外，使用不等式推理（例如改用 $\frac{s\le t\quad t\le r}{s\le r}$，并将公理替换为诸如 $s\le s\vee t$ 这样的不等式公理）也无法解决这个问题：从系统中简单地省略传递性规则会改变可导出的不等式集合。然而，绕过这一问题的一种方法是将格公理替换为推理规则；例如，我们将 $s\le s\vee t$ 替换为推理规则 $\frac{r\le s}{r\le s\vee t}$。在存在传递性的情况下，公理和规则是等价的，但与公理相比，该规则融入了传递性的要素：该规则可通过实例化推出公理，而公理只有在.....的情况下才能推出该规则。

借助传递性。此外，由于分子中的所有项已经包含在分母中，新规则不会受到传递性问题的影响；因此，用该规则替换公理是安全的。可以将传递性注入所有公理，将它们转换为无害的推理规则，使得在新系统中，传递性规则本身变得完全多余。所得系统可用于证明格方程的可判定性。

类似的方法适用于剩余格的某些子簇；子簇中的公理可能适合引入传递性，也可能不适合。此外，由于运算比格中的更多，上述不等式必须改为序列。这些序列形如 $s_1, s_2, \ldots, s_n \Rightarrow s_0$，其中 s_i 是剩余格项，其解释由 $s_1 \cdot s_2 \cdots s_n \leq s_0$ 给出。序列层面上的传递规则本身采用.....的形式，或者采用称为 (cut) 的规则；目标是像上面对格所做的那样，实现消去 cut。我们常将序列写作 $\Gamma \Rightarrow \Pi$，其中 Γ 是公式序列，Π 是单个公式。相应的推导系统 / 演算定义了不同类型的次结构逻辑，而剩余格簇则为它们提供代数语义；参见 [10]。

所有剩余格构成的簇具有一种序列推导系统，由此可以得到剩余格方程理论的可判定性等结果。然而，半线性剩余格（由剩余链生成）构成的簇由于其公理的形式，可以证明并不具有序列演算。不过，它确实具有超序列演算。超序列是更复杂的句法对象，其形式为 $\Gamma_1 \Rightarrow \Pi_1 \mid \Gamma_2 \Rightarrow \Pi_2 \mid \cdots \mid \Gamma_m \Rightarrow \Pi_m$，也就是说，它们是序列的多重集。我们将剩余格簇的基础超序列系统记作 HRL；通过添加额外的推理规则，可以得到适用于子簇的系统。

我们遵循 [3], 中描述的向超序列中注入传递性的过程，从而为簇 SRL 得到一个具有切消去性质的超序列系统。我们从 URL 的公理开始；URL 是生成 SRL 的正通用类。

首先，我们将第一个公理 $\forall x, y, z (x \leq y$ 或 $y \leq x$ 或 $z \leq (x \vee y))$转换为等价形式 $\forall x, y, z, t_1, t_2, t_3, s_1, s_2, s_3$

$$t_1 \leq x \text{ and } y \leq s_1 \text{ and } t_2 \leq y \text{ and } x \leq s_2 \text{ and } t_3 \leq z \text{ and } (x \vee y) \leq s_3 \Rightarrow t_1 \leq s_1 \text{ or } t_2 \leq s_2 \text{ or } t_3 \leq s_3$$

通过注入一些传递性。这样便可从公理中移除 $\vee$，将其改写为 $\forall x$、y、z、t_1、t_2、t_3、s_1、s_2、s_3

$$t_1 \leq x \text{ and } y \leq s_1 \text{ and } t_2 \leq y \text{ and } x \leq s_2 \text{ and } t_3 \leq z \text{ and } x \leq s_3 \text{ and } y \leq s_3 \Rightarrow t_1 \leq s_1 \text{ or } t_2 \leq s_2 \text{ or } t_3 \leq s_3$$

按照 [3], 的术语，该子句是线性且互斥的，因此我们消去前提中的冗余变量（注意到 z 只出现在不等式右侧，而 x 和 y 出现在两侧）：我们应用传递性闭包，并消去子句前提中的变量。该过程得到等价子句 $\forall t_1, t_2, t_3, s_1, s_2, s_3$

$$t_1 \leq s_2 \text{ and } t_1 \leq s_3 \text{ and } t_2 \leq s_1 \text{ and } t_2 \leq s_3 \Rightarrow t_1 \leq s_1 \text{ or } t_2 \leq s_2 \text{ or } t_3 \leq s_3$$

现在，我们用 $c\backslash p_j/d$ 实例化 s_j，并利用剩余化将 $t_i \leq s_j$ 改写为 $t_i \leq c\backslash p_j/d$和 $ct_id \leq p_j$。这得到等价子句 $\forall t_1, t_2, t_3, c, p_1, p_2, p_3, d$

$$ct_1d \leq p_2 \text{ and } ct_1d \leq p_3 \text{ and } ct_2d \leq p_1 \text{ and } ct_2d \leq p_3$$
$$\Rightarrow ct_1d \leq p_1 \text{ or } ct_2d \leq p_2 \text{ or } ct_3d \leq p_3$$

将该子句转换为相应的超序列规则，可得

$$\frac{\Xi \mid \Gamma, \Sigma_1, \Delta \Rightarrow \Pi_2 \quad \Xi \mid \Gamma, \Sigma_1, \Delta \Rightarrow \Pi_3 \quad \Xi \mid \Gamma, \Sigma_2, \Delta \Rightarrow \Pi_1 \quad \Xi \mid \Gamma, \Sigma_2, \Delta \Rightarrow \Pi_3}{\Xi \mid \Gamma, \Sigma_1, \Delta \Rightarrow \Pi_1 \mid \Gamma, \Sigma_2, \Delta \Rightarrow \Pi_2 \mid \Gamma, \Sigma_3, \Delta \Rightarrow \Pi_3}$$

同样，单线性的第二个公理给出了超序列规则

$$\frac{\Xi \mid \Gamma, \Sigma_2, \Delta \Rightarrow \Pi_1 \quad \Xi \mid \Gamma, \Sigma_3, \Delta \Rightarrow \Pi_1 \quad \Xi \mid \Gamma, \Sigma_1, \Delta \Rightarrow \Pi_2 \quad \Xi \mid \Gamma, \Sigma_3, \Delta \Rightarrow \Pi_2}{\Xi \mid \Gamma, \Sigma_1, \Delta \Rightarrow \Pi_1 \mid \Gamma, \Sigma_2, \Delta \Rightarrow \Pi_2 \mid \Gamma, \Sigma_3, \Delta \Rightarrow \Pi_3}$$

我们分别将这些超序列规则称为 (URL1) 和 (URL2)。

推论 3.10。加入规则 (URL1) 和(URL2)后的 HFL 为簇 SRL by [3] 提供了无割超序列演算。

值得注意的是，尽管 SRL 的等式公理化是无限的，且涉及迭代共轭，但超序列演算只需两条推理规则。这是因为超序列演算能够直接深入到（有限）次直不可约结构的层次（此处为 $\mathsf{SRL}_{FSI} = \mathsf{URL}$），并据此读出公理化。

4. Continnum-many subvarieties of M

尽管我们对基于 M_X 的剩余格已有相当深入的了解，其中 X 是一个集合，但现在我们将证明 M 中存在连续统多个子簇。更准确地说，我们将证明：由所有形如 $\mathsf{M}_\mathbf{G}$ 的剩余格（其中 G 是一个（阿贝尔）群）生成的簇 M_G 具有连续统多个子簇。我们从 M_G 的一个方程基开始。

命题 4.1。簇 M_G 由以下方程公理化：$1 = \gamma_1(u\backslash v) \vee \gamma_2(v\backslash u) \vee \gamma_3(x\backslash(u \wedge v)) \vee \gamma_4((u \vee v)\backslash x) \vee \gamma_5(x(x\backslash 1))$，其中 γ_1、γ_2、γ_3、γ_4、$\gamma_5 \in \Gamma(Var)$。

证明。公式 $x = \overline{\perp}$ 或 $x = \overline{\top}$ 或 $x(x\backslash 1) = 1$ 公理化了该簇中的 FSI，因此由定理 3.5 可得结论。□

众所周知，群有连续统多个簇（例如，参见[13]），我们可以利用这一事实证明 $\mathsf{M}_\mathbf{G}$有连续统多个子簇，具体如下。从两个群簇 $\mathcal{V}_1 \neq \mathcal{V}_2$ 出发，我们可以分别考虑这两个簇中以可数多个生成元生成的自由群 F_1 和 F_2；因此有 $\mathsf{V}(\mathsf{F}_1) = \mathcal{V}_1 \neq \mathcal{V}_2 = \mathsf{V}(\mathsf{F}_2)$。接着可以证明，$\mathsf{V}(\mathsf{M}_{\mathbf{F}_1}) \neq \mathsf{V}(\mathsf{M}_{\mathbf{F}_2})$。

众所周知，阿贝尔群只有可数多个簇。然而，我们仍然能够证明，$\mathsf{M}_\mathbf{G}$ 中交换代数所构成的簇 CM_G 有连续统多个子簇。实际上，我们完整描述了 CM_G的子簇格。

我们考虑由可数多个链 $(\mathbb{N}, \trianglelefteq)$ 的副本构成的直积幂 $\mathbb{N}^\omega$，以及它的子集 I，其中包含最终为

零的（不一定严格）递减序列，例如 (4, 2, 1, 1, 0, 0, . . .)、(3, 2, 1, 1, 1, 0, 0, . . .) 等。我们也分别用 (4, 2, 1, 1) 和 (3, 2, 1, 1, 1) 表示这些序列。容易看出，I 构成直积的一个子格 I。我们还考虑直积 I^{ω} 的子集 $I^{\oplus\omega}$，它由所有最终为 I 中零序列的元素序列构成。容易看出，这定义了直积 I^{ω} 的一个子格 $\mathrm{I}^{\oplus\omega}$；将 $\mathrm{I}^{\oplus\omega}$ 称为 I 的可数多个副本的直和是合理的。在 I 中，我们用逗号分隔每个序列中的数字，而在 $I^{\oplus\omega}$ 的每个元素中，我们用分号分隔各个序列；这样就可以按需省略括号。因此，(2, 1; 3, 1, 1; 0; 2, 1, 1; 0; . . .) 是 $I^{\oplus\omega}$ 中的一个元素示例。

现在令 $\mathrm{P} = \mathbf{2} \times \mathrm{I}^{\oplus\omega}$，其中 2 是定义在 $\{0,1\}$ 上的二元格。对于 $a \in P$，我们将 exp(a) 定义为 a 中出现的最大数；例如，

$$\exp(1;2,1;3,1,1;0;2,1,1;0;\dots) = 3 \text{ and } \exp(0;1,1,1;4,1;3,2;0;\dots) = 4.$$

此外，对于 $a \in P$，我们记 $a = (a_0; a_1; a_2; \dots)$，其中 $a_0 \in \{0,1\}$ 和 $a_n \in I$，对于 $n > 0$；我们定义 $\mathrm{primes}(a) = \{n \in \mathbb{N} : a_n \neq \overline{0}\}$。对于 $T \subseteq P$，我们定义 $\exp(T) = \{\exp(a) : a \in T\}$ 以及 $\mathrm{primes}(T) = \bigcup\{\mathrm{primes}(a) : a \in T\}$。

若 P 的下集 D 满足以下条件，则称其为 $\mathbb{Z}$-闭的：对所有 $a \in P$，

$\exp(D \cap {\uparrow}a)$ 或 $\mathrm{primes}(D \cap {\uparrow}a)$ 无界，意味着 $a \vee (1; 0; 0; \dots) \in D$。

例如，对于 $a = (0;1; 0; 0; 0; \dots)$，该条件具有以下推论：

$$(0;1;1;0;0;\dots), (0;1;2;0;0;\dots), (0;1;3;0;0;\dots), \dots \in D$$
or
$$(0;1,1;0;0;\dots), (0;2,1;0;0;\dots), (0;3,1;0;0;\dots), \dots \in D$$

由于 $\exp(D \cap {\uparrow}a)$ 无界，因此推出 $(1; 1; 0; 0; 0; \dots) \in D$。此外

$$(0;1;1;0;0;\dots), (0;1;0;1;0;\dots), (0;1;0;0;1;\dots), \dots \in D$$

由于 $\mathrm{primes}(D \cap {\uparrow}a)$ 无界，因此推出 $(1; 1; 0; 0; 0; \dots) \in D$。然而，

$$(0;1;\ 1;0;0;\dots), (0;1;1,\ 1;0;0;\dots), (0;1;1,1,\ 1;\ 0;\ 0;\ \dots\dots) \in D$$

并不蕴含 $(1;\ 1;\ 0;\ 0;\ 0;\ \dots\dots) \in D$。

我们用 $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{P})$ 表示 P 的所有 $\mathbb{Z}$-闭下集构成的格。

定理 4.2. CM_{G} 的子簇格与 $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{P})$ 同构。

证明。回顾一下，一个代数类在 $\mathrm{HSP}_{\mathsf{U}}$ 下封闭，当且仅当它能由正全称句公理化。换言之，$\mathrm{HSP}_{\mathsf{U}}$-类与正全称类一致。

设 $\mathcal{F}$ 是一个同余分配簇，且 $\mathcal{F}_{FSI}$ 是一个正全称类。我们断言，$\mathcal{F}$ 的子簇与 $\mathcal{F}_{FSI}$ 的 $\mathrm{HSP}_{\mathsf{U}}$-子类之间存在双射对应，该对应由 $\mathcal{V} \mapsto \mathcal{V}_{FSI}$ 和 $\mathcal{K} \mapsto \mathrm{HSP}(\mathcal{K})$ 给出；此外，显然该对应保持并反映包含序。事实上，$\mathcal{V}_{FSI} = \mathcal{V} \cap \mathcal{F}_{FSI}$，因此 $\mathcal{V}_{FSI}$ 可由正全称句公理化，对应的正向映射定义良好。为证明这两个映射互为逆映射，注意 $\mathrm{HSP}(\mathcal{V}_{FSI}) \subseteq \mathcal{V} \subseteq \mathrm{SP}(\mathcal{V}_{SI}) \subseteq \mathrm{HSP}(\mathcal{V}_{FSI})$，并由 J´onsson 引理可得 $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{FSI} \subseteq \mathrm{HSP}(\mathcal{K})_{FSI} \subseteq \mathrm{HSP}_{\mathsf{U}}(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$。

注意到，剩余格由 [10] 构成一个同余分配簇，并且根据定理 3.5 和命题 4.1，$(\mathrm{CM}_{\mathsf{G}})_{FSI} = \mathrm{CM}_{\mathsf{G}} \cap \mathrm{SRL}_{FSI}$ 可由正全称句公理化。因此，根据上一段，CM_{G} 的子簇格与 CM_{G} 中 FSI 的 $\mathrm{HSP}_{\mathsf{U}}$-类之格同构，

根据定理 3.5 和命题 4.1，它们是由形如 $\mathbf{M_G}$ 的代数构成的 $\mathrm{HSP_U}$-类，其中 G 是阿贝尔群。

进一步注意到，H 可以替换为 I。事实上，所有形如 $\mathbf{M_G}$ 的代数的超幂（其中 G 是阿贝尔群）仍是同一形式的代数（它满足相同的一阶句子，因此也满足所有正全称句）。此外，子代数也具有相同形式（其中我们也包括平凡代数）。最后，由于所有这种形式的代数都是单的（因为它们的格约化是单的），H 不会带来任何新的代数。因此，我们关注的是由形如 $\mathbf{M_G}$ 的代数组成的 $\mathrm{ISP_U}$ 类，其中 G 是阿贝尔群。

现在我们证明，此类与阿贝尔群的 $\mathrm{ISP_U}$-类之间存在双射对应：对于每个阿贝尔群类 $\mathcal{K}$，都有 $\mathrm{ISP_U}(\{\mathbf{M_H}:\mathrm{H}\in\mathcal{K}\})=\mathrm{I}\{\mathbf{M_G}:\mathrm{G}\in\mathrm{SP_U}(\mathcal{K})\}$，因此该类可以与 $\mathrm{ISP_U}(\mathcal{K})$ 相关联；显然，这种对应保持并反映序。

首先，我们证明 $\mathrm{IP_U}(\{\mathbf{M_H}:\mathrm{H}\in\mathcal{K}\})=\mathrm{I}\{\mathbf{M_G}:\mathrm{G}\in\mathrm{IP_U}(\mathcal{K})\}$。对于一个剩余格 R，如果 $\mathrm{R}\in\mathrm{IP_U}(\{\mathbf{M_H}:\mathrm{H}\in\mathcal{K}\})$，那么 R 满足所有在 $\mathbf{M_H}$'s（其中 $\mathrm{H}\in\mathcal{K}$）中成立的一阶语句。特别地，R 是交换的、单线性的，高度至多为 3，并且其所有非界元都是可逆的、对乘法封闭且充当顶元的单位元。因此，对于某个阿贝尔群 G，R 同构于 $\mathbf{M_G}$。此外，显然，$\mathrm{P_U}(\mathcal{K})$ 中的所有代数都是阿贝尔群。因此，方程两侧的类中仅包含与某个阿贝尔群 G 对应的 $\mathbf{M_G}$ 同构的代数；只需考察这类代数即可：我们证明，对每个阿贝尔群 G，都有 $\mathbf{M_G}\in\mathrm{IP_U}(\{\mathbf{M_H}:\mathrm{H}\in\mathcal{K}\})$ 当且仅当 $\mathrm{G}\in\mathrm{IP_U}(\mathcal{K})$；我们将所有代数中的界元统一记作 I 并省略不写。

若 $\mathbf{M_G}\in\mathrm{P_U}(\{\mathbf{M_H}:\mathrm{H}\in\mathcal{K}\})$，则存在指标集 I、超滤子 U on$I$ 以及 $\mathrm{H}_i\in\mathcal{K}$, $i\in I$，使得 $\mathbf{M_G}=\prod\mathbf{M_{H_i}}/U$。因此，对于每个 $g\in G$，都存在 $x_g\in\prod\mathbf{M^{H_i}}$，使得 $g=[x_g]$是 x_g 的等价类。我们用 $\overline{\top}$ 和 $\overline{\bot}$ 分别表示 $\prod\mathbf{M^{H_i}}$ 中的元组 $(\top)_{i\in I}$ 和 $(\bot)_{i\in I}$。那么对所有 $g\in G$，都有 $g\neq[\overline{\top}]$ 和 $g\neq[\overline{\bot}]$，因为 g 可逆，而 $[\overline{\top}]$ 和 $[\overline{\bot}]$ 是不同于单位元的幂等元。因此我们知道 $\{i\in I:\ x_g(i)\neq\top\}\in U$ 以及$\{i\in I:\ x_g(i)\neq\bot\}\in U$，所以 $\{i\in I:\ x_g(i)\in H\}=\{i\in I:\ x_g(i)\neq\top\}\cap\{i\in I:x_g(i)\neq\bot\}\in U$。现在在 $\prod\mathbf{H_i}$ 中定义一个元组 x：若 $x_g(i)\in H_i$，则令 $x(i)=x_g(i)$；否则令$x(i)=1$。于是我们有 $g=[x_g]=[x]\in\prod H_i/U$，因此 $\mathrm{G}\in\mathrm{P_U}(\mathcal{K})$。

如果 $\mathrm{G}\in\mathrm{P_U}(\mathcal{K})$，那么存在一个指标集 I、定义在 I 上的超滤子 U，以及 $\mathrm{H}_i\in\mathcal{K}$, $i\in I$，使得 $\mathrm{G}=\prod\mathbf{H_i}/U$。使用相同的指标集 I和定义在 I 上的超滤子 U，我们知道 $\prod\mathbf{M_{H_i}}/U$ 也具有 $\mathbf{M_K}$ 的形式，其中 K 是一个阿贝尔群。由于$[\overline{\top}]\vee[x]=[\overline{\top}\vee x]=[\overline{\top}]$和 $[\overline{\bot}]\wedge[x]=[\overline{\bot}\wedge x]=[\overline{\bot}]$，我们得到 $[\overline{\top_{\mathbf{M_{H_i}}}}]=\top_{\prod\mathbf{M_{H_i}}/U}$和$[\overline{\bot_{\mathbf{M_{H_i}}}}]=\bot_{\prod\mathbf{M_{H_i}}/U}$。对于 $[x]\in K$，我们有$[x]\neq[\overline{\top_{\mathbf{M_{H_i}}}}]$和 $[x]\neq[\overline{\bot_{\mathbf{M_{H_i}}}}]$。因此 $\{i\in I:\ x(i)\neq\top_{\mathbf{M_{H_i}}}\}\in U$和 $\{i\in I:\ x(i)\neq\bot_{\mathbf{M_{H_i}}}\}\in U$，故 $\{i\in I:\ x(i)\in H_i\}=\{i\in I:\ x(i)\neq\top_{\mathbf{M_{H_i}}}\}\cap\{i\in I:\ x(i)\neq\bot_{\mathbf{M_{H_i}}}\}\in U$；所以 $[x]\in\prod H_i/U=\mathrm{G}$和 $K\subseteq G$。反过来，如果 $[x]\in\prod H_i/U=\mathrm{G}$，那么 $[x]\in K$，因此 $G\subseteq K$。因此 $\mathbf{M_G}\in\mathrm{P_U}(\{\mathbf{M_H}:\mathrm{H}\in\mathcal{K}\})$。

再次注意，要证明 $\mathrm{S}(\mathbf{M_H})=\{\mathbf{M_G}:\mathrm{G}\in\mathrm{S}(\mathrm{H})\}$，只需关注形式为 $\mathbf{M_G}$ 的代数，其中 G 是阿贝尔群。若 $\mathbf{M_G}\in\mathrm{S}(\mathbf{M_H})$，则对所有$x$、$y\in G$，有 $x\cdot_{\mathbf{G}}y=x\cdot_{\mathbf{M_G}}y=x\cdot_{\mathbf{M_H}}y=x\cdot_{\mathbf{H}}y$ 且 $x^{-1_{\mathbf{G}}}=x\backslash_{\mathbf{M_G}}1=x\backslash_{\mathbf{M_H}}1=x^{-1_{\mathbf{H}}}$；因此 $\mathrm{G}\in\mathrm{S}(\mathrm{H})$。反之，若 $\mathrm{G}\in\mathrm{S}(\mathrm{H})$，则对所有 x、$y\in M_G\setminus\{\bot,\top\}$，有 $x\cdot_{\mathbf{M}_G}y=x\cdot_{\mathbf{G}}y=x\cdot_{\mathbf{H}}y=x\cdot_{\mathbf{M}_H}y$、$x\backslash_{\mathbf{M}_G}y=x^{-1_{\mathbf{G}}}\cdot_{\mathbf{G}}y=x^{-1_{\mathbf{H}}}\cdot_{\mathbf{H}}y=x\backslash_{\mathbf{M}_H}y$和 $y/_{\mathbf{M}_G}x=y\cdot_{m_G}x^{-1_{\mathbf{G}}}=y\cdot_{m_H}x^{-1_{\mathbf{H}}}=y/_{\mathbf{M}_H}x$。此外，由于 $\mathbf{M}_G$ 是严格紧致的

，G 和 H 上的运算在 $\{\bot, \top\}$ 中含有 x、 y 之一时也相同。因此 $\mathbf{M_G} \in$S($\mathbf{M_H}$)。

事实上，鉴于每个代数都是其有限生成子代数的超积，阿贝尔群的 $\mathrm{ISP_U}$-类完全由其与有限生成阿贝尔群类的交集所决定。因此，我们只关注此类交集；显然，这种对应保持并反映序。

根据有限生成阿贝尔群基本定理，我们知道每个有限生成阿贝尔群都同构于恰好一个以下形式的群

$$\mathbb{Z}^m \times (\mathbb{Z}_{p_1^{n_{1,1}}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_1^{n_{1,m_1}}}) \times \cdots \times (\mathbb{Z}_{p_k^{n_{k,1}}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_k^{n_{k,m_k}}})$$

对于某些 m、 k、 m_1..... m_k、 $n_{i,\ j} \in \mathbb{N}$，其中 $n_{i,\ j} \geq n_{i,\ j+1}$ 对于所有适当的 i、j，并且$p_1 < p_2 < \cdots < p_k < \ldots$是所有素数的列表。我们将所有此类群的集合记为 $\mathcal{FA}$；此外，我们将 $\mathcal{FA}$ 中的所有有限代数（即，其中$m = 0$）记为 $f\mathcal{A}$。

由于 $\mathcal{FA}$ 是有限生成阿贝尔群各同构类的一个完备代表集，因此，与其考虑阿贝尔群的 $\mathrm{ISP_U}$-类与有限生成阿贝尔群类的交集，不如转而关注阿贝尔群的 $\mathrm{ISP_U}$-类与 $\mathcal{FA}$的交集。换言之，我们已经证明，$\mathrm{CM_G}$ 的子簇格与 $\{\mathcal{K} \cap \mathcal{FA}$ 同构：$\mathcal{K}$ 是阿贝尔群的一个 $\mathrm{ISP_U}$-类$\}$，其序定义如下： $\mathcal{K} \cap \mathcal{FA} \leq \mathcal{L} \cap \mathcal{FA}$ 当且仅当 $\mathrm{ISP_U}$($\mathcal{K} \cap \mathcal{FA}$) $\subseteq \mathrm{ISP_U}(\mathcal{L} \cap \mathcal{FA})$。下文中，我们将用 $\mathcal{K}_{\mathcal{FA}}$ 表示$\mathcal{K} \cap \mathcal{FA}$。

对于上面展示的阿贝尔群，我们关联以下序列

$$(m; (n_{1,1}, \ldots, n_{1,m_1}, 0, \ldots); \ldots; (n_{k,1}, \ldots, n_{k,m_k}, 0, \ldots); (0, \ldots); \ldots)$$

它是格 $\mathbb{N} \times \mathrm{I}^{\oplus\omega}$的一个元素。另外请注意，从 $\mathcal{FA}$ 到 $\mathbb{N} \times I^{\oplus\omega}$ 的双射实际上是 $\mathbb{N} \times \mathrm{I}^{\oplus\omega}$ 与$\mathcal{FA}$ 之间的格同构，其序定义如下：G $\leq_{\mathcal{FA}}$ H 当且仅当 G $\in$IS(H)。

现在，形如 $\mathcal{K}_{\mathcal{FA}}$ 的集合，其中 $\mathcal{K}$ 是阿贝尔群的一个 $\mathrm{ISP_U}$-类，当然是 $\mathcal{FA}$ 的下集，但遗憾的是，并非 $\mathcal{FA}$ 的所有下集都具有这种形式。例如，注意到对于 r、 $s \in \mathbb{Z}^+$，G $\in f\mathcal{A}$，以及 $\mathcal{K}$（阿贝尔群的一个 $\mathrm{ISP_U}$-类），我们有：G$\times\mathbb{Z}^r \in \mathcal{K}$ 当且仅当 G$\times\mathbb{Z}^s \in \mathcal{K}$。（因此，例如，$\downarrow\{\mathbb{Z}^2\} = \{\{1\}, \mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}\}$ 是 $\mathcal{FA}$ 的一个下集，但不具有 $\mathcal{K}_{\mathcal{FA}}$ 的形式。）

要证明这一点，只需证明：若 G $\times\ \mathbb{Z} \in \mathcal{K}$，则对所有 $t \in \mathbb{Z}^+$，都有 G $\times\ \mathbb{Z}^t \in \mathcal{K}$。令 U 为 $\mathbb{N}$ 上的一个非主超滤子，并考虑 $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}/U$ 中的元素 $a = [1]_U$ 和 $b = [$(2, 22, 23, . . .)$]_U$；它们的阶都是无限的。注意，对于所有 m、 $n \in \mathbb{N}$，集合 $\{i \in \mathbb{N}$: $m \cdot 1 = n \cdot 2^i\}$ 至多包含一个元素。由于 U 不是主超滤子，我们得到 $\{i \in \mathbb{N}$: $m \cdot 1 = n \cdot 2^i\} \notin U$，因此 $ma \neq nb$。于是$\langle a$、$b\rangle \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$，并且 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \in \mathrm{P_U}(\mathbb{Z})$。类似地，为了证明 $\mathbb{Z}^t \in \mathrm{P_U}(\mathbb{Z})$，只需取 $a_{p_1} = [(p_1, p_1^2, p_1^3, \ldots)]_U$、 $a_{p_2} = [(p_2, p_2^2, p_2^3, \ldots)]_U$、 . . .、 $a_{p_t} = [(p_t, p_t^2, p_t^3, \ldots)]_U$，其中 p_1、 p_2、 . . .、 p_t 是互异素数，并且我们有 $\langle a_{p_1}$、 . . .、 $a_{p_t}\rangle \cong \mathbb{Z}^t$。更一般地，对于任意 G $\in f\mathcal{A}$，我们可以证明 $\{$G $\times\mathbb{Z}^t$: $t \in \mathbb{Z}^+\} \subseteq \mathrm{P_U}$(G $\times\mathbb{Z}$)。

因此，只要 r 和 s 都非零，就可以将 G $\times\mathbb{Z}^r$ 和 G $\times\mathbb{Z}^s$ 视为相同。这可以通过考虑 $\mathcal{FA}$ 的子集 $\mathcal{FA}' = f\mathcal{A} \cup \{\mathbb{Z} \times$G : G $\in f\mathcal{A}\}$ 来实现。集合 $\mathcal{FA}'$ 也构成一个格（实际上是 $\mathcal{FA}$ 的子格），同构于 P $= \mathbf{2} \times \mathrm{I}^{\oplus\omega}$。因此，通过这一同构，我们也可以将 exp 和 primes 的定义应用于 $\mathcal{FA}'$ 的下集。更具体地说， $\mathcal{FA}'$ 的一个下集 D 是 $\mathbb{Z}$-闭的，当且仅当对于所有 G $\in f\mathcal{A}$，exp($D \cap \uparrow$G) 或 primes($D \cap \uparrow$G)

无界意味着 $\mathbb{Z}\times$G $\in D$。此外，根据上一段所确立的事实，我们在 $\{\mathcal{K}_{\mathcal{FA}}: \mathcal{K}$ 是一个 ISP$_{\mathsf{U}}$-类$\}$ 与$\{\mathcal{K}_{\mathcal{FA}'}: \mathcal{K}$ 是一个ISP$_{\mathsf{U}}$-类$\}$之间有一个格同构，其中 $\mathcal{K}_{\mathcal{FA}'} = \mathcal{K} \cap \mathcal{FA}'$。

显然，如果 $\mathcal{K}$ 是阿贝尔群的 ISP$_{\mathsf{U}}$-类，那么 $\mathcal{K}_{\mathcal{FA}'}$ 是$\mathcal{FA}'$的下集。遗憾的是，$\mathcal{FA}'$ 的下集并不全都具有这种形式。例如，$\{\mathbb{Z}_p: p$是素数$\}$ 是 $\mathcal{FA}'$的下集，但由于 $\mathbb{Z} \in$ P$_{\mathsf{U}}(\{\mathbb{Z}_p: p$是素数$\})$，$\{\mathbb{Z}_p: p$ 是素数$\}$ 并非 $\mathcal{K}_{\mathcal{FA}}$的形式。下面我们将证明，$\{\mathcal{K}_{\mathcal{FA}'}: \mathcal{K}$ 是 ISP$_{\mathsf{U}}$-类$\}$ 等于 $\mathcal{FA}'$的 $\mathbb{Z}$-闭下集所构成的格。

首先注意，对于 $X \subseteq P$，exp(X) 和 primes(X) 有界，当且仅当存在 $K, N \in \mathbb{N}$，使得对所有 $a \in X, k > K, n, m \in \mathbb{N}$，都有 $a_k = \overline{0}$ 且 $a_{n,\ m} \leq N$。因此，对于 $X \subseteq \mathcal{FA}'$，exp($X$) 和 primes($X$) 有界，当且仅当存在 $K, N \in \mathbb{N}$，使得 X中各群的分解所包含的循环群均为 $\mathbf{Z}_{p_k^n}$，其中 $k \leq K$且 $n \leq N$。这又等价于要求存在 $M \in \mathbb{N}$，使得X中所有群的所有元素的阶都不超过 M（取 $M = (p_1 \cdots p_K)^N$即可）。

现在，对于阿贝尔群的一个 ISP$_{\mathsf{U}}$类 $\mathcal{K}$，$\mathcal{K}_{\mathcal{FA}'}$ 是 $\mathcal{FA}'$的下集。为证明它是 $\mathbb{Z}$-闭的，设 G $\in f\mathcal{A}$。如果 exp($\mathcal{K}_{\mathcal{FA}'} \cap \uparrow$G) 或 primes($\mathcal{K}_{\mathcal{FA}'} \cap \uparrow$G) 无界，那么来自 $\mathcal{K}_{\mathcal{FA}'}$ 的群中元素的序没有一致上界；因此，存在 $\mathcal{K}_{\mathcal{FA}'} \cap \uparrow$G 的一个无限子集 $\{\mathbf{H}_n: n \in \mathbb{N}\}$，使得 H$_n$包含一个阶大于 n的元素，不妨设为 h_n。因此，在 $\{\mathbf{H}_n : n \in \mathbb{N}\}$ 的任意固定非主超积 H 中，元素 $[(h_n)]$的阶是无限的，所以 H 包含一个 $\mathbb{Z}$的副本。

另一方面，注意若 G $= \{g_1, \ldots, g_k\}$，则对每个群 A，都有 G $\in$ IS(A) 当且仅当 A $\vDash \phi_{\mathbf{G}}$，其中 $\phi_{\mathbf{G}}$ 编码了 G 的乘法：$\exists x_{g_1}$，.....，$x_{g_k}(\bigwedge\{x_{g_i} \neq x_{g_j}: i \neq j\} \wedge \bigwedge\{x_{g_i}x_{g_j} = x_{g_ig_j}: 1 \leq i, j \leq n\})$。由于对所有 n，H$_n$ 都包含 G 的一个副本，H$_n$ 满足 $\phi_{\mathbf{G}}$；因此 H 也满足 $\phi_{\mathbf{G}}$，且 H 包含一个与 G 同构的子群。因此，$\mathbb{Z} \times$ G $\in$ IS(H) $\subseteq$ IS($\mathcal{K}$) $= \mathcal{K}$，所以 $\mathbb{Z} \times$ G$\in \mathcal{K}_{\mathcal{FA}'}$。

反过来，对于一个 $\mathbb{Z}$-封闭下集 D of $\mathcal{FA}'$，我们定义 $\mathcal{K}_D$ = ISP$_{\mathsf{U}}$(D) 并证明 $\mathcal{K}_D \cap \mathcal{FA}' = D$。由于 $D \subseteq \mathcal{K}_D$ and $D \subseteq \mathcal{FA}'$，只需证明$\mathcal{K}_D \cap \mathcal{FA}' \subseteq D$。若 $\mathbb{Z}^m \times$ G $\in \mathcal{K}_D \cap \mathcal{FA}'$，其中 $m \in \{0, 1\}$ and G $\in f\mathcal{A}$，则 $\mathbb{Z}^m \times$G 的一个副本包含于某个 $\{$A$_i$ 的超积 $\prod$ A$_i/U$ 中：$i \in I\} \subseteq D$。由于 $\prod$A$_i/U$ 包含 G 的一个副本，它满足句子 $\phi_{\mathbf{G}}$，因此 $I_{\mathbf{G}} := \{i \in I :$ G $\in$IS(A$_i$)$\} = \{i \in I :$ A$_i \vDash \phi_{\mathbf{G}}\} \in U$。若 $m = 1$，则 $\prod$ A$_i/U$ 包含 $\mathbb{Z}$ 的一个副本，因此它有一个无限阶元素。因此，不存在满足以下条件的 M：$\prod$A$_i/U$ 满足句子 $(\forall x)(Mx = 0)$；也不存在满足以下条件的 M：$\{$A$_i$：$i \in I_{\mathbf{G}}\}$ 满足该句子；因此，$\{$A$_i$：$i \in I_{\mathbf{G}}\}$ 中元素的阶没有一致上界；所以 exp($\{$A$_i$：$i \in I_G\}$) 或 primes($\{$A$_i$：$i \in I_{\mathbf{G}}\}$) 无界。由于 exp($\{$A$_i$: $i \in I_{\mathbf{G}}\}$) $\subseteq$exp($D \cap \uparrow$G), primes($\{$A$_i$: $i \in I_{\mathbf{G}}\}$) $\subseteq$primes($D \cap \uparrow$G)，且 D 是一个 $\mathbb{Z}$-封闭下集，我们得到 $\mathbb{Z}^m \times$ G $= \mathbb{Z} \times$G $\in D$。若 $m = 0$，则我们还有 $\mathbb{Z}^m \times$G $=$ G $\in D$。

因此，格 $\{\mathcal{K}_{\mathcal{FA}'}: \mathcal{K}$ is a ISP$_{\mathsf{U}}$-class$\}$ 同构于 $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}$(P)，从而 CM$_{\mathsf{G}}$ 的子簇格 Λ(CM$_{\mathsf{G}}$ 同构于格 $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}$(P)。□

推论 4.3. 由 $\{\mathbf{M}^{\mathbb{Z}_p}: p$ 生成的簇是素数$\}$，有连续统多个子簇。因此，M$_{\mathsf{G}}$ 和 M 的子簇格的大小均为连续统。

证明。对于每个素数 p，簇 V(M$^{\mathbb{Z}_p}$)对应于 P 中序列 (0;0; .. .;0;1; 0;. . .)的主向下集，其中 1 位于素数p 的位置。由所有M$^{\mathbb{Z}_p}$ 生成的簇是所有 V(M$^{\mathbb{Z}_p}$) 的并，其中 p 是

素数，并对应于 $\mathbb{Z}$-闭下集

$$\overline{P\mathbb{N}} := \{(1;0;0;\dots),(0;1;0;\dots),\dots,(0;\dots;1;0;\dots),\dots\}$$

在P 中。$\overline{P\mathbb{N}}$ 的 $\mathbb{Z}$-闭子下集在格 $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}$(P) 中显然作为格同构于 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$。□

我们将 M 中满足该公式的代数所生成的簇记为 $\mathsf{CM}_{\mathbf{G}Z}$

(Z 群) $$x\overline{\top} = x \text{ or } x(x\backslash 1) = 1.$$

设F是定义在 $\{0,1,2,3\}$ 上的偏序集，其中 $0<1$、2、3与 1、2、3不可比。对于P $\times$ F 的一个下集 D和 $i \in F$，我们设 $D_i = \{a\colon (a,i) \in D\}$。如果 P $\times$ F的一个下集 D 满足 D_0、 D_1、 D_2 和 D_3 是 P的 $\mathbb{Z}$-闭下集，则称其为 $\mathbb{Z}$-闭的；我们用 $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}$(P $\times$ F) 表示 P $\times$F 的所有 $\mathbb{Z}$-闭下集所成的格。

定理 4.4。$\mathsf{CM}_{\mathsf{GZ}}$ 的子簇格同构于 $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}$(P $\times$F)。

证明。由定理 3.5 和推论 2.3 可知，$\mathsf{CM}_{\mathsf{GZ}}$ 的有限子直接不可约成员是形如 R、R + 1、R + 2 或 R + 3的单线性剩余格，其中 R $= \mathsf{M}_{\mathbf{G}}$，G 是阿贝尔群，A 是定义在 $G \cup \{\top\}$ 上的 $\top$-消去幺半群；R + 1 = $\mathsf{R}_{\mathbf{A},\ \mathbf{B}_1}$，其中 B_1 是基于 $\{\bot, b\}$ 、由图 2 给出的 $\bot$-半群，且 $b^2 = \bot$；R+2 = $\mathsf{R}_{\mathbf{A},\ \mathbf{B}_2}$，其中 B_2 是基于 $\{\bot, b_1, b_2\}$ 、由图 2 给出的 $\bot$-半群；以及 R+3 = $\mathsf{R}_{\mathbf{A},\ \mathbf{B}_3}$，其中 B_3是基于 $\{\bot, b\}$、由图 2 给出的 $\bot$-半群，且 $b^2 = b$；我们定义 R $+ 0 =$ R。注意，对于所有$i \in \{0,1,2,3\}$，R 都是 R $+ i$的子代数。

在定理4.2的证明中，我们看到，CM_{G} 的子簇由 $\mathbb{Z}$-闭下集 $\mathcal{FA}'$决定。现在我们概述一下，$\mathsf{CM}_{\mathsf{GZ}}$ 的子簇如何由偏序集 $\mathsf{M}_{\mathcal{FA}'} + \mathsf{F} := \{\mathsf{M}_{\mathbf{G}} + i : \mathsf{G} \in \mathcal{FA}', i \in F\}$ 的 $\mathbb{Z}$-闭下集决定，其中序由$\mathsf{M}_{\mathbf{G}} + i \le \mathsf{M}_{\mathbf{H}} + j$ iff$\mathsf{G} \le_{\mathcal{FA}'} \mathsf{H}$ 并且$i \le_{\mathbf{F}} j$给出；这个偏序集显然同构于 P $\times$ F，因此 P $\times$ F 的 $\mathbb{Z}$-闭下集的定义可以转移到这里。更具体地说，$\mathsf{M}_{\mathcal{FA}'}$ +F 的下集 D 是 $\mathbb{Z}$-闭的，当且仅当对于所有 $0 \le i \le 3$， $D \cap (\mathsf{M}_{\mathcal{FA}'} + \{i\})$ 同构于 $\mathbb{Z}$-闭下集 $\mathcal{FA}'$。

$\mathsf{CM}_{\mathsf{GZ}}$ 的每个子簇 $\mathcal{V}$ 都由其有限生成的有限子直接不可约代数决定。这些是形如 R、R + 1、R $+ 2$ 或 R $+ 3$ 的有限生成代数，其中 R $\in (\mathsf{CM}_{\mathsf{G}})_{FSI}$，即 R $= \mathsf{M}_{\mathbf{G}}$，且 G 是有限生成阿贝尔群。因此，$\mathcal{V}_{FSI}$ 是 $\mathsf{M}_{\mathcal{FA}'} + \mathsf{F}$ 的下集。

对于 $0 \le i \le 3$，如果 G $\in f\mathcal{A}$ 且 exp($D_i \cap \uparrow G$) 或 primes($D_i \cap \uparrow G$) 无界，其中 $D_i = \{\mathsf{K} \in \mathcal{FA}' \colon \mathsf{M}_{\mathbf{K}} + i \in \mathcal{V}_{FSI}\}$，那么根据定理 4.2 的证明，我们有 $\mathbb{Z} \times \mathsf{G} \in D_i$。因此， D_i 是 $\mathbb{Z}$-闭的 $\mathcal{FA}'$ 下集，且 $0 \le i \le 3$，从而 $\mathcal{V}_{FSI}$ 是 $\mathbb{Z}$-闭的 $M_{\mathcal{FA}'} + \mathsf{F}$ 的下集。

根据推论2.3，对于$\mathsf{M}_{\mathcal{FA}'}$+F的每个下集 D，来自 D 的代数的超积同构于$\mathsf{M}_{\mathbf{G}} + i$，其中某个 $0 \le i \le 3$。容易证明，对于这样的超积$\mathsf{M}_{\mathbf{G}} + i$，G 是 {H: $i \le_{\mathbf{F}} j$，M $_{\mathbf{H}} + j \in D$}的超积；由于 D 是一个下集，实际上G 是 $\{\mathsf{H} : \mathsf{M}_{\mathbf{H}} + i \in D\}$ 的超积。（另外，逆命题也成立：如果G 是 $\{\mathsf{H}_j : \ j \in J\}$ 和 $i \in F$的超积，那么$\mathsf{M}_{\mathbf{G}} + i$ 同构于下集 $\{\mathsf{M}_{\mathbf{K}_j} + k : \ j \in J,\ \mathsf{K}_j \le_{\mathcal{FA}'} \mathsf{H}_j,\ k \le_{\mathbf{F}} i\}$ $\mathsf{M}_{\mathcal{FA}'}$ +F 中代数的一个超积。）因此，如果 D 是一个 $\mathbb{Z}$-闭的，那么 G $\in D_i$；从而$\mathsf{M}_{\mathbf{G}} + i \in D$。因此，我们有$\mathsf{ISP}_{\mathsf{U}}(D)$ $\cap (M_{\mathcal{FA}'} + \mathsf{F}) = D$，所以 $\mathsf{CM}_{\mathsf{GZ}}$ 的子簇格同构于 $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}$(P $\times$F)。□

5. The finite embeddability property

本节将证明 SRL 的某些子簇具有有限嵌入性质。

回想一下，若一个类 $\mathcal{K}$ 满足有限嵌入性质（FEP），则称该类具有有限嵌入性质：对于任意代数 $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ 及其任意有限子集 B，若 A，则存在有限代数 $\mathbf{C} \in \mathcal{K}$，使得由 B 诱导的 $\mathbf{A}$ 的部分子代数 $\mathbf{B}$ 可嵌入 $\mathbf{C}$。

对于由递归方程集公理化的簇，有效的全称句子构成一个递归可枚举集。此外，如果该簇具有有限嵌入性质，那么任何无效的全称句子都会在该簇的某个有限代数中失效。通过枚举这些有限代数（利用该簇的有限可公理化性），我们便可枚举在该簇中失效的全称句子。因此，具有有限嵌入性质的递归可公理化簇具有可判定的全称理论；此外，它们由其有限代数生成为全称类（因而也生成为拟簇和簇）。

定理 5.1。簇 CM_G 具有有限嵌入性质。

证明。为证明这一点，我们首先断言阿贝尔群的簇具有有限嵌入性质。根据 [12]，中的定理 5.1，一个阿贝尔群是次直不可约的，当且仅当它是一个 p-循环群的子群；也就是说，它要么是一个 p^∞-群，要么是一个阶为 p^n 的循环群，其中 p 是素数。因此，每个有限生成的次直不可约阿贝尔群都是有限的。根据 [2] 中的推论 2，每个有限生成的阿贝尔群都是剩余有限的。根据 [4] 中的定理 1，这等价于具有有限嵌入性质，因此阿贝尔群的簇具有有限嵌入性质。

请注意，上述对有限生成次直不可约代数的刻画并不适用于 CM_G 中的代数，因为次直不可约这一概念有所不同。尽管如此，我们仍可以利用阿贝尔群的有限嵌入性质。

只需证明 CM_G 中子直接不可约代数的有限嵌入性质。设 $\mathbf{G}$ 是一个阿贝尔群，$\mathbf{B}$ 是 $\mathbf{M}_\mathbf{G}$ 的有限子集。不失一般性，我们可以假设 $\bot, \top \in B$，其中 $\top$ 和 $\bot$ 表示 $\mathbf{M}_\mathbf{G}$ 的界元，因此 $(B, \wedge, \vee)$ 是 $\mathbf{M}_G$ 的子格。于是 $(B', \cdot, 1)$ 是 $\mathbf{G}$ 的一个有限部分子群，其中$B' = B \setminus \{\top, \bot\}$。根据阿贝尔群的有限嵌入性质，存在一个有限阿贝尔群 $\mathbf{C}'$，使得 $(B', \cdot, 1)$ 可以嵌入 $\mathbf{C}'$；不失一般性，我们假设 $B' \subseteq C'$。

我们考虑集合 $C = C' \cup \{\top, \bot\}$，并定义一个序，使 C' 中的元素不可比较，并设定 $\bot < x < \top$，对所有 $x \in C'$ 均如此。此外，我们规定 $\top$ 对 $C \cup \{\top\}$ 具有吸收性，且 $\bot$ 对 C' 具有吸收性，从而扩展 $\mathbf{C}'$ 的乘法。最后，我们定义 $x \to y = x^{-1} \cdot y$ 对 $x \in C'$、$\top \to u = \bot = v \to \bot$ 对 $u \neq \top$ 以及 $v \neq \bot$ 和 $w \to \top = \top = \bot \to w$，对所有 w 均如此。

由于 $(B, \wedge, \vee)$ 是 $\mathbf{M}_G$ 的子格且 $B' \subseteq C'$，因此 $(B, \wedge, \vee)$ 是 $(C, \wedge, \vee)$ 的子格。对于所有 x、$y \in B'$，如果 $x \cdot_\mathbf{B} y \in B$，那么 $x \cdot_\mathbf{B} y = x \cdot_{\mathbf{B}'} y = x \cdot_{\mathbf{C}'} y = x \cdot_\mathbf{C} y$，因为 $\mathbf{G}$ 对乘法封闭；如果 $x \to_\mathbf{B} y \in B$，那么 $x^{-1_\mathbf{B}} \in B$ 和 $x \to_\mathbf{B} y = x^{-1_\mathbf{B}} \cdot_\mathbf{B} y = x^{-1_{\mathbf{B}'}} \cdot_{\mathbf{B}'} y = x^{-1_{\mathbf{C}'}} \cdot_{\mathbf{C}'} y = x \to_\mathbf{C} y$，因为 $\mathbf{G}$ 也对逆元封闭。最后，如果 x、$y \in B$ 和 $x \in \{\bot, \top\}$ 或 $y \in \{\bot, \top\}$，那么嵌入成立，因为对于所有 $a \in M_G$，$\bot \to_{\mathbf{M}_\mathbf{G}} a = \top = a \to_{\mathbf{M}_\mathbf{G}} \top$、$a\bot = \bot = \bot a$，并且对于所有 $b \neq \bot$ 和 $c \neq \top$，$b \to_{\mathbf{M}_\mathbf{G}} \bot = \bot = \top \to_{\mathbf{M}_\mathbf{G}} c$、$b\top = \top = \top b$。□

推论 5.2。簇 CM_G 的全称理论是可判定的。

实际上，我们可以利用基于残余框架的构造，为 SRL 的更多子簇证明有限嵌入性质，这与 GM_{G} 无关。

若方程具有 $x^m \leq x^n$ 的形式，其中 $n \neq m$，则称其为结纽方程。此外，我们考虑以下交换律的弱化形式。对于每个 $n \in \mathbb{Z}^+$ 和 $n+1$ 的非平凡分拆 a（即 $a = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$，其中 $a_0+a_1+\cdots+a_n = n+1$ 且并非所有 a_i 都为 1），我们考虑（$n+1$）元单位元（a）：

$$xy_1xy_2\cdots y_nx = x^{a_0}y_1x^{a_1}y_2\cdots y_nx^{a_n}.$$

例如，(2,0) 是单位元 $xyx = xxy$，而 (2,0, 1) 是单位元 $xyxzx = xxyzx$。我们将所有这些单位元称为弱交换律单位元。

定理 5.3. 如果 SRL 的一个子簇由一个结状单位元、一个弱交换单位元以及任意附加的（可能为空的）关于 $\{\vee, \cdot, 1\}$ 的方程集合公理化，那么它具有有限嵌入性质。

证明。若 $\mathcal{V}$ 是这样的簇，只需证明 $\mathcal{V}$ 中次直不可约代数具有有限嵌入性质；因此只需对单线性剩余格证明这一点。设 A 是 $\mathcal{V}$ 中的一个单线性剩余格，B 是 A 的有限部分子代数。

设 W 为由 B、$W' = W \times B \times W$ 生成的 A 的子幺半群，并定义 $N \subseteq W \times W'$ 为：若 $yxz \leq b$，则 $x\ N(y, b, z)$。那么，按照 [9] 的定义，$\mathbf{W_{A,B}} = (W, W', N, \cdot, 1)$ 是一个剩余框架，而 Galois 代数 $\mathbf{W_{A,B}}^+ = (\gamma_N[\mathcal{P}(W)], \cap, \cup_{\gamma_N}, \cdot_{\gamma_N}, \gamma(\{1\})\ \backslash, /)$ 是一个剩余格，其中 $X \cup_\gamma Y = \gamma(X \cup Y)$、$X \cdot_\gamma Y = \gamma(X \cdot Y)$、$X \backslash Y = \{z \in W\colon\ zX \subseteq Y\}$ 以及 $Y/X = \{z \in W\colon Xz \subseteq Y\}$。此外，[9] 表明，$\mathbf{W_{A,B}}^+$ 满足 A 所满足的所有 $\{\vee, \cdot, 1\}$-方程，并且 B 嵌入 $\mathbf{W_{A,B}}^+$。另外，[1] 表明，由于结规则和弱交换性，这样的 $\mathbf{W_{A,B}}^+$ 是有限的。因此，只需证明它属于 SRL；我们将证明 $\mathbf{W_{A,B}}^+$ 实际上是单线性的。

注意，对于所有 $(y, b, z) \in W'$，都有 $a \in \{(y, b, z)\}^\triangleleft$ 当且仅当 $a\ N(y, b, z)$ 当且仅当 $yaz \leq b$ 当且仅当 $a \leq y\backslash b/z$。因此，$\{(y, b, z)\}^\triangleleft = {\downarrow}(y\backslash b/z)$。根据伽罗瓦连接的基本性质，$\gamma_N[\mathcal{P}(W)]$ 中的每个元素 X 都是形如 $\{(y, b, z)\}^\triangleleft$ 的集合的交；实际上，$X = \bigcap\{\{w\}^\triangleleft\colon\ w \in X^\triangleright\}$。因此，$X$ 是 A 的主向下集的交。由于 A 是单线性的，X 要么等于其自身 A，要么是 A 的线性下集。

现在，令 $X, Y \in \gamma_N[\mathcal{P}(W)]$；因此，它们中的每一个要么等于 A，要么是 A 的线性子集。如果 $X \not\subseteq Y$ 且 $Y \not\subseteq X$，那么它们都不等于 A，因此二者都是线性下集。由于 $X \not\subseteq Y$，存在一个 $x \in X$ 使得 $x \notin Y$。由于，$Y \not\subseteq X$，Y 中的每个元素并不都低于 x，所以存在 $y \in Y$ 满足 $y \not\leq x$。由于 $x \notin Y$ 且 Y 是下集，我们得到 $x \not\leq y$；因此在此情形下 A 不是线性的。由 A 的单线性可知，它有一个顶元 $\top$ 和 $\top = x \vee y \in X \cup_\gamma Y$，后者也是一个下集；因此 $X \cup_\gamma Y = A$。此外，如果 $z \in X \cap Y$，则 $z \leq x, y$，由 A 的单线性可得 $z = \bot$；所以 $X \cap Y = \{\bot\}$。因此，$\gamma_N[\mathcal{P}(W)]$ 是单线性的。□

注意，所有结纽恒等式和所有弱交换恒等式都是关于 $\{\vee, \cdot, 1\}$ 的方程。因此，该定理涵盖了在公理化中包含多个结纽方程和/或多个弱交换方程的情形。

推论 5.4. 如果 SRL 的一个子簇由一个结纽恒等式、一个弱交换恒等式以及关于 $\{\vee, \cdot, 1\}$ 的任意（可以为空）方程集公理化，那么它的全称理论是可判定的。

6. Constructing Compact URLs

如果单线性剩余格 R 是 $\top$-幺元的（即满足：$x = \overline{\bot}$ 或 $x\overline{\top} = \overline{\top} = \overline{\top}x$），且 $R \setminus \{\top, \bot\}$ 对乘法封闭，则称 R 为紧致的。换言之，非线性紧 URL 是通过添加吸收 M 中所有元素的界元，从一个作为链之并的偏序幺半群 M 得到的。我们将给出一些构造紧致 URL 的方法，不过首先从公理化开始。

引理 6.1。紧致单线性剩余格类可由句子 $\forall x(x = \overline{\bot}$ 或 $x\overline{\top} = \overline{\top} = \overline{\top}x)$ 和 $\forall x, y, z($ $x = \overline{\top}$ 或 $x(y \wedge z) = xy \wedge xz)$ 公理化。

证明。根据紧致性的定义，只需证明，对于每个 $\top$-幺元非线性单线性剩余格 R，第二个公式刻画了$R \setminus \{\top, \bot\}$ 对乘法封闭这一事实。注意，如果 $a, b \notin \{\top, \bot\}$，那么 $ab\top = a\top = \top$，因此 $ab \neq \bot$。

首先假设 R 满足第二个公式，但存在 $a_1, a_2 \in R \setminus \{\bot, \top\}$，使得 $a_1a_2 = \top$。由于 R 不是线性的，存在一个元素 a_3，它与 a_1 或 a_2不可比较；不失一般性，a_3 与 a_2不可比较，因此 $a_3 \in R \setminus \{\bot, \top\}$。于是

$$\bot = a_1\bot = a_1(a_2 \wedge a_3) = a_1a_2 \wedge a_1a_3 = \top \wedge a_1a_3 = a_1a_3,$$

矛盾。因此，$R \setminus \{\top, \bot\}$ 对乘法封闭。

现在假设 $R \setminus \{\top, \bot\}$ 对乘法封闭，且 x、y、$z \in R$满足$x \neq \top$。若 $x = \bot$，则公式成立，因此我们假设 $x \neq \bot$。此外，若 y 与 z 可比较，则由于乘法保持序，$x(y \wedge z) = xy \wedge xz$ 成立；因此我们假设 y 与 z 不可比较。此时，$xy \vee xz = x(y \vee z) = x\top = \top$。由于 $R \setminus \{\top, \bot\}$ 对乘法封闭，xy与 xz 不可比较，因此 $x(y \wedge z) = x \cdot \bot = \bot = xy \wedge xz$。□

由此可得，另一个可选的第二个公式是 $\forall x, y, z(x = \overline{\top}$或 $(y \wedge z)x = yx \wedge zx)$。

推论 6.2. 由紧 URL 类生成的簇可由以下公理化

$$1 = \gamma_1(u\backslash v) \vee \gamma_2(v\backslash u) \vee \gamma_3(x\backslash(u \wedge v)) \vee \gamma_4((u \vee v)\backslash(x(u \vee v) \wedge (u \vee v)x))$$
$$1 = \gamma_5(u\backslash v) \vee \gamma_6(v\backslash u) \vee \gamma_7((u \vee v)\backslash x) \vee \gamma_8((xu \wedge xv)\backslash x(u \wedge v))$$

其中 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6, \gamma_7, \gamma_8 \in \Gamma(Var)$.

引理 6.3. 若 R 是一个紧 URL，则 M 上的可比关系 $\equiv$（其中 $M = R \setminus \{\bot, \top\}$）是一个同余关系，且商幺半群 $M/\equiv$ 是可消去的。此外，$[1]_\equiv$ 定义了 M 的一个全序子幺半群。

证明。由于乘法保序且序是单线性的，可比关系 $\equiv$ 是 M 上的同余。为证明 $M/\equiv$ 的消去性，注意若对于 x、y、$z \in M$ 和 $y \parallel z$，有 $\top = x(y \vee z) = xy \vee xz$，且由于 M 对乘法封闭，可得 $xy \parallel xz$。最后，$[1]_\equiv$ 是 M 的全序子幺半群，因为 $x \equiv 1$ 且 $y \equiv 1$ 蕴含 $xy \equiv 1 \cdot 1 = 1$。□

6.1. 从有限循环幺半群出发。我们展示如何从有限循环幺半群构造紧 URL。

给定由元素 a 生成的有限循环幺半群 M，其中 M，存在一个最小的自然数 r，称为指标，使得对于某个正整数 s，有 $a^r = a^{r+s}$；满足此条件的最小 s 称为周期。因此 $M = \{1, a, \ldots, a^r, \ldots, a^{r+s-1}\}$且 $|M| = r + s$。注意，每个自然数 $n > r$ 都可以唯一地写成 $n = r + ms + k$，其中 $m \in \mathbb{N}$ 且 $0 \le k < s$；我们定义 $[n]_r^s := r + k$，当 $n \ge r + s$ 时，以及 $[n]_r^s := n$，当 $0 \le n < r + s$时。（当 r、s 可由上下文确定时，我们将记作 $[n]$。）于是，M 上的乘法由 $a^i \cdot a^j = a^{[i+j]_r^s}$ 给出。

特别地，$\{a^r, \ldots, a^{r+s-1}\}$ 是 M 的一个子半群，并且它本身是一个群，其单位元为 a^t，满足 $t \equiv 0$（模 s）；因此它同构于 $\mathbb{Z}_s$。

我们将M 上的乘法扩展到集合 $R = M \cup \{\bot, \top\}$ 与 $\bot x = x\bot = \bot$，对所有 $x \in R$，以及对所有 $x \ne \bot$的 $\top x = x\top = \top$。此外，我们在 R 与$\bot \le x \le \top$ 上定义一个序：对所有 $x \in R$，当且仅当对于某个 $n \in \mathbb{N}$ 有 $a^i \le a^j$，其中 $0 \le i,\ j \le r + s - 1$；参见图4（左）。容易看出，这产生了一个单线格序；我们将所得的格序幺半群记为 $\mathbf{R_M}$。

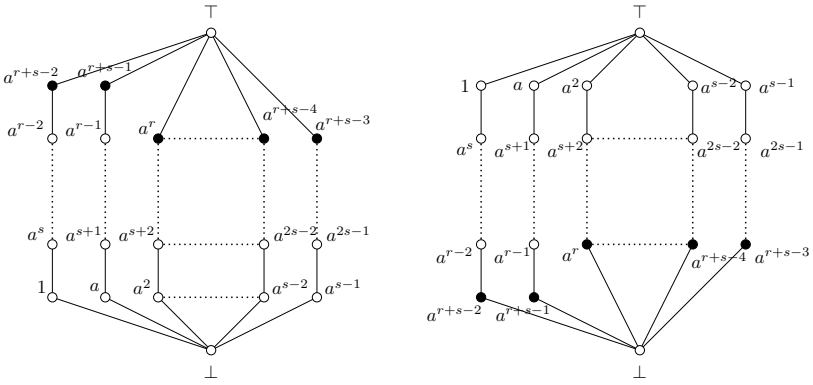

FIGURE 4. 基于有限循环幺半群的两个 URL

定理6.4. 如果 M 是一个有限循环幺半群，那么 $\mathbf{R_M}$ 是一个剩余格的约化。

证明。由于 $\top$ 和 $\bot$ 都是M 和 $\bot\top = \top\bot = \bot$ 的零元素，M 的结合律很容易扩展为$\mathbf{R_M}$的结合律。由于 R 是有限的，根据推论1.3，只需证明乘法对二元并具有分配律；我们将证明左分配律：$x(y \vee z) = xy \vee xz$，对所有 x、y、$z \in R$ 均成立。

如果 x、y、z 中任意一个是 $\top$ 或 $\bot$，很容易看出方程成立，因此我们假设 x、y、$z \in M$：$x = a^i$、$y = a^j$ 且 $z = a^k$，其中 $0 \le i$、j、$k \le r + s - 1$。如果 $y = a^j$ 和 $z = a^k$ 不可比较，那么根据定义，$j \not\equiv k$（模 s），所以我们有 $i+j \not\equiv i+k$（模 s），进而得到 $xy \parallel xz$。因此我们有 $x(y \vee z) = x\top = \top = xy \vee xz$。如果 $a^j = y \le z = a_k$，则对于某个 $0 \le n \le \lfloor (r + s - 1 - j)/s \rfloor$，有 $k = j + ns$；我们将证明 $xy = a^{[i+j]} \le a^{[i+j+ns]} = xz$。这是因为对于 $\ell = i + j$，有 $[\ell + ns] = [\ell] + ms$，其中若 $\ell + ns < r + s$，则 $m = n$；若 $\ell + ns \ge r + s$，则 $m = ([\ell + ns] - [\ell])/s$。□

基于 $\mathbf{R_M}$ 的（交换）剩余格是紧致的，因此对于所有 $x \in R_M$、 $y \neq \top$、 $z \neq \bot$，我们有 $\bot \to x = \top = x \to \top$、 $\top \to y = \bot$、 $z \to \bot = \bot$。此外，其余蕴含关系可轻易计算如下:

$$a^i \to a^j = \begin{cases} \bot & \text{if } j < i \leq r \text{ or } j < r \leq i \leq r+s-1 \\ a^{j-i} & \text{if } i \leq j < r \\ a^{j-i+\lfloor \frac{r+s-1+i-j}{s} \rfloor s} & \text{if } i < r \leq j \leq r+s-1 \\ a^k & \text{if } r \leq i,j,k \leq r+s-1 \text{ and } a^i a^k = a^j. \end{cases}$$

特别地，子半群 $\{a^r, \ldots, a^{r+s-1}\}$ 对蕴含封闭，但 M 不封闭。

显然，如果改为在 M 的元素上施加对偶序，我们就能得到一个不同的单线性剩余格；见图4（右）。这个第二个例子中的剩余化运作方式不同:

$$a^i \to a^j = \begin{cases} a^{j-i} & \text{if } i \leq j \leq r+s-1 \\ a^{j-i+\lceil \frac{i-j}{s} \rceil s} & \text{if } j < i \leq r+s-1 \end{cases}$$

在此情况下， M在蕴涵运算下是封闭的，但 $\{a^r, \ldots, a^{r+s-1}\}$ 不是。

注6.5。实际上，我们可以证明，给定有限循环幺半群 M，这两种方式是 $M \cup \{\bot, \top\}$ 成为某个紧致单线性剩余格的幺半群约化的仅有方式。

假设 $M \cup \{\bot, \top\}$ 是紧 URL R 的幺半群约化。令 a^i 和 a^j 为 M 中不同的群元素。若 $a^i < a^j$，则 $e = a^i a^k < a^j a^k$，其中 e 是 M 中群元素的单位元，而 a^k 是群中 a^i 的逆元。于是 $e < a^j a^k < (a^j a^k)^2 < \cdots$，因此 M 包含一个无限上升链，这与 M 有限这一事实矛盾。因此， M 中的群元素两两不可比。

我们还注意到，给定 $0 \leq i < j < r+s$,

$$(*) \qquad \begin{aligned} a^i < a^j \text{ iff } & \text{ for all } 0 \leq k \leq i,\ a^{i-k} < a^{j-k} \\ a^j < a^i \text{ iff } & \text{ for all } 0 \leq k \leq i,\ a^{j-k} < a^{i-k} \end{aligned}$$

反向显然，因此我们只需证明正向。给定$0 \leq i < j < r+s$，使得 $a^i < a^j$ 且 $0 \leq k \leq i$，若 $a^{i-k} \parallel a^{j-k}$，则$\top = a^k \top = a^k(a^{i-k} \vee a^{j-k}) = a^i \vee a^j$，因此 $a^i \parallel a^j$，矛盾；若 $a^{i-k} > a^{j-k}$，则 $a^i > a^j$，因为乘法是保序的，且 a^i 与 a^j不同。

最后，我们知道 $1 \equiv e$，因为否则就会有 $\top = e(1 \vee e) = e \vee e^2 = e$，矛盾。

现在令 t 为满足 $a^t \equiv 1$ 的最小自然数。若 $t = 0$，则由 (*)，对于所有 $0 \leq i < j < r+s$，有 $a^i \parallel a^j$；否则 $1 \equiv a^{j-i}$，其中 $j-i > 0$，矛盾。特别地，在这种情况下我们有 $e = 1$，因此 M 是一个群，且 R 基于 $\mathbf{M}_X$。现在假设 $t > 0$。若 $1 < a^t$，则我们有 $a^r \leq a^{r+t}$，且它们二者都是 M 中的群元素。由于所有群元素两两不可比，我们知道$a^r = a^{r+t}$，所以 $t = s$。由于 $s = t$ 是满足 $1 < a^s$ 的最小整数，我们知道对于所有 $1 < k < s$，有$1 \parallel a^k$，因此由 (*)，对于所有 $0 \leq k \neq l \leq s-1$，有 $a^k \parallel a^l$。由于 $1 < a^s$，我们有 $1 < a^s < a^{2s} < \cdots < a^{ms}$，其中 $ms < r+s \leq (m+1)s$。因此， $a^i < a^j$ 当且仅当 $1 < a^{j-i}$，当且仅当对于某个 $n \in \mathbb{Z}^+$，有 $j = i + ns$；所以 $a^i \leq a^j$ 当且仅当对于某个 $n \in \mathbb{N}$，有 $j = i + ns$，且 R 的形式如图4左侧所示。类似地，我们可以证明，当 $a^t < 1$ 时，R 的形式如图 4 右侧所示。

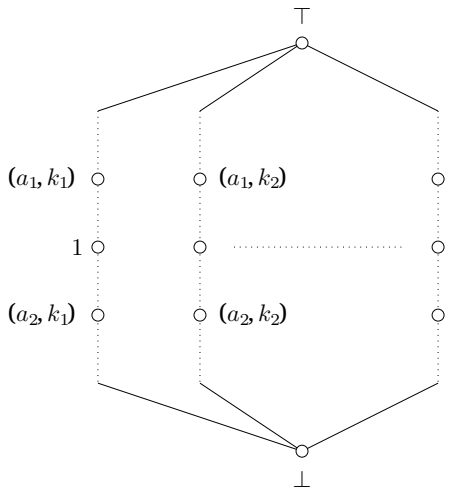

FIGURE 5. 基于半直积的 URL

6.2. 由剩余链与可消去幺半群的半直积构造；带 2-余循环的幺半群扩张。我们先给出一种紧剩余格的一般构造，然后说明在某些假设下，紧剩余格恰好具有这种形式。

设 A 是一个剩余链，K 是一个消去幺半群，且 $\varphi : \mathrm{K} \to \mathrm{A}$ 的剩余自同态 是一个幺半群同态，其中 A 的剩余自同态是链 $(A, \leq)$ 上的剩余映射所构成的幺半群，这些剩余映射同时也是幺半群 $(A, \cdot, 1)$ 的自同态。若 $\varphi, \psi \in$A 的剩余自同态的剩余分别为 φ^* 和 ψ^*，则 $(\psi \circ \varphi)(a) \leq b$ 当且仅当 $\varphi(a) \leq \psi^*(b)$，当且仅当$a \leq (\varphi^* \circ \psi^*)(b)$，对所有 $a, b \in A$均成立；因此， $\psi \circ \varphi$ 也是剩余映射。于是，A 的剩余自同态是 End(A) 的子幺半群。因此，A 的幺半群约化与 K 关于 φ 的半直积 $\mathrm{A} \rtimes_\varphi \mathrm{K}$ 也是一个幺半群，其乘法定义为

$$(a_1, k_1) \cdot (a_2, k_2) = (a_1 \varphi_{k_1}(a_2), k_1 k_2),$$

对所有 $(a_1, k_1), (a_2, k_2) \in A \times K$ 均成立，单位元为 $(1_{\mathbf{A}}, 1_{\mathbf{K}})$。我们在 $\mathrm{A} \rtimes_\varphi \mathrm{K}$ 上定义序：对所有 $(a_1, k_1), (a_2, k_2) \in A \times K$,

$$(a_1, k_1) \leq (a_2, k_2) \text{ if and only if } k_1 = k_2 \text{ and } a_1 \leq a_2.$$

此外，我们将 $\mathrm{A} \rtimes_\varphi \mathrm{K}$ 的乘法和序扩展到 $R = (A \times K) \cup \{\top, \bot\}$，定义如下：$\bot \leq x \leq \top$、 $\bot x = x\bot = \bot$ 以及 $\top y = y\top = \top$ ，对所有 $x \in R$、 $y \neq \bot$ 均成立。显然，这定义了一个格序；参见图5。我们将所得的有界格序幺半群记为 $\mathrm{A} \rtimes^b_\varphi \mathrm{K}$。

定理6.6. 若 A 是一个剩余链，K 是一个消去幺半群，且 φ: K →A 的剩余自同态是一个幺半群同态，则 $\mathrm{A} \rtimes^b_\varphi \mathrm{K}$ 是一个剩余格。

上述定理的证明可由一个更一般的构造推出。给定一个幺半群 K、一个全序幺半群 A 以及一个映射 $\varphi : \mathrm{K} \to \mathrm{A}$ 的剩余自同态，则称函数 $f\colon K \times K \to A$ 为相对于 K、A φ的 2-余循环，若其满足以下条件：

(1) 对所有 k_1、 $k_2 \in K$， $f(k_1, k_2)$ 都是可逆的。

(2) $f(k,1)=f(1,k)=1$, for all $k\in K$.
(3) $\varphi_{1_{\mathbf{K}}}=\mathrm{id}_{\mathbf{A}}$ and $\varphi_{k_1k_2}(a)=f(k_1,k_2)\cdot\varphi_{k_1}\varphi_{k_2}(a)\cdot f(k_1,k_2)^{-1}$ for all $k_1,k_2\in K$ and $a\in A$.
(4) $f(k_1,k_2k_3)\varphi_{k_1}(f(k_2,k_3))=f(k_1k_2,k_3)f(k_1,k_2)$, for $k_1,k_2,k_3\in K$.

现在，给定一个消去幺半群 K、一个剩余链 A、一个映射 $\varphi:\ K\to$A 的剩余自同态以及一个 2-余循环 $f:\ K\times K\to A$，我们通过以下方式在 $A\times K$上定义乘法

$$(a_1,k_1)\cdot(a_2,k_2)=(a_1\varphi_{k_1}(a_2)f(k_1,k_2)^{-1},k_1k_2)$$

此外，我们通过令 $\perp$ 对 R 吸收、 $\top$ 对 $R\setminus\{\perp\}$ 吸收，将乘法扩展到 $R=A\times K\cup\{\perp,\top\}$，并定义格序 $\leq$ 如下：对于所有 a、 a_1、 $a_2\in A$ 以及 k、 k_1、 $k_2\in K$、 $\perp=\perp<$（a、 k）， $<\top=\top$ 并且

$$(a_1,k_1)\leq(a_2,k_2)\text{ iff }a_1\leq_{\mathbf{A}}a_2\text{ and }k_1=k_2.$$

我们将所得代数记为 $\mathrm{R}_{\varphi,\ f}$。

定理 6.7. 若 K 是消去幺半群，A 是剩余链， $\varphi:$K $\to$A 的剩余自同态是一个映射，且 $f:\ K\times K\to A$ 是关于 K、A 和 φ 的 2-余循环，则 $\mathrm{R}_{\varphi,\ f}$ 是一个剩余格的约化。

证明. 下文中，我们用 R 表示 $\mathrm{R}_{\varphi,\ f}$，并用 M 表示 $A\times K$。显然， M 对乘法封闭，且 (1, 1) 是单位元。此外，

$$\begin{aligned}
&(a_1,k_1)(a_2,k_2)\cdot(a_3,k_3)\\
=&(a_1\varphi_{k_1}(a_2)f(k_1,k_2)^{-1},k_1k_2)\cdot(a_3,k_3)\\
=&(a_1\varphi_{k_1}(a_2)f(k_1,k_2)^{-1}\varphi_{k_1k_2}(a_3)f(k_1k_2,k_3)^{-1},k_1k_2\cdot k_3)\\
=&(a_1\varphi_{k_1}(a_2)f(k_1,k_2)^{-1}\cdot f(k_1,k_2)\varphi_{k_1}\varphi_{k_2}(a_3)f(k_1,k_2)^{-1}\cdot f(k_1k_2,k_3)^{-1},\\
&k_1k_2\cdot k_3)\\
=&(a_1\varphi_{k_1}(a_2)\varphi_{k_1}\varphi_{k_2}(a_3)f(k_1,k_2)^{-1}f(k_1k_2,k_3)^{-1},k_1k_2\cdot k_3)\\
=&(a_1\varphi_{k_1}(a_2)\varphi_{k_1}\varphi_{k_2}(a_3)\varphi_{k_1}(f(k_2,k_3)^{-1})f(k_1,k_2k_3)^{-1},k_1k_2\cdot k_3)\\
=&(a_1\varphi_{k_1}(a_2\varphi_{k_2}(a_3)f(k_2,k_3)^{-1})f(k_1,k_2k_3)^{-1},k_1\cdot k_2k_3)\\
=&(a_1,k_1)\cdot(a_2\varphi_{k_2}(a_3)f(k_2,k_3)^{-1},k_2k_3)\\
=&(a_1,k_1)\cdot(a_2,k_2)(a_3,k_3)
\end{aligned}$$

其中我们使用了以下恒等式

$$\varphi_{k_1k_2}(a)=f(k_1,k_2)\cdot\varphi_{k_1}\varphi_{k_2}(a)\cdot f(k_1,k_2)^{-1}$$
$$f(k_1,k_2k_3)\varphi_{k_1}(f(k_2,k_3))=f(k_1k_2,k_3)f(k_1,k_2)$$

并且假设 φ_k 是一个自同态。因此， M $=(M,\cdot,$ (1, 1)) 是一个幺半群。由于 $\top$ 和 $\perp$ 都是 M 和 $\top\perp=\perp\top=\perp$ 的吸收元素，R 上满足结合律。

现在证明乘法是保序的：对于所有 $x,y,z\in R$， $y\leq z\implies$ ($xy\leq xz$ and $yx\leq zx$)。如果 $y=z$ or x,y,z 是 $\perp$ 或 $\top$，则很容易看出该蕴含成立；因此我们假设 $\perp<x<\top$ and $\perp<y<z<\top$。此外，我们假设 $x=(a_1,k_1)$、 $y=(a_2,k_2)$ 和 $z=(a_3,k_2)$，其中 $a_2<a_3$。利用 φ_{k_1}（它是一个剩余映射）的保序性以及乘法的保序性

在 A 中，我们得到

$$\begin{aligned}(a_1,k_1)(a_2,k_2) &= (a_1\varphi_{k_1}(a_2)f(k_1,k_2)^{-1},k_1k_2)\\ &\le (a_1\varphi_{k_1}(a_3)f(k_1,k_2)^{-1},k_1k_2)\\ &= (a_1,k_1)(a_3,k_2)\\ (a_2,k_2)(a_1,k_1) &= (a_2\varphi_{k_2}(a_1)f(k_2,k_1)^{-1},k_2k_1)\\ &\le (a_3\varphi_{k_2}(a_1)f(k_2,k_1)^{-1},k_2k_1)\\ &= (a_3,k_2)(a_1,k_1)\end{aligned}$$

接下来，我们证明，对于所有 x、$z\in R$，集合 $x\backslash\backslash z$ 和 $z/\!/x$ 都有最大元素。根据注 1.4，我们知道，对于所有 x、$z\in R$，$\bot\backslash\backslash z=z/\!/\bot=x\backslash\backslash\top=\top/\!/x=R$，因此所有这些集合的最大元素是 $\top$。此外，根据构造，对于所有 $x\in R\setminus\{\bot\}$ 和 $z\in R\setminus\{\top\}$，$x\backslash\backslash\bot=\bot/\!/x=\top\backslash\backslash z=z/\!/\top=\{\bot\}$，因此所有这些集合的最大元素是 $\bot$。现在假设 $\bot<x$、$z<\top$，并且对于某些 (a,k)、$(a',k')\in A\times K$，有 $x=(a,k)$ 且 $z=(a',k')$。

对于所有的 (a_1,k_1)、$(a_2,k_2)\in x\backslash\backslash z$，我们都有 $(a\varphi_k(a_1)f(k,k_1)^{-1},kk_1)=(a,k)(a_1,k_1)\le(a',k')$，并且 $(a\varphi_k(a_2)f(k,k_2)^{-1},kk_2)=(a,k)(a_2,k_2)\le(a',k')$，因此由 K 的可消去性可得 $kk_1=k'=kk_2$ 且 $k_1=k_2$。由于 A 是一条链，我们得到 (a_1,k_1) 与 (a_2,k_2) 可比较；因此 $x\backslash\backslash z$ 是一条链。

对于所有的 (a'',k'')，我们有 $(a'',k'')\in x\backslash\backslash z$ 当且仅当 $(a,k)(a'',k'')\le(a',k')$，当且仅当 $(a\varphi_k(a'')f(k,k'')^{-1},kk'')\le(a',k')$，当且仅当 $(a\varphi_k(a'')f(k,k'')^{-1}\le a'$ 且 $k'=kk''$。由于乘法具有剩余，φ_k 具有剩余，记其剩余为 φ_k^*；又因为 $f(k,k'')$ 可逆，所以有：$a\varphi_k(a'')f(k,k'')^{-1}\le a'$ 当且仅当 $\varphi_k(a'')\le a\backslash_{\mathbf{A}}a'f(k,k'')$，当且仅当 $a''\le\varphi_k^*(a\backslash_{\mathbf{A}}a'f(k,k''))$。因此，我们有 $(a'',k'')\in x\backslash\backslash z$ 当且仅当 $(a'',k'')\le(\varphi_k^*(a\backslash_{\mathbf{A}}a'f(k,k''))\ k'')$。由此，$\max(x\backslash\backslash z)$ 存在，且它是元素 $\bot$、$(\varphi_k^*(a\backslash_{\mathbf{A}}a'f(k,k''))\ k'')$ $\top$ 之一。同理，$\max(z/\!/x)$ 是元素 $\bot$、$(a'f(k'',k)/_{\mathbf{A}}\varphi_{k''}(a)\ k'')$ $\top$ 之一。根据推论 1.2，$\mathrm{R}_{\varphi,f}$是一个紧剩余格的约化。□

因此，$\mathrm{R}_{\varphi,\ f}$ 是一个紧剩余格的约化，我们也将其记作 $\mathrm{R}_{\varphi,\ f}$，其除法定义如下

$$x\backslash y=\begin{cases}\bot & \text{if } x=(a_1,k_1),y=(a_2,k_2) \text{ and } k_2\notin k_1K\\ (\varphi_{k_1}^*(a_1\backslash_{\mathbf{A}}a_2f(k_1,k)),k) & \text{if } x=(a_1,k_1),y=(a_2,k_1k)\end{cases}$$

$$y/x=\begin{cases}\bot & \text{if } x=(a_1,k_1),y=(a_2,k_2) \text{ and } k_2\notin Kk_1\\ (a_2f(k,k_1)/_{\mathbf{A}}\varphi_k(a_1),k) & \text{if } x=(a_1,k_1),y=(a_2,kk_1)\end{cases}$$

而涉及 $\bot$ 和 $\top$ 的标准除法由注 1.4 给出。

定理 6.6 是 2-余循环为平凡情形下的特例，因此可得 φ 是幺半群同态。

推论 6.8. 若 K 是消去幺半群，A 是剩余链，$\varphi:\mathrm{K}\to\mathrm{A}$ 的剩余自同态是一个映射，且 $f:K\times K\to A$ 是关于 K、A 和 φ 的平凡 2-余循环，则 φ 是同态，且 $\mathrm{R}_{\varphi,\ f}=\mathrm{A}\rtimes^b_\varphi\mathrm{K}$。

特别地，当 φ 平凡时，我们得到 $\mathrm{A}\times^b\mathrm{K}$，其中 A 是剩余链，K 是消去幺半群。

请注意，第6.1节中的例子无法嵌入形如 $\mathrm{A}\times^b\mathrm{K}$ 的剩余格中。例如，考虑 URL R，其中 $R=\{\bot,1,a,a^2,\top\}$

满足 $a^3 = a$ 和 $1 < a^2$。若 R 可以嵌入，则我们有 $1 \mapsto (1, 1), a \mapsto (a_1, k)$，$a^2 \mapsto (a_1^2, k^2)$ 和 $a^3 \mapsto (a_1^3, k^3)$。因此，$(1, 1) < (a_1^2, k^2)$ 蕴含 $1 < a_1^2$和 $k^2 = 1$；于是 $1 < a_1$ 和 $k = 1$。但这样一来 $a_1 \leq a_1^2 \leq a_1^3 = a_1$，所以 $a_1^2 = a_1$，从而 $(a_1^2, k^2) = (a_1, k)$，矛盾。

尽管并非所有紧 URL 都具有 $\mathrm{R}_{\varphi,\ f}$ 的形式，但我们证明，当 $R \setminus \{\bot, \top\}$ 上的可比关系是容许同余，且 1 的链相对于因子幺半群是可消的时，这一结论成立。

我们称 M 上的同余 $\equiv$ 是可容许的，如果对所有$x \in M$都有 $x[1]_{\equiv} = [x]_{\equiv} = [1]_{\equiv}x$。此外，如果存在代表元的选取$^-$： $K \to M$（即，对于所有 $x \in M$，若 $\overline{k} \equiv x$，则 $x \in k$），满足 $\overline{1_{\mathbf{K}}} = 1_{\mathbf{M}}$，并且由 $\overline{k}$ 进行的左乘与右乘在 H 上是单射的，则称 H 是 K-可消的。K-可消和 2-余循环这两个术语源自 [11]。

命题 6.9。如果 R 是紧致单线性剩余格，则可比关系 $\equiv$ 是 M 的容许同余，其中 $M = R \setminus \{\bot, \top\}$；若 H 是 K-可消的，其中 $H = [1]_{\equiv}$ 且 $\mathrm{K} = \mathrm{M}/{\equiv}$，则对于某个映射$\varphi : K \to \mathrm{ResAut(H)}$ 以及相对于 H、K 和 φ 的 2-余循环 $f : K \times K \to H$，有 $\mathrm{R} \cong \mathrm{R}_{\varphi,\ f}$。

证明。由于 H 是 K-可消的，因此存在一组选定的代表元 $^- : K \to M$。我们分别用 L_x和 R_x表示 $x \in M$的左乘和右乘。我们知道，对于所有 $k \in K$，映射 $R_{\overline{k}}$, $L_{\overline{k}} : H \to k$ 是单射；又由于 $\equiv$ 是 M 上的一个可容许的同余，且 $H = [1]_{\equiv}$，它们也是满射。因此，对于任意 $k \in K$，由 $\varphi_k(h) = R_{\overline{k}}^{-1} L_{\overline{k}}(h)$ 给出的映射 $\varphi_k : \mathrm{H} \to \mathrm{H}$ 是 H上的一个定义良好的双射；因此 $\overline{k}h = \varphi_k(h)\overline{k}$。

请注意。

$$\begin{aligned}
\varphi_k(h_1h_2)\overline{k} &= \overline{k} \cdot h_1h_2 \\
&= \overline{k}h_1 \cdot h_2 \\
&= \varphi_k(h_1)\overline{k} \cdot h_2 \\
&= \varphi_k(h_1) \cdot \overline{k}h_2 \\
&= \varphi_k(h_1) \cdot \varphi_k(h_2)\overline{k} \\
&= \varphi_k(h_1)\varphi_k(h_2) \cdot \overline{k}.
\end{aligned}$$

由于H 是K-可消的，我们有 $\varphi_k(h_1h_2) = \varphi_k(h_1)\varphi_k(h_2)$。现在假设 $h_1 \leq h_2$对于某些 $h_1, h_2 \in H$。由于 R 是剩余的，我们得到

$$\begin{aligned}
\varphi_k(h_1) \leq \varphi_k(h_2) &\text{ iff } R_{\overline{k}}^{-1} L_{\overline{k}}(h_1) \leq R_{\overline{k}}^{-1} L_{\overline{k}}(h_2) \\
&\text{iff } R_{\overline{k}}(R_{\overline{k}}^{-1} L_{\overline{k}}(h_1)) \leq L_{\overline{k}}(h_2) \\
&\text{iff } L_{\overline{k}}(h_1) \leq L_{\overline{k}}(h_2).
\end{aligned}$$

由 $L_{\overline{k}}$ 的保序性可知，φ_k 是保序的。因此，φ_k 是全序幺半群 H 的自同构，而 $\overline{1_{\mathbf{K}}} = 1_{\mathbf{H}}$ 得出 $\varphi_1 = \mathrm{id}_{\mathbf{H}}$。由于 $\equiv$ 在 M 上可容许，且 $\mathrm{K} = \mathrm{M}/{\equiv}$，我们有

$$\mathbf{H}\overline{k_1k_2} = k_1k_2 = \mathbf{H}\overline{k_1}\mathbf{H}\overline{k_2} = \mathbf{H}\overline{k_1}\,\overline{k_2}.$$

因此，存在 $f(k_1, k_2)$ 和 $g(k_1, k_2)$，属于 H，使得

$$\overline{k_1k_2} = f(k_1, k_2)\overline{k_1}\,\overline{k_2}, \qquad \overline{k_1}\,\overline{k_2} = g(k_1, k_2)\overline{k_1k_2}$$

对所有 $k_1, k_2 \in K$ 都成立。由于 H 是 K-可消的，因此 f 和 g 是从 $K\times K$ 到 H 的良定义函数。此外，由于对所有 $k_1, k_2 \in K$， $f(k_1, k_2)g(k_1, k_2) = g(k_1, k_2)f(k_1k_2) = 1$，我们得到 $f(k_1, k_2)$ 和 $g(k_1, k_2)$ 是可逆的。根据定义，有

$$\overline{k_2} = f(1_{\mathbf{K}}, k_2)\overline{1_{\mathbf{K}}}\,\overline{k_2}, \qquad \overline{k_1} = f(k_1, 1_{\mathbf{K}})\overline{k_1}\,\overline{1_{\mathbf{K}}}.$$

再次由 H 的 K-消去性可得，对于所有 $k \in K$， $f(1_{\mathbf{K}}, k) = f(k, 1_{\mathbf{K}}) = 1_{\mathbf{H}}$。此外，根据 f 的定义，我们知道

$$L_{\overline{k_1k_2}} = L_{f(k_1,k_2)}L_{\overline{k_1}}L_{\overline{k_2}}, \qquad R_{\overline{k_1k_2}} = R_{\overline{k_2}}R_{\overline{k_1}}R_{f(k_1,k_2)}.$$

因此，由于 H 的 K-消去性，我们有

$$\begin{aligned}\varphi_{k_1k_2} &= R^{-1}_{\overline{k_1k_2}}L_{\overline{k_1k_2}}\\ &= R^{-1}_{f(k_1,k_2)}R^{-1}_{\overline{k_1}}R^{-1}_{\overline{k_2}}L_{f(k_1,k_2)}L_{\overline{k_1}}L_{\overline{k_2}}\\ &= R^{-1}_{f(k_1,k_2)}L_{f(k_1,k_2)}R^{-1}_{\overline{k_1}}L_{\overline{k_1}}R^{-1}_{\overline{k_2}}L_{\overline{k_2}}\\ &= R^{-1}_{f(k_1,k_2)}L_{f(k_1,k_2)}\varphi_{k_1}\varphi_{k_2}\end{aligned}$$

对所有 k_1、 $k_2 \in K$ 均成立。因此我们得到

$$\varphi_{k_1k_2}(h) = f(k_1, k_2)\cdot_{\mathbf{H}} \varphi_{k_1}\varphi_{k_2}(h)\cdot_{\mathbf{H}} f(k_1, k_2)^{-1}$$

对于所有 $h \in H$。

最后，我们观察到

$$\begin{aligned}&\overline{k_1 \cdot k_2k_3} = \overline{k_1k_2 \cdot k_3}\\ \text{iff }& f(k_1, k_2k_3)\overline{k_1}\,\overline{k_2k_3} = f(k_1k_2, k_3)\overline{k_1k_2}\,\overline{k_3}\\ \text{iff }& f(k_1, k_2k_3)\overline{k_1}f(k_2, k_3)\overline{k_2}\,\overline{k_3} = f(k_1k_2, k_3)f(k_1, k_2)\overline{k_1}\,\overline{k_2}\cdot\overline{k_3}\\ \text{iff }& f(k_1, k_2k_3)\varphi_{k_1}(f(k_2, k_3))\overline{k_1}\cdot\overline{k_2}\,\overline{k_3} = f(k_1k_2, k_3)f(k_1, k_2)\overline{k_1}\,\overline{k_2}\cdot\overline{k_3}.\end{aligned}$$

因此，由 K 的结合律以及 H 的 K-可消性，我们得到

$$f(k_1, k_2k_3)\varphi_{k_1}(f(k_2, k_3)) = f(k_1k_2, k_3)f(k_1, k_2)$$

对所有 k_1、 k_2、 $k_3 \in K$均成立。因此， f 是关于 H、K 和 φ的 2-余循环。

最后，我们定义映射 $\psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_{\varphi,\ f}$，其定义为 $\psi(\bot) = \bot$， $\psi(\top) = \top$ 且 $\psi(x) = (h_x, k_x)$，其中 $k_x = [x]_\equiv$ 是 x 所属的链，且 $h_x = R^{-1}_{\overline{k_x}}(x)$。由于 $\equiv$ 是可容许的，H 是 K-可消的，且 H 是全序的，因此 $L_{\overline{k_x}}$ 和 $R_{\overline{k_x}}$是集合 H 与 k_x之间的序同构，所以 ψ 是良定义的。我们将证明 ψ 是剩余格同构。

假设对于某些 x、 $y \in M$，有 $\psi(x) = \psi(y)$。那么 $k_x = k_y$和 $h_x = h_y$，即 $x \equiv y$ 和 $R^{-1}_{\overline{k_x}}(x) = R^{-1}_{\overline{k_y}}(y)$。由于 $R_{\overline{k_x}} = R_{\overline{k_y}}$是 H 与 k_x之间的双射，我们有 $x = y$。对于 $(h, k) \in H \times K$，令 $x = h\overline{k}$。由于 $R_{\overline{k}}$是双射，我们知道 $h = R^{-1}_{\overline{k}}(x)$，因此 $\psi(x) = (h, k)$。由于 $\psi(\bot) = \bot$ 和 $\psi(\top) = \top$ 均有唯一确定的定义， ψ 是 R 与 $R_{\varphi,\ f}$之间的双射。

由于 $R_{\overline{k_x}}$ 是 H 和链 k_x 之间的序同构， $x \leq_{\mathbf{R}} y$ 当且仅当$k_x = k_y$且 $R^{-1}_{\overline{k_x}}(x) \leq_{\mathbf{H}} R^{-1}_{\overline{k_y}}(y)$，因此 $x \leq_{\mathbf{R}} y$当且仅当 $\psi(x) \leq_{\mathbf{R}_{\varphi,\ f}} \psi(y)$ 对所有 $x, y \in M$ 都成立。由于 $\psi(\bot) = \bot$ 且 $\psi(\top) = \top$， ψ 是 R 与 $\mathbf{R}_{\varphi,\ f}$之间的格同构。

由于 $k_{xy} = k_x \cdot_{\mathbf{K}} k_y$，我们有 $\overline{k_{xy}} = \overline{k_xk_y} = f(k_x, k_y)\overline{k_x}\,\overline{k_y}$，因此对所有 $x, y \in M$

$$\psi(xy) = (R^{-1}_{\overline{k_{xy}}}(xy), k_{xy}) = (R^{-1}_{\overline{k_x}}R^{-1}_{\overline{k_y}}(xy)f^{-1}(k_x, k_y), k_xk_y).$$

另一方面,

$$\begin{aligned}\psi(x)\psi(y) =&(R^{-1}_{\overline{k_x}}(x),k_x)(R^{-1}_{\overline{k_y}}(y),k_y)\\ =&(R^{-1}_{\overline{k_x}}(x)\varphi_{k_x}(R^{-1}_{\overline{k_y}}(y))f^{-1}(k_x,k_y),k_xk_y)\\ =&(\varphi_{k_x}(L^{-1}_{\overline{k_x}}(x))\varphi_{k_x}(R^{-1}_{\overline{k_y}}(y))f^{-1}(k_x,k_y),k_xk_y)\\ =&(\varphi_{k_x}(L^{-1}_{\overline{k_x}}(x)R^{-1}_{\overline{k_y}}(y))f^{-1}(k_x,k_y),k_xk_y)\end{aligned}$$

由于

$$xy = L_{\overline{k_x}}L^{-1}_{\overline{k_x}}(x)\cdot R_{\overline{k_y}}R^{-1}_{\overline{k_y}}(y) = R_{\overline{k_y}}L_{\overline{k_x}}(L^{-1}_{\overline{k_x}}(x)R^{-1}_{\overline{k_y}}(y)),$$

我们有

$$L^{-1}_{\overline{k_x}}(x)R^{-1}_{\overline{k_y}}(y) = L^{-1}_{\overline{k_x}}R^{-1}_{\overline{k_y}}(xy).$$

So

$$R^{-1}_{\overline{k_x}}R^{-1}_{\overline{k_y}}(xy) = R^{-1}_{\overline{k_x}}(L_{\overline{k_x}}L^{-1}_{\overline{k_x}})R^{-1}_{\overline{k_y}}(xy) = \varphi_{k_x}(L^{-1}_{\overline{k_x}}R^{-1}_{\overline{k_y}}(xy)) = \varphi_{k_x}(L^{-1}_{\overline{k_x}}(x)R^{-1}_{\overline{k_y}}(y)),$$

因此

$$\psi(xy) = \psi(x)\psi(y).$$

由于 R 是紧致的，我们知道对于所有 $x,y\in R$， $\psi(xy) = \psi(x)\psi(y)$。所以 ψ 是一个格序幺半群同构。由于 R 和 $R_{\varphi,\ f}$ 都是剩余格， ψ 是格和幺半群同构，并且除法可由序和乘法定义，因此我们得到 ψ 是一个剩余格同构。□

References

[1] Cardona, R., Galatos, N.：某些完全分配结式剩余格簇的有限嵌入性质。Algebra Universalis 78 (3), 363–376 (2017) [2] Carlisle, W.H.：有限生成交换半群的剩余有限性。Pacific J. Math. 36, 99–101 (1971) [3] Ciabattoni, A., Galatos, N., Terui, K.：代数证明论：超序列与超完备化。Ann. Pure Appl. Logic 168 (3), 693–737 (2017) [4] Evans, T.：剩余有限性、有限可嵌入性与字问题之间的一些联系。J. London Math. Soc. (2) 1, 399–403 (1969) [5] Fussner, W., Galatos, N.：锥形幂等剩余格。预印本 arXiv:2208.09724 (2022) [6] Fussner, W., Metcalfe, G.：有限次直不可约代数的传递定理。预印本 arXiv:2205.05148 (2022) [7] Galatos, N., Jipsen, P.：至多含 6 个元素的剩余格。(2017) [8] Galatos, N.：剩余格簇之并的方程基。Studia Logica 76 (2), 227–240 (2004) [9] Galatos, N., Jipsen, P.：具有可判定性应用的残余框架。Trans. Amer. Math. Soc. 365 (3), 1219–1249 (2013) [10] Galatos, N., Jipsen, P., Kowalski, T., Ono, H.：剩余格：次结构逻辑的代数一瞥。Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Vol. 151. Elsevier B. V., Amsterdam (2007) [11] Pavel, L., Sund, T.：允许余循环的幺半群扩张。Semigroup Forum. 65 (1), 1–32 (2002) [12] Schein, B.M.：半群的同态与子直分解。Pacific J. Math. 17, 529–547 (1966) [13] Vaughan-Lee, M.R.：不可数多个群簇。Bull. London Math. Soc. 2, 280 286 1970– ( )