arXiv:2304.05529v1 [quant-ph] 11 Apr 2023

通过压缩实现量子动力学的实验性加速

S. C. Burd,[1, 2, *] H. M. Knaack,[1,2, *] R. Srinivas,[1, 2, †] C. Arenz,[3] A. L. Collopy,[1] L. J. Stephenson,[1, 2] A. C. Wilson,[1] D. J. Wineland,[1, 2, 4] D. Leibfried,[1] J. J. Bollinger,[1] D. T. C. Allcock,[1, 2, 4] 和 D. H. Slichter[1, ‡]

[1] *Time and Frequency Division, National Institute of Standards and Technology, 325 Broadway, Boulder, Colorado 80305, USA*
[2] *Department of Physics, University of Colorado, Boulder, Colorado 80309, USA*
[3] *School of Electrical, Computer and Energy Engineering, Arizona State University, Tempe, Arizona 85287, USA*
[4] *Department of Physics, University of Oregon, Eugene, Oregon 97403, USA*

（日期：2023年4月13日）

我们通过实验表明，可以利用幺正压缩协议增强（放大）涉及量子谐振子的一大类相互作用。尽管我们的演示采用了单个受困 $^{25}Mg^{+}$ 离子的运动态和自旋态，但该方案普遍适用于仅涉及单个简谐振子的哈密顿量，也适用于将振子与其他量子自由度（如量子比特）耦合的哈密顿量，涵盖了量子信息和计量应用中广泛关注的系统。重要的是，该协议既不需要了解待放大的哈密顿量参数，也不要求压缩相互作用与系统其余动力学之间具有确定的相位关系，因此在信号或相互作用的某些方面未知或无法控制的情况下也可能有用。

量子力学压缩是一种强大的量子增强传感与测量技术：它通过增加另一种不对易可观测量的不确定性，来降低目标可观测量的不确定性 [1–6], ，从而能够探测极其微弱的信号或力 [7–18]。压缩还可用于增强量子系统之间相互作用的强度，例如放大量子信息科学中相关的光机械相互作用或光与物质的相互作用 [19–31]。

灵敏度或相互作用强度的提升幅度不仅取决于压缩操作的强度和保真度，还取决于这些操作相对于系统哈密顿量中其他参数（包括待测信号或待增强的相互作用）的时序和相位关系。在某些应用中，压缩操作相对于系统其余动力学过程所需的相位和时序可能足够稳定，因此可以预先校准。然而，在其他情况下，哈密顿量的参数可能未知或随时间波动，直接应用压缩操作可能会在实现预期增强的同时，在系统中引发非期望的“误差”动力学。

最近提出的“哈密顿量放大”（HA）方案，为在参数波动或未知的量子谐振子中实现基于压缩的动力学增强提供了一种方法 [25, 32]。通过以交替相位逐次施加压缩变换，可动态抑制由未知相位关系导致的误差，同时增强（放大）所需的相互作用。关键在于，只要待放大的哈密顿量能够写成特定形式，且裸哈密顿量动力学的时间尺度相较于所施加压缩操作的持续时间足够长，该协议就不需要知道哈密顿量的参数。

在本研究中，我们利用囚禁原子离子的运动作为量子谐振子，实验实现了哈密顿量放大。作为原理验证，我们使用哈密顿量放大对离子运动的相干位移进行相位不敏感放大；当位移的相对相位在整个 2π范围内变化时，增益为 ≈ 2 。我们还对囚禁离子的运动与其内部电子“自旋”态之间的激光诱导耦合进行了相位不敏感增强。在激光相互作用的相位相对于压缩相互作用的相位不稳定时，我们观察到自旋—运动耦合强度有效提高了 ≈ 1.5。

量子谐振子与另一个量子系统或外部共振驱动场（代表待检测信号）的耦合，可以在相对于裸简谐振子哈密顿量 $\hbar\omega\hat{a}^{\dagger}\hat{a}$ （以及所有不涉及简谐振子的项）的相互作用绘景中，用如下形式的哈密顿量描述：

$$\hat{H} = \hbar\Omega(\hat{\beta}\hat{a}^{\dagger} + \hat{\beta}^{\dagger}\hat{a}), \tag{1}$$

其中，$\hat{a}$ 和$\hat{a}^{\dagger}$ 是量子谐振子的湮灭算符和产生算符， ω 是简谐振子的频率，Ω表征与外部驱动场的相互作用强度——此时 β 只是一个复数；或者表征与另一个量子系统的相互作用强度，此时 β 是该系统的算符。例如，当 $\beta = \hat{}\sigma^{-}$时，降

* 这些作者对本研究的贡献相同。
† 现地址：牛津大学物理系，英国牛津
‡ daniel.slichter@nist.gov, scburd@stanford.edu, carenz1@asu.edu

自旋-1/2系统的算符，方程（1）描述的是 Jaynes-Cummings 型耦合。然而，一般而言，描述第二个量子系统的算符 β 无需在哈密顿量放大（HA）过程中明确指定，因此该方法适用于放大多种系统中的相互作用。

具有恒定振幅的外部共振驱动场施加于简谐振子，持续时间为 t_d，将通过时间演化 $\exp(-i\hat{H}t_d/\hbar) = \hat{D}(\alpha)$ 产生相干位移，其中 $\hat{D}(\alpha) \equiv \exp(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a})$ 是位移算符，而 $\alpha = -i\Omega\beta t_d$；在此我们省略了 β 上的帽，因为在这里它只是一个复数，而不是算符。测量位移 α 就构成了对 t_d 期间外部场的传感。如果 $|\alpha| \ll 1$ （即传感一个非常微弱的信号），放大位移将使其相对于简谐振子的零点涨落更容易分辨，而零点涨落决定了位移测量的噪声底。根据恒等式 [9, 33]，可以在传感时段之前和之后施加适当的压缩操作和反压缩操作，从而实现所需的放大。

$$\hat{S}^\dagger(\xi)\hat{D}(\alpha)\hat{S}(\xi) = \hat{D}(\alpha_{amp}). \tag{2}$$

这里，$\hat{S}(\xi) = \exp((\xi^*\hat{a}^2 - \xi\hat{a}^{\dagger 2})/2)$ 是压缩算符，其复数压缩参数为 $\xi = r\exp(i\theta)$，放大的位移为 $\alpha_{amp} = \alpha \cosh(r) + \alpha^* e^{i\theta} \sinh(r)$；取为实数且为正。角度 θ 描述了施加 $\hat{S}(\xi)$ 后被压缩的简谐振子的正交分量。在简谐振子的相空间中，以 ω 旋转的参考系观察，压缩轴与实轴的夹角为 $\theta/2$ 。

与方程（2）对应的脉冲序列如图 1a 所示。振幅增益的大小和相位 $G \equiv \alpha_{amp}/\alpha$ 均取决于位移与压缩之间的相位关系，其中 $G(r, \varphi) = \cosh(r) + e^{i(\theta-2\varphi)}\sinh(r)$，其中$\varphi = \arg(\alpha)$ 是位移在前文所述简谐振子旋转参考系中的相位。要实现最大增益，必须满足 $\theta - 2\varphi = 2n\pi$，其中 n为整数，因此 $G = e^r$；该相位差的波动会导致相应的增益波动，而在某些相位下，位移甚至会被去放大，此时 $|G| < 1$。视物理系统的性质而定，可能难以稳定 θ与 φ 之间的相对关系。

我们旨在实现与相位无关的放大，其中 G 独立于 θ 和 φ。对于位移放大，可以将位移分为两步来实现：$\hat{D}(\alpha) = \hat{D}(\alpha/2)\hat{D}(\alpha/2)$，并分别通过压缩和反压缩操作放大每一步。关键在于，第二组压缩/反压缩操作放大的是简谐振子的正交分量，其相位与第一组放大的正交分量相差 90 度；数学上，对于第二组压缩/反压缩操作， θ 的值增加了 π。不失一般性，我们

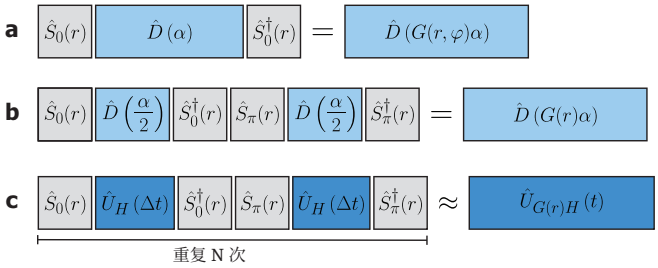


图1.使用幺正压缩的不同量子放大方案的脉冲序列。a，用于参考文献 [9] 中所采用的相位敏感放大方案的脉冲序列。b，相干位移的哈密顿量放大的脉冲序列。c，如方程（5）所示的一般相互作用的哈密顿量放大的脉冲序列，该序列必须进行适当的特罗特化。

可以取 θ 的值分别为 0 和 π ，对应第一组和第二组压缩/反压缩操作。该操作序列如图 1b 和图 2所示，现可写为

$$\hat{D}(\alpha_{amp}) = \hat{S}_\pi^\dagger(r)\hat{D}(\alpha/2)\hat{S}_\pi(r)\hat{S}_0^\dagger(r)\hat{D}(\alpha/2)\hat{S}_0(r), \tag{3}$$

$\hat{S}$ 其中下标表示 S 表示其值为 θ。我们注意到恒等式 $\hat{S}_0^\dagger(r) = \hat{S}_\pi(r)$，因此第二对压缩脉冲与第一对相同，但顺序相反。利用方程（2）中的恒等式，以及两个位移算符的乘积只不过是另一个位移算符乘以一个复相位这一事实，我们得到 $\hat{D}(\alpha_{amp}) = \exp(\cosh(r(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}))$，除去一个全局相位。由此，序列（3）获得了增益

$$G(r) = \cosh(r), \tag{4}$$

与相位无关 θ 和 φ。相位不敏感所付出的代价，是增益 G 相对于方程（2）中相位敏感方案所能达到的最大值有所降低；当 $r \gtrsim 1$ 时，增益会降低≈ 2倍。

当使用压缩来放大方程（1）形式的$\hat{}$一般相互作用时，情况会稍微复杂一些，其中 β 是一个算符，而不是复数。考虑通过瞬时压缩和反压缩来改变时间演化，并按照下式依次沿相空间中两个正交的正交分量进行操作：

$$\hat{U}(t) = \hat{S}_\pi^\dagger(r)\hat{U}_H(t/2)\hat{S}_\pi(r)\hat{S}_0^\dagger(r)\hat{U}_H(t/2)\hat{S}_0(r), \tag{5}$$

其中 $\hat{U}_H(t) = \exp(-i\hat{H}t/\hbar)$ 描述了在 t 方程 (1) 中的哈密顿量下的时间演化。一般而言，方程 (5) 会产生关于 t 的无穷幂级数，除了所需的放大相互作用之外，还会产生“误差”项。为了解决这一问题，我们可以将相互作用进行Trotter分解 [34, 35], ，将总相互作用时间 t 分成小段 $\Delta t = \frac{t}{2N}$，其中 $N \in \mathbb{N}$ 满足

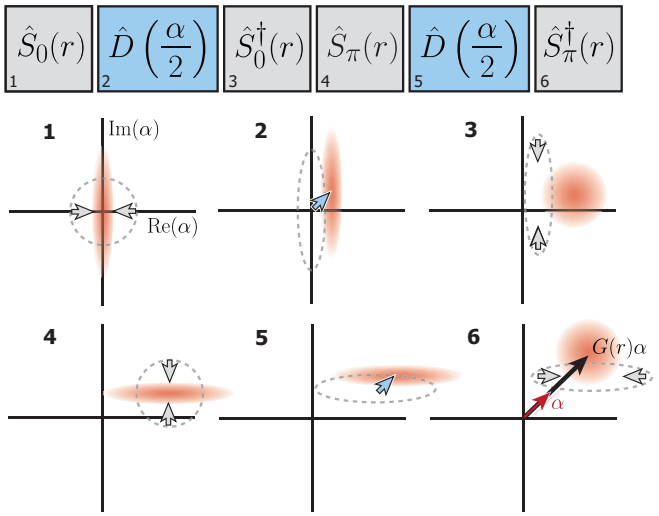


图 2. 相干位移的哈密顿量放大示意图。我们绘制了一系列运动相空间分布的示意图，分别表示每个编号脉冲前（灰色虚线轮廓）和脉冲后（橙色）的分布。箭头分别表示压缩（灰色）和位移（蓝色）操作。在最后一个示意图中，红色箭头表示未经放大的总位移，黑色箭头表示放大后的位移；二者方向相同，但后者的长度增大了 $G(r)$ 倍。

该 $\hat{U}(t) = \left[\hat{U}(2\Delta t)\right]^N$ 并重复方程（5） N 次。对于足够大的 N （或者等价地，足够小的 Δt），我们可以忽略 Δt 中的高阶项，并得到

$$\hat{U}_{G(r)H}(t) \approx \exp(-i\cosh(r)\hat{H}t/\hbar). \tag{6}$$

在这一范围内，系统动力学近似由放大的哈密顿量 $H_{\mathrm{amp}} = G(r)H$ 支配，其增益与相位无关 $G(r) = \cosh(r)$，因此称为“哈密顿量放大” [25]。我们在此指出，尽管公式（5）所给出的序列基于这样一个假设：压缩过程中相互作用 H 产生的演化可以忽略，但这一假设通常并非哈密顿量放大（HA）发挥作用的必要条件。相反，可以采用幅度大、变化平滑且频率高的压缩参数调制，在无法满足这一假设的系统中实现相互作用放大 [25]。根据Trotter公式，公式（6）中的动力学在$N \to \infty$ [25, 32] 的极限下变得精确。对于有限的 N，要为具有无限维希尔伯特空间的系统界定Trotter误差通常颇具挑战 [36]。不过，根据 Δt中二阶项的标度，可以粗略估计Trotter分解所需的精细程度，得到$\Delta t \ll \left[\Omega\sqrt{\sinh(2r)}\right]^{-1}$；此估计忽略了对该二阶项中算符的依赖 [25]。实验使用一个 $^{25}Mg^+$ 离子，该离子囚禁于表面电极离子阱 [37] 中，阱内含有载流电极，用于在离子位置产生强近场磁场梯度。这些电极位于电极平面上方 30 μm处。实验装置的详情已在其他文献中介绍 [9, 38–40]。简谐振子的自由度是离子运动的一个径向模，频率为 $\omega/2\pi \sim 7$ MHz，其状态用数态基 $|n\rangle$描述。通过280 nm激光进行多普勒冷却，随后进行分辨边带冷却 [41]，使离子运动冷却至接近基态（平均声子占据数为 $\bar{n} = 0.06$）。运动量子态的制备和分析依赖于通过运动边带跃迁 [42, 43]将离子运动与编码在其内部（电子）态中的量子比特耦合。我们选取 $^2S_{1/2}$ 电子基态超精细能级组中的 $|\downarrow\rangle \equiv |F = 3, m_F = 1\rangle$和 $|\uparrow\rangle \equiv |F = 2, m_F = 1\rangle$ 态作为量子比特态（量子比特频率为 $\omega_q/2\pi = 1.686$ GHz，量子化磁场为21.3 mT），并利用以 $\omega_q \pm \omega$ [44, 45]振荡的近场磁场梯度实现用于冷却和运动态分析的边带跃迁。通过向离子阱电极施加频率为 ω 的共振电势并保持固定持续时间 [9, 42]，使其在运动模上产生相干位移；这会在离子处产生相应的空间均匀振荡电场。通过以频率 2ω向离子阱射频电极施加电势，参量调制囚禁势 [9, 39, 46]，从而实现运动态的压缩和反压缩。压缩参数的大小 r 既可以通过改变压缩脉冲持续时间 t_s 来调节，也可以通过改变参量驱动的振幅，从而改变参量调制强度 g （见方法）。用于实现共振驱动和参量驱动的电子波形由相位同步的直接数字合成器（DDS）生成。通过调节这些波形的相对相位，我们可以任意控制运动相空间中的压缩角 θ 和位移方向 φ 。对于所有序列，我们都使用基于磁场梯度的蓝边带（BSB）分析脉冲来表征初始和最终运动态，该脉冲将运动态与离子的内部量子比特态耦合。通过测量不同BSB脉冲持续时间下的量子比特态布居数，我们可以提取运动福克态布居（即运动态密度矩阵在福克基中的对角元素；见方法）[47]。随后，我们通过将提取出的福克态布居拟合到参数化模型，对测得的态进行表征；这些模型对应于相干态或位移压缩态的福克态布居（见扩展数据图1和方法）。我们通过对压缩态进行反压缩并验证运动接近返回基态，来确认其相位相干性（见方法） [9]。

首先，我们使用图中的脉冲序列对相干位移进行哈密顿量放大，这种方法可用于量子增强型未知弱共振场传感。 1b。压缩和位移操作的持续时间分别为 2。75 μ 秒和 7 μ秒。

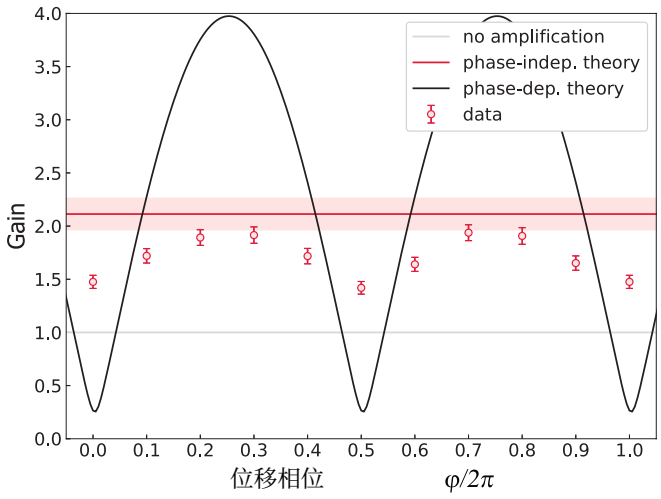


图3. HA 增益随位移相位的变化。实验数据以红色圆圈表示，误差棒表示 68% 置信区间。红线（浅红色带）表示根据实验测得的 $r = 1.38(8)$ 值，对 HA 增益 $G = \cosh(r)$ 的理论预测（68% 置信区间）。为作比较，黑线表示在相同 r 条件下，图1a方案的理论相位相关增益。灰线表示 $G = 1$。绘制在 $\varphi/2\pi = 1$ 处的数据点是 $\varphi/2\pi = 0$处数据点的副本。

为了表征该协议的相位灵敏度，我们在固定 θ 的情况下，对十个不同的 φ 取值执行相同的放大序列，这些取值均匀分布于区间 $[0, 2\pi$内），并测量由此产生的增益。我们通过设定 $r = 0$ （以等效持续时间的延迟取代压缩）来校准位移强度，测量相干态振幅 $\alpha_i = 0.55$（2）。压缩强度 $r = 1.38$（8）通过压缩初始态（近似为基态）并拟合得到的福克态布居来提取（见方法）。在 HA 序列中开启压缩后，我们测得最终位移振幅的平均值（对所有位移相位取平均）为 $\alpha_{amp} = 0.979$（3）；数据见图3。相应的平均增益为$G = 1.77$（5），与理论预期增益 $\cosh(r) = 2.11$（15）较为吻合。由于压缩脉冲的强度和相位校准不完善，以及压缩驱动的漂移（见方法），增益仍存在一些残余相位依赖性。我们还可以通过更细致地划分 α_i，执行包含 N 轮的广义 HA 序列来实现这种 HA，如图1c 所示。放大相干位移时不会产生特罗特化误差，因此可以选择任意 N值。我们发现，增大 N可以提高相位不敏感性，但代价是总体增益降低（见扩展数据图2）；我们认为这是由于额外的压缩脉冲放大了运动退相干，以及脉冲校准不完善所致。

接下来，我们展示如何利用 HA 增强量子谐振子与量子比特之间的耦合，该耦合由态跃迁算符 $\hat{\sigma}^{\pm} \equiv \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_x \mp i\hat{\sigma}_y)$ 表征，这些算符由泡利算符 $\hat{\sigma}_x$ 和 $\hat{\sigma}_y$构成。在我们的实验中，我们可以驱动离子上的红边带（RSB）跃迁，以实现 Jaynes-Cummings（JC）哈密顿量

$$\hat{H}_{JC} = \hbar\Omega(\hat{\sigma}^{-}\hat{a}^{\dagger} + \hat{\sigma}^{+}\hat{a}) \tag{7}$$

其中，量子比特态 $|\tilde{\downarrow}\rangle \equiv {}^2S_{1/2}|F = 3, m_F = 3\rangle$ 和 $|\tilde{\uparrow}\rangle \equiv {}^2S_{1/2}|F = 2, m_F = 2\rangle$ 的能级劈裂为 $\hbar\tilde{\omega}_q$，且 $\tilde{\omega}_q/2\pi = 1.326$ GHz；简谐振子是离子的一个运动模。量子比特与简谐振子之间的耦合通过激光驱动的受激拉曼跃迁 [42], 实现，使用两束波长为 280 nm、非共线传播且频率差为 $\tilde{\omega}_q - \omega$ 的激光束。由于拉曼激光束的频率差受到实验条件限制，我们选择另一对超精细态（$|\uparrow\rangle$ 和 $|\downarrow\rangle$）作为量子比特。红边带相互作用的相位由离子处两束激光束的光学拍频（未经稳定）的相位决定；该相位对两束光的光程差波动十分敏感，并且在连续的实验试次之间可能变化达 2π 的相当一部分。再次通过哈密顿量放大来放大这些动力学过程，证明了哈密顿量放大与相位无关；否则，各次实验拍摄的增益将大幅波动，甚至低于 1（去放大） [39]。

通过将激光诱导红边带脉冲序列与压缩脉冲交错排列，如图1c所示，可实现对 H_{JC} 的放大。由于 $[H_{JC}, S(\xi)]$ 是算符而非复数，因此需要足够高的 N 特罗特化 HA 序列，才能根据公式（6）忠实地放大哈密顿量；实验中我们发现，$N = 6$ 会产生较小的 Trotter 分解“误差”项。这些实验使用了持续时间更长、强度更弱的压缩脉冲，这有助于减小压缩不完美性带来的残余效应，但也延长了相互作用持续时间，从而加剧运动退相干。JC 相互作用会在 $|\uparrow\rangle|n = 0\rangle$态与 $|\downarrow\rangle|n = 1\rangle$ 态之间诱导拉比振荡，其拉比频率为 Ω。图4显示了施加特罗特化激光边带脉冲的总持续时间与 $|\uparrow\rangle$ 态布居数之间的关系（压缩脉冲的持续时间不计在内；对于 $N = 6$，其总计为144 μs）。如图4所示，相较于不进行压缩的情况（$r = 0$），在压缩参数为 $r = 1.1(1)$时，我们测得 HA 使 Ω 增大了 1.56(2) 倍（通过拟合指数衰减正弦曲线得出）。作为比较，HA 的理论预期增益为 $\cosh r = 1.7(1)$。

我们从理论上计算得出，运动自由度的退相位会在哈密顿量放大（HA）与红边带相互作用的共同作用下加速（见方法）。然而，非幺正

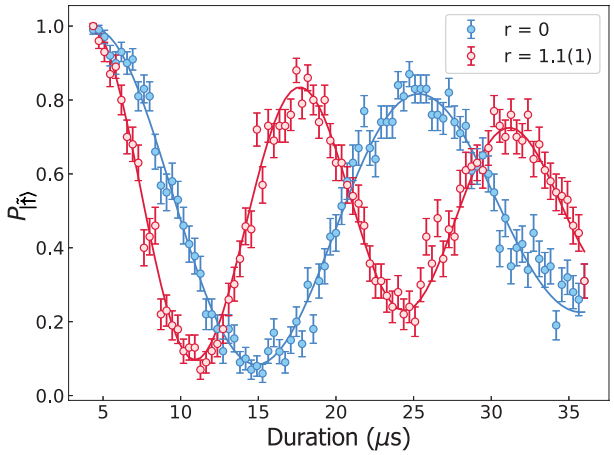


图 4. 杰恩斯-卡明斯（JC）相互作用的哈密顿量放大。对于 $N = 6$ 的哈密顿量放大序列，$|\uparrow\rangle$ 中的布居数随 JC 相互作用持续时间的变化（不包括压缩脉冲的持续时间）。JC 相互作用会在 $|\uparrow\rangle|n = 0\rangle$ 和 $|\downarrow\rangle|n = 1\rangle$ 态之间引发拉比振荡，振荡速率为 Ω。将压缩参数从 $r = 0$ 增大到 $r = 1.1$，可使 Ω 增大 1.56(2) 倍。实线为对指数衰减正弦曲线的拟合。误差棒表示 68% 置信区间。

两能级系统的过程，例如非共振拉曼散射或量子比特退相位，不受哈密顿量放大影响，因此这项技术可能在实践中具有价值，对于两能级系统的退相干占主导、而运动退相干较弱的系统，这一做法尤为适用。对于由无限强且快速的参数控制驱动的开放量子谐振子系统，建立有效的描述颇具挑战性，这将成为未来研究的主题。

总之，我们已在离子阱系统中实现了所提出的哈密顿量放大方法 [25] ；凡是能够实现快速幺正压缩的物理系统，均可采用该方法。例如，对腔中电磁场的相干位移进行低噪声、相位不敏感放大，可提高轴子暗物质探测器的灵敏度 [8, 15, 48]。在玻色子介导的相互作用对于产生纠缠至关重要的量子信息与模拟平台上，哈密顿量放大有望减轻量子比特退相干的影响 [39]。

致谢

我们感谢 A. L. Carter 和 A. D. Brandt 对稿件提出的宝贵意见。C.A. 提出了哈密顿量放大方案并发展了相关理论；S.C.B. 和 H.M.K. 开展实验并分析了数据，R.S.、A.L.C.、L.J.S. 和 D.H.S. 提供了协助；D.H.S.、C.A.、S.C.B. 和 H.M.K. 撰写了稿件，所有作者均参与了修改；D.H.S. 和 D.T.C.A. 在 D.L.、A.C.W.、J.J.B. 和 D.J.W. 的支持下指导了这项工作；A.C.W.、D.L.、D.J.W. 和 D.H.S. 为这项工作争取了经费；所有作者均参与了科学讨论和规划。本研究得到美国国家标准与技术研究院的支持（https://ror.org/05xpvk416）。

[1] Caves,C. M. 干涉仪中的量子力学噪声。 *Phys. Rev. D* **23**, 1693–1708（1981）。[2] Yurke, B., McCall, S.L.& Klauder, J.R. SU(2) 和 SU(1,1) 干涉仪。 *Phys. Rev. A* **33**, 4033–4054（1986）。[3] Kitagawa,M.&Ueda, M.非线性干涉仪生成数-相位关联的费米子态。

Phys. , – *Rev. Lett.* **67** 1852 1854 1991 （）。[4] Wineland, D. J., Bollinger, J. J., Itano, W. M.,Moore,F. L.& Heinzen,D. J. 光谱学中的自旋压缩与降低的量-子噪声。 *Phys. Rev. A* **46**, R6797– R6800（1992）。[5] Kitagawa,M.& Ueda, M.压缩自旋态。

Phys. , – *Rev. A* **47** 5138 5143 1993 （）。[6] Pezz`e, L., Smerzi, A., Oberthaler, M. K.,Schmied, R.&Treutlein, P. 利用原子系综的非经典态进行量子计量。 *Rev. Mod. Phys.* **90**, 035005（2018）。[7] Aasi,J. *et al.* 利用光的压缩态提高LIGO 引-力波探测器的灵敏度。 *Nat. Photonics* **7**, 613–619（2013）。[8] Malnou, M. *et al.* 用于加速对弱经典信号的搜索。 *Phys. Rev. X* **9**, 021023 2019 （）。[9] Burd,S. C. *et al.* 机械振子运动的量子放大。 *Science* **364**, 1163–1165（2019）。[10] Davis,E.、Bentsen,G. &Schleier-Smith, M.在无需单粒子探测的情况下接近海森堡极限。*Phys. Rev. Lett.* **116**, 053601（2016）。[11] Hosten,O.、Krishnakumar, R.、Engelsen,N.J. & Kasevich,M. A.量子相位放大。 *Science* **352**, 1552 15552016–（）。[12] Hosten,O.、Engelsen, N. J.、Krishnakumar,R.&Kasevich,M. A.使用纠缠原子将测量噪声降低至量子投影极限的百分之一。 *Nature* **529** 505 508 2016 , – （）。[13] Kruse, I. *et al.* 使用压缩真空改进原子钟。 *Phys. Rev. Lett.* **117**, 143004（2016）。[14] Gilmore,K.A. *et al.* 利用二维囚禁离子晶体增强量子传感位移和电场。 *Science* **373**, 673–678（2021）。[15] Backes, K.M. *et al.* 利用量子增强搜索暗物质轴子。 *Nature* **590**, 238–242（2021）。[16] Renger, M. *et al.* 超越标准量子极限

用于宽带信号的参量放大。 *npj Quantum Inf.* **7** 160 2021 , () 。[17] Jiang, M. *et al.* *Phys. Rev. Lett.* **128** 233201 2022 Floquet 自旋放大。, () 。[18] Metelmann, A. *et al.* 无不稳定性的量子极限放大。 *arXiv* 2208.00024（2022）。[19] L¨u, X.-Y. *et al.* 采用相位匹配放大和耗散的压缩光力学。 *Phys. Rev. Lett.* , () 。[20] **114** 093602 2015 Lemonde, M.-A., Didier, N. & Clerk, A. A. *Nat. Commun.* **7**通过机械放大增强量子光力学中的非线性相互作用。 *Nat. Commun.* **7**, 11338（2016）。[21] Zeytino˘glu, S., ˙Imamo˘glu, A. & Huber, S. *Phys. Rev.* 利用压缩 *X* **7** 021041 2017 真空调控物质相互作用。 *Phys. Rev.* , () 。[22] *X* **7** 021041 2017 Qin, W. *et al.* 利用参量放大指数增强光与物质相互作用、协作性及稳态纠缠。 *Phys. Rev. Lett.* **120**, 093601 2018 () 。[23] Chen, Y.-H., Qin, W. & Nori, F. *Phys. Rev. A* **100**利用脉冲调制和参量放大快速、高保真地产生稳态纠缠。 *Phys. Rev. A* **100**, 012339 2019 () 。[24] Leroux, C., Govia, L. C. G. & Clerk, A. A. *Phys. Rev. Lett.* **120**通过反压缩增强腔量子电动力学：合成超强耦合。 *Phys. Rev. Lett.* **120**, 093602 （ 2018 ）。[25] Arenz, C., Bondar, D. I., Burgarth, D., Cormick, C. & Rabitz, H. *Quantum* **4**二次哈密顿量的放大。 *Quantum* **4**, 271（2020）。[26] Ge, W. *et al.* 利用压缩声子的囚禁离子量子信息处理。 *Phys. Rev. Lett.* **122**, 030501（2019）。[27] Ge, W. *et al.* 利用压缩声子进行囚禁离子量子信息处理的频闪方法。 *Phys. Rev. A* **100**, 043417（2019）。[28] Groszkowski, P., Lau, H.-K., Leroux, C., Govia, L. C. G. & Clerk, A. A. *Phys. Rev. Lett.* **125**通过玻色参量驱动实现海森堡极限自旋压缩。 *Phys. Rev. Lett.* **125**, 203601（2020）。[29] Li, P.-B., Zhou, Y., Gao, W.-B. & Nori, F. *Phys. Rev. Lett.* 利用混合量 **125** 153602 2020 子系统中的线性资源增强自旋-声子和自旋-自旋相互作用。 *Phys. Rev. Lett.* , () 。[30] **125** 153602 2020 Wang, Q., Zhu, C., Wang, Y., Zhang, B. & Chong, Y. D. *Phys. Rev. B* **106**非厄米趋肤效应对量子信号的放大。 *Phys. Rev. B* **106**, 024301（2022）。[31] Villiers, M. *et al.* 利用反压缩动态增强量子比特-光子相互作用。*arXiv* 2212.04991（2022）。[32] Ge, W. 哈密顿量放大：参量放大的另一种应用。 *Quantum Views* **4**, 41（2020）。[33] Nieto, M. M. & Truax, D. R. Holstein-Primakoff/Bogoliubov 变换与多玻色子系统。 *Fortschr. Phys.* **45**, 145–156（1997）。[34] Trotter, H. F. 关于算符半群的乘积。 *Proc. Amer. Math. Soc.* **10**, 545–551（1959）。[35] Suzuki, M. 广义 Trotter 公式以及指数算符和内导子的系统近似及其在多体问题中的应用。 *Comm.* , – () 。 *Math. Phys.* **51** 183 190 1976 [36] Ichinose, T. & Tamura, H. 关于范数收敛的注记 酉托洛特乘积公式。 *Lett. Math. Phys.* , – () 。 **70** 65 81 2004 [37] Seidelin, S. *et al.* 用于可扩展量子信息处理的微加工表面电极离子阱。 *Phys.* , *Rev. Lett.* **96** 253003 2006 () 。[38] Srinivas, R. *et al.* 利用微波和近运动频率振荡磁场梯度实现囚禁离子自旋-运动耦合。 *Phys. Rev. Lett.* **122**, 163201（2019）。[39] Burd, S. C. *et al.* 玻色子介导相互作用的量子放大。 *Nat. Phys.* **17**, 898–902（2021）。[40] Srinivas, R. *et al.* 囚禁离子量子比特的高保真无激光通用控制。 *Nature* **597**, 209–213（2021）。[41] Monroe, C. *et al.* 将束缚原子分辨边带拉曼冷却至 3 *Phys. Rev.* D零点能。 , – *Lett.* **75** 4011 4014 1995 () 。[42] Wineland, D. J. *et al.* 囚禁原子离子相干量子态操控中的实验问题。 *J.* , – *Res. Natl. Inst. Stand. Technol.* **103** 259 328 1998 () 。[43] Leibfried, D., Blatt, R., Monroe, C. & Wineland, D. J. 单个囚禁离子的量子动力学。 *Rev. Mod.* , – () 。 *Phys.* **75** 281 324 2003 [44] Ospelkaus, C. *et al.* 基于振荡磁场的囚禁离子量子逻辑门。 *Phys. Rev. Lett.* , () 。 **101** 090502 2008 [45] Ospelkaus, C. *et al.* 囚禁离子的微波量子逻辑门。 *Nature* **476**, 181–184（2011）。[46] Heinzen, D. J. & Wineland, D. J. 利用激光冷却离子实现射频振荡的量子极限冷却与探测。 *Phys. Rev. A* **42**, 2977–2994（1990）。[47] Meekhof, D. M., Monroe, C., King, B. E., Itano, W. M. & Wineland, D. J. 囚禁原子非经典运动态的生成。 *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1796–1799（1996）。[48] Caves, C. M. 重新审视 SU(1, 1 *Adv.*)干 *Quantum Technol.* **3** 1900138 2020 涉测量。, () 。[49] Turchette, Q. A. *et al.* 囚禁原子中与工程化储库耦合的运动量子态的退相干与衰减。 *Phys. Rev. A* **62**, 053807（2000）。[50] Arenz, C., Hillier, R., Fraas, M. & Burgarth, D. 通过动力学解耦区分退相干与替代性量子理论。 *Phys. Rev. A* **92**, 022102（2015）。[51] Kienzler, D. *et al.* 通过储库工程实现量子谐振子态合成。 *Science* **347**, 53–56（2015）。[52] Gerry, C. C. & Knight, P. L. *Introductory QuantumOptics* （剑桥大学出版社，剑桥，英国，2005）。

I. 方法

A. 玻色子退相干存在时的哈密顿量放大

我们考虑一个由哈密顿量 $\hat{H} = \hbar\Omega(\hat{\beta}\hat{a}^\dagger + \hat{\beta}^\dagger\hat{a})$ 描述的复合系统。我们假设，由湮灭算符 $\hat{a}$ 和产生算符 $\hat{a}^\dagger$ 表示的量子谐振子受到退相位影响，其耗散子为 [49]

$$\mathcal{D}_a(\cdot) = -\Gamma\left[\hat{a}^\dagger\hat{a}, [\hat{a}^\dagger\hat{a}, (\cdot)]\right], \tag{8}$$

ˆ 其中，系统 (β) 与量子谐振子相互作用所涉及的非幺正过程由耗散子 $\mathcal{D}_\beta$ 描述，我们不再对其作进一步说明。整个系统（即相干部分和耗散部分）由如下形式的 Lindbladian 描述

$$\mathcal{L}(\cdot) = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}, (\cdot)] + \mathcal{D}_a(\cdot) + \mathcal{D}_\beta(\cdot). \tag{9}$$

因此，系统在时间 t 的动力学由完全正且保迹的映射 $\Lambda_t = \exp(\mathcal{L}t)$给出。现在，我们通过在时间间隔 $\Delta t = t/2N$ 内交替对简谐振子的两个正交分量进行瞬时压缩，来改变系统动力学；这分别由酉映射 $\mathcal{S}_0(\cdot) = \hat{S}_0^\dagger(\cdot)\hat{S}_0$ 和 $\mathcal{S}_\pi(\cdot) = \hat{S}_\pi^\dagger(\cdot)\hat{S}_\pi$描述，从而实现哈密顿量放大方案。在正交分量间以无限快的速度交替压缩的极限下，动力学为

$$\lim_{N\to\infty}\left(\mathcal{S}_\pi^\dagger\Lambda_{\Delta t}\mathcal{S}_\pi\mathcal{S}_0^\dagger\Lambda_{\Delta t}\mathcal{S}_0\right)^N = e^{\bar{\mathcal{L}}t}, \tag{10}$$

¯其中，有效林德布拉德算符 $\mathcal{L}$ 为 [50],

$$\bar{\mathcal{L}}(\cdot) = \frac{1}{2}\sum_{j\in\{0,\pi\}}\left(-i\left[\mathcal{S}_j(H), (\cdot)\right] + \mathcal{S}_j^\dagger\mathcal{D}_a\left(\mathcal{S}_j(\cdot)\right)\right) + \mathcal{D}_\beta(\cdot). \tag{11}$$

经过一些代数运算，并利用压缩算符的标准性质，我们得到

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{L}}(\cdot) = &-i\cosh(r)[\hat{H}, (\cdot)] + \cosh^2(2r)\mathcal{D}_a(\cdot)\\ &+ \frac{1}{4}\sinh^2(2r)\left[\hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^2, [\hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^2, (\cdot)]\right]\\ &+ \mathcal{D}_\beta(\cdot).\end{aligned} \tag{12}$$

因此，尽管相干部分放大了$\lambda = \cosh(r)$倍，但量子谐振子的退相位 $\mathcal{D}_a$ 却放大了更大的$^2(2r)$倍。此外，我们看到，在哈密顿量放大下， $\mathcal{D}_a$ 不仅被放大，还发生了改变：有效林德布拉德算符的方程（12）第二行中出现了一个额外的退相位型项。值得注意的是，由 $\mathcal{D}_\beta$产生的非幺正过程作用于由 ˆβ 和 ˆ $\beta^\dagger$ 描述、且与量子谐振子相互作用的系统，该过程不会因哈密顿量放大而放大或改变。例如，若 ˆ ˆ$\beta = \hat{}\sigma^-$ 使得 H 为杰恩斯–卡明斯相互作用，那么 $\mathcal{D}_\beta(\cdot)$描述的是与简谐振子耦合的量子比特的退相干。若这种退相干主要由产生杰恩斯–卡明斯相互作用的拉曼光束所引发的自发非共振光子散射造成，那么哈密顿量放大过程或许能在不提高退相干率的情况下增强所需的相互作用强度，从而提升相互作用的保真度。不过，未来仍需评估：在哈密顿量放大存在时（即开放系统受到无限强且快速施加的周期性参数控制），用形式为（9）的林德布拉德型主方程来描述开放系统动力学是否成立。事实上，在类似情形下，有研究指出，这种对开放系统动力学的描述可能会失效 [50]。

B. 运动态分析

通过先制备所需的运动态（使量子比特处于 $|\downarrow\rangle$ 态），再施加基于磁场梯度的蓝边带相互作用，使运动态与量子比特态耦合，从而分析运动态布居数。这会将运动态的信息映射到量子比特态上；在不同的蓝边带相互作用持续时间下，利用荧光探测测量量子比特处于 $|\downarrow\rangle$ 态时的布居数，即可提取福克基中的运动态布居数。对于任意运动态， $|\downarrow\rangle$ 中的测量布居数由 [9, 47, 51]给出

$$P_\downarrow(t) = \frac{1}{2}\left[1 + \sum_{n=0}^{\infty} P_n e^{-\gamma\sqrt{n+1}t}\cos\left(\Omega_{SB}\sqrt{n+1}t\right)\right] \tag{13}$$

其中， n 表示振荡器福克态， t 是边带相互作用的持续时间，Ω_{SB} 是边带的拉比频率（对应于 $|\downarrow\rangle|n=0\rangle \leftrightarrow |\uparrow\rangle|n=1\rangle$跃迁），而 γ是现象学衰减常数。我们注意到，文献 47 对 γ采用乘数 $(n+1)^{0.7}$，而文献 9 和 51 则采用乘数 $(n+1)^{0.5}$，本文也采用后一种；这一选择对拟合优度影响较小，但不会影响提取出的福克态布居。乘在 Ω_{SB} 前的因子 $\sqrt{n+1}$ 假设系统处于兰姆–狄克区，这里意味着用于执行边带操作的微波磁场梯度在离子运动态波包的空间范围内均匀 [42]。对于我们的系统，这是一个极佳的近似 [9]。初始运动态的福克态概率分布为 $\{P_n\}$。我们拟合测得的 $P_\downarrow(t)$曲线，以提取 $\{P_n\}$的值。对于特定类别的运动态， $\{P_n\}$ 之间存在参数化关系；例如，由振幅 α 参数化的相干态可由模型 [52]描述

$$P_n = \frac{e^{-|\alpha|^2}|\alpha|^{2n}}{n!}, \tag{14}$$

而由复数压缩参数 $\xi = re^{i\theta}$ 参数化的压缩真空态可以由模型 [52] 描述

$$P_n = \frac{(\tanh r)^n}{\cosh r}\frac{n!}{2^n}\left(\frac{1}{(n/2)!}\right)^2, \tag{15}$$

对于偶数 n，当 $P_n = 0$ 对于奇数 n。扩展数据图 1展示了 $|\downarrow\rangle$ 布居数随蓝边带持续时间变化的示例曲线，以及在福克基中提取的运动态布居数。每个面板上方的图显示了通过两种“无模型”拟合提取的布居数：拟合方程（13）以确定 P_n ，同时仅对 $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$施加约束；以及“基于模型”的拟合，其中 P_n 均按照一种

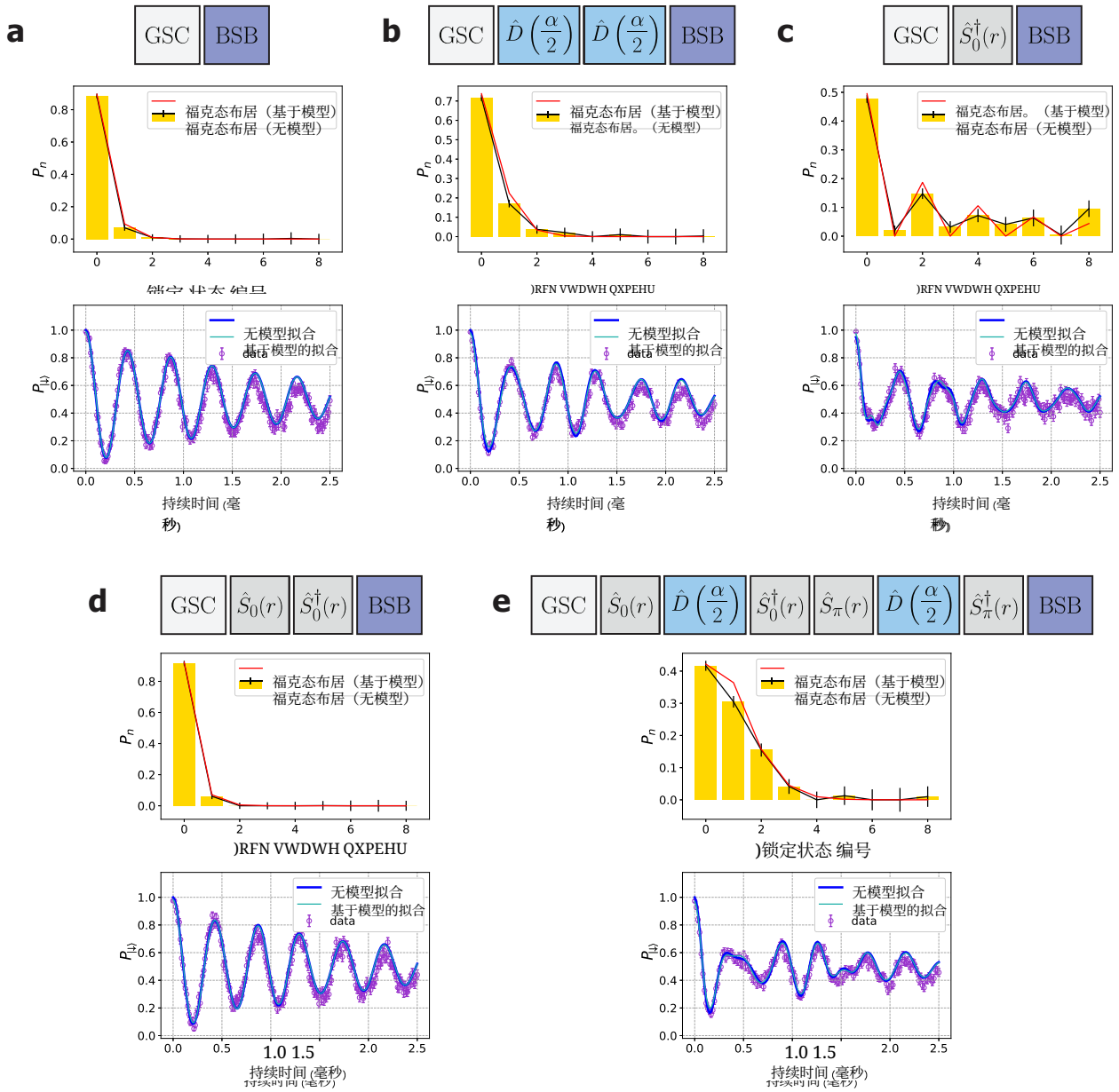
上述参数化模型相关联。每个面板下方的图显示了实验数据，以及对应的基于模型和无模型拟合曲线。

正文中报告的 r 数值是两次压缩校准的平均值：一次在采集数据前测得，另一次在采集数据后测得。这是因为实际实验压缩强度的漂移幅度超过了拟合不确定性所反映的范围。图 3和扩展数据图 2 所用数据采集前刚刚校准得到的数值为 $r = 1.42(3)$，采集数据后（不到四小时后）测得的数值为 $r = 1.33(3)$。平均压缩值的误差条使用学生t分布确定。我们认为，这些实验漂移以及压缩操作中的其他不完美性，是限制HA性能的主要因素，并导致了相当大一部分残余相位灵敏度。

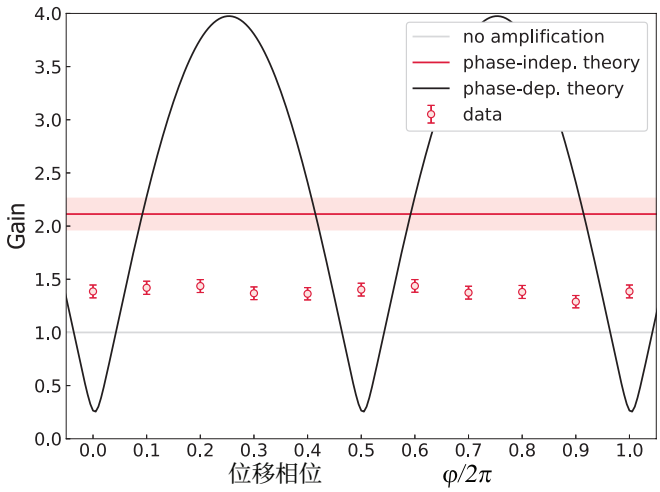
我们通过独立的校准实验确定若干拟合参数，并验证拟合时所作的假设。每项校准实验都包括制备所需的初始运动状态，随后施加一个持续时间可变的蓝边带分析脉冲，以提取 $P_{\downarrow}(t)$。第一项校准实验在基态冷却序列结束后立即进行蓝边带分析，不施加压缩或位移，如扩展数据图 1a所示。我们将所得曲线拟合到方程（13），以确定 γ 和 Ω 的校准值，并估算 $\bar{n}$，即基态冷却后初始运动态的数值。

接下来，我们使用拟合得到的 γ 和 Ω 的值校准压缩和位移操作。压缩校准包括在基态冷却后施加参量驱动以压缩初始运动态，然后进行蓝边带分析，通过拟合压缩基态模型提取 r 的值，如扩展数据图 1c 所示。参量驱动的持续时间与 HA 实验中用于执行压缩操作的持续时间相同。我们通过先进行基态冷却，再施加一系列共振运动激发脉冲来校准位移 α，如扩展数据图 1b 所示。位移脉冲的数量和持续时间与 HA 实验中使用的数值相同。我们将测得的蓝边带振荡拟合到相干位移基态模型。最后，我们通过对基态冷却后的运动模式先进行压缩再进行反压缩（后者通过调整参量驱动的相位实现），并拟合蓝边带振荡来确定残余压缩量，从而表征压缩态的相位相干性，如扩展数据图 1d 所示。根据基态冷却和压缩/反压缩校准的结果，为了拟合，我们近似认为 HA 序列后的最终态是运动相干态。

尽管对于位移放大而言，要放大的相互作用无需经过精细的特罗特化（即 N 无需 > 1），因为它与压缩操作对易，但我们仍使用 $N = 3$进行了位移放大实验，结果如扩展数据图 2所示。对于$N = 3$，我们将位移分成了 6 个部分，而不是 2 个，从而使压缩-解压缩对的数量增加了三倍。这显著改善了相位不敏感性，但降低了增益。增加压缩操作的次数会加剧运动退相干，但更频繁地交替放大所沿的轴，可减少压缩驱动中不完美性导致的残余相位灵敏度。



扩展数据图1. 脉冲序列和校准数据。GSC：基态冷却，BSB：蓝边带分析脉冲。位移算符和压缩算符与图1中相同。每个面板中的下图显示了在不同初始运动状态下，测得的 $|\downarrow\rangle$ （紫色圆点）布居数随蓝边带（BSB）分析脉冲持续时间的变化。深蓝色曲线表示根据正文所述，利用方程（13）对数据进行无模型拟合的结果；浅蓝色曲线表示用于提取各项参数（r、 $\bar{n}$、 α）的基于模型的拟合结果。福克态图和蓝边带翻转振荡均显示，基于模型的拟合与无模型拟合结果吻合良好，验证了我们所选拟合模型的合理性。每个面板中的上图显示了通过拟合蓝边带振荡提取的相应福克态布居。红线表示对蓝边带振荡进行基于模型的拟合所得的最佳拟合福克态布居，黄色柱表示通过无模型拟合提取的福克态布居。黑色竖线表示无模型拟合布居数的68%置信区间。黑色斜线连接黄色柱顶端，用于引导视线并突出基于模型和无模型拟合布居数之间的偏差。a，基态冷却校准。我们得到平均占据数为 $\bar{n} = 0.06$（1）。b，位移校准。基态冷却后，通过施加一个共振激发脉冲使运动态发生位移；该脉冲分为两个持续时间为3.5 μs的片段（总计7 μs），得到 $\alpha_i = 0.55$（2）。c，压缩校准。基态冷却后，施加参量驱动2.75 μs以生成运动压缩态。d，反压缩校准和压缩相干性验证。离子冷却至运动基态后，施加参量驱动2.75 μs，随后再施加参量驱动2.75 μs，并加入 180° 相移。将所得状态拟合至热态模型后，我们得到 $\bar{n} = 0.09$（1）。e，哈密顿量放大实验。相干位移经HA放大后的最终运动态，其中 $N = 1$使用两个持续时间为3.5 μs的位移脉冲和四个持续时间为2.75 μs的压缩/反压缩脉冲。图3中的数据是通过比较b中校准所得的未放大位移与e中提取的位移得到的，比较时改变位移脉冲与压缩脉冲之间的相对相位。



扩展数据图2。 $N = 3$的 HA 增益与位移相位的关系。该图展示了与图3相同的实验，但使用的是 $N = 3$ 而非 $N = 1$。这意味着位移被分成六个相等的部分，而不是两部分；由于实验不完美性，这会导致放大倍数降低，但相位不敏感性提高。实验数据以红色圆圈表示，误差条表示 68% 的置信区间。红线（浅红色带）表示 HA 增益 $G = \cosh(r)$ 的理论预测（68% 置信区间），其中使用了实验确定的 $r = 1.38(8)$ 值。作为比较，图1a中方案在使用相同 r 时的理论相位相关增益以黑线表示。灰线表示 $G = 1$。绘制于 $\varphi/2\pi = 1$ 的数据点是 $\varphi/2\pi = 0$处数据点的副本。